

## **Кривые длительной прочности, порождаемые линейной теорией вязкоупругости в сочетании с критериями разрушения, учитывающими историю деформирования**

**Хохлов А.В.**

*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова,*

*Мичуринский проспект, 1, Москва, 119192, Россия*

*e-mail: andrey-khokhlov@ya.ru*

### **Аннотация**

Исследуются возможности подключения к линейному определяющему соотношению вязкоупругости критериев разрушения для описания разрушения при ползучести и длительной прочности. Выведены уравнения теоретических кривых длительной прочности, порождённых соотношением с произвольной функцией ползучести в сочетании с деформационным критерием разрушения, а также – с двумя семействами интегральных критериев, учитывающими историю деформирования. Каждое из двух построенных семейств непрерывно и монотонно зависит от вещественного параметра и включает деформационный критерий как предельный случай; критерии первого семейства всегда дают большее время разрушения, чем деформационный, критерии второго семейства – меньше, а различие можно сделать как сколь угодно малым, так и большим (параметр регулирует глубину памяти и даёт дополнительную возможность настройки на данные испытаний). Аналитически изучены общие свойства теоретических кривых длительной прочности, порождённых этими критериями разрушения, и их

зависимость от функции ползучести и параметра критериев, показано, что они адекватно отражают типичные качественные свойства экспериментальных кривых вязкоупругопластичных материалов.

**Ключевые слова:** вязкоупругопластичность, ползучесть, критерии разрушения, средняя скорость ползучести, время разрушения, кривые длительной прочности

Для прогнозирования времени разрушения при ползучести и моделирования длительной прочности вязкоупругопластичных материалов к выбранному (построенному) определяющему соотношению (ОС), описывающему их деформирование, необходимо добавить критерий разрушения (КР), задающий момент разрушения  $t_*$  по достижении критических значений некоторой меры повреждённости  $\omega(t)$  (скалярной, векторной или тензорной [1-16]). Развитие повреждённости (со времени пионерских работ Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова [1,2]) задаётся дифференциальными уравнениями, связывающими  $\dot{\omega}(t)$  с основными параметрами состояния материала (компонентами деформации, напряжением, температурой, свободной энергией, энергией разрушения, мощностью диссипации и т.п.) и дополнительными кинетическими параметрами.

Простейший тип критериев разрушения – скалярные КР, постулирующие, что разрушение происходит в момент  $t = t_*$ , когда некоторая числовая мера повреждённости  $\omega(t)$  достигает критического значения  $\omega_*$ . Например, классический деформационный критерий разрушения (ДКР) постулирует, что  $\omega(t) = C\varepsilon(t)$ , и разрушение происходит в момент  $t_*$ , когда деформация  $\varepsilon(t, \sigma)$  достигает уровня  $\varepsilon_*$ :

$$\varepsilon(t_*, \sigma) = \varepsilon_* \quad (1)$$

Помимо КР, выраженных через меры поврежденности деформационного типа, уже более полувека разрабатывается класс энергетических мер поврежденности и критериев разрушения: например, в работах [17-25] и др.

Весьма важно, чтобы выбранные КР и ОС хорошо взаимодействовали друг с другом, то есть позволяли вывести общее уравнение теоретической кривой ползучести  $\varepsilon = \varepsilon(t; \sigma, T)$  и кривой длительной прочности (КДП)  $t_* = f(\sigma, T)$  (или  $\sigma = F(t_*, T)$ , где  $t_*$  – время разрушения при заданных напряжении  $\sigma$  и температуре  $T$ ), *аналитически* исследовать в общем виде зависимость свойств КДП, порождаемых ОС и КР, от материальных функций и параметров и указать ограничения на них, обеспечивающие совпадение качественных свойств теоретических КДП с типичными свойствами экспериментальных КДП.

Эта (идеальная) программа реализована в работах [26-30] и др. для нелинейного ОС вязкоупругости Ю.Н. Работнова, нелинейного ОС типа Максвелла и двух нелинейных ОС, построенных и исследованных в [26,27]. Эти ОС нацелены на описание комплекса основных механических эффектов, типичных для вязкоупругопластичных материалов, обладающих выраженной наследственностью и высокой чувствительностью к скорости деформирования (полимеры, твердое топливо, асфальтобетон, композиты, пены, титановые и алюминиевые сплавы, углеродные и керамические материалы при высоких температурах, связки, сухожилия и другие биологические ткани и т.п.). В данной работе эта программа реализована для линейного ОС вязкоупругости

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad \text{или} \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad t \geq 0 \quad (2)$$

с произвольными функциями релаксации (ФР) и ползучести (ФП) в сочетании с деформационным КР и с двумя интегральными КР, учитывающими историю деформирования (и дающими ДКР в предельных случаях) [28]. Их строение мотивировано желанием иметь арсенал более чутких и допускающих регулировку КР, позволяющих точнее описывать экспериментальные КДП (см. п.4,5).

Построение, выбор и анализ КР, хорошо взаимодействующих с ОС, разработка арсенала таких КР (зависящих от параметров) и удобной технологии аппроксимации экспериментальных КДП различных материалов необходимы для моделирования КДП материала или элемента конструкции по результатам опытов на ползучесть до разрушения при высоких напряжениях и прогнозирования срока безопасной эксплуатации при относительно низких напряжениях, когда время разрушения слишком велико, чтобы получить экспериментальные данные о нём. При низких напряжениях (и малых деформациях) поведение большинства вязкоупругопластичных материалов описывается линейным ОС (2), поэтому изучение КДП, порождаемых ОС (2) в сочетании с разными КР весьма полезно.

Основная цель данной статьи – вывести уравнения КДП, порождённых ОС (2) в сочетании с тремя указанными КР, аналитически исследовать их общие свойства, и доказать, что они совпадают с качественными свойствами типичных экспериментальных КДП вязкоупругопластичных материалов.

В статье приняты следующие сокращения и обозначения: ФР и ФП – функции релаксации и ползучести; КР – кривые ползучести, КДП – кривые длительной

прочности;  $h(t)$  – функция Хевисайда,  $\delta(t)$  – дельта-функция, РеМ – регулярные модели (с  $\Pi(0) \neq 0$ ); СиМ – сингулярные модели (ФР содержит слагаемое  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta > 0$ );  $y(0) := y(0+)$  – предел функции  $y(t)$  справа в т.  $t = 0$ . Время и напряжение в (2) и ниже предполагаются обезразмеренными, рассматриваемые в статье качественные свойства кривых не зависят от масштабирования  $t$ ,  $\sigma$  и  $\varepsilon$  (от конкретного выбора нормировочных констант и градуировки осей на графиках).

### 1. Типичные свойства экспериментальных кривых длительной прочности

Данные испытаний разнообразных вязкоупругопластичных материалов [3-5, 8, 11, 12, 16] показывают, что КДП  $t_*(\sigma)$  всегда убывают,  $t_*(\sigma) \rightarrow +\infty$  при  $\sigma \rightarrow \sigma_0$  и  $t_*(\sigma) \rightarrow 0$  при  $\sigma \rightarrow \sigma_*$ , где  $\sigma_0 \geq 0$  – (условный) порог ползучести,  $\sigma_* > 0$  – предел мгновенной прочности  $\sigma_*$ . На рис. 1,а приведены основные типы КДП  $t_*(\sigma)$ , наблюдаемых в испытаниях на ползучесть до разрушения ( $\sigma_0 = 0$  для КДП 1, 2,  $\sigma_0 = 1$  для КДП 3,4,  $\sigma_* = 2$  для КДП 2,3).

