

На правах рукописи



**Хатунцева Ольга Николаевна**

**РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РАСШИРЕНИЯ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА  
ДЛЯ ОПИСАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ И СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ  
МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД И АЭРОДИНАМИКИ**

Специальность: 01.02.05  
«Механика жидкости, газа и плазмы»

**АВТОРЕФЕРАТ**  
Диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Королёв-2019

Работа выполнена в Публичном акционерном обществе “Ракетно-космическая корпорация “Энергия” имени С.П. Королёва”

**Официальные оппоненты:** **Липатов Игорь Иванович**  
член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, начальник отдела государственного научного центра Федеральное государственное унитарное предприятие «Центральный аэрогидродинамический институт имени профессора Н.Е. Жуковского»

**Жмур Владимир Владимирович**  
член-корреспондент РАН,  
доктор физико-математических наук,  
профессор, начальник Управления конкурсных проектов по наукам о Земле и естественнонаучным методам исследований в гуманитарных науках Федерального государственного бюджетного учреждения «Российский фонд фундаментальных исследований»

**Никущенко Дмитрий Владимирович**  
доктор технических наук, доцент,  
проректор по научной работе  
федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный морской технический университет»

**Ведущая организация:** Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого»

Защита состоится 6 марта 2020 года в 10<sup>00</sup> на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 Московского авиационного института по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4

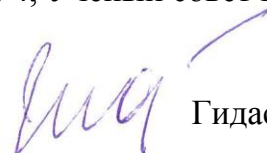
С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4 или на сайте МАИ по ссылке:

[https://mai.ru/events/defence/doctor/index.php?ELEMENT\\_ID=109076](https://mai.ru/events/defence/doctor/index.php?ELEMENT_ID=109076)

Автореферат разослан “ \_\_\_\_ ” \_\_\_\_\_ 2019 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.14  
кандидат физико-математических наук, доцент

 Гидаспов В.Ю.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность темы.

Последние несколько десятилетий, благодаря использованию и развитию компьютерных технологий, механика, как наука, переживает свой ренессанс. Решения многих задач механики жидкости, газа и плазмы оказалось возможным найти, используя численные методы, при исследовании уравнений Навье-Стокса, Больцмана, теплопроводности, стохастических дифференциальных уравнений и т.д.

Однако, наряду с этим, остается много открытых вопросов и проблем, связанных, в первую очередь, с задачами описания нелинейных процессов и систем, обладающих неединственностью и/или неопределенностью решения, таких как, например, стохастические процессы и, в частности, турбулентные течения; возникновение и рост природных и техногенных фрактальных структур; появление гистерезисных зависимостей в аэро- и гидродинамических процессах и пр.

Проблемы моделирования таких процессов и явлений носят трудности, не только вычислительного, но и методологического характера. Так, например, при исследовании фрактальных структур и процессов, протекающих в них, часто используют дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения с дробными производными (Олемской А.И., Флат А.Я. и др.), либо дифференциальные уравнения с аномальными коэффициентами (Hentschel H.G.E., Procaccia I.), однако, оба эти подхода не позволяют учитывать масштабный фактор процесса во фрактальном объекте. В некоторых из задач такого рода могут быть найдены только осредненные по масштабам решения, что не всегда удовлетворяет необходимым требованиям, в других, возникают проблемы, связанные с расходимостью и/или неоднозначностью решений.

При исследовании стохастических систем скрытые факторы могут приводить к отклонению от нормального распределения. Понимание механизмов влияния скрытых факторов на стохастический процесс очень важно в задачах гидродинамики, метеорологии и пр.

Неопределенность состояния системы, является основной трудностью и при исследовании процессов, характеристикой которых являются гистерезисные зависимости исследуемой функции от изменяемого аргумента, например, гистерезис аэродинамических характеристик летательного аппарата, совершающего гармонические колебания. Учет этих особенностей очень важен при проектировании новых летательных аппаратов с заранее заданными свойствами по балансировке и демпфированию.

Перечисленные выше задачи механики и аэродинамики рассмотрены в данной диссертации. Работа посвящена исследованию нелинейных процессов и систем с помощью метода расширения фазового пространства, построению и исследованию математических моделей для описания параметров потоков движущихся сред в широком диапазоне условий, а именно:

1. Разработке метода описания процессов, в которых функции скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных. Такие функции в локальных областях могут вести себя случайным образом, не меняя, однако, свои значения и значения своих производных на границах областей. Метод позволяет решать задачу поиска соотношений, связывающих значения функций и производных на границах областей их скачкообразного изменения с размерами и положением этих

областей [5-6], [9], [16], [19].

2. Теоретическому определению размерности односвязных фрактальных объектов двух типов: структур с вязкими “пальцами” и дендритов, на основе метода описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы [5].

3. Разработке метода описания процессов, протекающих в односвязных фрактальных структурах с помощью дифференциальных уравнений с учетом масштабного фактора, без привлечения производных по времени в дробной степени [4], [13].

4. Описанию стохастических процессов с помощью дифференциальных уравнений с учетом масштабного параметра, а также дополнительной переменной, характеризующей плотность вероятности реализации случайной величины, без традиционного в таких случаях использования стохастических дифференциальных уравнений [1], [9-10], [15-19].

5. Классификации гистерезисных явлений и разработке замкнутых расчетно-теоретических моделей для описания гистерезисных функций двух типов [2-3], [8], [11-12].

6. Методу определения характера колебательного движения летательного аппарата на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования [11].

Все эти исследования объединены единым подходом – решения нелинейных задач в них найдены с помощью метода расширения фазового пространства.

В механике, гидро- и газодинамике наиболее известными примерами использования этого метода являются уравнение Лиувилля, кинетическое уравнение Больцмана и цепочка уравнений Боголюбова. В них помимо пространственно-временных переменных, описывающих состояния системы, используются переменные импульса (или обобщенного импульса).

Часто метод расширения фазового пространства используется и в теории управления (Анищенко В.С., Вадисова Т.Е., Шиманский-Гайер Л., Боголюбов Н.Н., Шелест А.В. и др.). В ней расширение пространства не ограничивается только переменными импульса. Замена производной по времени  $i$ -ой координаты на координату  $(i+1)$ -ую:  $\dot{q}_i = q_{i+1}$ , приводит к практически неограниченной возможности увеличения размерности фазового пространства и описания в этом пространстве динамического изменения системы.

Неявно метод расширения фазового пространства использовал Л.Д. Ландау при описании фазовых переходов второго рода, когда раскладывал термодинамической потенциал  $\Phi(P, T)$  в ряд по степеням искусственно введенного параметра порядка  $\eta$ :  $\Phi(P, T) \rightarrow \Phi(P, T, \eta)$ .

Метод расширения фазового пространства в указанных задачах позволяет не только упростить подходы к их решению, но и зачастую выявить новые физические сущности и закономерности. Достаточно вспомнить, что переход от теории Ньютона при решении задачи движения и взаимодействия частиц газа к уравнению Больцмана, позволил доказать Н-теорему (закон возрастания энтропии) и показать принципиальную необратимость по времени эволюции ансамбля частиц в замкнутых системах.

В диссертации предложены различные подходы для исследования нелинейных процессов и систем за счет расширения фазового пространства состояний.

Так в методе описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы в областях, где функции, описывающие их, скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных, используется искусственно введенный параметр  $\eta$ , позволяющий произвести “расслоение” пространства переменных на два подпространства. Процессы в таких пространствах испытывают скачкообразный вероятностный переход при переходе от одного подпространства к другому.

В методе, разработанном для описания процессов, протекающих в односвязных фрактальных структурах, используется расширение фазового пространства переменных за счет введения параметра, характеризующего масштаб области фрактальной структуры. Использование такого приема позволяет заменять дифференциальные уравнения, описывающие физические процессы в целочисленных – евклидовых пространствах, на модифицированные аналоги для описания процессов в пространствах с дробными размерностями. При этом не возникает необходимости использования, обычно применяемых в таких случаях, производных по времени или пространственных производных в дробной степени (Нигматуллин Р.Р., Бейбалаев В.Д. и др.).

Введение масштабного параметра, а также дополнительной переменной, характеризующей плотность вероятности реализации случайной величины, позволяет описывать стохастические процессы с использованием системы уравнений в частных производных, в которую входят уравнения, описывающие аналогичные детерминированные процессы, но в расширенном фазовом пространстве, и уравнения, описывающие эволюцию плотности вероятности.

Выделение двух основных типов аэродинамических гистерезисных явлений и их подробное описание позволило применить к ним различные методы расширения фазового пространства. Для описания гистерезисных функций, обусловленных демпфированием, используется расширение пространства переменных за счет введения дополнительной переменной - скорости изменения аргумента. А гистерезисные явления, обусловленные бифуркацией в пространстве состояний, удастся описать, используя искусственно введенный параметр, позволяющий “расщепить” класс решений на два подкласса, и описать переход между этими подклассами.

**Объектом исследований** данной работы являются нелинейные процессы и системы в задачах механики сплошных сред и аэродинамики.

**Предмет исследований** включает аналитический подход, основанный на расширении фазового пространства переменных при решении задач механики, связанных с исследованием нелинейных процессов и систем, обладающих неединственностью и/или неопределенностью при реализации различных состояний.

### **Цель работы.**

1. Разработка новых методов исследования нелинейных процессов и систем, основанных на расширении фазового пространства переменных, в задачах механики сплошных сред и аэродинамики.
2. Применение разработанных методов к решению задач гидродинамики, акустики, аэродинамики и пр.
3. Оценка границ использования разработанных методов.

**Достоверность** полученных результатов подтверждена сравнением с численными и физическими экспериментами.

**Научная новизна** работы заключается в едином методологическом подходе, основанном на расширении фазового пространства переменных, к решению задач механики сплошных сред и аэродинамики, связанных с исследованием нелинейных процессов и систем, а также систем, обладающих неопределенностью при реализации различных состояний.

Автор защищает следующие **новые положения и результаты**:

1. Метод описания процессов, в которых функции скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных. Такие функции в локальных областях могут вести себя случайным образом, не меняя, однако, свои значения и значения своих производных на границах областей. Метод позволяет решать задачу поиска соотношений, связывающих значения функций и производных на границах областей их скачкообразного изменения с размерами и положением этих областей.
2. Метод теоретического определения размерности односвязных фрактальных объектов двух типов: структур с вязкими “пальцами” и дендритов, на основе подхода, разработанного для описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы.
3. Метод описания процессов, протекающих в односвязных фрактальных структурах с помощью дифференциальных уравнений с учетом масштабного фактора.
4. Метод описания стохастических процессов с помощью дифференциальных уравнений с учетом масштабного параметра, а также дополнительной переменной, характеризующей плотность вероятности реализации случайной величины, без традиционного в таких случаях использования стохастических дифференциальных уравнений.
5. Замкнутые расчетно-теоретические модели описания гистерезисных функций двух типов в представленной в работе классификации гистерезисных явлений.
6. Метод, позволяющий характеризовать колебательное движение летательных аппаратов на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования с использованием математической модели гистерезисных явлений.

### **Практическая ценность**

Полученные результаты развивают теорию решения задач механики сплошных сред и аэродинамики, связанных с исследованием динамических систем, обладающих неединственностью и/или неопределенностью при реализации различных состояний, и расширяют область их практического использования.

Результаты могут служить основой для алгоритмов решения следующих задач механики:

- для описания процессов, протекающих в односвязных фрактальных структурах с помощью дифференциальных уравнений с учетом масштабного фактора, таких, как, перколяция, течение жидкости, массо- и теплоперенос во

многих природных и техногенных объектах, имеющих сложную и, в некотором смысле, самоподобную на разных масштабах структуру. Например, при рассмотрении перколяции нефти в пористых грунтах, течения крови в кровеносной системе, исследовании процесса теплопроводности в композитных материалах, используемых в качестве теплозащиты в аэрокосмической технике и пр.;

- для описания стохастических процессов, в том числе турбулентности, с учетом производства энтропии стохастической системы;
- для определения разности значений аэродинамических характеристик на двух ветвях гистерезисной функции, в случае реализации гистерезисного характера зависимости первого типа (в приведенной в работе классификации) при совершении летательным аппаратом гармонических колебаний;
- для определения затрачиваемой или выделяемой энергии при переходе между двумя квазистационарными состояниями, характеристикой которых являются функциональные зависимости на ветвях гистерезисной кривой второго типа при совершении летательным аппаратом гармонических колебаний.

Материалы диссертации использованы в курсе лекций «Модели нелинейных, стохастических и переходных процессов в динамических системах» (аспирантура ПАО «РКК «Энергия»).

### **Апробация работы**

Представленные в диссертации результаты докладывались на Международных конференциях “Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность” 2012, 2014, 2016, 2018 гг. (Звенигород), Всероссийской конференции “Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики”, посвященной памяти К.И. Бабенко 2012 г. (Новороссийск), Всероссийской конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и механики», посвященной памяти академика А.Ф.Сидорова 2012 г. (г. Новороссийск), Научно-технических конференциях по аэродинамике 2011, 2012, 2015 гг. (пос. Володарского, Московская область), Всероссийских школах-семинарах "Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем" 2010, 2014, 2017 гг. (Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН г. Москва), Международных школах-семинарах “Модели и методы аэродинамики” 2007-2011, 2013, 2015-2019 гг. (г. Евпатория), Международных конференциях по вычислительной механике и современным прикладным программным средствам в 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2017, 2019 гг. (г. Алушта), Международных конференциях по неравновесным процессам в соплах и струях в 2000, 2002, 2006, 2008, 2018 гг. (г. Алушта), Международной конференции “Тихонов и современная математика” 2006 г. (г. Москва), Conference EUCASS 2005 (г. Москва), XXVI Сессии совета РАН по нелинейной динамике 2017 и др.

### **Публикации**

По теме диссертации опубликовано более 70 работ, из них 15 в рецензируемых журналах, одобренных ВАК для защиты диссертаций на соискание ученой степени доктора наук (из них 5 - переводные, входящие в международные базы данных Web of

Science и Scopus), остальные в других рецензируемых изданиях и материалах конференций. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-19].

Большинство работ опубликованы без соавторов. В работе [11] соискателю принадлежит постановка задачи, математическая модель, основные выводы.

### **Объем и структура работы**

Диссертация состоит из введения, 5 глав, заключения и списка литературы; содержит 207 стр. текста и 17 рисунков. Библиография насчитывает 125 наименований.

### **Краткое содержание работы**

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертации, проведен обзор и анализ исследований, связанных с применением метода расширения фазового пространства в задачах механики жидкости, газа и аэродинамики, а также в задачах кинетической физики и стохастических процессов.

**В первой главе** содержатся общие положения разработки метода описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы [5-7], [9], [16], [19].

