Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск № 49 www.mai.ru/science/trudy/

УДК 519.8

Приближенный синтез оптимальных систем автоматного типа

Е.А. Пегачкова

Аннотация

Рассматриваются детерминированные дискретные системы автоматного типа (САТ), моделирующие работу динамического автомата с памятью. Получены достаточные условия оптимальности САТ при мгновенных многократных переключениях автоматной части и разработана методика синтеза субоптимального позиционного управления. Поставлена задача оптимального управления линейной САТ с квадратичным критерием качества, создано программное средство для приближенного решения задачи. Выведены уравнения для нахождения субоптимальных регуляторов САТ с учетом мгновенных многократных переключений автоматной части. Приведены аналитическое и приближенное решения примера синтеза оптимального регулятора для линейной САТ с квадратичным критерием качества.

Ключевые слова: оптимальное управление; система автоматного типа; квадратичный критерий качества; достаточные условия оптимальности.

Введение.

При разработке систем управления (СУ) беспилотными ЛА применяется следующий подход [1]. Исходя из назначения СУ, формируется траектория движения ЛА, которая считается приемлемой. Эту траекторию называют невозмущенной (программной, номинальной, опорной, попадающей и т.п.). Для реализации невозмущенной траектории конструируется СУ движением центра масс ЛА, которая включает подсистему, управляющую угловым положением ЛА. Эта подсистема (регулятор) используется при удержании ЛА на невозмущенной траектории, когда СУ минимизирует отклонения, возникающие из-за неучтенных факторов, и парирует внешние воздействия. На современных ЛА применяются нелинейные регуляторы, включающие релейные и логические устройства (автоматы с памятью) [2]. Поскольку требования по точности и быстродействию, предъявляемые к регуляторам, довольно жесткие, актуальными становятся задачи оптимизации их работы.

Математической моделью динамических автоматов с памятью служат детерминированные дискретные системы автоматного типа (САТ) [3]. Такие системы являются частным случаем логико-динамических систем [4-9]. В отличие от обычных моделей дискретных систем [4], изменения состояний (переключения) которых происходят в заранее заданные (тактовые) моменты времени, изменения состояний САТ могут быть в произвольные моменты времени. Более того, выбор множества моментов времени, когда "срабатывает" автомат, считается ресурсом управления и подлежит оптимизации. Каждое переключение состояния автомата "оценивается", и его "стоимость" учитывается в критерии качества управления. Это, как правило, оказывает регуляризирующее влияние на оптимальные процессы, исключая, например, процессы с бесконечными переключениями.

1. Постановка задачи.

Пусть поведение детерминированной САТ описывается рекуррентным включением

$$y(\tau) \in Y(\tau, y(\tau - 0)), \tag{1}$$

где y – вектор состояния системы $y \in Y \subset R^m$; τ – момент изменения состояния (переключения) системы, $\tau \in \mathbf{T}$; $\mathbf{T}$ – конечное множество моментов переключений, $\mathbf{T} \subset T$; $T = [t_0; t_1]$ – промежуток времени функционирования системы, t_0, t_1 – моменты начала и окончания процесса управления заданы. Множество $Y(t, y)$ задает совокупность тех состояний системы, в которые возможен переход из состояния y в момент времени t. Предполагаем, что отображение $t \to Y(t, y)$ непрерывно справа, т.е.

$$Y(t + 0, y) = Y(t, y)$$

при всех $t \in T$, и кусочно-постоянно, т.е. существует разбиение $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = t_1$ промежутка T на конечное число непересекающихся полуинтервалов $[\tau_{k-1}, \tau_k)$, $k = 1, \ldots, N$, на каждом из которых многозначное отображение $t \to Y(t, y)$ постоянно для каждого $y \in Y$. Множество Y возможных состояний системы предполагается компактным.

Начальное состояние САТ задано начальным условием

$$y(t_0 - 0) = y_0. \tag{2}$$

Включение (1) описывает систему в форме динамического автомата с памятью [2]. Выбор состояния $y(t)$ в каждый момент времени t определяется множеством $Y(t, y(t-0))$ возможных состояний, которое зависит от предшествующего состояния $y(t-0)$.

Допустимыми процессами считаются непрерывные справа кусочно-постоянные функции $y: T \to Y$, удовлетворяющие начальному условию (2) и рекуррентному включению (1) при всех $\tau \in \mathbf{T}$, в остальных точках $t \in T \setminus \mathbf{T}$ функция $y(\cdot)$ непрерывна. Функция $y(\cdot)$ определяет траекторию движения системы. Множество допустимых процессов (траекторий) обозначим через $\mathbf{D}(t_0, y_0)$.

На множестве $\mathbf{D}(t_0, y_0)$ допустимых процессов задан функционал:

$$I = F(y(t_1)) + \int_{t_0}^{t_1} f^0(t, y(t))\, dt + \sum_{\tau} g^0(\tau, y(\tau - 0), y(\tau)), \tag{3}$$

где функция $f^0: T \times Y \to R$ непрерывна, а функции $F: Y \to R$ и $g^0: T \times Y \times Y \to R$ ограничены, причем

$$g^0(t, y, v) \geq 0 \qquad \forall\, (t, y, v) \in T \times Y \times Y. \tag{4}$$

Суммирование в (3) ведется по всем точкам $\tau \in \mathbf{T}$ разрыва функций $y(\cdot)$. Заметим, что множество таких точек конечно. Каждое слагаемое $g^0(\tau, y(\tau-0), y(\tau))$ можно понимать как "штраф" за изменение состояния системы (т.е. за одно переключение).