КДП многих материалов в осях  $\lg \sigma - \lg t_*$  хорошо аппроксимируются отрезком прямой с угловым коэффициентом  $\mu < 0$  (т.е.  $t_* = C\sigma^\mu$ ) или двухзвенной ломаной (КДП 5 на рис. 1,б). Во втором случае КДП отражают отчётливо локализованный момент смены типа разрушения при  $\sigma = \hat{\sigma}$  (принято выделять хрупкое и вязкое разрушение [3,4,8,16]); участок хрупкого разрушения (при  $\sigma < \hat{\sigma}$ ), составляет с осью  $\ln \sigma$  меньший угол, чем участок вязкого разрушения (при  $\sigma > \hat{\sigma}$ ), т.е.  $|\mu_1| < |\mu_2|$ .

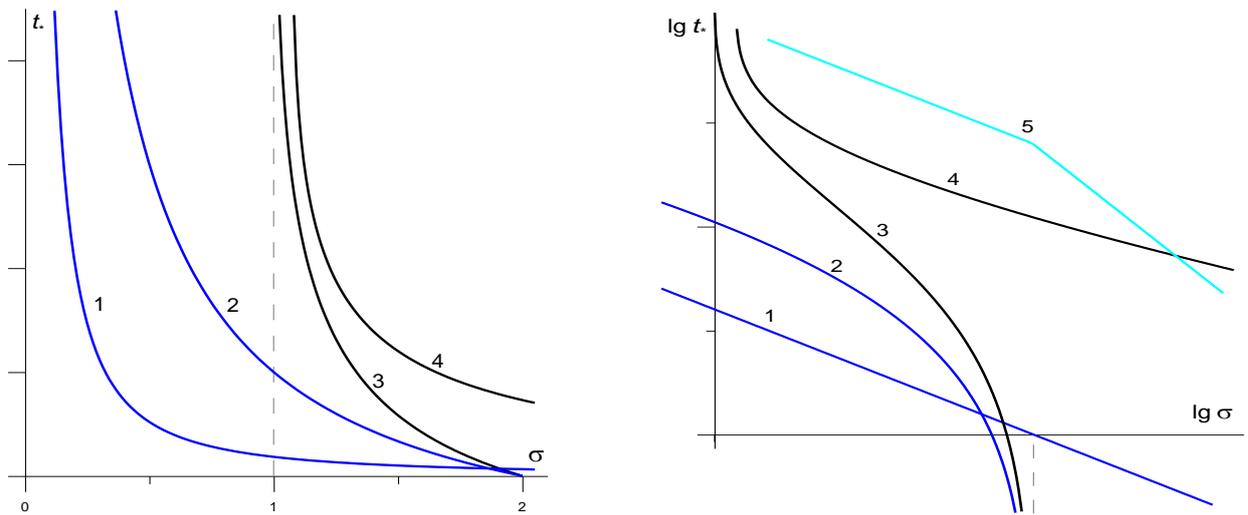


Рис.1. Типичные экспериментальные КДП

## 2. Базовые свойства линейного определяющего соотношения вязкоупругости

ОС (2) описывает изотермические одноосные процессы в структурно-стабильных вязкоупругопластичных материалах, характеризуемые историями напряжения  $\sigma(t)$  и деформации  $\varepsilon(t)$  в точке тела (входные процессы предполагаются кусочно непрерывными и кусочно гладкими при  $t \geq 0$ ). Операторами вида (2) задаются и зависимости между историями нагрузок и перемещений при испытаниях образцов на растяжение, кручение, изгиб, индентирование и т.п. ФП  $\Pi(t)$  и ФР  $R(t)$  в (2) предполагаются положительными и дифференцируемыми на  $(0; \infty)$ ,  $\Pi(t)$  – возрастающей и выпуклой вверх на  $(0; \infty)$  [31,32], а  $R(t)$  – убывающей и выпуклой вниз на  $(0; \infty)$ , ФР может иметь интегрируемую особенность или  $\delta$ -сингулярность в т.  $t = 0$ . Из монотонности и положительности ФП и ФР на  $(0; \infty)$  следует, что в т.  $t = 0$  существуют пределы справа  $\Pi(0+) = \inf \Pi(t) \geq 0$  и  $R(0+) = \sup R(t) > 0$  ( $R(0+) = +\infty$ , если ФР не ограничена) и предел  $R(+\infty) = \inf R(t) \geq 0$ .

Если  $\Pi(0+) \neq 0$  (модель регулярна), то  $R(0+) < \infty$  и на линеале *непрерывных* кусочно гладких при  $t \geq 0$  функций оператора (2) представимы в виде

$$\varepsilon(t) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau, \quad \sigma(t) = R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau) d\tau \quad (3)$$

Операторы (2) взаимно обратны, и потому ФП и ФР связаны уравнением

$$\int_0^t \Pi(t-\tau)R(\tau) d\tau = t, \quad \text{или} \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau) d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0, \quad (4)$$

а ОС (2) содержит только одну независимую материальную функцию. Свойства семейств основных теоретических квазистатических кривых (диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации или нагружения, кривых ползучести при ступенчатом нагружении, кривых ползучести и релаксации с произвольной начальной стадией нагружения и др.), порождаемых ОС (2) с произвольной ФП, необходимые математические и феноменологические ограничения на ФП и ФР проанализированы в цикле работ [31-33] и др.

Анализ, в частности, показал, что среди моделей, описываемых ОС (2) с различными ФР и ФП, необходимо выделять три основных класса, поскольку качественные свойства базовых теоретических кривых моделей этих классов (а также особенности постановки и решения краевых задач) заметно отличаются. Эти три класса: 1) регулярные модели (РеМ) – у которых  $\Pi(0) \neq 0$  (тогда мгновенный модуль  $E = R(0+) = 1/\Pi(0+)$  диаграмм деформирования с постоянной скоростью конечен,  $\dot{\Pi}(0+)/\Pi(0+) = -\dot{R}(0+)/R(0+)$  [32], а ОС (2) и первое уравнение (4) сводятся к уравнениям Вольтерры *второго* рода (3) и (4)); 2) сингулярные (СиМ) – с ФР, содержащей слагаемое  $\eta\delta(t)$ ,  $\eta > 0$  (ФР  $R = \eta\delta(t)$  задаёт ньютоновскую жидкость с ОС  $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$  и входит слагаемым в ФР половины реологических моделей из пружин и демпферов), тогда  $\Pi(0) = 0$  и  $\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$ ; 3) нерегулярные модели с неограниченной

ФР, не содержащей слагаемого  $\eta\delta(t)$ , но имеющей интегрируемую особенность в  $t = 0$  ( $R(0+) = +\infty$ ). При малых временах (и больших скоростях деформации) РеМ ведут себя как твёрдые тела, а СиМ – как жидкости. Третий класс занимает промежуточное положение между первыми двумя. К нему относится, например, ФР  $R(t) = At^{-u}$ ,  $u \in (0;1)$ ,  $A > 0$ , задающая так называемый «фрактальный» элемент «фрактальных» моделей («fractional models») с оператором дробного дифференцирования; соответствующая (в силу(4)) ФП имеет вид  $\Pi(t) = A^{-1}C(u)t^u$  и обладает не только свойством  $\Pi(0) = 0$ , как и СиМ, но и свойством  $\dot{\Pi}(0) = \infty$ , переходным к  $\Pi(0) \neq 0$ , характеризующему РеМ.