Метод применим к таким физическим процессам, которые можно однозначно описать функциями везде, кроме ограниченной области, где нарушается их детерминированное поведение.

Предположим, существует физический процесс, описываемый функцией  $\tilde{m}(\alpha(t))$ , такой, что до точки  $\alpha_0$  функция  $\tilde{m}(\alpha(t))$ , определена однозначно, как функция аргумента  $\alpha$ :  $\tilde{m}(\alpha(t)) = \tilde{m}_1(\alpha)$ . В области  $\alpha \geq \alpha_0$  может реализовываться один из двух возможных квазистационарных режимов рассматриваемого физического процесса. Эти два режима могут быть описаны двумя ветвями функции  $\tilde{m}(\alpha(t))$ : либо  $\tilde{m}(\alpha(t)) = \tilde{m}_1(\alpha)$  (состояние «1»), либо  $\tilde{m}(\alpha(t)) = \tilde{m}_2(\alpha)$  (состояние «2»). Причем, с увеличением аргумента  $\alpha$  устойчивость состояния «2» возрастает, а состояния «1» - падает.

В качестве модели поведения системы в области  $\alpha \geq \alpha_0$ , при  $\dot{\alpha} > 0$ , примем следующее правило: если система находится в состоянии «1», то при увеличении значения аргумента  $\alpha(t)$  она может либо продолжать в нем оставаться, либо в точке  $\alpha_1 > \alpha_0$  выйти из него и оказаться в точке  $\alpha_2 > \alpha_0$  в состоянии «2». При этом если система в какой-либо точке  $\alpha_2$  окажется в состоянии «2», то при дальнейшем увеличении аргумента  $\alpha$  в области  $\alpha > \alpha_2$  она будет продолжать оставаться только в состоянии «2». Причем значение  $\alpha_2$  может быть как больше, так и меньше значения  $\alpha_1$ . Переходы между двумя состояниями в области  $[\alpha_1, \alpha_2]$ , если следить за процессом изменения функции  $\tilde{m}$  от аргумента  $\alpha(t)$  (при  $\dot{\alpha} > 0$ ) много раз, носят случайный характер. Точки перехода из состояния «1» в состояние «2» -  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  - однозначно не определены.

Рассмотрим однократное изменение функции  $\tilde{m}(\alpha)$  при изменении аргумента  $\alpha(t)$  в одном направлении по времени:  $\dot{\alpha} > 0$ . Для этого процесса определим точки  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Будем считать, что для функции  $\tilde{m}(\alpha)$  характерна лишь слабая нелинейность ее ветвей:  $\tilde{m}_1(\alpha)$  и  $\tilde{m}_2(\alpha)$  в окрестностях точек  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , соответственно. Интерполируем ветвь функции  $\tilde{m}_1(\alpha)$ , расположенную на плоскости  $(\alpha, \tilde{m})$  до точки  $\alpha_1$ :  $\alpha \leq \alpha_1$ ,



линейной функцией в область  $[\alpha_1, \alpha_2]$ . Полученную таким образом функцию обозначим, как  $m_1(\alpha)$ . Ветвь функции  $\tilde{m}_2(\alpha)$  за точкой  $\alpha_2: \alpha \geq \alpha_2$ , интерполируем в область  $[\alpha_1, \alpha_2]$  и обозначим, как  $m_2(\alpha)$ . В результате в области  $[\alpha_1, \alpha_2]$  определим две ветви функции  $m(\alpha): m(\alpha) = \begin{cases} m_1(\alpha) \\ m_2(\alpha) \end{cases}$ . Область, лежащую между точками  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  и ограниченную функциями  $m_1(\alpha)$  и  $m_2(\alpha)$ , можно характеризовать, как область неопределенности рассматриваемого процесса. Внутри этой области лежат возможные траектории перехода между состояниями «1» и «2». Среднее значение функции  $m^2(\alpha)$  в области  $[\alpha_1, \alpha_2]$  будет определяться выражением:

$$\langle m^2 \rangle = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha) d\alpha. \quad (1)$$

Учитывая, что среднее значение от функции  $m^2(\alpha)$  в области  $[\alpha_1, \alpha_2]$  является числом, выражение (1), в случае  $\langle m^2 \rangle \neq 0$ , может быть записано в виде:

$$\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi) d\varphi = 1, \quad \text{где } M^2 = m^2(\varphi) / \langle m^2 \rangle, \quad \varphi = \alpha / \Delta\alpha, \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Расширим пространство  $(\alpha, m)$  дополнительным параметром  $\eta: (\alpha, m) \rightarrow (\alpha, m; \eta)$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$  (см. рис. 1), и определим в этом пространстве в переходной области функцию  $m(\alpha; \eta)$  так, чтобы проекция функции  $m(\alpha; \eta)$  на плоскость  $(\alpha, m)$  совпадала с функциями  $m_1(\alpha)$  и  $m_2(\alpha)$  в областях:  $\alpha < \alpha_2$  и  $\alpha \geq \alpha_2$ , соответственно. Удовлетворяя этим требованиям, в качестве функции  $m(\alpha; \eta)$  можно выбрать соотношение:

$$m(\alpha; \eta) = m_2(\alpha) + \eta(m_1(\alpha) - m_2(\alpha)), \quad \text{где } \eta = \begin{cases} 1, & \text{при } x < \alpha_2 \\ 0, & \text{при } x \geq \alpha_2 \end{cases}.$$

Аналогичное соотношение выполняется для производных:

$$dm(\alpha; \eta)/d\alpha = dm_2(\alpha)/d\alpha + \eta(dm_1(\alpha)/d\alpha - dm_2(\alpha)/d\alpha).$$

Такое представление функции  $m(\alpha; \eta)$  позволит (как будет показано ниже) специальным образом определить свойство переходной области. А именно, отметить, что для заданных точек перехода из состояния «1» в состояние «2»:  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , в силу принципа причинности, статистические свойства системы в точке  $\alpha_1$  описывается только функцией  $m_1$ , а в точке  $\alpha_2$  состояние системы не является точно определенным, поскольку в эту точку могут приводить различные траектории из точки  $\alpha_1$ .

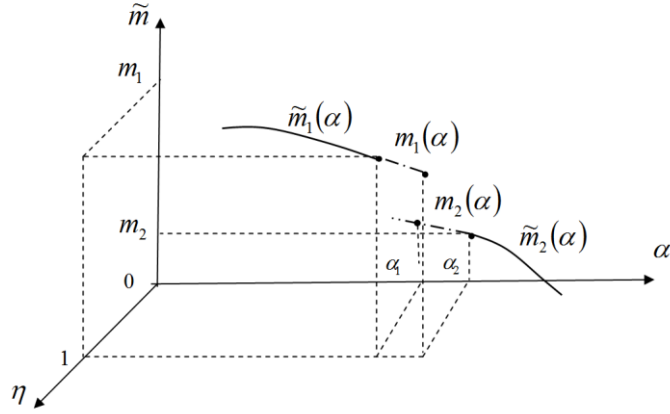


Рис. 1. Схематичное изображение функции с разрывом первого рода в расширенном пространстве переменных.

Характеристикой состояния системы (описываемой функцией  $m$  и ее производной), будет выступать значение  $\eta$ , равное единице везде до точки  $\alpha = \alpha_2$  и, равное нулю в этой точке и за ней:

$$\eta = \frac{m - m_2(\alpha)}{m_1(\alpha) - m_2(\alpha)} \equiv \frac{M - M_2}{M_1 - M_2} = \frac{dm/d\alpha - dm_2(\alpha)/d\alpha}{dm_1(\alpha)/d\alpha - dm_2(\alpha)/d\alpha} \equiv \frac{dM/d\varphi - dM_2/d\varphi}{dM_1/d\varphi - dM_2/d\varphi}.$$

В переходной области производные  $\eta$  по  $\alpha$ , а также  $\eta$  по  $\varphi$  будут равны:

$$\begin{aligned} d\eta/d\alpha &= -d\eta/d(-(\alpha - \alpha_2)) = -\delta(-(\alpha - \alpha_2)) = -\delta(\alpha - \alpha_2), \\ d\eta/d\varphi &= -d\eta/d(-(\varphi - \varphi_2)) = -\delta(-(\varphi - \varphi_2)) = -\delta(\varphi - \varphi_2) \end{aligned}$$

где  $\delta(\alpha - \alpha_2)$  и  $\delta(\varphi - \varphi_2)$  - дельта-функции.

Найдем среднее значение квадрата функции  $m(\alpha)$  (см. (1)) в области скачкообразного перехода  $[\alpha_1, \alpha_2]$  в расширенном пространстве  $(\alpha, m; \eta)$ .

Проинтегрировав по частям выражение для среднего значения квадрата функции  $m(\alpha)$ :

$$\frac{1}{\Delta\alpha} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m^2(\alpha) d\alpha = \frac{\alpha}{\Delta\alpha} m^2(\alpha) \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} - \frac{2}{\Delta\alpha} \int_{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}}^{m(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}} \alpha m dm,$$

и, учитывая непрерывность функции  $m$  только в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной  $\eta$ :  $dm = \frac{\partial m}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\alpha} d\alpha = -(m_1(\alpha) - m_2(\alpha)) \delta(\alpha - \alpha_2) d\alpha$ ,

получим соотношение:

$$\langle m^2 \rangle = \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} m_2 \left( m_1 + \frac{dm_1}{d\alpha} \Delta\alpha \right) - \frac{\alpha_1}{\Delta\alpha} m_1^2. \quad (2)$$

Для краткости в этом выражении опущены обозначения показывающие, что значение функции  $m_2$  берется в точке  $\alpha = \alpha_2$ :  $m_2 = m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}$ , а значение функции  $m_1$  и ее производной - в точке  $\alpha = \alpha_1$ :  $m_1 = m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}$ ,  $dm_1/d\alpha = dm_1(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_1}$ .

При выводе соотношения (2) значение функции  $m_1(\alpha)$  - в точке  $\alpha = \alpha_2$ , в силу условия линейной экстраполяции, определялось как

$$m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} + \frac{dm_1(\alpha)}{d\alpha} \Big|_{\alpha=\alpha_1} \Delta\alpha = m_1 + \frac{dm_1}{d\alpha} \Delta\alpha, \quad \Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Из выражения (2) видно, что среднее значение квадрата функции  $m(\alpha)$  на

интервале  $[\alpha_1, \alpha_2]$  определяется ее значениями в двух крайних точках:  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , а также значением производной функции в точке  $\alpha_1$ . Причем, член выражения  $\frac{\alpha_1}{\Delta\alpha} m_1^2$  определен значениями безразмерной координаты и квадрата функции в точке  $\alpha_1$  только на ветви  $m_1$ . А произведение  $\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha} m_2 \left( m_1 + \frac{dm_1}{d\alpha} \Delta\alpha \right)$  описывает «смешанное» состояние системы в точке  $\alpha_2$  сразу для двух ветвей функции. Этот член пропорционален среднегеометрическому между значением функции на ветви  $m_2$  и интерполированным значением функции на ветви  $m_1$ . Несимметричность выражения в отношении двух ветвей среднего квадрата функции  $m(\alpha)$  в переходной области характеризует поведение этой функции в окрестностях точек  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в соответствии с принципом причинности: для рассматриваемого процесса (с заданными точками «ухода» из состояния «1» -  $\alpha_1$  и «прихода» в состояние «2» -  $\alpha_2$ ) до достижения точки  $\alpha_1$  единственно возможным состоянием системы является состояние «1», а область:  $[\alpha_1, \alpha_2]$  является переходной («смешанной»).

Вернемся к вероятностному представлению функции  $m(\alpha)$  в области перехода:  $[\alpha_1, \alpha_2]$  на плоскости  $(\alpha, m)$ .

Самопроизвольный переход неравновесного физического процесса с одного режима на другой возможен в том случае, если в переходной области  $\varphi \times M(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]$ ,  $M(\varphi) \in [M_1(\varphi); M_2(\varphi)]$ , ветви функции  $M_1(\varphi)$  и  $M_2(\varphi)$  - такие, что область неопределенности, возникающая при переходе от пространства  $(\varphi, M; \eta)$  к пространству  $(\varphi, M)$ , не меньше, чем переходная область. То есть когда выполняется дисперсионное соотношение для области перехода. Чтобы найти такое дисперсионное соотношение, рассмотрим эрмитовые операторы  $\hat{k} = id/d\varphi$  и  $\hat{\eta} = i\eta$ , действующие в гильбертовом пространстве  $H^1(\Omega \subset R^1)$ , в котором в качестве нормы скалярного произведения базисных функций определено соотношение:  $\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2(\varphi) d\varphi = 1$ . Скалярное

произведение на пространстве  $L^2[\varphi_1, \varphi_2]$  задается равенством:  $(f, g) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} fg d\varphi$ .

Коммутационное соотношение этих операторов задается выражением:

$\left[ \hat{k}; \hat{\eta} \right] M = M \delta(\varphi - \varphi_2)$ . Используя соотношение Робертсона — Шрёдингера и

непосредственно следующее из него соотношение неопределенности Гайзенберга:

$$\Delta_M^{\hat{k}} = \left[ \left( \hat{k}^2 M, M \right) - \left( \hat{k} M, M \right)^2 \right]^{1/2}, \quad \Delta_M^{\hat{\eta}} = \left[ \left( \hat{\eta}^2 M, M \right) - \left( \hat{\eta} M, M \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\Delta_M^{\hat{k}} \Delta_M^{\hat{\eta}} \geq \frac{1}{2} \left| \left( \left[ \hat{k}; \hat{\eta} \right] M, M \right) \right|,$$

где выражения в круглых скобках - скалярные произведения в гильбертовом пространстве  $H^1(\Omega \subset R^1)$ , получим следующие выражения в пространстве  $(\varphi, M; \eta)$ :

$$\begin{aligned}
\left( \hat{k} M, M \right) &= i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{dM}{d\varphi} d\varphi = -i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial M}{\partial \eta} \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = -\frac{i}{2} M_2 \left( M_1 + \frac{dM_1}{d\varphi} - M_2 \right), \\
\left( \hat{k}^2 M, M \right) &= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial^2 M}{\partial \varphi^2} d\varphi = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{dM}{d\varphi} \right) \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = \frac{1}{2} M_2 \left( \frac{dM_1}{d\varphi} - \frac{dM_2}{d\varphi} \right), \\
\left( \hat{\eta} M, M \right) &= i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \eta d\varphi = i \varphi \eta M^2 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} + i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi + \\
&\quad + 2i \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta M (M_1 - M_2) \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = -i M_1^2 \varphi_1 + \frac{i}{2} M_2^2 \varphi_2, \\
\left( \hat{\eta}^2 M, M \right) &= - \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \eta^2 d\varphi = -\varphi \eta^2 M^2 \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} - 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi - \\
&\quad - 2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varphi \eta^2 M (M_1 - M_2) \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi = M_1^2 \varphi_1, \\
\left( \left[ \hat{k}; \hat{\eta} \right] M, M \right) &= \left| \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M^2 \delta(\varphi - \varphi_2) d\varphi \right| = \frac{1}{2} M^2(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_2} = \frac{1}{2} M_2^2.
\end{aligned}$$

При выводе этих соотношений, в области перехода  $[\varphi_1, \varphi_2]$  принималась линейная интерполяция функции  $M_1(\varphi)$  из области  $\varphi \leq \varphi_1$ . Поэтому, значение разности  $M_1(\varphi) - M_2(\varphi)$  и производной этой разности в точке  $\varphi = \varphi_2$  равны, соответственно

$$M_1(\varphi_1) + \frac{dM_1(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1} - M_2(\varphi_2) \quad \text{и} \quad \frac{dM_1(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_1} - \frac{dM_2(\varphi)}{d\varphi} \Big|_{\varphi=\varphi_2}.$$

Значение функции  $M(\varphi)$  в точке  $\varphi = \varphi_2$  равно значению функции на второй ветви в этой точке, то есть  $M(\varphi) \Big|_{\varphi=\varphi_2} = M_2(\varphi_2)$ .