Требуется найти оптимальный процесс $y^*(\cdot) \in \mathbf{D}(t_0, y_0)$, минимизирующий функционал (3):

$$I(y^*(\cdot)) = \min_{y(\cdot) \in \mathbf{D}(t_0, y_0)} I(y(\cdot)). \tag{5}$$

Если наименьшее значение (5) не достигается, то ставится задача нахождения минимизирующей последовательности $\{y_j(\cdot)\}$ допустимых процессов [5]

$$I(y_j(\cdot)) \to \inf_{y(\cdot) \in \mathbf{D}(t_0, y_0)} I(y(\cdot)). \tag{6}$$

Пополним множество $\mathbf{D}(t_0, y_0)$ процессами с многократными переключениями в фиксированный момент времени. Такие процессы, как показывают исследования [3,5], не являются какими-то исключительными, напротив, они появляются даже в простых задачах с квадратичным критерием качества [10]. Траекторию с многократным переключением в момент времени τ можно получить как предел последовательности $\{y_j(\cdot)\}$ допустимых траекторий, в которых точки $\tau_j^1 < \tau_j^2 < \ldots < \tau_j^{\boldsymbol{k}}$ разрывов функции $y_j(\cdot)$ стремятся слева (при $j \to \infty$), сохраняя порядок взаимного расположения, к одной точке τ. Считаем, что предельная функция $y(t) = \lim\limits_{j\to\infty} y_j(t)$, $t \in T$ в точке τ является многозначной, принимающей $\boldsymbol{k}$ значений: $y^{(k)} = y_j(\tau_j^{(k)})$, $k = 1,2,\ldots,\boldsymbol{k}$. Точку τ будем называть ***точкой многозначного разрыва слева***. Например, на рис.1 изображена функция, имеющая 4 точки разрыва в окрестности точки τ. Предельная функция (рис.2), получающаяся при $\tau_j^1 \to \tau$, $\tau_j^2 \to \tau$, $\tau_j^3 \to \tau$ и $\tau_j^1 < \tau_j^2 < \tau_j^3 < \tau$ принимает в этой точке 4 значения $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, $y^{(3)}$, $y^{(4)}$.

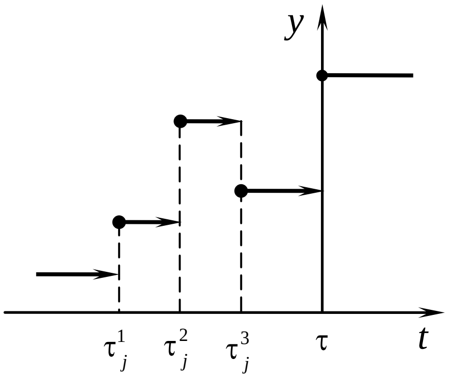

Рис.1

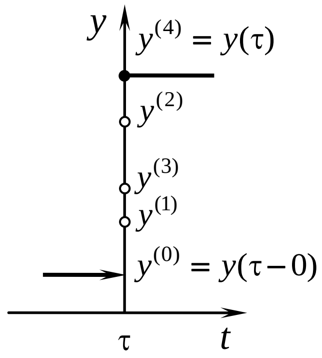

Рис.2

САТ совершает в точке многозначного разрыва $\boldsymbol{k}$ переключений, принимая последовательно состояния

$$y(\tau-0) = y^{(0)}(\tau) \to y^{(1)}(\tau) \to y^{(2)}(\tau) \to \ldots \to y^{(\boldsymbol{k})}(\tau) = y(\tau),$$

которые удовлетворяют рекуррентному включению:

$$y^{(k)}(\tau) \in Y(\tau, y^{(k-1)}(\tau)), \qquad k = 1,2,\ldots,\boldsymbol{k}. \tag{7}$$

Функционал (3) в этой точке увеличивается на сумму

$$\sum_{k=1}^{\boldsymbol{k}} g^0(\tau, y^{(k-1)}(\tau), y^{(k)}(\tau)). \tag{8}$$

После пополнения множество допустимых процессов $\mathbf{D}(t_0, y_0)$ содержит кусочно-постоянные непрерывные справа функции $y: T \to Y$, удовлетворяющие начальному условию (2) и рекуррентному включению (1) при всех $\tau \in \mathbf{T}$, и имеющие конечное число точек многозначных разрывов, в которых выполняется включение (7). Теперь в постановках задач (5), (6) допускаются многократные переключения системы в фиксированные моменты времени.

Заметим, что случаи многократного переключения в фиксированный момент времени исключаются, если выполняются, например, условия:

$$Y(\tau, y^{(0)}) \supset Y(\tau, y^{(1)}) \quad \forall\, y^{(1)} \in Y(\tau, y^{(0)})\,, \tag{9}$$

$$g^0(\tau, y^{(0)}, y^{(2)}) < g^0(\tau, y^{(0)}, y^{(1)}) + g^0(\tau, y^{(1)}, y^{(2)})\,. \tag{10}$$

Условие (9) означает возможность реализовать вместо любого двойного переключения $y^{(0)} \to y^{(1)} \to y^{(2)}$, где $y^{(1)} \in Y(\tau, y^{(0)})$, $y^{(2)} \in Y(\tau, y^{(1)})$, соответствующее однократное переключение $y^{(0)} \to y^{(2)}$, причем "штраф" за однократное переключение, согласно (10), меньше, чем за двойное. Оба условия не исключают появления минимизирующей последовательности с бесконечным числом переключений, которые происходят, однако, в разные моменты времени.