В частности, все реологические модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством последовательных и параллельных соединений, описываются ОС (2). Схемы и названия всех двух-, трёх- и четырёхзвенных моделей (в терминологии нет единства) приведены в [33] (п.2, рис.1); классические модели Максвелла, Фойгта, Кельвина, стандартного тела будут использованы для иллюстрации общих свойств КДП ОС (2)). Можно доказать, что множество всех несократимых  $n$ -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности: РеМ- $n$  и СиМ- $n$  (структурно различные модели мы называем эквивалентными, если они задаются одинаковыми семействами ФП или ФР). В частности, эквивалентны друг другу трёхзвенные РеМ Пойнтинга-Томсона и Кельвина ([33], рис.1,а), все четыре структурно различные РеМ-4 ([33], рис.1,в) эквивалентны модели стандартного тела. Например, семейство ФП

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta] \quad (5)$$

порождает все РеМ-4 при  $\gamma \in (0; \beta)$ ,  $\alpha, \beta > 0$ , а при  $\alpha = 0$  – все РеМ-3. Т.к.  $\Pi(0) = \beta - \gamma$ , то ФП (5) порождает СиМ, когда  $\gamma = \beta$ : при  $\lambda\beta = 0$  – ньютоновскую жидкость, при  $\alpha = 0$  – модель Фойгта, при  $\alpha > 0$  – СиМ-3. При  $\gamma = 0$  (5) даёт модель Максвелла.

Семейство теоретических кривых ползучести (КП) ОС (2) (для  $\sigma(t) = \bar{\sigma} h(t)$ ):

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}) = \bar{\sigma} \Pi(t), \quad t > 0. \quad (6)$$

Из ограничения  $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$  следует, что КП (6) всегда выпуклы вверх, и ОС (2) не способно описывать ускоренную ползучесть (стадию разупрочнения) [31].

### **3. Кривая длительной прочности, порождаемая линейной теорией вязкоупругости в сочетании с деформационным критерием разрушения (1)**

Для моделирования длительной прочности материалов к ОС (2) необходимо добавить критерий разрушения (КР), определяющий момент разрушения  $t_*$ , т.е. момент обрыва кривых ползучести (6). Классический ДКР (1) постулирует, что разрушение происходит в момент  $t = t_*$ , когда деформация  $\varepsilon(t, \sigma)$  достигает критического значения  $\varepsilon_*$ . Он может описывать две разные ситуации: разрушение материала или элемента конструкции. Соответственно,  $\varepsilon_*$  обозначает либо материальную константу (зависящую только от температуры), либо предельную допустимую (по конструктивным соображениям) деформацию, рассчитанную по предельному перемещению или напряжению (классический пример – разрушение турбины вследствие ползучести её лопаток). В первом случае ДКР с постоянным  $\varepsilon_* = \varepsilon_*(T)$  не всегда адекватен данным испытаний: у многих материалов  $\varepsilon_*$  зависит от напряжения [3,4,8,16-19,22-24] (этот факт можно учесть, задавая  $\varepsilon_* = f(\sigma)$  в (1)), причём эта зависимость может быть немонотонной [4,34,35,16,22-24]. Во втором

случае ДКР (1) адекватен «по определению», если конструктивный критерий срабатывает раньше, чем происходит разрушение материала.

Для процесса деформации (6) с  $\bar{\sigma} > 0$  ДКР (1) даёт для времени разрушения  $t_*$  уравнение  $\Pi(t_*) = \varepsilon_* / \sigma$  (в дальнейшем будем использовать упрощённое обозначение  $\sigma$  для уровня напряжения  $\bar{\sigma}$ ). В силу возрастания ФП оно разрешимо только при  $\varepsilon_* / \sigma \in [\Pi(0); \Pi(\infty))$ , и имеет единственное решение  $t_* = p(\varepsilon_* / \sigma)$ ,  $E_\infty \varepsilon_* < \sigma < E \varepsilon_*$ . Здесь  $p = \Pi^{-1}$  – обратная функция к  $\Pi(t)$  (она возрастает и выпукла вниз на промежутке  $[\Pi(0); \Pi(\infty))$ ),  $E := 1/\Pi(0)$  и  $E_\infty := 1/\Pi(\infty)$  – мгновенный и длительный модули (касательные модули диаграмм деформирования ОС (2) с постоянными скоростями при  $\varepsilon \rightarrow 0+$  и  $\varepsilon \rightarrow +\infty$  [32,33]). Если модель регулярна ( $\Pi(0) \neq 0$ ), то величина  $\sigma_* := \varepsilon_* / \Pi(0) = E \varepsilon_*$  конечна, и при  $\sigma \geq \sigma_*$  разрушение происходит уже в момент  $t = 0$ , т.е.  $\sigma_*$  *обретает имеет смысл предела (мгновенной) прочности* при растяжении. Если ФП ограничена, т.е.  $\Pi(\infty) < \infty$ , то  $\varepsilon_* E_\infty > 0$  и при  $\sigma \leq \varepsilon_* E_\infty$  разрушение не происходит (КП никогда не достигает критического уровня  $\varepsilon_*$ ).

Таким образом, КДП при растяжении, порождённая ОС (2) и ДКР, имеет вид

$$\sigma = \varepsilon_* / \Pi(t_*), \quad t_* > 0, \quad \text{или} \quad t_* = p(\varepsilon_* / \sigma), \quad E_\infty \varepsilon_* < \sigma < E \varepsilon_* \quad (7)$$

Форму КДП задаёт функция ползучести,  $\varepsilon_*$  играет роль коэффициента растяжения вдоль оси  $\sigma$ . Для регулярных моделей КДП можно записать в виде  $\sigma / \sigma_* = \Pi(0) / \Pi(t_*)$ .

Для любой допустимой ФП (с  $\dot{\Pi}(t) \geq 0$  и  $\ddot{\Pi}(t_*) \leq 0$ ) КДП  $\sigma(t_*) = \varepsilon_* / \Pi(t_*)$  *убывает и выпукла вниз* (тогда и КДП в обратной форме  $t_*(\sigma) = p(\varepsilon_* / \sigma)$  *убывает и выпукла вниз*):  $\sigma'(t_*) = -\varepsilon_* \Pi(t_*)^{-2} \dot{\Pi}(t_*) < 0$ ,  $\sigma''(t_*) = \varepsilon_* \Pi(t_*)^{-3} [2\dot{\Pi}(t_*)^2 - \Pi(t_*)\ddot{\Pi}(t_*)] > 0$ .

Для регулярных моделей предел КДП  $\sigma = \sigma(t_*)$  при  $t_* \rightarrow 0+$  конечен:  $\sigma(0+) = \varepsilon_* / \Pi(0) = \sigma_*$  (предел прочности). Для нерегулярных моделей  $\sigma_* = +\infty$  и  $\sigma(0+) = \infty$ , т.е. КДП (7) в форме  $\sigma = \sigma(t_*)$  имеет вертикальную асимптоту  $t_* = 0$ , а КДП (7) в обратной форме  $t_* = t_*(\sigma)$  определена при всех  $\sigma > \varepsilon_* / \Pi(\infty)$  и обладает горизонтальной асимптотой  $t_* = 0$  при  $\sigma \rightarrow +\infty$ .