Из приведенных выражений, следует,

$$\begin{aligned}
\Delta_M^{\hat{k}} &= \left( \frac{1}{2} M_2 \left( \frac{dM_1}{d\varphi} - \frac{dM_2}{d\varphi} \right) + \frac{1}{4} M_2^2 \left( M_1 - M_2 + \frac{dM_1}{d\varphi} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\
\Delta_M^{\hat{\eta}} &= \left( M_1^2 \varphi_1 + \left( \frac{1}{2} M_2^2 \varphi_2 - M_1^2 \varphi_1 \right)^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Параметр  $\Delta_M^{\hat{\eta}}$  определяет среднеквадратичное отклонение величины  $\eta$  в переходной области  $[\varphi_1, \varphi_2]$  в пространстве  $(\varphi, M; \eta)$ . Поскольку в рассматриваемой области осуществляется переход с ветви  $M_1(\varphi)$  (то есть при  $\eta = 1$ ) на ветвь  $M_2(\varphi)$  функции  $M(\varphi)$  (то есть при  $\eta = 0$ ), необходимо, чтобы среднеквадратичное отклонение величины  $\eta$  было равно половине интервала между ее значениями в начальном и конечном состояниях. То есть  $\Delta_M^{\hat{\eta}} = 1/2$ .

Накладывая это условие, получим соотношение, связывающее безразмерные величины  $\varphi_1, \varphi_2, M_1, M_2$ :  $4M_1^2 \varphi_1 + (M_2^2 \varphi_2 - 2M_1^2 \varphi_1)^2 = 1$ .

Используя зависимость (2) для определения среднего значения  $\langle m^2 \rangle$  перейдем

к соответствующей зависимости с размерными величинами:  $\alpha_1 = \alpha_2 - \Delta\alpha$ ,  $\alpha_2$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ :

$$\left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right)^2 m_2^4 - 4\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\left(1 - \frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\right)m_1^2 m_2 \left(m_1 + \frac{dm_1}{d\alpha}\Delta\alpha - m_2\right) = \left(\frac{\alpha_2}{\Delta\alpha}\left(m_1 m_2 - m_1^2 + m_2 \frac{dm_1}{d\alpha}\Delta\alpha\right) + m_1^2\right)^2. \quad (3)$$

Дисперсионное соотношение для безразмерных значений функций и их производных имеет вид:

$$M_2 \left( \frac{dM_1}{d\varphi} - \frac{dM_2}{d\varphi} \right) + \frac{1}{2} M_2^2 \left( M_1^2 - 2M_1 M_2 + 2 \frac{dM_1}{d\varphi} (M_1 - M_2) + \left( \frac{dM_1}{d\varphi} \right)^2 \right) \geq 0.$$

А для соответствующих им размерных величин его можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (\Delta\alpha)^2 \left( \frac{dm_1}{d\alpha} \right)^2 + 2\Delta\alpha \frac{dm_1}{d\alpha} \left( m_1 - m_2 + \alpha_2 \left( \frac{dm_1}{d\alpha} - \frac{dm_2}{d\alpha} \right) \right) + \\ + 2m_1 \left( \alpha_2 + \frac{m_1}{m_2} (\Delta\alpha - \alpha_2) \right) \left( \frac{dm_1}{d\alpha} - \frac{dm_2}{d\alpha} \right) + m_1 (m_1 - 2m_2) \geq 0. \quad (4) \end{aligned}$$

Выражения (3)-(4) являются алгебраическими. Они связывают значения функций  $m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1$ ,  $m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2$  и значения их производных  $dm_1(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_1} = dm_1/d\alpha$ ,  $dm_2(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_2} = dm_2/d\alpha$  в точках  $\alpha = \alpha_1$  и  $\alpha = \alpha_2$ , соответственно, с протяженностью области перехода  $\Delta\alpha$ , которая отделяет точку  $\alpha_2$  от точки  $\alpha_1$ .

Выражение (2) накладывает естественные ограничения на его применение для исследования процессов, описываемых преобразованными функциями и координатами: они должны быть такими, чтобы значение  $\langle m^2 \rangle$  не равнялось нулю. В противном случае не возможно отнормировать на единицу базис пространства, то есть задать алгебру, в которой есть и ноль, и единица. В частности, с помощью предлагаемого метода не могут быть описаны процессы, в которых значения  $m_1$  и  $dm_1/d\alpha$  одновременно равны нулю. По этой же причине не может быть равно нулю значение  $m_2$ . Так как в противном случае из (3) следует равенство нулю значения  $m_1$  или значения  $\alpha_1$ , что одновременно с условием  $m_2 = 0$  повлечет условие равенства нулю значения  $\langle m^2 \rangle$ .

Необходимо напомнить, что соотношения (3)-(4) находились в предположении, что скачкообразный переход с ветви функции "1" на ветвь функции "2" происходит из точки  $\alpha_1$  в точку  $\alpha_2$  при однократном изменении по времени функции  $\alpha(t)$ . Если в другом процессе реализуются другие координаты точек  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , то это не приведет к изменениям вида соотношений (3)-(4). Это связано с тем, что система (3)-(4) определяет лишь возможные комбинации параметров:  $m_1(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1} = m_1$ ,  $m_2(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} = m_2$ ,  $dm_1(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_1} = dm_1/d\alpha$ ,  $dm_2(\alpha)/d\alpha|_{\alpha=\alpha_2} = dm_2/d\alpha$ ,  $\alpha_2$ ,  $\Delta\alpha$  (или  $\alpha_1$ ) для физического процесса с двумя (или несколькими) состояниями, описываемыми ветвями функции  $m(\alpha(t))$ , со скачкообразными изменениями ее значений в какой либо области аргумента. В общем случае, полученная система (3)-(4) является недоопределенной. В результате, комбинация точек перехода, как правило, является неединственной. И поэтому, при изменении функции  $m(\alpha)$  (где  $\alpha = \alpha(t)$ ) с течением времени сначала в одном, а затем в другом направлении по  $\alpha$ , переход может происходить (и обычно

происходит) в разных точках.

Из-за инертности физических систем в нестационарных процессах происходит “затягивание” существования текущего процесса. Другими словами, если вероятность нахождения системы в двух состояниях, описываемых двумя ветвями функции, одна и та же, то система продолжает оставаться в том состоянии, в котором уже пребывает, до тех пор, пока в результате случайной флуктуации или возмущающего воздействия (для возникновения, которых требуется некоторое время) не перейдет в другое состояние. В этом случае на плоскости с координатами  $(\alpha, m)$  будет изображена не однопараметрическая, а разрывная гистерезисная кривая.

Необходимо также отметить, что соотношения (3)-(4) не являются инвариантным по отношению к выбору начала отсчета оси  $\alpha$ . В предложенном методе это происходит из-за несимметричности относительно параметра  $\eta$  состояний, характеризуемых функциями  $m_1(\alpha)$  и  $m_2(\alpha)$ , а также из-за “привязки” процесса перехода из одного состояния системы в другое к масштабу этого перехода:  $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$ . В описываемых этим методом физических процессах это свойство “переходных” состояний определяется конкретными диапазонами параметров, а также наличием собственных масштабов таких процессов. Например, при описании зависимости силы сопротивления шара в потоке жидкости от числа Рейнольдса, возникает скачкообразный переход с одной ветви функции на другую при изменении режима течения жидкости от ламинарного к турбулентному. Этот переход не может происходить при малых значениях числа Рейнольдса. Минимальное - критическое значение этого числа, а также диапазон значений чисел Рейнольдса при которых возможен такой переход, можно считать масштабами переходного процесса.

Практически все процессы в природе, совершающие скачкообразные переходы между различными состояниями, могут быть описаны непрерывными функциями, имеющими в области перехода разрыв производных в одной или нескольких точках. Однако эти функции имеют, как правило, вероятностную – стохастическую природу либо во всей переходной области, либо в какой-то ее части. Принятое математическое приближение описания зависимости  $m(\alpha)$  в виде функции с разрывом первого рода, позволяет в некоторых задачах определить размер и/или положение этой области, используя информацию о значениях функции и ее производных только на ее границах.

**Во второй главе** с помощью разработанного метода решается задача определения размерности односвязных фрактальных структур, образующихся в динамических процессах [5]. Примерами таких процессов могут быть распространение стримеров, коагуляция и агломерация частиц, перколяция жидкости (например, нефти) через пористые среды. В общем случае с использованием только системы (3)-(4) такая задача решена быть не может, так как эта система переопределена. Однако можно рассмотреть классы задач, для которых эта проблема преодолима.

К первому классу задач, которые могут быть разрешены с помощью системы (3)-(4), можно отнести те задачи, в которых ничего не известно о размере области перехода  $\Delta\alpha$ , но при этом, получающийся фрактал можно считать самоподобным на всех рассматриваемых масштабах. Другими словами, изменяя масштаб рассмотрения, мы будем видеть каждый раз картину подобную изначальной. При этом должна существовать какая-либо автомодельная зависимость, связывающая, к примеру,

характерные размеры элементов фрактала (или параметры, зависящие от них) с линейными размерами системы или масштабом рассмотрения данного фрактала. Такой фрактал можно считать “идеальным” с математической точки зрения.

В такой “идеальной” постановке можно рассмотреть, к примеру, задачу о вытеснении менее вязкой жидкостью более вязкую, с образованием вязких “пальцев”. Задача состоит в следующем. Изотропное пространство, заполнено вязкой жидкостью, с центром координат в точке  $R = 0$ . В эту точку подводится менее вязкая жидкость. В начале процесса менее вязкая жидкость имеет форму расширяющегося шара. Через некоторое время эта форма теряет свою устойчивость, и на поверхности шара появляются “отростки” - вязкие “пальцы”. Какое-то время они растут, а затем также теряют устойчивость и на их поверхности появляются “отростки”. Затем, все повторяется. Будем предполагать, что возникающий объект является вложенным в трехмерное пространство и самоподобным на разных масштабах. Это означает, что если посмотреть на область, занятую менее вязкой жидкостью с **большим** увеличением, то изначально расширяющийся шар окажется не однородным, а, так же, как и остальная область, обладающий сложной - фрактальной структурой. В точках потери устойчивости и возникновения нового каскада вязких “пальцев” происходит разрыв значений градиента объема, заполненного менее вязкой жидкостью.

В такой постановке с использованием метода описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы, в работе найдено соотношение, связывающее объем фрактальной структуры, типа вязких «пальцев», и радиус, откладываемый от начала координат в точке  $R = 0$  в трехмерном пространстве:

$$V(R) \approx \frac{4}{3} \pi R_0^3 + 0.08 R_0^3 \left( \left( \frac{R}{R_0} \right)^{2.7} - 1 \right), \quad (5)$$

где  $R \geq R_0$ ,  $R_0$  - определяет масштаб рассмотрения системы.

Второй класс задач, которые можно решать только на основе полученных соотношений (3)-(4) будет характеризоваться тем, что фрактальный объект является самоподобным только в определенном смысле: уменьшая масштаб рассмотрения мы будем видеть все более мелкие детали, которые не были видны ранее, крупные же детали будут оставаться неизменными (в них не будет «прорисовываться» более тонкая структура) В такой постановке невозможна перенормировка параметров, применяемая при решении задач первого класса. При этом важной характеристикой задач второго класса может служить то, что зона перехода от элементов одного масштаба к элементам другого масштаба осуществляется в малой области – “тонком” слое. Приближение “тонкого” слоя проявляется в том, что в переходных зонах рост неустойчивостей происходит локализовано – по одному отростку, в отличие от задач первого класса, где этот процесс можно считать коллективным явлением, охватывающим сразу весь рассматриваемый масштаб.

Примерами задач о фракталах второго класса могут служить задачи о дендритах: кровеносной и нервной системах, распространении стримеров, росте деревьев. Такого рода фракталы называют “лохматыми” фракталами. Вначале они имеет форму близкую к цилиндрической или изогнутой цилиндрической, а после развития неустойчивостей приобретают вид фрактальных объектов, вложенных в трехмерное пространство.

Использование метода описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы, для этого класса задач также позволило найти соотношение, связывающее

объем дендрита структуры и радиус, откладываемый от начала координат в точке  $R = 0$  в трехмерном пространстве:

$$V(R) \approx 48.58SR_0 \left( \frac{R}{R_0} \right)^{1.55} - 47.58SR_0. \quad (6)$$

Из выражений (5) и (6), в частности, следует, что величины размерностей фрактальных структур типа вязких «пальцев» и дендритов, вложенных в трехмерное пространство, равны соответственно:  $D \approx 2.7$  и  $D \approx 1.55$ , что хорошо соответствует имеющимся экспериментальным данным (Носков М.Д., Малиновский А.С., Закк М., Шваб А.И.).

Кроме того, обсуждаются методы описания процессов, протекающих в односвязных фрактальных структурах [4], [13].

Показано, что основными недостатками описания таких процессов с помощью уравнений в частных производных, в которых используются производные в дробной степени (соответствующие производным типа Римана-Лиувилля) является, во-первых, невозможность учета влияния масштаба структурного элемента фрактала на скорость протекания процесса, хотя в задачах подобного рода такая зависимость явно прослеживается; во-вторых, отсутствие четкой обоснованности перехода к дифференцированию с дробными производными.