Допустимым позиционным управлением (или управлением с обратной связью) считается функция $\boldsymbol{y} : T \times Y \to Y$, удовлетворяющая на всей области определения включению

$$\boldsymbol{y}(t, y) \in Y(t, y)\,,$$

которая для любых начальных условий

$$y(\theta - 0) = y_\theta, \quad t_0 \le \theta < t_1, \quad y_\theta \in Y\,, \tag{11}$$

порождает допустимый процесс $y(\cdot) \in \mathbf{D}(\theta, y_\theta)$ такой, что

$$y(t) = \boldsymbol{y}(t, y(t-0)) \text{ при всех } \theta \le t \le t_1\,.$$

Требуется найти допустимое позиционное управление $\boldsymbol{y}(t, y)$, которое для каждого начального состояния порождало бы допустимый процесс $y(\cdot) \in \mathbf{D}(\theta, y_\theta)$, минимизирующий функционал оставшихся потерь:

$$I_\theta(y(\cdot)) = F(y(t_1)) + \int_\theta^{t_1} f^0(t, y(t))\,dt + \sum_{\theta \le \tau} \sum_{k=1}^{K(\tau)} g^0(\tau, y^{(k-1)}(\tau - 0), y^{(k)}(\tau))\,, \tag{12}$$

где суммирование ведется по всем точкам τ разрыва функции $y(\cdot)$ на отрезке $[\theta, t_1]$ и по количеству $K(\tau)$ мгновенных переключений в каждый тактовый момент времени τ на промежутке $[\theta, t_1]$. Такое управление $\boldsymbol{y}(t, y)$ будем называть оптимальной позиционной конструкцией САТ.

2. Синтез оптимальной позиционной конструкции системы

На основе достаточных условий оптимальности автоматной части логико-динамических систем [5], можно получить уравнения для нахождения функции цены (аналога функции Беллмана) и оптимальной конструкции автомата.

Теорема 1 (достаточные условия оптимальности позиционной конструкции автоматной части САТ). *Если существуют функции* $\varphi^{(k)}(t,y)$ *и допустимая позиционная конструкции* $\boldsymbol{y}^{(k)}(t,y)$, *удовлетворяющие условиям*:

а) $\varphi^{(0)}(t_1,y)=F(y)$;

б) $\varphi^{(k)}(t,y)=\varphi^{(k-1)}(t,\boldsymbol{y}^{(k)}(t,y))+g^0(t,y,\boldsymbol{y}^{(k)}(t,y))$;

в) $\varphi_t^{(0)}(t,y)+f^0(t,y)=0$;

г) $\boldsymbol{y}^{(k)}(t,y)=\arg\min\limits_{v\in Y(t,y)}\{\varphi^{(k-1)}(t,v)+g^0(t,y,v)\}$;

д) $\boldsymbol{k}(t,y)\in \operatorname*{Arg\,min}\limits_{k=0,1,2,\dots}\varphi^{(k)}(t,y)$;

е) $\varphi^{(0)}(t-0,y)=\varphi^{(\boldsymbol{k}(t,y))}(t,y)$,

где $k=1,\dots,\boldsymbol{k}(t,y)$, *то позиционная конструкция* $\boldsymbol{y}^{(k)}(t,y)$ *является оптимальной, при этом величина предела слева* $\varphi^{(0)}(\theta-0,y_\theta)$ *равна минимальному значению функционала оставшихся потерь* (12)

$$\varphi^{(0)}(\theta-0,y_\theta)=\min_{y(\cdot)\in\mathbf{D}(\theta,y_\theta)} I_\theta(y(\cdot)). \tag{13}$$

Здесь обозначены: $\operatorname{Arg\,min}\{\cdot\}$ – множество точек глобального минимума; $\arg\min\{\cdot\}$– точка глобального минимума. Предполагаем, что минимум в условии "г" достигается в единственной точке, а условие "в" выполняется почти всюду на T.

Функция цены находится, как нижняя огибающая образующих $\varphi^{(k)}(t,y)$, согласно условию "е", в котором $\boldsymbol{k}(t,y)$ обозначает оптимальное число мгновенных переключений автомата в позиции (t,y)

$$y(t-0)=y^{(0)}\to y^{(1)}\to\dots\to y^{(\boldsymbol{k})}=y(t).$$

Конструкция $\boldsymbol{y}^{(k)}(t,y)$ определяет оптимальную последовательность состояний системы в момент многократного переключения:

$$y^{(j)}(t)=\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{k}-j+1)}(t,y^{(j-1)}(t)),\ j=1,2,\dots,\boldsymbol{k}, \tag{14}$$

где $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}(\tau,y(\tau-0))$. Заметим, что последовательность состояний $y^{(j)}(\tau)$ имеет обратную нумерацию по сравнению с оптимальной позиционной конструкцией $\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{k}-j+1)}(t,y^{(j-1)}(t))$.

3. Методика синтеза субоптимальной позиционной конструкции системы

Процедура применения условий оптимальности довольно сложная, поскольку приходится при интегрировании дифференциального уравнения (условие "в") решать в каждый момент времени рекуррентное уравнение (условие "б"). Как и в случае ЛДС, используем прием, при котором фиксируются тактовые моменты времени и строятся последовательности образующих функции цены, а уже затем находится функция цены и оптимальная позиционная конструкция САТ. Поскольку тактовые моменты времени фиксированы, в отличие от общей постановки задачи, то и получаемое решение будет *субоптимальным* (не лучше оптимального).