Например, для модели Максвелла  $\Pi = \alpha t + \beta$ ,  $p = (x - \beta) / \alpha$ ,  $\sigma_* = \varepsilon_* \beta^{-1}$  и КДП (7):  $t_* = \varepsilon_* \alpha^{-1} \sigma^{-1} - \beta \alpha^{-1}$ ,  $\sigma \in (0; \sigma_*)$ . Для РеМ-3  $\Pi = \beta - \gamma e^{-\lambda t}$ ,  $p = \lambda^{-1} \ln[\gamma(\beta - x)^{-1}]$ ,  $\sigma_* = \varepsilon_*(\beta - \gamma)^{-1}$ , и КДП (7) имеет вид  $t_*(\sigma) = \lambda^{-1} \ln[\gamma / (\beta - \varepsilon_* \sigma^{-1})]$ , где  $\sigma \in (\varepsilon_* \beta^{-1}; \sigma_*)$  (при  $\sigma \leq \varepsilon_* E_\infty$  КП (6) не обрывается никогда). КДП модели Фойгта получается при  $\gamma = \beta$ , она определена на луче  $\sigma \in (\varepsilon_* \beta^{-1}; \infty)$  и обладает горизонтальной асимптотой  $t_* = 0$ .

Для степенной ФП  $\Pi = Bt^w$ ,  $w \in (0; 1]$ ,  $B > 0$ , имеем  $p(x) = (x/B)^{1/w}$ ,  $\sigma_* = \infty$ , и КДП:

$$t_*(\sigma) = \varepsilon_*^{1/w} (B\sigma)^{-1/w}, \quad \sigma > 0$$

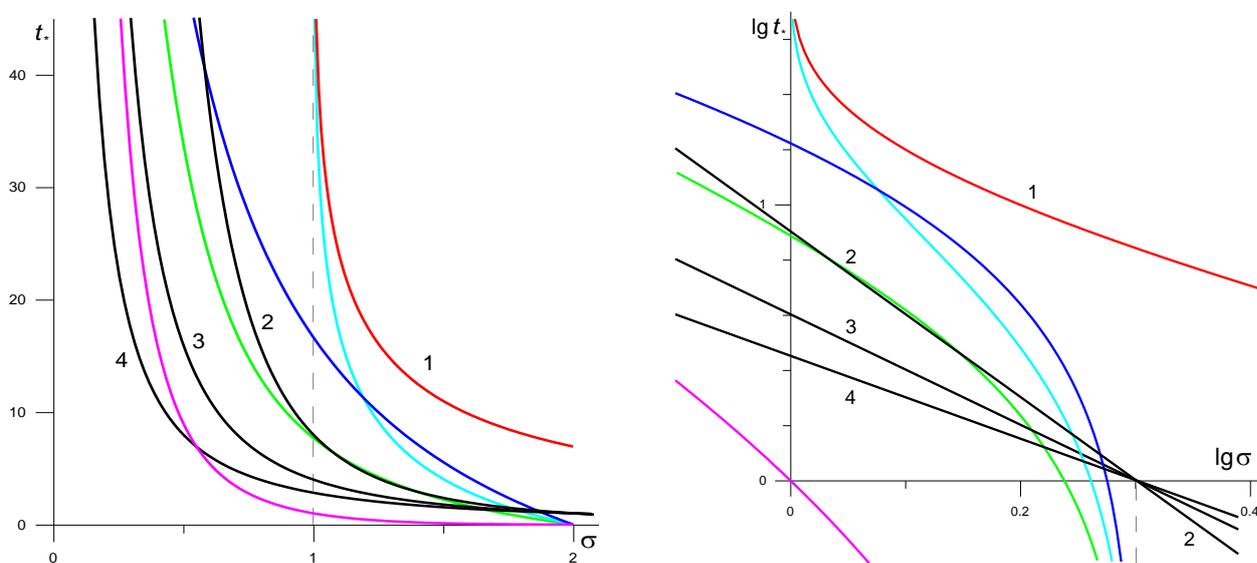
В координатах  $\lg t_* - \lg \sigma$  эта КДП – прямая с угловым коэффициентом  $k = -1/w < 0$  (такие КДП часто наблюдаются в испытаниях материалов [3,4,8,16] – см. п.1).

Для фрактальной модели Максвелла  $\Pi = Bt^w + \beta$  с  $\beta > 0$  (она регулярна, ибо  $\Pi(0) = \beta \neq 0$ ) имеем  $p(x) = ((x - \beta)/B)^{1/w}$  и  $t_*(\sigma) = B^{1/w} (\varepsilon_* \sigma^{-1} - \beta)^{1/w}$ ,  $\sigma \in (0; \sigma_*)$ ,  $\sigma_* = \varepsilon_* \beta^{-1}$ .

На рис.2,а приведены КДП (7) при растяжении (для  $\varepsilon_* = 1$ ) восьми моделей разных классов: 1) РеМ-4 с  $\lambda = 0.1$ ,  $\alpha = 0.03$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.5$  (зелёная кривая); 2) РеМ-3 с  $\lambda = 0.1$ ,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.5$  (голубая); 3) модели Фойгта с  $\gamma = \beta = 1$  (красная КДП 1); 4) Максвелла с  $\alpha = 0.03$ ,  $\beta = 0.5$  (синяя); 5) трёх моделей с ФП  $\Pi = Bt^w$  с  $B = 0.5$ ,  $w = 1/3$ ,  $w = 0.5$  или  $w = 2/3$  (чёрные КДП 2-4); 6) фрактальной модели Максвелла с  $\beta = 0.5$ ,

$w=0.5$  и  $B=0.5$  (розовая). Если ФП ограничена, то  $\sigma > \varepsilon_* E_\infty > 0$  (при  $\sigma < \varepsilon_* E_\infty$  КП не обрывается) и КДП  $t_*(\sigma)$  имеет вертикальную асимптоту  $\sigma = \varepsilon_* E_\infty$  (см. КДП моделей Фойгта и РеМ-3); а если  $\Pi(\infty) = \infty$ , то КДП имеет вертикальную асимптоту  $\sigma = 0$  (все остальные КДП). КДП  $t_*(\sigma)$  регулярных моделей обращаются в нуль при  $\sigma = \sigma_*$ , где  $\sigma_* := \varepsilon_* / \Pi(0)$  – предел (мгновенной) прочности (см. КДП РеМ-4, РеМ-3, РеМ-2 и фрактальной модели: у них  $\Pi(0) = 0.5$ ,  $\sigma_* = 2$ ); а КДП нерегулярных моделей 1-4 определены при всех  $\sigma > 0$  и имеют при  $\sigma \rightarrow +\infty$  асимптоту  $t_* = 0$ .

На рис. 2,б приведены КДП (7) тех же моделей, но в осях  $\lg t_* - \lg \sigma$ . Для степенных ФП  $\Pi = Bt^w$  КДП 2-4 превращаются в прямые  $\lg t_* = w^{-1} \lg(\varepsilon_* / B) - w^{-1} \lg \sigma$ . У регулярных моделей, вместо нуля КДП  $t_* = p(\varepsilon_* / \sigma)$  в точке  $\sigma = \sigma_*$ , появляется вертикальная асимптота  $x = \lg \sigma_*$ . Если ФП ограничена, то КДП  $t_*(\sigma)$  имеет ещё и вертикальную асимптоту  $\sigma = \varepsilon_* E_\infty$  (см. КДП РеМ-3 и модели Фойгта), а в логарифмических осях – асимптоту  $x = \lg(\varepsilon_* E_\infty)$  ( $x = 0$  на рис. 2,б). КДП модели Фойгта при  $\lg \sigma > 0.25$  визуально не отличима от прямой.