Разрабатывается метод описания процессов, протекающих в односвязных фрактальных структурах с помощью дифференциальных уравнений, в которых учитывается масштабный фактор, без привлечения производных по времени и пространству в дробной степени. Предполагается, что на фиксированном масштабе фрактальной структуры мы исследуем изменение какого-либо параметра, рассматриваемого физического процесса на интервале времени  $\Delta t_1 = t_1 - t_0$  ( $\Delta t_1 \neq 0$ ). При переходе к другому масштабу (при сохранении всех прочих характеристик геометрии пространства), можно будет обнаружить, что для точно такого же изменения параметра физического процесса потребуется другой интервал времени  $\Delta t_2 = t_2 - t_0$ . Прделав такую процедуру много раз, можно каждому масштабу  $\delta_k$  поставить в соответствие свой интервал времени:  $\Delta t_k = \Delta t_k(\delta_k)$ .

Обычно в реальности масштаб меняется скачком (например, в точках ветвления кровеносных сосудов), но в качестве модели можно рассмотреть фазовое пространство с непрерывным изменением масштаба. То есть считать, что, обезразмеренные на единицу, масштабы фрактальной структуры плавно изменяются от начального – единичного масштаба:  $\delta = 1$ , до  $\delta = \delta_0$ , где  $0 < \delta_0 \leq 1$ . В этом случае изменение интервалов времени так же будет непрерывным:  $\Delta t = \Delta t(\delta)$  ( $\Delta t \neq 0$ ). Следовательно, можно найти производную

$$\frac{d(\Delta t(\delta))}{d\delta} = \frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} = \frac{dt}{d\delta} = \frac{1}{\delta}.$$

Здесь  $t_n$  - начало отсчета времени рассматриваемого физического процесса.

Необходимо отметить, что вышеприведенные рассуждения верны в том случае, если в рассматриваемом физическом процессе мы исследуем изменение либо только одного параметра, либо нескольких, но таких, для которых изменение интервалов времени на разных масштабах происходит согласовано для всех параметров. Безусловно, существуют случаи, когда все происходит не так. Например, если одновременно исследуются разномасштабные по времени процессы, то некоторые



параметры могут “не замечать” изменение пространственных масштабов вообще, а другие сильно зависеть от их вариации. В этом случае для каждого  $j$ -го класса согласованных параметров будут существовать свои зависимости  $\Delta t^j = \Delta t^j(\delta)$  и свои производные  $\dot{\delta}^j$ . Таких случаев в данной работе мы касаться не будем. Здесь будут рассмотрены только задачи, в которых исследуются процессы с согласованными изменениями интервалов времени.

В том случае, когда диапазон масштабов  $\delta$  ограничен значениями:  $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ , где  $0 < \delta_0 \leq 1$ , объем, занимаемый фрактальной структурой  $V(R)$ , в приближении непрерывности изменения масштаба можно представить в виде:  $V(R) = \int_{\delta_0}^1 G(R, \delta) d\delta$ , где

$G(R, \delta)$  - плотность распределения объема, занимаемого фрактальной структурой, по масштабам  $\delta$ .

В силу того, что мы рассматриваем ограниченный диапазон масштабов  $\delta$ , величина  $V(R)$  - это именно объем, занимаемый фрактальной структурой, вложенной в евклидовое пространство  $R^n$ , а не мера множества дробной размерности. У такой структуры может быть измерен объем в евклидовом пространстве  $R^n$  (например, так, как это сделал Архимед с короной царя Сиракуз Гиерона). Можно это сделать и с помощью измерительных приборов. При этом полученное значение  $V(R)$  будет ограничено, если в качестве единицы измерения линейных размеров брать самый маленький масштаб  $\delta_0$ .

Выражение для объема можно переписать в виде:

$$\int_{\delta_0}^1 \varphi(\delta) d\delta = 1, \quad (7)$$

где  $\varphi(\delta) = G(R, \delta)/V(R)$  - удельная плотность распределения фрактальной структуры.

Будем рассматривать только самоподобные фракталы. Размерность подобия такого фрактала будет совпадать с фрактальной размерностью в выражении  $V(R) = aR^D + b$  и может быть записана в виде соотношения:

$$D = \frac{\ln N}{\ln r^{-1}} = \frac{\ln(G(R, \delta)/G(R, r\delta))}{\ln r^{-1}},$$

где  $r = const$  - коэффициент подобия. Для диапазона масштабов  $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ , где  $0 < \delta_0 \leq 1$ ,  $0 < r < 1$ . Диапазон для коэффициента  $r$ , выбранный таким образом обеспечивает положительное значение размерности  $D$ . Однако реальный диапазон значений коэффициента  $r$  для самоподобного фрактала должен быть уже:  $0 < r \leq 1/2$ , поскольку минимальное количество элементов, получающихся из одного начального, не может быть меньше двух.

Значение размерности  $D$  для односвязной фрактальной области, вложенной в трехмерное пространство, должно быть больше единицы, поэтому  $1 < D < 3$ .

Выражение для размерности задает скейлинговое соотношение:  $G(R, r\delta) = r^D G(R, \delta)$ . Используя это выражение, можно найти приближенное выражение для производной  $\partial G/\partial \delta$ . В самом деле,

$$\frac{\partial G(R, \delta)}{\partial \delta} = \lim_{\Delta \delta \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta \delta} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{G(R, \delta) - G(R, r\delta)}{\delta - r\delta} = \frac{1 - r^D}{1 - r} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{G(R, \delta)}{\delta}.$$

Таким образом, мы получили производную  $\partial G/\partial \delta$  для малых значений  $\delta$

(когда  $\delta \rightarrow \delta_0 \rightarrow 0$ ). Но поскольку фрактал является самоподобным объектом, то следует экстраполировать это выражение и на диапазон значений  $\delta$ :  $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ , где  $0 < \delta_0 \leq 1$ . Поэтому окончательно можно записать:

$$\frac{\partial G(R, \delta)}{\partial \delta} = \frac{1-r^D}{1-r} \frac{G(R, \delta)}{\delta} = \beta \frac{G(R, \delta)}{\delta}, \quad \text{где } \beta = \frac{1-r^D}{1-r}. \quad (8)$$

Следовательно,

$$\frac{d\varphi(\delta)}{d\delta} = \beta \frac{\varphi}{\delta}. \quad (9)$$

Величина  $\beta$  является константой для каждого конкретного фрактала и принимает значения из диапазона:  $1 < \beta < 2$ , для любых значений  $1 < D < 3$  и  $0 < r \leq 1/2$ .

Из уравнения (9) находим, что  $\varphi(\delta) = \varphi_0 \delta^\beta$ , где  $\varphi_0 = const$ . Значение  $\varphi_0$  можно найти, решив уравнение  $\int_{\delta_0}^1 \varphi(\delta) d\delta = \varphi_0 \int_{\delta_0}^1 \delta^\beta d\delta = 1$ . Из него получаем:  $\varphi_0 = \frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}}$ . И, следовательно,

$$\varphi(\delta) = \frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}} \delta^\beta. \quad (10)$$

Найдем среднее значение величины  $(t(\delta) - t_n)/\delta$  на масштабе рассмотрения  $\delta$ , определяемое заданной удельной плотностью распределения  $\varphi(\delta)$ :

$$\left\langle \frac{t(\delta) - t_n}{\delta} \right\rangle = \int_{\delta_0}^1 \frac{t(\delta) - t_n}{\delta} \varphi(\delta) d\delta = \frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}} \int_{\delta_0}^1 \frac{t(\delta) - t_n}{\delta} \delta^\beta d\delta = \frac{\beta+1}{\beta(1-\delta_0^{\beta+1})} \int_{\delta_0}^1 (t(\delta) - t_n) d\delta^\beta.$$

Интегрируя полученное выражение по частям, находим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{t(\delta) - t_n}{\delta} \right\rangle &= \frac{\beta+1}{\beta(1-\delta_0^{\beta+1})} \left( (t_1 - t_n) - (t_0 - t_n) \delta_0^\beta \right) - \frac{\beta+1}{\beta(1-\delta_0^{\beta+1})} \int_{\delta_0}^1 \frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} \delta^\beta d\delta = \\ &= \frac{\beta+1}{\beta(1-\delta_0^{\beta+1})} \left( (t_1 - t_n) - (t_0 - t_n) \delta_0^\beta \right) - \frac{1}{\beta} \int_{\delta_0}^1 \frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} \varphi(\delta) d\delta = \\ &= \frac{\beta+1}{\beta(1-\delta_0^{\beta+1})} \left( (t_1 - t_n) - (t_0 - t_n) \delta_0^\beta \right) - \frac{1}{\beta} \left\langle \frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} \right\rangle. \end{aligned}$$

где  $t_1 - t_n = t(\delta)_{\delta=1} - t_n$  и  $t_0 - t_n = t(\delta)_{\delta=\delta_0} - t_n$  - интервалы времени, соответствующие процессу, рассматриваемому на масштабах  $\delta = 1$  и  $\delta = \delta_0$ , для  $t(\delta) > 0$  при любом  $\delta$ :  $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ .

Полученное выражение можно переписать в виде:

$$\left\langle \frac{d(t(\delta) - t_n)}{d\delta} \right\rangle = \left\langle \frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}} \left( (t_1 - t_n) - (t_0 - t_n) \delta_0^\beta \right) - \beta \frac{t(\delta) - t_n}{\delta} \right\rangle.$$

Так как фрактальное множество является самоподобным для различных значений  $\delta$ , то равенство, которое выполняется для величин, осредненных по всем значениям  $\delta$ , должно выполняться при осреднении по отдельным интервалам  $\delta$ , а в предположении непрерывности  $\delta$  (устремляя эти интервалы к нулю) и для самих этих величин, измеренных в локальных областях этого пространства. Поэтому от полученного уравнения для средних можно перейти к соотношению, связывающему выражения в точках локальных значений  $\delta$ :

$$\frac{d(t(\delta)-t_n)}{d\delta} = \frac{\beta+1}{1-\delta_0^{\beta+1}} \left( (t_1-t_n) - (t_0-t_n)\delta_0^\beta \right) - \beta \frac{t(\delta)-t_n}{\delta}, \quad t(\delta) > t_n. \quad (11)$$

Необходимо отметить, что  $t(\delta)$  в полученном уравнении не может быть в точности равно началу отсчета времени физического процесса  $t_n$ , поскольку, несмотря на то, что это уравнение описывает продолжительность протекания физического процесса в зависимости от масштаба в ограниченном масштабном интервале:  $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ , структура фрактала предполагается «идеальная» с математической точки зрения и, следовательно, имеющая бесконечный масштабный ряд. На других (за пределами рассматриваемых) масштабах время должно отсчитываться также от значения  $t_n$  и, следовательно, должны существовать меньшие интервалы времени  $t(\delta)-t_n$  по сравнению с рассматриваемыми для значений масштабов  $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ .

Решением уравнения (11), является выражение

$$t(\delta)-t_n = (t_0-t_n) \left( \frac{\delta_0}{\delta} \right)^\beta + \frac{(t_1-t_n) - (t_0-t_n)\delta_0^\beta}{1-\delta_0^{\beta+1}} \delta, \quad \text{где } t(\delta) > t_n.$$

Если в полученную зависимость подставить соотношение  $t_1-t_n = t(\delta)_{\delta=1} - t_n$  или  $t_0-t_n = t(\delta)_{\delta=\delta_0} - t_n$ , то найдем, выражение, связывающее  $t_1-t_n$  и  $t_0-t_n$ :  $t_1-t_n = (t_0-t_n)\delta_0^\beta$ . С учетом этого соотношения, можно окончательно записать:

$$t(\delta)-t_n = (t_0-t_n) \left( \frac{\delta_0}{\delta} \right)^\beta = \frac{t_1-t_n}{\delta^\beta} \quad \text{где } t(\delta) > t_n, \quad \delta_0 \leq \delta \leq 1, \quad 0 < \delta_0 \leq 1. \quad (12)$$

Поскольку  $\dot{\delta} = \frac{1}{d(t(\delta)-t_n)/d\delta}$ , то из соотношения (12), следует

$$\dot{\delta} = -\frac{\delta^{\beta+1}}{\beta(t_1-t_n)}, \quad \text{где } \beta = \frac{1-r^D}{1-r}, \quad t_1 > t_n. \quad (13)$$

Учитывая выражение (13), можно использовать уравнения, полученные для описания физического процесса в евклидовом пространстве при описании этого процесса в пространстве с фрактальной геометрией.

Для этого введем дополнительную переменную  $\delta$ , характеризующую масштаб фрактальной структуры, в фазовое пространство переменных, используемых в уравнениях в частных производных:  $(t, \vec{x}) \rightarrow (t, \vec{x}, \delta)$ .

Предположим, что исследуемый физический процесс, описывается в евклидовом пространстве функцией  $f(t, \vec{x})$ :  $df/dt = \hat{A}f$ , ( $\hat{A}$  - произвольный дифференциальный оператор, вид которого зависит от конкретной задачи, определяющий протекание процессов обмена выделенной области с внешней средой и влияние на эту область внешних воздействий). Для того чтобы описать его в пространстве с дробной размерностью с учетом влияния масштаба фрактальной структуры, будем рассматривать функцию  $f(t, \vec{x}, \delta)$ .

При описании динамики такого процесса, полную производную

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

следует заменить новой полной производной, имеющей вид:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{\delta} \frac{\partial f}{\partial \delta}.$$

Если физический процесс является стационарным, то уравнение, описывающее его во всем фрактальном пространстве, характеризуемом постоянной  $\beta$ , задается в виде:

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\delta^{\beta+1}}{\beta(t_1 - t_n)} \frac{\partial f}{\partial \delta} = \hat{A}f.$$

или для  $f = f(t, \bar{x}; \mu(\delta))$ :

$$\sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial \mu} = \hat{A}f, \quad \text{где } \tilde{\mu} = \tilde{\mu}(\delta) = (t_1 - t_n)\delta^{-\beta}, \quad t_1 > t_n.$$

Если описываемый процесс является нестационарным, то время протекания физического процесса  $t_1$  на единичном масштабе  $\delta_1 = 1$  является просто временем  $t$  ( $t > t_n$ ), отсчитываемым от начала рассмотрения физического процесса, при описании этого процесса с помощью дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями. В этом случае, уравнение, описывающее нестационарный физический процесс во всем фрактальном пространстве, характеризуемом постоянной  $\beta$ , можно записать в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} - \frac{\delta^{\beta+1}}{\beta(t - t_n)} \frac{\partial f}{\partial \delta} = \hat{A}f, \quad \text{где } t > t_n.$$

или для  $f = f(t, \bar{x}, \mu(\delta))$ :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{t - t_n} \frac{\partial f}{\partial \mu} + \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \hat{A}f, \quad \text{где } \mu(\delta) = \delta^{-\beta}, \quad t > t_n. \quad (14)$$

Дополнительная переменная  $\delta$  (или  $\mu(\delta)$ ) в дифференциальных уравнениях обеспечит учет влияния масштаба фрактального множества на протекание физического процесса.