Пусть задано разбиение $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N = t_1$ промежутка времени функционирования системы на N промежутков тактовыми моментами времени τ_i. Считаем, что переключения САТ происходят только в эти фиксированные моменты времени τ_i, $i = 0,1,\ldots,N$. Обычная процедура интегрирования дифференциального уравнения "в" от конечного момента времени $\tau_N = t_1$ к начальному $\tau_0 = t_0$ на каждом шаге сопровождается решением рекуррентного уравнения "б". Опишем эту процедуру.

В конечный момент времени $t = \tau_N$ решаем рекуррентное уравнение "б":

$$\varphi^{(k_N)}(\tau_N, y) = \min_{v \in Y(\tau_N, y)} [\varphi^{(k_N - 1)}(\tau_N, v) + g^0(\tau_N, y, v)]$$

для последовательности функций $\varphi^{(k_N)}(\tau_N, y)$, $k_N = 0,1,\ldots$, с начальным условием "а"

$$\varphi^{(0)}(\tau_N, y) = F(y).$$

На промежутке времени $[\tau_{N-1}, \tau_N)$ решаем дифференциальное уравнение "в":

$$\varphi_t^{(0 k_N)}(t, y) + f^0(t, y) = 0$$

для функций $\varphi^{(0 k_N)}(t, y)$ с терминальными условиями "е"

$$\varphi^{(0 k_N)}(\tau_N - 0, y) = \varphi^{(k_N)}(\tau_N, y),\ k_N = 0,1,\ldots$$

В момент времени $t = \tau_{N-1}$ решаем рекуррентные уравнения "б":

$$\varphi^{(k_{N-1} k_N)}(\tau_{N-1}, y) = \min_{v \in Y(\tau_{N-1}, y)} [\varphi^{(k_{N-1} - 1 k_N)}(\tau_{N-1}, v) + g^0(\tau_{N-1}, y, v)]$$

для последовательности $\varphi^{(k_{N-1}k_N)}(\tau_{N-1},y)$, $k_{N-1}=0,1,\ldots$, с начальными значениями $\varphi^{(0k_N)}(\tau_{N-1},y)$, полученными при интегрировании дифференциального уравнения на промежутке $[\tau_{N-1},\tau_N)$.

На промежутке времени $[\tau_{N-2},\tau_{N-1})$ решаем дифференциальное уравнение "в", учитывая "е":

$$\varphi_t^{(0k_{N-1}k_N)}(t,y)+f^0(t,y)=0$$

для функций $\varphi^{(0k_{N-1}k_N)}(t,y)$ с начальными условиями

$$\varphi^{(0k_{N-1}k_N)}(\tau_{N-1}-0,y)=\varphi^{(k_{N-1}k_N)}(\tau_{N-1},y),\ k_{N-1}=0,1,\ldots;\ k_N=0,1,\ldots$$

и т.д.

На промежутке времени $[\tau_0,\tau_1)$ решаем дифференциальное уравнение "в", учитывая "е":

$$\varphi_t^{(0k_1\ldots k_N)}(t,y)+f^0(t,y)=0$$

для функций $\varphi^{(0k_1\ldots k_N)}(t,y)$ с начальными условиями

$$\varphi^{(0k_1\ldots k_N)}(\tau_1-0,y)=\varphi^{(k_1\ldots k_N)}(\tau_1,y),\ k_1=0,1,\ldots;\ \ldots;\ k_N=0,1,\ldots$$

В начальный момент времени $t=\tau_0$ решаем рекуррентные уравнения "б":

$$\varphi^{(k_0k_1\ldots k_N)}(\tau_0,y)=\min_{v\in Y(\tau_0,y)}[\varphi^{(k_0-1k_1\ldots k_N)}(\tau_0,v)+g^0(\tau_0,y,v)]$$

для последовательности функций $\varphi^{(k_0k_1\ldots k_N)}(\tau_0,y)$, $k_0=0,1,\ldots$ с начальными значениями $\varphi^{(0k_1\ldots k_N)}(\tau_0,y)$, полученными при интегрировании дифференциального уравнения на промежутке $[\tau_0,\tau_1)$.

Таким образом, в результате этой процедуры получаем последовательности функций

$$\varphi^{(k_0k_1\ldots k_N)}(t,y),\ \varphi^{(k_1\ldots k_N)}(t,y),\ \ldots,\ \varphi^{(k_{N-1}k_N)}(t,y),\ \varphi^{(k_N)}(t,y), \tag{15}$$

из которых составляется функция (13):

$$\varphi^{(0\boldsymbol{k}_i\ldots\boldsymbol{k}_N)}(\theta-0,y)=\min_{d\in\mathbf{D}(\theta,y)}I_\theta(d),\quad \tau_{i-1}<\theta<\tau_i,\quad i=1,\ldots,N,$$

где индексы $\boldsymbol{k}_i,\ldots,\boldsymbol{k}_N$ определяют оптимальное количество переключений в моменты времени $\tau_i,\ldots,\tau_N$ соответственно:

$$(\boldsymbol{k}_i ... \boldsymbol{k}_N) = \arg \min_{k_i=0,1,...} \min_{k_{i+1}=0,1,...} ... \min_{k_N=0,1,...} \varphi^{(k_i...k_N)}(\tau_i, y), \quad i = 0,1,..., N. \tag{16}$$

Оптимальная позиционная конструкция $\boldsymbol{y}^{(k)}(t, y)$ имеет вид "г":

$$\boldsymbol{y}^{(k_i+1)}(\tau_i, y) = \arg \min_{v \in Y(\tau_i, y)} [\varphi^{(k_i \boldsymbol{k}_{i+1}...\boldsymbol{k}_N)}(\tau_i, v) + g^0(\tau_i, y, v)], \tag{17}$$

где $k_i = 0,1,..., \boldsymbol{k}_i - 1$.