**Рис. 2.** Кривые длительной прочности  $t_*(\sigma)$  в координатах  $t_* - \sigma$  и  $\lg t_* - \lg \sigma$

При сжатии  $\varepsilon_* := \varepsilon_{*_-} < 0$  и уравнение КДП тоже имеет вид (7), но КДП в форме  $t_* = t_*(\sigma)$  определена при всех  $E \varepsilon_{*_-} < \sigma < E_{\infty} \varepsilon_{*_-}$ . Критические деформации при сжатии и при растяжении могут различаться; тогда не равны и пределы прочности  $\sigma_{*+} = E \varepsilon_{*+}$  и  $\sigma_{*-} = E \varepsilon_{*-}$  (для регулярных моделей).

Чтобы получить теоретическую КДП (7) в форме двухзвенной ломаной в координатах  $\lg t_* - \lg \sigma$  (см. п.1), можно склеить ФП из двух степенных функций  $\Pi(t) = Bt^w$ ,  $w \in (0;1]$ , с разными показателями на интервалах  $t < \hat{t}$  и  $t > \hat{t}$ . Такая ФП будет возрастающей, а требование её выпуклости вверх (см. п.2) равносильно условию  $w_2 < w_1$ . Из него следует неравенство  $|\mu_1| < |\mu_2|$  для угловых коэффициентов прямолинейных участков КДП  $\mu_i = 1/w_i$ , типичное для экспериментальных КДП. Отметим, что при  $\varepsilon_* = \text{const}$  излом на КДП (7) можно смоделировать только ценой излома ФП (тогда на всех КП (6) будет излом в точке  $t = \hat{t}$ ), ибо гладкое сопряжение графиков двух степенных функций имеет место только при  $B_2 = B_1$  и  $w_2 = w_1$ .

Если же рассматривать обобщение ДКР (1), учитывающее зависимость  $\varepsilon_*$  от напряжения, т.е. считать, что  $\varepsilon_* = f(\sigma)$ , то для произвольной ФП излом КДП (7) можно получить за счёт задания скачка производной материальной функции  $f(x)$  при некотором  $x = \hat{\sigma}$ . В этом случае КДП (7) и её производная принимают вид:

$$t_* = p(f(\sigma)/\sigma), \quad t'_*(\sigma) = p'(f(\sigma)/\sigma)[f'(\sigma)\sigma - f(\sigma)]\sigma^{-2}, \quad (8)$$

а условие убывания КДП  $t'_*(\sigma) < 0$  равносильно ограничению  $f'(x)x - f(x) < 0$ , т.е.

$$f'(x) < f(x)/x \quad \text{для } x > 0. \quad (9)$$

Для  $f = \varepsilon_0 \sigma^\omega$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\omega > 0$ , требование (9) даёт ограничение на показатель:  $\omega < 1$ . Неравенство (9) выполняется для любой убывающей (положительной) функции, а также – для любой строго выпуклой вверх функции  $f(x)$  (не обязательно монотонной) с  $f(0) \geq 0$ . В самом деле, для функции  $y := f(x)/x - f'(x)$ ,  $x \in (0, a)$ , по теореме Лагранжа имеем  $y(x) = f'(\xi) - f'(x) + f(0)/x$ ,  $\xi \in (0; x)$ ; так как  $f''(x) < 0$ , то  $f'(x)$  убывает,  $f'(\xi) > f'(x)$  и  $y(x) > 0$ , т.е. справедливо неравенство (9).

Таким образом, ОС (2) в сочетании с ДКР (1) (как при  $\varepsilon_* = \text{const}$ , так и при  $\varepsilon_* = f(\sigma)$ ) порождает КДП (7), обладающие такими же качественными свойствами, что и типичные экспериментальные КДП (п.1). Если задать  $\varepsilon_* = f(\sigma)$ , то можно описывать как монотонные зависимости  $\varepsilon_*(\sigma)$ , так и немонотонные [4,34,35,16,22-24]. Всё это свидетельствует о том, что ДКР хорошо взаимодействует с ОС (2), и они, в принципе, способны качественно моделировать длительную прочность вязкоупругих материалов при малых напряжениях (в области линейности их поведения). Однако хотелось бы иметь арсенал более чутких, чем ДКР, критериев разрушения, допускающих более точную настройку за счёт дополнительных параметров и учитывающих информацию, которой ДКР пренебрегает.

#### **4. Критерии разрушения, учитывающие историю деформирования**

Время разрушения образца при ползучести зависит не только от уровня напряжения. Влияние иных факторов может оказаться столь значительным, что его невозможно учесть, не меняя структуру левой части ДКР (1), а только вводя в его правую часть зависимость  $\varepsilon_*$  от напряжения, температуры, воздействия агрессивной среды, дозы радиации и т.п. Целесообразно построить КР, обобщающие ДКР, но

учитывающие историю нарастания деформации, КР, зависящие от всей кривой ползучести. Ведь она хранит интегральную информацию об условиях развития деформации и процессах, приводящих к разрушению: об уровне напряжения, величине и моментах догрузки при ступенчатом нагружении, изменениях температуры, накоплении дислокаций, развитии микротрещин и пор, уменьшении эффективной площади сечения, коррозии, диффузии водорода и других агрессивных газов и т.п. Почти вся эта информация никак не учитывается ДКР (1).

Скалярные КР постулируют, что разрушение происходит в тот момент  $t_*$ , когда некоторая мера повреждённости  $\omega(t)$  достигает критического значения  $\omega_*$ . Необходимое свойство оператора, переводящего  $\varepsilon(t)$  в  $\omega(t)$ , – сохранение им монотонности: для возрастающей при  $t > 0$  функции  $\varepsilon(t)$  мера повреждённости  $\omega(t)$  должна быть возрастающей функцией (в противном случае КР не будет работать, а если будет, то совсем не так, как классический ДКР (1), когда  $\omega(t) \equiv C\varepsilon(t)$ ). Это требование формализует представление о том, что процессы разрушения и нарастания деформации ползучести, связанные общими структурными механизмами, положительно коррелированы, "сонаправлены".

В работе [28] предложены и исследованы два семейства скалярных критериев разрушения при монотонном одноосном деформировании, родственных деформационному КР (1), но учитывающих историю нарастания деформации:

$$\omega(t, u) = \omega_*, \quad u > 0. \quad (10)$$

В качестве меры повреждённости  $\omega(t, u)$  предлагается использовать одно из двух семейств средних значений деформации за время  $t$ , зависящих от параметра  $u > 0$ :

$$\omega(t,u) = \tilde{\varepsilon}_u(t), \quad \tilde{\varepsilon}_u(t) := \left( t^{-1} \int_0^t |\varepsilon(\tau)|^u d\tau \right)^{1/u}, \quad t > 0; \quad (11)$$

$$\omega(t,u) = \hat{\varepsilon}_u(t), \quad \hat{\varepsilon}_u(t) := \varepsilon(0) + v_u(t)t, \quad v_u(t) := \left( t^{-1} \int_0^t |\dot{\varepsilon}(\tau)|^u d\tau \right)^{1/u}. \quad (12)$$

Средняя деформация (12) определяется через среднюю скорость деформации  $v_u(t)$  на интервале  $(0,t)$ . Целесообразность использования критерия (10),(12) связана с тем, что он обобщает и формализует эмпирический факт [3-5,8,16]: в испытаниях разных материалов, проявляющих способность к установившейся ползучести, произведение  $t_*$  на скорость установившейся ползучести  $v(\sigma)$  – величина постоянная, не зависящая (слабо зависящая) от напряжения:  $vt_* \approx \text{const}$ . КР (10),(12) обобщает это наблюдение на неустановившуюся ползучесть заменой  $v$  на среднюю скорость ползучести на промежутке  $[0,t_*]$  и добавлением в (12) слагаемого  $\varepsilon(0)$ , обеспечивающее чувствительность КР к начальной мгновенной деформации. При  $\dot{\varepsilon}(t) = v = \text{const}$  формула (12) даёт  $\hat{\varepsilon}_u(t) = \varepsilon(t)$  и  $vt_* = \text{const}$ . Предполагается, что интеграл (12) сходится (нарушение этого условия возможно для гладких при  $t > 0$  функций  $\varepsilon(t)$ , имеющих особенность  $\dot{\varepsilon}(0+) = +\infty$ ); в частности, для функций с асимптотикой  $\dot{\varepsilon}(t) \propto ct^{-\alpha}$ ,  $\alpha > 0$ , интеграл (12) сходится при  $u < 1/\alpha$ .