С учетом уравнения (14) решается задача распространения тепла от локализованного источника в бесконечное пространство, обладающее односвязной фрактальной структурой, “вложенной” в непроводящее тепло трехмерное пространство: найдено частное решение в случае произвольной зависимости коэффициента теплопроводности от масштаба рассмотрения системы и общее решение для коэффициента теплопроводности, не зависящего от масштаба рассмотрения системы.

**В третьей главе** разрабатывается метод описания стохастических процессов, происходящих в системах, не имеющих выделенных состояний равновесия, с помощью дифференциальных уравнений, но без традиционного в таких случаях использования стохастических дифференциальных уравнений [1], [9-10], [15-19].

В самых различных областях науки и техники зачастую приходится иметь дело не с детерминированными, а со стохастическими процессами и системами. Стационарная плотность вероятности однозначно определяет распределение случайной величины при реализации ее на промежутке времени, в котором происходит достаточно много ее реализаций. В результате, основные моменты, характеризующие такой процесс: среднее, дисперсия и так далее, являются определенными и, соответственно, могут быть предсказаны на любом достаточно большом интервале времени. В случае стационарной плотности вероятности

реализации стоимости ценных бумаг, игра на бирже была бы просто не возможна в связи с высокой предсказуемостью результата «в среднем». При стационарном распределении можно было бы с очень высокой точностью предсказывать реализации и других стохастических процессов, таких как метеорологические, гидродинамические и так далее. Однако большинство стохастических процессов являются в достаточной мере непредсказуемыми. Отсутствие определенности в них связано не только с вероятностным распределением возможных реализаций исследуемого процесса, но и с возможным нестационарным характером поведения плотности вероятности.

При исследовании таких систем часто подразумевают, что нахождение закона, согласно которому происходит эволюция плотности вероятности, позволит полностью решить задачу описания стохастического процесса. Однако если предположить, что для нахождения эволюционного закона для плотности вероятности необходимо решить какую-то более общую нелинейную задачу, то такое решение не обязано быть единственным. В случае неединственности решения такой задачи, различные плотности вероятности реализации случайной величины сами могут реализовываться произвольным образом. В этом случае неопределенность исследуемого процесса существенно повышается. Возможно, рассмотрение такого аспекта позволит объяснить некоторые особенности стохастических систем, в которых практически невозможно подобрать единственный закон, позволяющий достаточно полно «в среднем» описать их эволюцию.

Вопрос о том, по каким законам возникают и реализуются плотности вероятности в стохастических процессах, остается до сих пор открытым, несмотря на довольно пристальное внимание к нему со стороны ученых. В качестве основных направлений исследований этого вопроса можно выделить следующие: во-первых, это исследование динамических систем, описываемых автономными дифференциальными уравнениями, решения которых имеют хаотический характер; во-вторых, описание стохастических систем на основе стохастических дифференциальных уравнений.

Хаотический характер решений автономных дифференциальных уравнений, возникает из-за чрезвычайной высокой чувствительности решений к начальным данным, в результате чего, любое незначительное отклонение при задании траекторий в начальный момент времени, приводит к их расхождению в будущем, порождая, тем самым вычислительный хаос. Тем не менее, такой процесс необходимо отделять от истинно стохастических процессов, поскольку на математическом уровне строгости автономные дифференциальные уравнения подчиняются теореме о единственности. Проблема состоит в том, что такие уравнения не имеют аналитических решений, а вычислительные методы, всегда привносят неопределенность из-за конечности шага по времени. Причем происходит это не только при задании начальных условий, а на каждом шаге вычислений, что может явиться источником возникновения в фазовом пространстве странного аттрактора [14].

Широко известными способами для описания таких хаотических систем являются методы, использующие операторный подход, например, операторы Купмана - фон Неймана или операторы Перрона-Фробениуса. Эти подходы, вместо рассмотрения эволюции во времени единственного решения, рассматривают эволюцию «трубки», состоящей из различных траекторий, стартующих в один момент времени. В конечном счете, операторные методы сводятся к уравнению Лиувилля и

задают единственное решение для нестационарной плотности вероятности.

Методы описания стохастических систем на основе стохастических дифференциальных уравнений можно, в свою очередь, условно разделить на два класса:

- во-первых, это соотношения в форме уравнений Ланжевена, которые состоят из обычного детерминированного дифференциального уравнения и дополнительной части, описывающей случайный процесс;

- во-вторых, это уравнения Ито. Их форма напоминает уравнения Ланжевена, но записанных с использованием стохастических дифференциалов.

Такой подход, в отличие от методов исследования динамических систем, описываемых автономными дифференциальными уравнениями, предполагает задание неизменной во времени стохастической модели, накладываемой на детерминированное поведение системы. Этот подход основан на том, что «стохастика» процесса подбирается так, чтобы вычислительный эксперимент наиболее полно отражал эмпирический характер поведения системы. Общего метода по определению уравнения, которым должен описываться стохастический процесс не существует. Как правило, при описании реальных стохастических процессов не удается подобрать коэффициенты в стохастических уравнениях, которые бы удовлетворительно описывали процесс на довольно длительном промежутке времени. Кроме того, практически невозможно, сопрягать стохастические дифференциальные уравнения с обыкновенными детерминированными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных, например, уравнениями Навье-Стокса. Все это затрудняет использование стохастических дифференциальных уравнений при описании стохастических процессов и, что особенно важно, не позволяет в полной мере понять природу «стохастичности» исследуемых процессов. От уравнений Ланжевена и Ито можно перейти к уравнениям типа Фоккера-Планка, но лишь в случае, когда характерное время корреляции случайной «силы» много меньше времени релаксации стохастической системы за счет диссипативной «силы». Таким требованиям удовлетворяют истинно марковские (без скрытых параметров) процессы. В этом случае при усреднении случайных величин можно ограничиться рассмотрением двух первых моментов, что и приведет к ограничению членов уравнения в частных производных только диссипативным и диффузионным членами. Однако задавая такие жесткие требования к стохастической системе, мы, тем самым, упускаем очень важные аспекты этого процесса, о чем свидетельствуют эмпирические данные, показывающие сильную ограниченность применения описания реальных стохастических процессов с использованием уравнений типа Фоккера-Планка. В любом случае, независимо от того используются ли стохастические дифференциальные уравнения или уравнения типа Фоккера-Планка для описания стохастических процессов, они также, как и операторные методы не позволяют получить в качестве решения неединственную плотность вероятности реализации стохастической переменной.

Для того чтобы понять, как формируются (возможно неединственным образом) и эволюционируют плотности вероятности случайных стохастических процессов, необходимо выйти за рамки принятых подходов.

В отличие от подхода, принятого при описании хаотических динамических систем, мы не будем предполагать детерминированность (в математическом смысле) процесса - будем считать, что стохастичность процесса проявляется в том, что

реализация значения исследуемой величины происходит случайным образом в соответствии с плотностью (или плотностями) вероятности в заданный момент времени. А, в отличие от метода описания процессов с помощью стохастических уравнений, закон изменения плотности вероятности не будем считать наперед заданным и неизменным: изменение функции плотности (или плотностей) вероятности будет зависеть от того, какие значения случайной величины реализовались. В данной работе будет построен метод описания стохастических процессов в расширенном фазовом пространстве систем, не имеющих выделенных состояний равновесия, когда реализация случайной величины исследуемого процесса влечет за собой изменение плотности вероятности реализации, причем такое изменение не обязано быть малой величиной. В качестве решения задачи определяются плотности вероятности исследуемого процесса в заданный момент времени, при этом показывается, что такое решение может быть неединственным в определенном диапазоне возможной реализации случайной величины. В этом случае реализация самой плотности вероятности, в соответствии с которой и реализуются случайные величины, будет также происходить вероятностным образом. В соответствии с Центральной Предельной Теоремой Линдберга, распределение реализованных исследуемых величин (при неединственной плотности вероятности и большом числе реализаций) будет стремиться к нормальному (Гаусовскому) распределению.

С помощью анализа размерности фазового пространства определяются устойчивые и неустойчивые ветви решения для плотности вероятности в тех областях реализации случайной величины, где может реализовываться единственное решение.

Рассмотрим временной процесс, описываемый реализуемыми в фиксируемые моменты времени  $t_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, k-1, k$ ) значениями  $\tilde{q}_i = \tilde{q}(t_i)$ . Причем множество реализованных значений  $\tilde{Q}(\tilde{q}) = \{\tilde{q}\}$  является подмножеством множества  $Q(q) = \{q\}$  всех возможных исследуемых значений  $q$ :  $\tilde{Q}(\tilde{q}) \subset Q(q)$ . Реализация значения  $\tilde{q}_i$  в момент времени  $t_i$  происходит случайным образом в соответствии с плотностью вероятности  $\varphi_i(q)$ . Будем считать, что также, как и для марковских процессов, состояние исследуемого процесса будет определяться только предыдущим моментом времени, однако при этом не будет исключаться возможность влияния скрытых факторов. То есть, исследуемый процесс будем считать скрытой марковской моделью. Скрытым фактором в случае рассмотрения стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия, будет выступать “стремление” системы изменить свою функцию плотности вероятности, так, чтобы в следующий момент времени минимизировать отклонение ее среднего значения от значения, реализованного в предыдущий момент времени.

Остановимся на построении математической модели такой системы. Построим расширенное пространство переменных  $(t, q; \varphi)$ , в котором плоскость исследуемого процесса  $(t, q)$  является проекцией пространства  $(t, q; \varphi)$  (см. рис.2). Будем искать в пространстве  $(t, q; \varphi)$  такие зависимости  $\varphi = \varphi(t, q) = \varphi(\tilde{q}(t), q)$ , которые связывают между собой значения реализованных величин  $\tilde{q}$  в различные моменты времени.

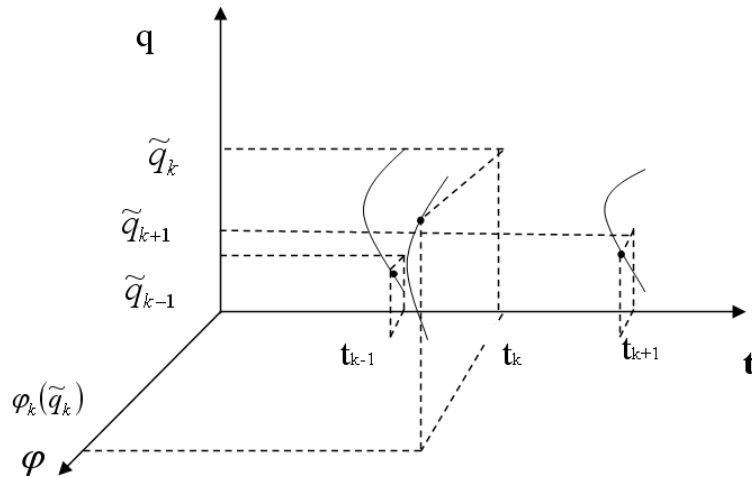


Рис. 2. В расширенном пространстве  $(t, q; \varphi)$  ведется поиск зависимостей  $\varphi = \varphi(t, q)$ , определяющих плотности вероятности реализации случайной величины в различные моменты времени.

Предположим, что в каждый фиксируемый момент времени  $t_i$ , существует нормированная функция  $\varphi(t_i, q) = \varphi_i(q) : \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_i(q) dq = 1$ , которая описывает вероятность реализации значения  $\tilde{q}_i$ . В точке  $t_i$  реализованное значение  $\tilde{q}_i$  представимо в виде:

$$\tilde{q}_i = \langle q \rangle_i + (\Delta q)_i, \quad (15)$$

где  $(\Delta q)_i$  ( $\Delta q \in C^1(\mathbb{R})$ ) - отличие реализованного в момент времени  $t_i$ , значения  $\tilde{q}_i$  от среднего значения возможных реализаций величин  $q$ :

$$\langle q \rangle_i = \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi_i(q) dq. \quad (16)$$

Поскольку рассматриваются стохастические системы марковского типа, не имеющие выделенных состояний равновесия, то предполагается, что в них в каждый фиксированный момент времени система “знает” только о реализованном в предыдущий момент времени значении и не “подозревает” о существовании ни каких других “реперных” точек. Поэтому, реализация на текущем шаге значения  $\tilde{q}$  ведет на следующем шаге к такому изменению функции  $\varphi(q)$  и, соответственно, среднего значения  $\langle q \rangle$ , что это среднее значение “стремится” сравняться по величине с реализованным значением  $\tilde{q}$ , и следующая реализация исследуемого параметра происходит случайным образом в соответствии с новой плотностью вероятности. Если же, на текущем шаге, реализуется значение  $\tilde{q}$ , в точности равное среднему:  $\tilde{q} = \langle q \rangle$ , то при переходе к следующему шагу функция  $\varphi(q)$  не изменяется и реализация значения  $\tilde{q}$  на следующем шаге происходит с вероятностью, определяемой плотностью вероятности, полученной на текущем шаге.

Для таких систем найдем зависимость, связывающую плотность вероятности  $\varphi_k(q)$ , реализуемую в момент времени  $t_k$ , с реализованными в момент времени  $t_{k-1}$  значением  $\tilde{q}_{k-1}$  и плотностью вероятности  $\varphi_{k-1}(q)$ . Описывая исследуемый процесс в пространстве  $(t, q; \varphi)$ , заменим в выражениях (15)-(16) значения, реализуемые в



фиксированные моменты времени  $t_i$ , значениями, реализуемыми в любой произвольный момент времени  $t$ :  $\tilde{q}_i = \tilde{q}(t_i) \rightarrow \tilde{q}(t)$ ,  $(\Delta q)_i = (\Delta q)(t_i) \rightarrow (\Delta q)(t)$ ,  $\varphi_i(q) = \varphi(t_i, q) \rightarrow \varphi(t, q)$ . При этом считаем, что нормировка функции  $\varphi(t, q)$  остается постоянной во времени.

$$\tilde{q}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi(t, q) dq + (\Delta q)(t).$$

Продифференцируем обе части полученного выражения по времени:

$$\frac{d\tilde{q}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} q \varphi(t, q) dq + \frac{d(\Delta q)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} q \frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} dq + \frac{d(\Delta q)}{dt}.$$

Используя свойство постоянства нормировки функции  $\varphi(t, q)$ :  $\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, q) dq = 0$ ,

вычтем из правой части полученного соотношения нулевой член:

$\kappa \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t, q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \kappa \frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} dq$ , где  $\kappa = const$ , и перепишем выражение в виде:

$$\frac{d\tilde{q}(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \kappa) \frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} dq + \frac{d(\Delta q)(t)}{dt}.$$

Поскольку не будут рассматриваться никакие другие механизмы изменения функции  $\varphi$  от времени, кроме вышеописанного – при реализации текущего значения  $\tilde{q}$ , то в линейном приближении выражение для производной функции  $\varphi$  по времени будет иметь вид:

$$\frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\tilde{q}(t), q)}{\partial t} = \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \frac{d\tilde{q}(t)}{dt}.$$

Используя его, мы исключаем возможность, например, самопроизвольного изменения функции  $\varphi$ . При этом, выражение для производной  $d\tilde{q}/dt$ , приобретает вид:

$$\frac{d\tilde{q}(t)}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \kappa) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \frac{d\tilde{q}(t)}{dt} dq + \frac{d(\Delta q)(t)}{dt}. \quad (17)$$

Поскольку рассматриваемый процесс на данном масштабе рассмотрения зависит только от предыдущего момента времени, то до момента времени  $t_{k-1}$ , отстоящего на шаг от исследуемого момента времени  $t_k$ , реализованные значения  $\tilde{q}$  нас интересовать не будут. Необходимо заметить, что введение на этом этапе двух моментов времени  $t_{k-1}$  и  $t_k$ , не означает обратного перехода от непрерывного к дискретному рассмотрению. Эти моменты времени вводятся только для удобства обозначения и их использование аналогично заданию граничных условий задачи. Никакие другие моменты в непрерывной постановке задачи использоваться не будут.