Для получения субоптимальной траектории, удовлетворяющей начальному условию

$$y(t_0 - 0) = y_0, \tag{18}$$

нужно выполнить следующие действия:

1) решая задачу (16) дискретной минимизации, определяем оптимальное количество $\boldsymbol{k}_0, \boldsymbol{k}_1, \ldots, \boldsymbol{k}_N$ переключений в моменты времени $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_N$ соответственно;

2) в начальный момент времени τ_0 находим субоптимальную траекторию учитывая, что оптимальная траектория в точке τ_0 многозначного разрыва совершает $\boldsymbol{k}_0$ переключений

$$y(\tau_0 - 0) \to y^{(0)}(\tau_0) \to y^{(1)}(\tau_0) \to ... \to y^{(\boldsymbol{k}_0)}(\tau_0),$$

последовательно принимая состояния

$$y^{(j)}(\tau_0) = \boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{k}_0 - j+1)}(\tau_0, y^{(j-1)}(\tau_0)), \ j = 1, 2, ..., \boldsymbol{k}_0,$$

с начальным условием $y^{(0)}(\tau_0) = y(\tau_0 - 0)$.

Оптимальная позиционная конструкция (17) принимает вид

$$\boldsymbol{y}^{(k_0+1)}(\tau_0, y) = \arg \min_{v \in Y(\tau_0, y)} [\varphi^{(k_0 \boldsymbol{k}_1 \boldsymbol{k}_2 ... \boldsymbol{k}_N)}(\tau_0, v) + g^0(\tau_0, y, v)], \ k_0 = 1, 2, ..., \boldsymbol{k}_0 - 1.$$

3) аналогично п.2) для момента времени τ_1 находим субоптимальную траекторию с начальным условием $y^{(0)}(\tau_1) = y^{(\boldsymbol{k}_0)}(\tau_0)$, которая последовательно принимает состояния

$$y^{(j)}(\tau_1) = \boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{k}_1 - j+1)}(\tau_1, y^{(j-1)}(\tau_1)), \ j = 1, 2, ..., \boldsymbol{k}_1,$$

а оптимальная позиционная конструкция (17) принимает вид

$$\boldsymbol{y}^{(k_1+1)}(\tau_1, y) = \arg \min_{v \in Y(\tau_1, y)} [\varphi^{(k_1 \boldsymbol{k}_2 \boldsymbol{k}_3 ... \boldsymbol{k}_N)}(\tau_1, v) + g^0(\tau_1, y, v)], \ k_1 = 1, 2, ..., \boldsymbol{k}_1 - 1.$$

и т.д.

N) в момент времени τ_N находим субоптимальную траекторию с начальным условием $y^{(0)}(\tau_N) = y^{(\boldsymbol{k}_N - 1)}(\tau_{N-1})$, которая последовательно принимает состояния

$$y^{(j)}(\tau_N) = \boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{k}_N - j+1)}(\tau_N, y^{(j-1)}(\tau_N)), \ j = 1, 2, ..., \boldsymbol{k}_N,$$

а оптимальная позиционная конструкция (17) принимает вид

$$\boldsymbol{y}^{(k_N+1)}(\tau_N, y) = \arg\min_{v \in Y(\tau_1, y)} [\varphi^{(k_N)}(\tau_N, v) + g^0(\tau_N, y, v)],\ k_N = 1, 2, \ldots, \boldsymbol{k}_N - 1.$$

В результате этих действий находится субоптимальная траектория, удовлетворяющая начальным условиям (18) и оптимальная позиционная конструкцию для начальных условий (11).

4. Синтез оптимальной системы с квадратичным критерием качества

Пусть поведение САТ описывается включением:

$$y(t) \in Y, \tag{19}$$

где y – вектор состояния, $y \in Y = \mathbf{P}^m$, т.е. на состояние системы ограничений нет.

Качество управления характеризуется квадратичным функционалом

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \tfrac{1}{2} y^T(t) F(t) y(t)\, dt + \tfrac{1}{2} y^T(t_1) F_1 y(t_1) +$$

$$+ \sum_{\tau \in \mathbf{F}} \sum_{k=1}^{K(\tau)} \{\lambda_\tau + \tfrac{1}{2} y^T(\tau) F_\tau y(\tau) + \tfrac{1}{2}[y(\tau) - y(\tau - 0)]^T Q_\tau [y(\tau) - y(\tau - 0)]\}, \tag{20}$$

где матрицы $F(t)$, F_τ, F_1, Q_τ симметричные порядка m, $F(t)$ непрерывна на T, матрицы $F(t)$, F_τ, F_1 – неотрицательно определенные, Q_τ – положительно определенная, $\lambda_\tau > 0$. Суммирование в (20) проводится количеству $K(\tau)$ переключений состояний системы в каждой точке $\tau \in \mathbf{T}$ многозначного разрыва траектории $y(\cdot)$. Заметим, что множество $\mathbf{T}$ точек разрыва конечное.