Критическая повреждённость  $\omega_*$  в (10) – постоянная, зависящая только от температуры и вида напряжённого состояния (растяжение, сжатие, кручение). В частности, возможно использование в КР (10), (11) и (10), (12) величины  $\omega_* = \varepsilon_*$ , где  $\varepsilon_*$  – предельная деформация из ДКР (1). Однако деформация в момент разрушения  $\varepsilon(t_*) = \sigma\Pi(t_*)$  уже не будет постоянной: она будет зависеть от параметра  $u$  и уровня

напряжения, так как  $t_* = t_*(\sigma, u)$  (см. п. 5).

Детальное аналитическое исследование КР (10),(11) и (10),(12) позволило обнаружить ряд полезных свойств, подтверждающих их пригодность для описания разрушения материалов при ползучести и прогнозирования длительной прочности. В частности, в работе [28] доказаны следующие утверждения.

**Теорема 1.** Пусть  $\varepsilon(t)$  – дифференцируемая на интервале  $t > 0$  неубывающая функция, и интеграл (12) сходится. Тогда: 1) средние  $\tilde{\varepsilon}_u(t)$ ,  $u > 0$ , и  $\hat{\varepsilon}_u(t)$ ,  $u \geq 1$ , возрастают по  $t$  и потому их можно использовать как меру повреждённости в КР (10) для монотонных процессов деформирования;

2) скорости роста повреждённостей (11) и (12) выражаются формулами:

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}_u(t) = \tilde{\varepsilon}_u(t)(ut)^{-1} \left[ (\varepsilon(t) / \tilde{\varepsilon}_u(t))^u - 1 \right], \quad \dot{\hat{\varepsilon}}_u(t) = v_u(t)u^{-1} [u - 1 + (\dot{\varepsilon}(t) / v_u(t))^u], \quad t > 0;$$

3) семейства функций  $\tilde{\varepsilon}_u(t, u)$  и  $\hat{\varepsilon}_u(t, u)$  непрерывны и возрастают по параметру  $u > 0$ ;

4) для всех  $t > 0$   $\tilde{\varepsilon}_u(t) < \varepsilon(t)$  при  $u > 0$  и  $\hat{\varepsilon}_u(t) \geq \varepsilon(t)$  при  $u > 1$  ( $\hat{\varepsilon}_u(t) \equiv \varepsilon(t)$  при  $\dot{\varepsilon}(t) = \text{const}$ );

5)  $\tilde{\varepsilon}_u(0+) = \varepsilon(0)$ ,  $\hat{\varepsilon}_u(0+) = \varepsilon(0)$ ; если предел  $\varepsilon(+\infty)$  конечен, то  $\tilde{\varepsilon}_u(+\infty) = \varepsilon(+\infty)$ ;

6)  $\tilde{\varepsilon}_u(t) \rightarrow \varepsilon(t)$  при  $u \rightarrow \infty$ , т.е. КР (10),(11) с  $\omega_* = \varepsilon_*$  при достаточно большом  $u$  даёт значение  $t_*$ , сколь угодно близкое к ДКР (1);

7) при  $u = 1$   $\hat{\varepsilon}_1(t) = \varepsilon(t)$ ,  $t > 0$ , и КР (10),(12) совпадает с ДКР.

Эти свойства показывают, что критерии (10),(11) образуют монотонную и непрерывную шкалу критериев (монотонно и непрерывно зависящих от параметра  $u > 0$ ), более мягких, чем ДКР (1) (с  $\varepsilon_* = \omega_*$ ), но сколь угодно мало отличающихся от него при больших значениях  $u$ , а КР (10),(12) с  $u > 1$  – шкалу критериев, более

жѐстких, чем ДКР и включающую ДКР как предельный случай при  $u=1$ . КР семейства (10),(11) при всех  $u>0$  дают большее время разрушения, чем ДКР, семейства (10),(12) при  $u>1$  – меньшее, а различие можно сделать сколь угодно малым за счёт выбора значений параметра  $u$  у края шкалы ( $u \rightarrow \infty$  или  $u=1$ ). Это свойство очень полезно для точной настройки модели на имеющиеся экспериментальные данные о зависимости времени разрушения от уровня напряжения, температуры и других факторов: если эти данные плохо описывает ДКР (1), то можно выбрать более подходящий КР из построенных семейств (10),(11) или (10),(12), плавно и монотонно изменяя значение  $u$ . Параметр  $u$  в (11) играет роль регулятора значимости позднейшей (ближайшей к текущему моменту времени  $t$ ) истории: чем больше  $u$ , тем больший вклад в интеграл (11) вносят большие значения  $\varepsilon(\tau)$ , т.е. значения деформации в моменты  $\tau$ , близкие к верхнему пределу интегрирования  $t$  ( $\varepsilon(\tau)$  предполагается неубывающей), и при  $u \rightarrow \infty$  семейство мер повреждѐнности (11) сходится к  $\varepsilon(t)$  (т.е. теряет память об истории деформации).

Отметим, что степенные функции  $\varepsilon = ct^w$ ,  $c, w > 0$ , являются собственными векторами интегральных операторов (11) и (12), так как для них

$$\tilde{\varepsilon}_u(t) = \tilde{\mu}(u, w) \varepsilon(t), \quad \tilde{\mu}(u, w) = (wu + 1)^{-1/u}, \quad u > 0, w > 0, \quad (13)$$

$$\hat{\varepsilon}_u(t) = \hat{\mu}(u, w) \varepsilon(t), \quad \hat{\mu}(u, w) = w(wu - u + 1)^{-1/u}, \quad u > 0, w > 1 - u^{-1} \quad (14)$$

(интеграл (12) для функций  $\varepsilon = ct^w$  с  $w \in (0; 1)$ , имеющих особенность  $\dot{\varepsilon}(0+) = +\infty$ , сходится лишь при  $(1-w)u < 1$ , т.е.  $u < \bar{u}$ ,  $\bar{u} := 1/(1-w)$ ; при  $u \rightarrow \bar{u}$   $\hat{\mu}(u, w) \rightarrow +\infty$ ). Следовательно, для ФП вида  $\Pi = ct^w$  КДП, порождѐнные КР КР (10),(11) и (10),(12), получаютя из КДП (7), порождѐнной ДКР (1), растяжением вдоль оси напряжений