Доопределяя величину  $\tilde{q}_{k-1}$ , как постоянное значение, на интервал  $t < t_k$ , и доопределяя значение  $\tilde{q}_k$ , которое должно реализоваться в момент времени  $t_k$ , на интервал  $t \geq t_k$ , запишем функцию  $\tilde{q}(t)$  на плоскости  $(t, q)$  в виде разрывной функции:

$$\tilde{q}(t) = \begin{cases} \tilde{q}_{k-1}, & \text{если } t < t_k \\ \tilde{q}_k, & \text{если } t \geq t_k \end{cases}.$$

Введем дополнительную функцию  $H$ , которая будет принимать значение равное нулю везде до точки разрыва и равное единице везде после точки разрыва. Такая функция может иметь вид:

$$H = \frac{\tilde{q}(t) - \tilde{q}_{k-1}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} = U_-(t - t_{k-1}) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < t_k \\ 1, & \text{при } t \geq t_k \end{cases}, \text{ где } \tilde{q}(t) = \begin{cases} \tilde{q}_{k-1}, & \text{если } t < t_k \\ \tilde{q}_k, & \text{если } t \geq t_k \end{cases}. \quad (18)$$

Производная функции  $H$  по  $t$  будет равна  $dH/dt = dH/d(t - t_k) = \delta(t - t_k)$ , где  $\delta$  - дельта-функция. В линейном приближении изменения функции  $\varphi(t, q)$  в окрестности точки  $t_k$ , можно записать:  $(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k} \cdot (t - t_k) = (d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k} \cdot (q - \tilde{q}_k)$ .

Если в точке  $q = \tilde{q}_k$  выполняется соотношение:  $(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k} = 0$ , то будет равна нулю и производная  $(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}$ , то есть в следующий момент времени  $t_{k+1}$  плотность вероятности не изменится, и реализация следующего значения  $\tilde{q}$  на плоскости  $(t, q)$  произойдет случайным образом в соответствии с плотностью вероятности  $\varphi_{k+1}(q) = \varphi_k(q)$ . Если же  $(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k} \neq 0$ , то  $(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k} \neq 0$  и

$$t - t_k = \frac{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}}{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}} (q - \tilde{q}_k), \text{ поэтому,}$$

$$\frac{dH}{dt} = \delta(t - t_k) = \delta\left(\frac{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}}{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}} (q - \tilde{q}_k)\right) = \left|\frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}}\right| \delta(q - \tilde{q}_k). \quad (19)$$

Чтобы придерживаться “единообразия” описания изменения функции  $\varphi(t, q)$ , можно, не теряя общности, не рассматривать те моменты времени  $t_j$ , когда равны нулю производные  $(d\varphi_j(q)/dq)_{q=\tilde{q}_j}$ ,  $(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_j}/dt)_{t=t_j}$ , а рассматривать следующие за ними моменты времени  $t_{j+1}$ . Как будет показано ниже, полученные итерационные выражения для функции  $\varphi(t, q)$ , в линейной постановке задачи, не будут зависеть от шага времени  $\Delta t$ , и поэтому, такие временные переходы не являются запрещенными.

Используя зависимости (18)-(19), а так же выбирая в качестве константы  $\kappa$  значение  $\kappa = \langle q \rangle_k$ , перепишем выражение (17) в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{q}}{dt} &= \frac{d(\Delta q)}{dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \langle q \rangle_k) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial H} \frac{dH}{dt} dq = \\ &= \frac{d(\Delta q)}{dt} + \int_{-\infty}^{+\infty} (q - \langle q \rangle_k) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) dq = \\ &= \frac{d(\Delta q)}{dt} + (\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k) (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k}/dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left( \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k}. \end{aligned}$$

Значение константы  $\kappa = \langle q \rangle_k$ , выбиралось из соображения, чтобы в том случае, если  $\tilde{q}_k = \langle q \rangle_k$ , изменение  $\tilde{q}$  не зависело бы от изменения функции  $\varphi$ , то есть выполнялось бы соотношение:  $d\tilde{q}/dt = d(\Delta q)/dt$ .

Осредняя левую и правую часть полученного выражения по плотности вероятности  $\varphi_k(q) dq$ , получим соотношение:

$$\left\langle \frac{d\tilde{q}}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle + (\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k) (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k} / dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left( \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k}, \quad \langle \cdot \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdot \varphi_k(q) dq. \quad (20)$$

Обратимся к левой части выражения (20). Используя выражения (18)-(19), получим:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\tilde{q}}{dt} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tilde{q}}{dt} \varphi_k(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial H} \frac{dH}{dt} \varphi_k(q) dq = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k} / dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) \varphi_k(q) dq = \\ &= (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k} / dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}. \end{aligned}$$

Значение  $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$  в правой части выражения (20) в приближении линейной интерполяции изменения по времени функции  $\varphi(t, q)$  и ее производных на интервале  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ , можно так же найти, используя выражения (18)-(19). Для этого заметим, что в случае рассмотрения любой неизменной во времени функции  $\varphi(q)$ , имеют место соотношения:  $\langle \Delta q \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta q \varphi(q) dq = 0$  и  $\left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\Delta q)}{dt} \varphi(q) dq = \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta q \varphi(q) dq = 0$ .

Поэтому ненулевое значение величины  $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$  на интервале  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ , может быть обусловлено только изменением функции  $\varphi(t, q)$  во времени. Следовательно, среднее значение производной  $\langle d(\Delta q)/dt \rangle$ , можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d(\Delta q)}{dt} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\Delta q)}{dt} \varphi_k(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial(\Delta q)}{\partial \varphi(t, q)} \frac{\partial \varphi(t, q)}{\partial t} \varphi_k(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \left( \frac{1}{\partial \varphi(t, q) / \partial q} \right) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \frac{\partial \tilde{q}}{\partial H} \frac{dH}{dt} \varphi_k(q) dq = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta \left( \frac{1}{\partial \varphi(t, q) / \partial q} \right) \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k} / dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \delta(q - \tilde{q}_k) \varphi_k(q) dq = \\ &= \left( \Delta \left( \frac{1}{\partial \varphi(t, q) / \partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} (\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}) \left| \frac{(d\varphi(t, q)|_{q=\tilde{q}_k} / dt)_{t=t_k}}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} \right| \left( \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (20), приходим к зависимости:

$$\varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k} = \left( \Delta \left( \frac{1}{\partial \varphi(t, q) / \partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} \varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k} \left( \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} + (\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k) \left( \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k}.$$

В случае линейного приближения изменения функции на интервале времени  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$  производная  $(\partial \varphi(\tilde{q}, q) / \partial \tilde{q})_{q=\tilde{q}_k}$  может быть записана в виде:

$$\left( \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \approx \frac{\varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}.$$

Учитывая, что на рассматриваемом интервале времени  $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ , можно записать:

$$\left( \Delta \left( \frac{1}{\partial \varphi(t, q) / \partial q} \right) \right)_{q=\tilde{q}_k} = \frac{1}{(d\varphi_k(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{(d\varphi_{k-1}(q)/dq)_{q=\tilde{q}_k}},$$

получаем:

$$\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1} = \left( \varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k} \right) \left( \frac{1}{(d\varphi_k(q)/dq) \Big|_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{(d\varphi_{k-1}(q)/dq) \Big|_{q=\tilde{q}_k}} \right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}}. \quad (21)$$

Соотношение (21), связывающее реализованное в момент времени  $t_k$  значение  $\tilde{q}_k$  с реализованным значением в момент времени  $t_{k-1}$ , а также с плотностью вероятности распределения и ее производной на текущем шаге, с плотностью вероятности распределения и ее производной на предыдущем шаге (все в точке  $\tilde{q}_k$ ), является инвариантным относительно изменения временных масштабов рассмотрения исследуемых систем. В самом деле, при выводе соотношения (21) выбирался произвольный шаг по времени  $\Delta t$ , однако его величина не вошла в окончательное выражение.

Тем не менее, масштаб времени  $\Delta t$  опосредованно через значение функции  $\varphi_{k-1}(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}$  и значение производной  $(d\varphi_{k-1}(q)/dq) \Big|_{q=\tilde{q}_k}$  влияет на значения прогнозируемых в следующий момент времени величин  $\varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}$ ,  $(d\varphi_k(q)/dq) \Big|_{q=\tilde{q}_k}$  и  $\langle q \rangle_k$ . В самом деле, зафиксировав реализованное на текущем  $k$ -ом шаге значение  $\tilde{q}_k$  и взяв в качестве предыдущего,  $(k-1)$ -го шага точку, отстоящую от точки  $k$  не на расстояние  $\Delta t$ , а на расстояние  $n\Delta t$ , где  $n$  - любое положительное число, мы получим другие эмпирические значения  $\tilde{q}_{k-1}$ ,  $\varphi_{k-1}(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}$  и  $(d\varphi_{k-1}(q)/dq) \Big|_{q=\tilde{q}_k}$ , а следовательно (в соответствии с выражением (7)), и другие значения функции  $\varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}$ , ее производной  $(d\varphi_k(q)/dq) \Big|_{q=\tilde{q}_k}$  и величины  $\langle q \rangle_k$  на текущем  $k$ -ом шаге. Полученные таким образом новые значения  $\varphi_k(q) \Big|_{q=\tilde{q}_k}$ ,  $(d\varphi_k(q)/dq) \Big|_{q=\tilde{q}_k}$  и  $\langle q \rangle_k$  будут являться характеристиками нового (большого, если  $n > 1$ , и меньшего, если  $n < 1$ ) временного масштаба рассмотрения системы. Однако такое влияние масштаба времени  $\Delta t$  не носит регулярного характера на прогнозируемые величины – их одинаковые значения могут быть получены на разных временных масштабах рассмотрения. Отсутствие параметра  $\Delta t$  в соотношении (21) ведет к тому, что при таком подходе отпадает необходимость специально вводить случайный процесс, описывающий вероятностные по времени скачки изменения системы, как это делают, например, при описании пуассоновских процессов.

Значение  $\tilde{q}_k$  в соотношении (21) напрямую не зависит от величины  $\tilde{q}_{k-1}$ , то есть на плоскости  $(t, q)$  параметр  $\tilde{q}_i$  ведет себя как случайная величина.

Учитывая, что  $\langle q \rangle_k$  и  $\langle q \rangle_{k-1}$  - являются константами, характеризующие распределения  $\varphi_k$  и  $\varphi_{k-1}$ , выражение (19) можно записать в виде:

$$\frac{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k(q - \langle q \rangle_k) \Big|_{q=\tilde{q}_k}} = \left( 1 - \frac{\varphi_{k-1}(q - \langle q \rangle_{k-1}) \Big|_{q=\tilde{q}_k}}{\varphi_k(q - \langle q \rangle_k) \Big|_{q=\tilde{q}_k}} \right) \left( \frac{1}{\left( \frac{d\varphi_k(q - \langle q \rangle_k)}{d(q - \langle q \rangle_k)} \right) \Big|_{q=\tilde{q}_k}} - \frac{1}{\left( \frac{d\varphi_{k-1}(q - \langle q \rangle_{k-1})}{d(q - \langle q \rangle_{k-1})} \right) \Big|_{q=\tilde{q}_k}} \right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(q - \langle q \rangle_k) \Big|_{q=\tilde{q}_k}} \quad (22)$$

Поскольку  $\tilde{q}_k = q \Big|_{q=\tilde{q}_k}$ , то во всех выражениях для производных

$(d\varphi_{k-1}(q-\langle q \rangle_{k-1})/d(q-\langle q \rangle_{k-1}))_{q=\tilde{q}_k}$ ,  $(d\varphi_k(q-\langle q \rangle_k)/d(q-\langle q \rangle_k))_{q=\tilde{q}_k}$  и для функций  $\varphi_{k-1}(q-\langle q \rangle_{k-1})_{q=\tilde{q}_k}$ ,  $\varphi_k(q-\langle q \rangle_k)_{q=\tilde{q}_k}$ , входящих в соотношение (22), переменную  $q$  можно заменить новой переменной  $\tilde{q}_k$ . Тогда уравнение примет вид:

$$\frac{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}}{\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)} = \left(1 - \frac{\varphi_{k-1}(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_{k-1})}{\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)}\right) \left( \left( \frac{1}{d\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)/d(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)} - \frac{1}{d\varphi_{k-1}(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_{k-1})/d(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_{k-1})} \right) + \frac{\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k}{\varphi_k(\tilde{q}_k - \langle q \rangle_k)} \right)$$

Обозначив  $\tilde{q}_k - \langle q \rangle_i := p_i$  (где  $i = k-1, k$ ), запишем:

$$\frac{p_k - (\tilde{q}_{k-1} - \langle q \rangle_k)}{\varphi_k(p_k)} = \left(1 - \frac{\varphi_{k-1}(p_{k-1})}{\varphi_k(p_k)}\right) \left( \left( \frac{1}{d\varphi_k(p_k)/dp_k} - \frac{1}{d\varphi_{k-1}(p_{k-1})/dp_{k-1}} \right) + \frac{p_k}{\varphi_k(p_k)} \right). \quad (23)$$

Соотношение (23), связывающее в двух точках  $t_{k-1}$  и  $t_k$  значения  $p_{k-1}$  и  $p_k$  (которые представляют собой отклонения величины  $\tilde{q}_k$  от средних значений  $\langle q \rangle$  в этих точках), а также плотности вероятности реализации этих значений, также как и соотношение (21), в рамках принятой модели является основным уравнением задачи определения динамики стохастического процесса в линейном приближении. Оба этих уравнения необратимы по времени. Уравнение (23) имеет аналитические решения в двух предельных случаях. Во-первых, когда реализованное значение на предыдущем шаге не просто “стремится” стать средним значением на шаге текущем, а становится им:  $\tilde{q}_{k-1} = \langle q \rangle_k$ . Во-вторых, в случае больших значений производных:

$$\left( \frac{\partial \varphi(\tilde{q}, q)}{\partial \tilde{q}} \right)_{q=\tilde{q}_k} \approx \frac{\varphi_k(q)_{q=\tilde{q}_k} - \varphi_{k-1}(q)_{q=\tilde{q}_k}}{\tilde{q}_k - \tilde{q}_{k-1}} \gg 1 \quad (\text{или} \quad \frac{\varphi_k(p_k) - \varphi_{k-1}(p_{k-1})}{p_k - (\tilde{q}_{k-1} - \langle q \rangle_k)} \gg 1),$$

когда небольшое изменение реализованного значения  $\tilde{q}$  приводит к значительным изменениям плотности вероятности в его окрестности.