Рассматриваемая задача аналогична проблеме аналитического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР) А.М.Летова [10], но только для САТ.

Применим достаточные условия оптимальности (разд.2) к задаче (19), (20). Будем искать функции $\varphi^{(k)}(t, y)$ в виде

$$\varphi^{(k)}(t, y) = \tfrac{1}{2} y^T \Gamma_k(t) y + \gamma_k(t), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

где $\Gamma_k(t)$ – симметрическая неотрицательно определенная матрица размеров $m \times m$, а $\gamma_k(t)$ – скалярная функция. Подставляя эти функции в условия "а"–"е" теоремы 1, приходим к следующим выводам:

Таким образом, для рассматриваемой задачи справедливо утверждение.

Теорема 2 (о решении проблемы АКОР в классе САТ). *Функция цены в задаче* АКОР *в классе* САТ *равная минимальному значению функционала оставшихся потерь* (13)

$$\varphi^{(0)}(t-0,y)=\min_{d\in\mathbf{D}(t,y)} I_t(d)\,, \tag{22}$$

представляет собой нижнюю огибающую

$$\varphi^{(0)}(t-0,y)=\min_{k=0,1,\dots}\varphi^{(k)}(t,y)\,, \tag{23}$$

семейства квадратичных образующих (21), *причем*:

– матрица $\Gamma_0(t)$ *и скалярная функция* $\gamma_0(t)$ *удовлетворяют на* T *дифференциальным уравнениям*:

$$\dot{\Gamma}_0(t)+F(t)=0\,,\qquad \dot{\gamma}_0(t)=0\,; \tag{24}$$

– в конечный момент времени выполняются терминальные условия:

$$\Gamma_0(t_1)=F_1\,,\qquad \gamma_0(t_1)=0\,; \tag{25}$$

– при любом фиксированном $t\in T$ *матрица* $\Gamma_k(t)$ *и скалярная функция* $\gamma_k(t)$ *удовлетворяют рекуррентным уравнениям*:

$$\Gamma_{k+1}(t)=-Q_\tau^T P_k^{-1}(t)Q_\tau+Q_\tau\,,\qquad \gamma_{k+1}(t)=\gamma_k(t)+\lambda_\tau\,, \tag{26}$$

где $k=0,1,2,\dots$; $P_k(t)=\Gamma_k(t)+Q_\tau+F_\tau$ *– симметрическая положительно определенная матрица*;

– оптимальная позиционная конструкция имеет вид

$$\boldsymbol{y}^{(k+1)}(t,y)=P_k^{-1}(t)Q_\tau\,y\,,\qquad k=0,1,2,\dots; \tag{27}$$

– оптимальное количество $\boldsymbol{k}(t,y)$ *переключений находится по формуле*

$$\boldsymbol{k}(t,y)=\operatorname*{arg\,min}_{k=0,1,2,\dots}\varphi^{(k)}(t,y)\,, \tag{28}$$

– функция $\varphi^{(0)}(t,y)$ *удовлетворяет условию скачка*

$$\varphi^{(0)}(t-0,y)=\varphi^{(\boldsymbol{k}(t,y))}(t,y)\,. \tag{29}$$

Оптимальная траектория $y(\cdot)$ в точке τ многозначного разрыва совершает $\boldsymbol{k}$ переключений $y(\tau-0)\to y^{(0)}(\tau)\to y^{(1)}(\tau)\to\dots\to y^{(\boldsymbol{k})}(\tau)$ последовательно принимая состояния

$$y^{(j)}(\tau)=\boldsymbol{y}^{(\boldsymbol{k}-j+1)}(\tau,y^{(j-1)}(\tau))\,,\quad j=1,2,\dots,\boldsymbol{k}\,. \tag{30}$$

При $\boldsymbol{k}(\tau,y)=0$ система сохраняет своё состояние (переключений нет).

Формула (27) определяет оптимальную позиционную конструкцию, как регулятор, линейным по состоянию системы. Однако, в отличие от классического решения проблемы

АКОР, эта формула имеет "локальный" характер, а именно: в любой фиксированный момент времени существует разбиение пространства состояний $Y = \mathbf{P}^m$ на области, в каждой из которых оптимальная конструкция имеет вид регулятора (27), линейного по состоянию. В целом на Y функция $\boldsymbol{y}^{(k)}(t,y)$ кусочно-линейная. Функция цены для задачи (19), (20) имеет вид

$$\varphi^{(0)}(t-0,y) = \tfrac{1}{2} y^T \Gamma_{\boldsymbol{k}(t,y)}(t)\, y + \gamma_{\boldsymbol{k}(t,y)}(t), \tag{31}$$

т.е. является кусочно-квадратичной, а именно в каждый момент времени существует разбиение пространства состояний Y на непересекающиеся области, в каждой из которых эта функция квадратичная, вида (21). Количество областей зависит от числа переключений САТ.

5. Пример

Найти оптимальную позиционную конструкцию САТ:

$$y(t) \in R,$$

минимизирующую функционал

$$I = \int_0^1 \tfrac{1}{2} y^2(t)dt + \tfrac{1}{2} y^2(1) + \sum_{\tau \in \mathbf{T}} \{ \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{2}[y(\tau) - y(\tau-0)]^2 \},$$

а также оптимальную траекторию для начального состояния $y(-0) = 2$.