с коэффициентами  $\tilde{\mu}(u, w)$  и  $\hat{\mu}(u, w)$  ( $\hat{\mu}(1, w) = 1$ ). Пределы собственных значений: при  $u \rightarrow 0$   $\tilde{\mu}(u, w) \rightarrow e^{-w}$ ,  $\hat{\mu}(u, w) \rightarrow we^{1-w}$ , а при  $u \rightarrow +\infty$  (для  $w > 1$ ):  $\tilde{\mu}(u, w) \rightarrow 1$  и  $\hat{\mu}(u, w) \rightarrow w$ . В силу возрастания  $\tilde{\mu}(u, w)$  по  $u$  на интервале  $u > 0$  (п.3 теоремы 1),  $e^{-w} < \tilde{\mu}(u, w) < 1$ . В случае  $w > 1$   $\hat{\mu}(u, w)$  возрастает по  $u$  при  $u > 0$ , и потому  $we^{1-w} < \hat{\mu}(u, w) < w$ . Так как при  $w \in (0; 1)$  функция  $\hat{\mu}(u, w)$  определена (и возрастает по  $u$ ) на интервале  $u \in (0, \bar{u})$  и  $\hat{\mu}(u, w) \rightarrow +\infty$  при  $u \rightarrow \bar{u}$ , то область значений  $\hat{\mu}(u, w)$  в случае  $w \in (0; 1)$  – весь луч  $[we^{1-w}, +\infty)$  (отметим, что  $we^{1-w} \leq 1$  при  $w > 0$ ,  $we^{1-w} = 1$  лишь при  $w = 1$ ).

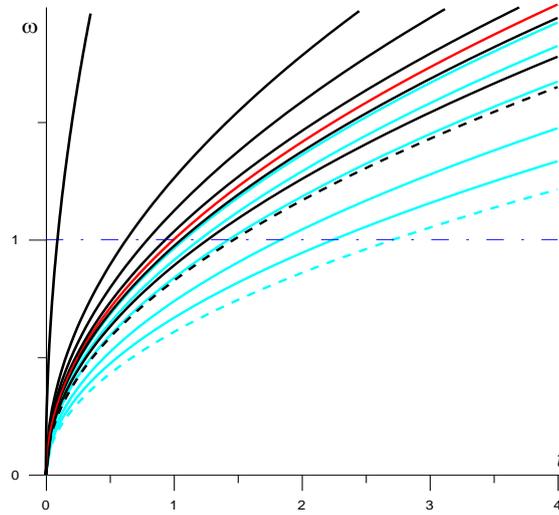


Рис.3.  $\omega = \tilde{\varepsilon}_u(t)$  и  $\omega = \hat{\varepsilon}_u(t)$  при различных  $u > 0$

Для иллюстрации свойств мер повреждённости (11) и (12) на рис.3 приведена история деформации  $\varepsilon = ct^w$  с  $w = 0.5$ ,  $c = 1$  (красная кривая) и соответствующих мер повреждённости  $\omega = \tilde{\varepsilon}_u(t)$  и  $\omega = \hat{\varepsilon}_u(t)$  при разных  $u > 0$ . Голубые кривые – среднее  $\tilde{\varepsilon}_u(t)$  для  $u = 1; 3; 10; 30; 100$ , чёрные – среднее  $\hat{\varepsilon}_u(t)$  для  $u = 0,5; 0,9$  (при  $u < 1$   $\hat{\varepsilon}_u(t) < \varepsilon(t)$ ) и  $u = 1,1; 1,3; 1,5; 1,95$  (при  $u > 1$   $\hat{\varepsilon}_u(t) > \varepsilon(t)$ ). Интеграл (12) для функций  $\varepsilon = ct^w$ ,  $w \in (0; 1)$ , с особенностью  $\dot{\varepsilon}(0+) = +\infty$ , сходится лишь при  $u < 1/(1-w)$ , поэтому при  $u \rightarrow 1/(1-w) = 2$

семейство  $\hat{\varepsilon}_u(t)$  стремится к вертикальной прямой  $t=0$ . Штриховые линии – предельные кривые  $\tilde{\varepsilon}_0(t)$  и  $\hat{\varepsilon}_0(t)$  при  $u \rightarrow 0+$  (нижние границы полос для  $\tilde{\varepsilon}_u(t)$  и  $\hat{\varepsilon}_u(t)$ ).

КР (10),(11) и (10),(12) (при  $u \approx 1$ ) ориентированы прежде всего на материалы, которые обладают "абсолютной" памятью, в том смысле, что они хорошо помнят всю историю деформации, начиная с момента  $t=0$ . Для моделирования разрушения материалов с затухающей памятью и ограниченной глубиной памяти (полностью забывающих начальную историю), можно ввести в определения интегральных средних (11) и (12) положительные весовые множители, монотонно зависящие от  $\tau$ , либо заменить отрезок интегрирования  $[0;t]$  на  $[\theta t;t]$ , где  $\theta \in [0;1)$ , т.е. выбрать в качестве меры повреждённости среднюю деформацию на промежутке  $[\theta t;t]$ ,  $t > 0$ :

$$\omega(t) = \tilde{\varepsilon}_{u,\theta}(t) = \left( (t - \theta t)^{-1} \int_{\theta t}^t \varepsilon(\tau)^u d\tau \right)^{1/u}, \quad u > 0, \quad \theta \in [0;1) \quad (15)$$

Нетрудно доказать, что,  $\tilde{\varepsilon}_{u,0}(t) = \tilde{\varepsilon}_u(t)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_u(t) < \tilde{\varepsilon}_{u,\theta}(t) < \varepsilon(t)$  при  $\theta \in (0;1)$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{u,\theta}(t)$  возрастает по  $\theta$  и  $u$  и  $\tilde{\varepsilon}_{u,\theta}(t) \rightarrow \varepsilon(t)$  при  $\theta \rightarrow 1$ , т.е. шкала КР (10), (15) также содержит ДКР (с  $\varepsilon_* = \omega_*$ ) в предельном случае и всегда даёт большее время разрушения. Введение параметра  $\theta$  в меру повреждённости позволяет осуществлять ещё более тонкую настройку КДП на экспериментальные данные, и даёт дополнительную степень свободы для учёта их зависимости от температуры или иных факторов.

Построенные КР опробованы во взаимодействии с нелинейным ОС вязкоупругопластичности типа Максвелла [30] и двумя нелинейными ОС, построенными и исследованными в [26,27]: при произвольных материальных функциях и параметрах выведены уравнения кривых ползучести и КДП и

аналитически исследованы их общие качественные свойства, вытекающие из общих ограничений, наложенных на материальные функции и параметры ОС. Доказано, что в сочетании с любым из КР семейств (10),(11), (10),(12) или (10),(15) (как и с ДКР (1)), все перечисленные ОС приводят к теоретическим КДП, обладающим такими же качественными свойствами, что и типичные экспериментальные КДП вязкоупругопластичных материалов (см. п.1). Покажем, что эти КР хорошо взаимодействуют и с линейным ОС вязкоупругости (2).