Стохастические процессы обладает важным статистическим свойством – возбуждением большого количества независимых внутренних степеней свободы (пульсаций) на разных масштабах рассмотрения системы. При этом законы сохранения, записанные без учета этого процесса, нарушаются. Параметром, характеризующим связь между микро- и макропроцессами является энтропия и, следовательно, в таком процессе необходимо учесть ее производство. В качестве выражения для энтропии необходимо использовать зависимость, описывающую вероятность возбуждения случайных возмущений на различных масштабах рассмотрения, то есть выражение для дифференциальной энтропии:  $S(\vec{r}, t; \tau) = - \int \varphi[p(\vec{r}, t; \tau)] \ln \varphi[p(\vec{r}, t; \tau)] d[p(\vec{r}, t; \tau)]$ .

В этом выражении функция  $\varphi[p(\vec{r}, t; \tau)]$  – это плотность вероятности реализации возмущения величины  $p = q[\vec{r}, t] - \langle q[\vec{r}, t; \tau] \rangle$ ,  $\langle q \rangle$  – среднее значение величины  $q$  в рассматриваемой точке пространства  $\vec{r}$  в заданный момент времени  $t$  на временном масштабе рассмотрения  $\tau$ . Предположим, что физическую систему, описываемую в детерминированном состоянии функцией  $f(t, \vec{x})$ :  $df/dt = \hat{A}f$  ( $\hat{A}$  – оператор, вид которого зависит от конкретной задачи, определяющий протекание процессов обмена выделенной области с внешней средой и влияние на эту область внешних воздействий), необходимо исследовать в случае, когда реализуется стохастический режим – с учетом производства энтропии стохастической системы. В этом случае предлагается расширить пространство переменных:  $(t, \vec{x}) \rightarrow (t, \vec{x}, S)$  и рассматривать

функцию  $f(t, \bar{x}; S)$ . Расширение фазового пространства переменных при описании стохастического состояния системы позволит снять неопределенность, имеющую место при описании его только в физическом пространстве переменных  $(t, \bar{x})$ . В этом случае полную производную по времени функции  $f$  можно записать в виде:  $\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t, \bar{r} + \Delta \bar{r}, S + \Delta S) - f(t, \bar{r}, S)}{\Delta t}$ . Добавляя и одновременно вычитая слагаемые в

этом выражение, его можно переписать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{f(t + \Delta t, \bar{r} + \Delta \bar{r}, S + \Delta S) - f(t, \bar{r} + \Delta \bar{r}, S + \Delta S)}{\Delta t} + \frac{f(t, \bar{r} + \Delta \bar{r}, S + \Delta S) - f(t, \bar{r}, S + \Delta S)}{\Delta t} + \frac{f(t, \bar{r}, S + \Delta S) - f(t, \bar{r}, S)}{\Delta t} \right]$$

В результате можно заметить, что при выполнении условий:  $\Delta \bar{r} \rightarrow 0$ ,  $\Delta S \rightarrow 0$ , в полученном выражение первое слагаемое равно:  $\frac{\partial f}{\partial t}$ ; второе слагаемое:  $\frac{\partial f}{\partial \bar{r}} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = (\bar{v}\nabla)f$ ;

третье слагаемое:  $\frac{\partial f}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt}$ . Таким образом, учет влияния производства энтропии

приведет к изменению полных производных по времени. При описании динамики такого процесса полную производную  $df/dt = \partial f/\partial t + \sum_i \dot{x}_i \partial f/\partial x_i$  следует заменить

$$\text{новой полной производной, имеющей вид: } \frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial S} \frac{dS}{dt}.$$

Отсчет энтропии можно начинать с любого уровня и, поэтому, возникает неопределенность при постановке начальных и граничных условий к уравнению в расширенном пространстве переменных. Чтобы этого избежать, представим полученное выражение через переменную определяемую плотностью вероятности реализации случайной величины:  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{\delta S/\delta \varphi} \frac{dS}{dt}$ .

Производная  $\delta S/\delta \varphi$ , входящая в уравнение, может быть определена как функциональная производная. Найдем ее значение:

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \varphi}, h \right\rangle = - \frac{d}{d\varepsilon} \int (\varphi(p) + \varepsilon h(p)) \ln(\varphi(p) + \varepsilon h(p)) dp \Big|_{\varepsilon=0} = - \int (\ln \varphi(p) + 1) h(p) dp = \langle -(\ln \varphi(p) + 1), h \rangle$$

Откуда следует, что  $\delta S/\delta \varphi = -\ln \varphi(p) - 1$ . Поскольку,  $-(\ln \varphi + 1)\delta \varphi = \delta(-\varphi \ln \varphi)$ , то, обозначив,  $\tilde{s}(p) = -\varphi(p) \ln \varphi(p)$ , перепишем уравнение в виде:  $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{dS}{dt} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}$ .

Из полученного соотношения, в частности, видно, что дополнительный член, отвечающий за учет стохастических возмущений, является ненулевым только при условии ненулевого производства энтропии в рассматриваемой системе. Производство энтропии:  $dS/dt$  можно охарактеризовать временным масштабом  $\tau$ , на котором происходит изменение энтропии стохастической системы на единицу. В результате, выражение для полной производной от функции  $f$  можно окончательно записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}.$$

А, учитывая, что процессы обмена выделенной области с внешней средой и влияние на эту область внешних воздействий не изменяются, можно записать соотношение для нахождения функции  $f = f(t, \bar{x}; \tilde{s}(p))$ :  $\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} = \hat{A}f$ .

Эту зависимость совместно с уравнением, представляющим неявную форму соотношения для нахождения  $\varphi$ , будут описывать динамику процесса рассматриваемой системы с учетом внутренних стохастических процессов.

На примере решения задачи распространения акустических возмущений малых амплитуд в жидкости при наличии в ней стохастических возмущений [1] показана возможность применения разработанного метода при описании стохастических систем.

**В четвертой главе** приведена классификация аэродинамических гистерезисных явлений. В соответствии, с которой все гистерезисные явления в аэродинамике и соответствующие им функциональные зависимости следует разделить на два типа [2], [3], [8], [11-12]. К одному из них (мы будем его называть вторым) можно отнести те явления, которые зависят от направления изменения аргумента, но при этом не зависят от величины (модуля) скорости изменения аргумента. К первому же типу отнесем те явления, которые зависят и от направления изменения аргумента, и от модуля скорости изменения этого аргумента.

Возможно также существование “смешанных” гистерезисных явлений, которые имеют отличительные черты явлений и первого и второго типов.

Рассмотрим в отдельности физические и математические особенности явлений обоих типов.

Начнем с описания явлений, относящихся к первому типу. Предположим, мы исследуем зависимость функции  $m$  от варьируемого аргумента  $\alpha$ . Поскольку, априори известно, что исследуемые процессы зависят еще и от скорости изменения аргумента, то есть  $m = m(\alpha, \dot{\alpha})$ , то, очевидно, что изображение зависимости исследуемой функции  $m$  только от самого аргумента  $\alpha$  на координатной плоскости  $(m; \alpha)$  является проекцией фазового пространства большей размерности (как минимум, трехмерного пространства) на пространство меньшей размерности (на плоскость). Поэтому, даже отвлекаясь от физики процесса, можно сказать, что в общем случае, может существовать неопределенность в зависимости, исследуемой функции  $m$  только от одного аргумента, что, в свою очередь, может привести ее к гистерезисному виду на плоскости  $(m; \alpha)$ . Такие гистерезисные функции, как правило, имеют вид “петель” с вырожденными концами, в местах изменения направления варьирования аргумента (на рис.3 область  $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ ). Если проводить исследование зависимости  $m(\alpha)$  при малой скорости изменения аргумента  $\dot{\alpha}$  ( $\dot{\alpha} \rightarrow 0$ ), должно произойти “вырождение” гистерезисной функции в однозначную функцию  $m(\alpha)$  на плоскости  $(m; \alpha)$ .

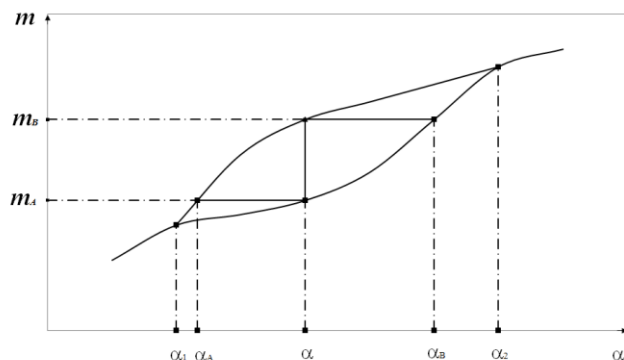


Рис. 3. Схематичное изображение гистерезисной кривой первого типа.

Физические аспекты, относящиеся к гистерезисным явлениям первого типа, связаны с эффектом запаздывания реакции рассматриваемой системы при воздействии на нее внешних сил. В аэродинамике, таким эффектом является демпфирование. Происходит аэродинамическое демпфирование следующим образом. При положительном вращении летательного аппарата (ЛА) углы атаки обтекаемых поверхностей, расположенных позади центра масс (ЦМ), увеличиваются, а у тех, что впереди - уменьшаются. В случае, если ЦМ не совпадает с геометрическим центром ЛА, вращение приводит к появлению дополнительного (демпфирующего) момента.

Для процессов, относящихся ко второму типу гистерезисных явлений, характерно отсутствие зависимости исследуемой функции от модуля скорости изменения варьируемого аргумента. Такие функции на плоскости  $(m; \alpha)$ , как правило, имеют вид гистерезисных функций с разрывами первого рода. Точки разрыва при изменении направления варьируемого аргумента, как правило, не совпадают. Примером таких явлений может служить зависимость силы сопротивления обтекаемой сферы от числа Рейнольдса  $C_x(\text{Re})$  при переходе от ламинарного к турбулентному режиму обтекания и обратно в дозвуковом потоке, а так же изменение давления на цилиндре за угловой кромкой тел конус-цилиндр при увеличении и уменьшении числа Маха или угла атаки в районе критических чисел Маха, характеризующихся переходом от безотрывного обтекания угловой кромки к отрывному и наоборот (Любимов А.Н., Тюмнев Н.М., Хут Г.И. Методы исследования течений газа и определения аэродинамических характеристик осесимметричных тел. – М., “Наука”, 1995, 397 с.). При описании гистерезисных явлений второго типа нельзя однозначно утверждать, что зависимость  $m(\alpha)$  на плоскости  $(m; \alpha)$  является проекцией фазового пространства физических переменных большей размерности на эту плоскость. Как правило, возникновение таких явлений обусловлено возможностью существования различных режимов процесса в одном диапазоне значений варьируемого аргумента.

Разработаны теоретические подходы к описанию гистерезисных функций первого и второго типов. Оба метода являются замкнутыми в рамках только расчетно-теоретических моделей.

Для достаточно монотонных гистерезисных функций первого типа найдено соотношение, связывающее разность значений функций на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой в каждой точке и значения функции в граничных точках  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  гистерезисной функции:  $m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}$  и  $m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}$ , полученные в случае квазистационарного изменения аргумента:

$$\Delta m(\alpha, T) \approx \frac{4}{\sqrt{6}} \frac{T_1}{T} \left| \frac{m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2} - m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right| \sqrt{(\alpha_2 - \alpha)(\alpha - \alpha_1)}. \quad (24)$$

Здесь  $T_1$  - период колебания ЛА в бездиссипативном случае,  $T$  - период колебания ЛА в исследуемом случае.

Величины  $m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_1}$ ,  $m_{st}(\alpha)|_{\alpha=\alpha_2}$  могут быть получены численными методами при проведении стационарных аэродинамических расчетов, которые гораздо точнее и требуют меньших затрат времени их нестационарных аналогов.

Предполагая, что отношение периодов колебаний тела в набегающем потоке для бездиссипативного и диссипативного случаев обусловлено различием вихреобразования позади колеблющегося тела, значение отношения  $T_1/T$  можно



получить, используя гипотезу подобия течения и число Струхалия:  $T_1/T \approx Lf/V = St$ , где  $T_1 \sim L/V$ ,  $L$  - характерный размер колеблющегося тела,  $V$  - скорость набегающего потока,  $T \sim f^{-1}$ ,  $f$  - частота вихреобразования. Для чисел Рейнольдса, больших примерно 1000, значение числа Струхалия изменяется в небольшом диапазоне:  $0,2 \leq St \leq 0,3$ . Следовательно, при таких значениях чисел Рейнольдса, можно считать, что  $0,2 \leq T_1/T \leq 0,3$ .

Таким образом, задача определения разности значений функции на верхней и нижней ветвях гистерезисной кривой первого типа становится замкнутой только в рамках расчетно-теоретической модели.

В семидесятых годах прошлого века предприятием НПО “Энергия” (ныне ПАО «РКК «Энергия») были проведены летные динамические испытания спускаемого аппарата (СА) “Союз”. В ходе этих испытаний СА с помощью двигателей подвергался принудительной раскачке в плоскости тангажа в течение  $\sim 10$  секунд, после чего совершал свободные колебания относительно центра масс, длительностью  $\sim 30$  секунд, а затем стабилизированный полет с работающими струйными органами. Плоскость угла атаки СА была перпендикулярна горизонтальной плоскости Земли. Полет на всем участке спуска происходил в режиме максимального аэродинамического качества (угол крена  $0^\circ$ ). Первый цикл возмущенного движения начинался на высоте  $H \approx 85 \text{ км}$  (Решетин А.Г. Аэродинамический гистерезис при обтекании спускаемого аппарата космического корабля "Союз" гиперзвуковым вязким потоком. Результаты натурных испытаний. - Космонавтика и ракетостроение, 2000, N19, 150 с.).

Сравнение теоретических гистерезисных кривых, полученных с помощью соотношения (24) при значении отношения периодов  $T_1/T = 0,25$  и экспериментальных кривых, полученных в летном эксперименте с принудительной раскачкой аппарата по углу атаки на гиперзвуковых скоростях полета ( $M \approx 28$ ), приведены на рисунках 4-6.