Будем искать квадратичные образующие $\varphi^{(k)}(t,y) = \frac{1}{2}\Gamma_k(t)\, y^2 + \gamma_k(t)$ функции цены. Сравнивая с общей постановкой задачи (19), (20) имеем $m=1$, $Y = R$, $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $F = 1$, $\lambda = \dfrac{1}{12}$, $F_\tau = 0$, $Q_\tau = 1$, $F_1 = 1$. Предполагаем, что переключения САТ возможны только в начальный $\tau_0 = 0$ и конечный $\tau_1 = 1$ моменты времени, причем данное предположение подтверждается в процессе решения при нахождении оптимальных траекторий. А значит, полученные в данном примере субоптимальные регуляторы на самом деле являются оптимальными. Рассмотрим основные этапы решения.

В конечный момент времени $t = 1$ решаем рекуррентные уравнения (26):

$$\Gamma_{k+1}(1) = \frac{\Gamma_k}{\Gamma_k + 1}, \qquad \gamma_{k+1}(1) = \gamma_k(1) + \frac{1}{12}, \quad k = 0,1,2,...$$

с терминальными условиями (25): $\Gamma_0(1) = 1, \quad \gamma_0(1) = 0$. Получаем

$$\Gamma_{k_1}(1) = \frac{1}{k_1 + 1}, \qquad \gamma_{k_1}(1) = \frac{k_1}{12}, \quad k_1 = 0,1,...$$

На промежутке времени $[0,1)$ решаем дифференциальные уравнения (24):

$$\dot{\Gamma}_{0k_1}(t)+1=0, \qquad \dot{\gamma}_{0k_1}(t)=0;$$

с терминальными условиями: $\dot{\Gamma}_{0k_1}(1-0)=\dfrac{1}{k_1+1}$, $\dot{\gamma}_{0k_1}(1-0)=\dfrac{k_1}{12}$, $k_1=0,1,\ldots$ Получаем

$$\Gamma_{0k_1}(t)=\frac{k_1+2}{k_1+1}-t, \qquad \gamma_{0k_1}(t)=\frac{k_1}{12}.$$

В начальный момент времени $t=0$ решаем рекуррентные уравнения (26)

$$\Gamma_{(k_0+1)k_1}(0)=\frac{\Gamma_{k_0k_1}}{\Gamma_{k_0k_1}+1}, \quad \gamma_{(k_0+1)k_1}(0)=\gamma_{k_0k_1}(0)+\frac{1}{12}, \quad k_0=0,1,2,\ldots;$$

с начальными условиями: $\Gamma_{0k_1}(0)=\dfrac{k_1+2}{k_1+1}$, $\gamma_{0k_1}(0)=\dfrac{k_1}{12}$. Находим

$$\Gamma_{k_0k_1}(0)=\frac{k_1+2}{k_1(k_0+1)+(2k_0+1)}; \quad \gamma_{k_0k_1}(0)=\frac{k_0+k_1}{12}.$$

Оптимальная позиционная конструкция $\boldsymbol{y}(t,y)$ САТ имеет вид

$$\boldsymbol{y}^{(k_i+1)}(\tau_i,y)=\frac{1}{\Gamma_{k_0k_1}+1}y, \ k_0=0,1,\ldots,\boldsymbol{k}_0; \ k_1=0,1,\ldots,\boldsymbol{k}_1.$$

Оптимальное количество $\boldsymbol{k}_0$, $\boldsymbol{k}_1$ переключений находится по формуле

$$(\boldsymbol{k}_0\boldsymbol{k}_1)=\arg\min_{k_0=0,1,\ldots}\min_{k_1=0,1,\ldots}\varphi^{(k_0k_1)}(\tau_i,y);$$

$$\varphi^{(k_0k_1)}(0,y)=\tfrac{1}{2}\frac{k_1(k_0+1)+(2k_0+1)}{(k_1+2)+k_1(k_0+1)+(2k_0+1)}y^2+\frac{k_0+k_1}{12}.$$

Решая задачу дискретной минимизации для начального состояния $y(0)=2$ получаем оптимальное количество переключений $\boldsymbol{k}_0=4$, $\boldsymbol{k}_1=0$. В начальный момент времени с учетом (30) оптимальная позиционная конструкция принимает вид

$$\boldsymbol{y}^{(j)}=\frac{9-2j}{11-2j}y^{(j-1)}, \ j=1,2,3,4.$$

Оптимальная траектория САТ совершает 4 переключения в начальный момент времени (рис. 3) последовательно принимая состояния $2\to\dfrac{14}{9}\to\dfrac{10}{9}\to\dfrac{6}{9}\to\dfrac{2}{9}$. Минимальное значение функционала с учетом (22) $\min I=\varphi^{(40)}(0,2)=\frac{63}{81}$.

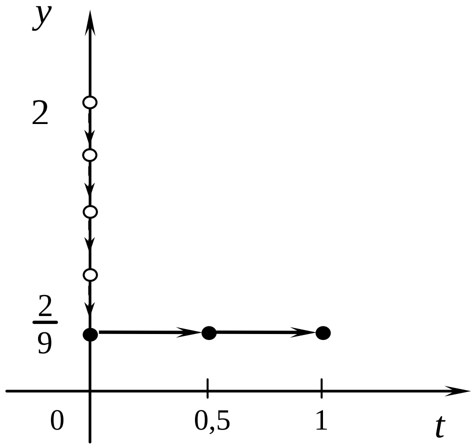

Рис.3

На основе сформированной методики синтеза субоптимального позиционного управления создано программное средство в среде Borland Delphi 7, с помощью которого найдено приближенное решение задачи. Интерфейс программного средства проиллюстрирован на рис.4. Оптимальная траектория совершает 4 переключения в начальный момент времени последовательно принимая состояния $2 \to 1{,}556 \to 1{,}111 \to 0{,}667 \to 0{,}222$. Минимальное значение функционала $\min I = 0{,}778$.