Для достаточно монотонных стационарных функций  $C_{\tau_{st}}(\alpha)$  и  $C_{n_{st}}(\alpha)$  видно хорошее соответствие экспериментальных и теоретических гистерезисных кривых  $C_{\tau}(\alpha)$  и  $C_n(\alpha)$  (см. рис. 4-5).

Для функции  $m_z(\alpha)$  такое соответствие ухудшается из-за недостаточной монотонности стационарной функции  $m_{z_{st}}(\alpha)$  (см. рис. 6). Однако его все же можно считать вполне удовлетворительным.

Иногда монотонность функции  $m_{z_{st}}(\alpha)$  изменяется в зависимости от положения центра масс аппарата. В этом случае, в расчетах можно выбрать центровку, для которой реализуется наиболее монотонная зависимость  $m_{z_{st}}(\alpha)$  на интервале  $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ , построить для нее гистерезисную кривую  $m_z(\alpha)$ , а затем, используя зависимости гистерезисных функций  $C_x(\alpha)$ ,  $C_y(\alpha)$ , осуществить перерасчет ветвей гистерезисной функции  $m_z(\alpha)$  на нужную центровку аппарата.

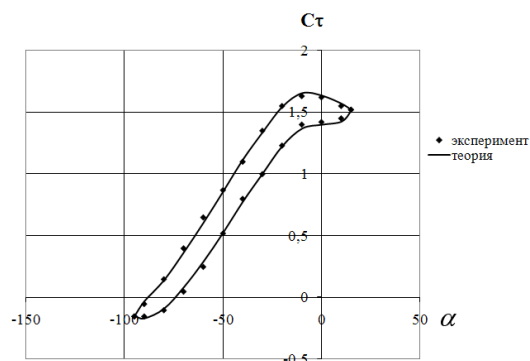


Рис. 4. Сравнение экспериментальной и расчетно-теоретической гистерезисных кривых для аэродинамического коэффициента тангенциальной силы.

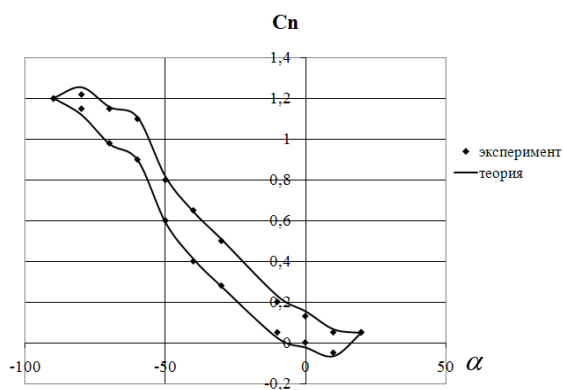


Рис. 5. Сравнение экспериментальной и расчетно-теоретических гистерезисных кривых для аэродинамического коэффициента нормальной силы.

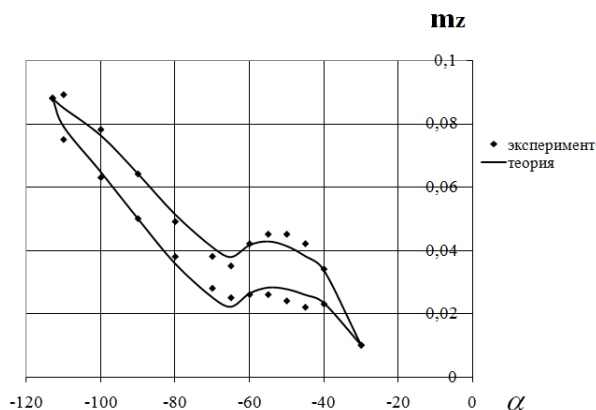


Рис. 6. Сравнение экспериментальной и расчетно-теоретических гистерезисных кривых для коэффициента  $m_z$ .

Предлагаемый теоретический подход описания гистерезисных функций второго типа позволяет решать задачу определения энергии, затрачиваемой или выделяемой при переходе между двумя стационарными состояниями, характеристикой которых являются функциональные зависимости на ветвях гистерезисной кривой второго типа [12].

**В пятой главе** разрабатывается методика, позволяющая характеризовать колебательное движение ЛА на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования с использованием математической модели гистерезисных явлений [11].

Большинство линейных дифференциальных уравнений, используемых в качестве моделей для описания задач механики, на самом деле являются некоторым приближением нелинейных дифференциальных уравнений. В каких-то случаях такое приближение вполне допустимо и хорошо отражает динамику процесса. Однако достаточно часто возникают ситуации, когда расширение диапазона исследуемых параметров приводит к тому, что линейное приближение перестает адекватно «работать».

Классическим примером механических систем, не подчиняющихся линейному описанию, являются системы, в фазовых портретах которых имеются предельные циклы. Одним из хорошо изученных видов нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих такой класс динамических систем с самовозбуждением, является уравнение Ван-дер-Поля:  $\ddot{q} - \varepsilon(1 - q^2)\dot{q} + q = 0$ .

Замена этого уравнения с нелинейным диссипативным членом на линейное:  $\ddot{q} - \lambda\dot{q} + q = 0$ , приведет к тому, что в качестве решения мы получим либо затухающие (при  $\lambda > 0$ ), либо возрастающие (при  $\lambda < 0$ ) моды колебаний.

Разумеется, наилучшим способом решения задачи исследования колебаний ЛА было бы нахождение (или подбор) такого вида уравнения движения с нелинейными коэффициентами, которое адекватно описывало бы все режимы колебания: для разных чисел Маха, разных амплитуд и так далее. Однако такой подход в инженерной практике практически не реализуем, в первую очередь, из-за того, что сам вид нелинейных коэффициентов уравнения движения в общем случае изменяется при изменении режимов колебания, кроме того, в некоторых случаях существуют несколько возможных режимов колебания в одном и том же диапазоне параметров.

Поэтому, более реалистичным способом решения поставленной задачи в инженерных приложениях представляется исследование отдельных режимов колебания и определение для каждого из них коэффициентов уравнения движения (преимущественно констант), наилучшим образом обеспечивающих соответствие решений этих уравнений с экспериментальными данными.

Именно такой подход применяется в практической аэродинамике. При этом основными характеристиками колебательных движений летательных аппаратов выступают комплексы аэродинамических производных демпфирования, являющиеся коэффициентами при диссипативных членах в линейных уравнениях движения.

Разработанная в данной работе методика позволяет на основе анализа аэродинамических производных демпфирования оценить возможность появления гистерезиса аэродинамических характеристик первого типа при возникновении колебательного движения летательного аппарата.

**Основные результаты** работы сформулированы в выводах к диссертации. Главными из них являются:

Разработан метод описания процессов, претерпевающих скачкообразные переходы в областях, где функции, являющиеся их характеристиками, скачком изменяют свои значения и/или значения своих производных.

С использованием этого метода теоретически исследованы параметры фрактальных объектов двух типов: структур с вязкими «пальцами» и дендритов.

Разработан метод описания физических процессов в односвязных пространствах с дробной размерностью. Метод основан на расширении фазового пространства, используемого при описании аналогичных процессов в целочисленном - евклидовом

пространстве с помощью дополнительной переменной, характеризующей масштаб рассматриваемой области фрактального пространства.

С помощью этого метода решена задача распространения тепла от локализованного источника в бесконечное пространство, обладающее односвязной фрактальной структурой, “вложенной” в непроводящее (плохо проводящее) тепло трехмерное пространство: найдено частное решение в случае произвольной зависимости коэффициента теплопроводности от масштаба рассмотрения системы и общее решение для коэффициента теплопроводности, не зависящего от масштаба рассмотрения системы.

Расширение пространства переменных и рассмотрение в этом пространстве непрерывно изменяющейся плотности вероятности, позволило получить соотношение, связывающее отклонение случайной величины от средних значений в двух временных точках, а также плотности вероятности этих реализаций для стохастических систем, не имеющих выделенных состояний равновесия.

В двух предельных случаях описания стохастических систем: когда небольшое изменение реализованного значения приводит к значительным изменениям плотности вероятности, и в случае мартингалов, получены соотношения, характеризующие плотность вероятности реализации случайной величины в заданный момент времени.

Показано, что в определенном интервале значений случайной величины такое решение не единственно. В связи с этим, на основе Центральной Предельной Теоремы Линдберга удается сделать вывод, что появление гауссовских распределений с «тяжелыми» степенными хвостами можно считать следствием возникновения в системе скрытых факторов, влияющих на динамику плотности вероятности: когда реализация случайной величины исследуемого процесса влечет за собой изменение плотности вероятности.

Проведен анализ размерности фазового стохастического пространства, на основе которого найдены устойчивые и неустойчивые ветви решения.

Решена задача распространения акустических возмущений в нелинейной стохастической среде. Показано, что стохастические возмущения могут приводить как к ослаблению акустических пульсаций, так и к их локальному по времени усилению. На этом примере показана возможность применения разработанного метода при описании гидро- газодинамических стохастических систем.

Представлена модель возникновения «стохастичности» при численном интегрировании автономных дифференциальных уравнений.

Приведена классификация аэродинамических гистерезисных явлений, в соответствии с которой, можно выделить два основных типа: гистерезисные явления, зависящие от скорости изменения аргумента и гистерезисные явления от нее независимые. Выделен тип гистерезисных функций, имеющих «смешанные» черты двух основных типов.

Предложены теоретические методы описания гистерезисных функций первого и второго типов. Оба метода являются замкнутыми в рамках только расчетно-теоретических моделей.

Метод описания гистерезисных функций первого типа позволяет определять разность значений функции на верхней и нижней ветвях.

Метод описания гистерезисных функций второго типа позволяет решать задачу определения энергии, затрачиваемой или выделяемой при переходе между двумя

стационарными состояниями, характеристикой которых являются функциональные зависимости на ветвях гистерезисной кривой второго типа.

Разработана методика, позволяющая характеризовать колебательное движение ЛА на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования с использованием математической модели гистерезисных явлений.

**Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах:**

1. Хатунцева О.Н. Описание динамики марковских процессов в расширенном пространстве переменных. Журнал “Ученые записки ЦАГИ” №1 2011 г., с. 62-85.

англ. пер.: Khatuntseva O.N. Description of Markovian process dynamics in an extended space of variables // Pages 83-108 DOI: 10.1615/TsAGISciJ.v42.i1.60.

2. Хатунцева О.Н. Анализ причин возникновения аэродинамического гистерезиса при летных испытаниях СА “Союз” на гиперзвуковом участке спуска. “Сибирский журнал прикладной механики и технической физики” Т.52, N4, 2011 с. 52-62.

англ. пер.: Khatuntseva O. N. Analysis of the reasons for an aerodynamic hysteresis in flight tests of the Soyuz reentry capsule at the hypersonic segment of its descent Journal of Applied Mechanics and Technical Physics Volume 52, Number 4, 544-552, DOI: 10.1134/S0021894411040067.

3. Хатунцева О.Н. Классификация гистерезисных функций. Теоретические модели и методы описания. Электронный журнал “Физико-химическая кинетика в газовой динамике”. [www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-02-29-001.pdf](http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-02-29-001.pdf) 1.

4. Хатунцева О.Н. Особенности описания физических процессов во фрактальных системах. “Сибирский журнал вычислительной математики” Т13, N1, 2010 г., стр.101-109.

англ. пер.: Khatuntseva O.N. Specific features of the description of physical processes in fractal spaces Numerical Analysis and Applications. 2010, Volume 3, Issue 1, pp 82-89.

5. Хатунцева О.Н. Теоретическое определение размерности односвязных фрактальных объектов в задачах образования вязких “пальцев” и росте дендритов. М., “Сибирский журнал вычислительной математики” N2, 2009 г. стр.231-241.

англ. пер.: Khatuntseva O.N. Theoretical determination of the dimension of simply connected fractal objects in problems of formation of viscous “fingers” and growth of dendrites. “Numerical Analysis and Applications”, Volume 2, Issue 2, 2009 pp 187-195 p.

6. Хатунцева О.Н. Операторный подход к описанию разрывных функций. Методы моделирования диссипативных и гистерезисных явлений. М., журнал «Математическое моделирование» N8, 2005 с.111-120.

7. Хатунцева О.Н. Метод математического моделирования функций в областях скачкообразных изменений параметров. – //Аэродинамика/ Под ред. Р.Н. Мирошина. – СПб.: “ВВМ”. 2004 – 287 с.

8. Хатунцева О.Н. Теоретический подход к построению возможных гистерезисных кривых в различных областях физики, в частности, в аэродинамике. - Космонавтика и ракетостроение, 2002, N (2) 27 с.57-66.

9. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019.

№ 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102091>

10. Хатунцева О.Н. О влиянии учета изменения плотности вероятности случайных величин на динамику стохастического процесса. Электронный журнал “Физико-химическая кинетика в газовой динамике”. [www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-11-20-010.pdf](http://www.chemphys.edu.ru/pdf/2012-11-20-010.pdf)

11. Дядькин А.А., Хатунцева О.Н. Метод определения характера колебательного движения летательного аппарата на основе анализа коэффициентов аэродинамических производных демпфирования. Теплофизика и аэродинамика. 2014 г. Т.21, №5, стр. 607-616.

англ. пер.: Dyadkin A.A., Khatuntseva O.N. Method determining the nature of oscillating motion of the aircraft based on the analysis of coefficients of aerodynamic damping derivatives. Thermophysics and Aeromechanics, 2014, Vol. 21, No. 5, p. 607-616.

12. Хатунцева О.Н. О возможности оценки энергетических затрат, обусловленных гистерезисным видом зависимостей аэродинамических характеристик, при совершении колебательных движений летательными аппаратами. Известия РАН. Энергетика. 2014 г., №5, стр.111-121.

13. Хатунцева О.Н. Метод описания процессов теплопроводности во фрактальных системах с использованием масштабной переменной. “Сибирский журнал вычислительной математики” Т18, N1, 2015 г., стр.95-105.

англ. пер.: Khatuntseva O.N. Method for Description of Heat Transfer Processes in Fractal Systems Using Scale Variable. Numerical Analysis and Applications.

14. Хатунцева О.Н. О природе детерминированного хаоса в математике // Журнал естественных и технических наук. 2017, № 11, стр. 255-258.

15. Хатунцева О.Н. об учете влияния стохастических возмущений на решения уравнений Навье-Стокса в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93311>

16. Хатунцева О.Н. О нахождении критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=96567>

17. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми» степенными «хвостами» // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98854>

18. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Пуазейля // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105673>

19. Хатунцева О.Н. Определение критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в плоской задаче Пуазейля на основе метода «разрывных функций» // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109382>

Работы, опубликованные в журналах из списка ВАК: [1-2] [4-6], [8-9], [11-13], [15-19].

Переводные работы, входящие в международные базы данных Web of Science и Scopus [2], [4-5], [11], [13].