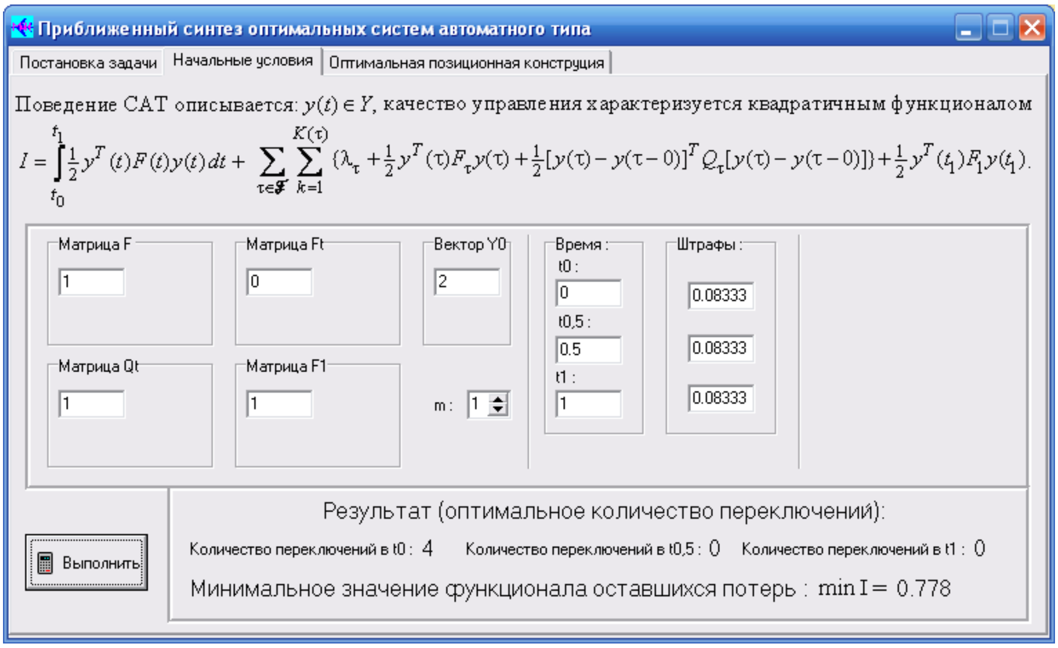

Рис.4.

Результаты работы программного средства практически совпадают с аналитическим решением.

6. Выводы

1. Поставлена задача оптимального управления дискретными системами автоматного типа.

2. Получены достаточные условия оптимальности позиционной конструкции системы.

3. На основе достаточных условий оптимальности разработана методика численного решения задачи синтеза оптимальной позиционной конструкции.

4. Выведены уравнения для нахождения оптимальной позиционной конструкции САТ с квадратичным критерием качества. Применение этих уравнений для синтеза показано на модельном примере.

5. Разработано программное средство приближенного решения задачи синтеза оптимальной позиционной конструкции САТ для систем не выше второго порядка с квадратичным критерием качества. Работоспособность программного средства продемонстрирована на модельном примере.

Библиографический список

1. *Красильщиков М.Н., Себряков Г.Г.* Управление и наведение беспилотных маневренных летательных аппаратов на основе современных информационных технологий, Физматлит, 2005

2. *Васильев С.Н., Жерлов А.К., Федосов Е.А., Федунов Б.Е.* Интеллектуальное управление динамическими системами. — М.: Наука, Физматлит, 2000.

3. *Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.* Синтез оптимальных детерминированных систем автоматного типа // Межвуз. сб. науч. трудов "Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения". – Изд-во МИРЭА, 2008. – С.102-107.

4. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных систем. М.: Наука, 1973. – 256 с.

5. *Бортаковский А.С.* Достаточные условия оптимальности автоматной части логико-динамической системы // Известия РАН. Теория и системы управления. 2006. – №6. – С.77 – 92.

6. Modelling and Analysis of Logic Controlled Dynamic Systems: IFAC Workshop. Irkutsk: Inst. Syst. Dyn. and Control Theory. Sib. Branch RAS, 2003.

7. *Семенов В.В.* Динамическое программирование в синтезе логико-динамических систем // М.: Приборостроение. – 1984, №2.

8. *Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.* Оптимальное управление линейными логико-динамическими системами с квадратичным критерием качества // Межвуз. сб. науч. трудов "Теоретические вопросы вычислительной техники и программного обеспечения". – Изд-во МИРЭА, 2006. – С.56-61.

9. *Бортаковский А.С., Пегачкова Е.А.* Синтез оптимального управления линейными логико-динамическими системами // "Труды МАИ", №27. – http://www.mai.ru (25.04.2007)

10. *Летов А.М.* Динамика полета и управление. – М.: Наука, 1973. – 390 с.

Сведения об авторах

Пегачкова Елена Александровна, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета),

тел.: 8-926-533-10-07; e-mail: pegachkova@mail.ru