### **5. Свойства кривых длительной прочности, порождаемых линейной теорией вязкоупругости в сочетании с критериями разрушения (10), (11) и (10), (12)**

Применим КР (10),(11) и (10),(12) к кривой ползучести (6) ОС (2), т.е.  $\varepsilon(t) = \sigma\Pi(t)$ . Из (11) имеем:  $\tilde{\varepsilon}_u(t) = |\sigma|\tilde{\Pi}_u(t)$  и  $\hat{\varepsilon}_u(t) = |\sigma|\hat{\Pi}_u(t)$ , где  $\tilde{\Pi}_u(t)$  и  $\hat{\Pi}_u(t)$  – осреднения ФП по (11) и (12). Для любого  $u > 0$   $\tilde{\Pi}_u(t)$  обладает теми же свойствами, что и ФП:  $\tilde{\Pi}_u(t)$  возрастает и выпукла вверх,  $\tilde{\Pi}_u(0) = \Pi(0)$  и для ограниченной ФП  $\tilde{\Pi}_u(\infty) = \Pi(\infty)$ . Если интеграл (12) для  $\hat{\Pi}_u(t)$  сходится (для этого достаточно, чтобы предел  $\dot{\Pi}(0+)$  был конечен, а для ФП с асимптотикой  $\dot{\Pi}(t) \sim ct^{w-1}$  при  $t \rightarrow +0$ ,  $w \in (0;1)$ , критерий сходимости интеграла (12) – выполнение неравенства  $u < 1/(1-w)$ ), то  $\hat{\Pi}_u(t)$  при  $u > 1$  обладает теми же качественными свойствами, что  $\tilde{\Pi}_u(t)$  и  $\Pi(t)$  (при  $u < 1$  возможно нарушение монотонности  $\hat{\Pi}_u(t)$ ).

Из КР (10),(11) получаем условие разрушения  $|\bar{\sigma}|\tilde{\Pi}_u(t) = \omega_*$ , время разрушения  $\tilde{t}_* = \tilde{p}_u(\omega_*/|\sigma|)$ , где  $u > 0$ ,  $\tilde{p}_u := (\tilde{\Pi}_u)^{-1}$  – обратная функция (она тоже возрастает и выпукла вниз), и уравнение КДП при растяжении имеет вид, аналогичный (7):

$$\sigma = \omega_* / \tilde{\Pi}_u(t_*), \quad t_* > 0, \quad \text{или} \quad \tilde{t}_* = \tilde{p}_u(\omega_* / \sigma), \quad E_\infty \omega_* < \sigma < E \omega_* \quad (16)$$

Из КР (10),(12) получим КДП аналогичного вида (с  $\hat{\Pi}_u(t)$  и  $\hat{p}_u$ , вместо  $\tilde{\Pi}_u$ ,  $\tilde{p}_u$ ):

$$\sigma = \omega_* / \hat{\Pi}_u(t_*), \quad t_* > 0, \quad \text{или} \quad \hat{t}_* = \hat{p}_u(\omega_* / \sigma), \quad E_\infty \omega_* < \sigma < E \omega_* \quad (17)$$

Из теоремы 1 следует, что  $\tilde{\Pi}_u(t) < \Pi(t)$  при всех  $u > 0$ , а  $\hat{\Pi}_u(t) \geq \Pi(t)$  при  $u > 1$  ( $\hat{\Pi}_u(t) \equiv \Pi(t)$  лишь в случае  $\dot{\Pi} = \text{const}$ , т.е. только для модели Максвелла), и потому для КДП (7), (16) и (17), порождённых ДКР (1) и критериями (10),(11) и (10),(12), справедливы неравенства  $\hat{t}_*(\sigma) < t_*(\sigma)$  при  $u > 1$  и  $t_*(\sigma) < \tilde{t}_*(\sigma)$  при  $u > 0$ . Семейства  $\tilde{\Pi}_u(t)$  и  $\hat{\Pi}_u(t)$  непрерывны и возрастают по параметру  $u$ , поэтому семейства КДП (16) и (17) непрерывны и убывают по  $u$ . Из п. 6,7 теоремы 1 следует, что при  $u = 1$  КДП (17) совпадает с КДП (7), порождённой ДКР, а семейство КДП (16) сходится к КДП (7) при  $u \rightarrow +\infty$ . Таким образом, свойства КДП (16) и (17) для любого  $u > 1$  аналогичны свойствам КДП (7), установленным в п.3, но параметр  $u$  даёт дополнительную степень свободы, дополнительную возможность настройки КДП на экспериментальные данные, помимо выбора ФП. Это важно, поскольку ФП – единственная материальная функция ОС (2) и отвечает за форму всех теоретических кривых ОС (2) (кривых ползучести, релаксации, деформирования и т.п.), хотя однозначно определяется по любой из них.

Для степенных ФП  $\Pi = Bt^w$ ,  $w \in (0;1)$ ,  $B > 0$ , средние  $\tilde{\Pi}_u(t)$  и  $\hat{\Pi}_u(t)$  отличаются от ФП лишь постоянными множителями  $\tilde{\mu}(u,w)$  и  $\hat{\mu}(u,w)$  (см. (13), (14)):

$$\tilde{\Pi}_u(t) = (wu + 1)^{-1/u} Bt^w, \quad u > 0; \quad \hat{\Pi}_u(t) = w(wu - u + 1)^{-1/u} Bt^w, \quad u \in [0; (1-w)^{-1}].$$

Поэтому КДП (16) и (17) получаются из КДП (7), порождённой ДКР, растяжением

вдоль оси  $\sigma$  с коэффициентами  $\tilde{\mu}(u, w) = (wu + 1)^{-1/u}$  и  $\hat{\mu}(u, w) = w(wu - u + 1)^{-1/u}$ :

$$\tilde{t}_*(\sigma) = \omega_*^{1/w} (B\tilde{\mu}\sigma)^{-1/w}, \quad u > 0; \quad \hat{t}_*(\sigma) = \omega_*^{1/w} (B\hat{\mu}\sigma)^{-1/w}, \quad u \in [1; (1-w)^{-1}] \quad (18)$$

Диапазоны изменения  $\tilde{\mu}(u, w)$  и  $\hat{\mu}(u, w)$  найдены в п.4:  $\tilde{\mu} \in (e^{-w}; 1)$  при  $u > 0$ , а  $\hat{\mu} \in [1; +\infty)$  при  $u \in [1; (1-w)^{-1}]$  (и  $\hat{\mu} \in [we^{1-w}, +\infty)$  при  $u \in [0; (1-w)^{-1}]$ ). В осях  $\lg t_* - \lg \sigma$  КДП (16) и (17) для степенных ФП являются отрезками прямой  $\lg t_* = w^{-1} \lg(\omega_* / (\mu B)) - w^{-1} \lg \sigma$  с тем же угловым коэффициентом  $-w^{-1}$ , что и у КДП (7), порождённой ДКР (1).

Для наглядного сопоставления на рис.4,а приведены КДП (7), (16) и (17), порождённые ОС (2) с ФП  $\Pi = Bt^w$ ,  $w = 0.5$ ,  $B = 1$ , в сочетании с ДКР (1) (красная КДП), интегральными КР (10),(11) и (10),(12) при  $\omega_* = 1$  и различных  $u > 0$ . Голубые кривые – КДП (16) для  $u = 1; 3; 10; 30; 100$ , чёрные – КДП (17) для  $u = 0,5; 0,9$  (при  $u < 1$   $\hat{\Pi}_u(t) < \Pi(t)$  и КДП (17) лежит выше КДП (7)) и  $u = 1,1; 1,3; 1,5; 1,95$  (при  $u > 1$   $\hat{\Pi}_u(t) > \Pi(t)$  и КДП (17) лежит ниже КДП (7)). Интеграл (12) для функций  $\varepsilon = Bt^w$ ,  $w \in (0; 1)$ , имеющих особенность  $\dot{\varepsilon}(0+) = +\infty$ , сходится лишь при  $u < 1/(1-w)$ . Штриховые линии – предельные КДП при  $u \rightarrow 0+$  (нижние границы полос для КДП (16) и (17)).

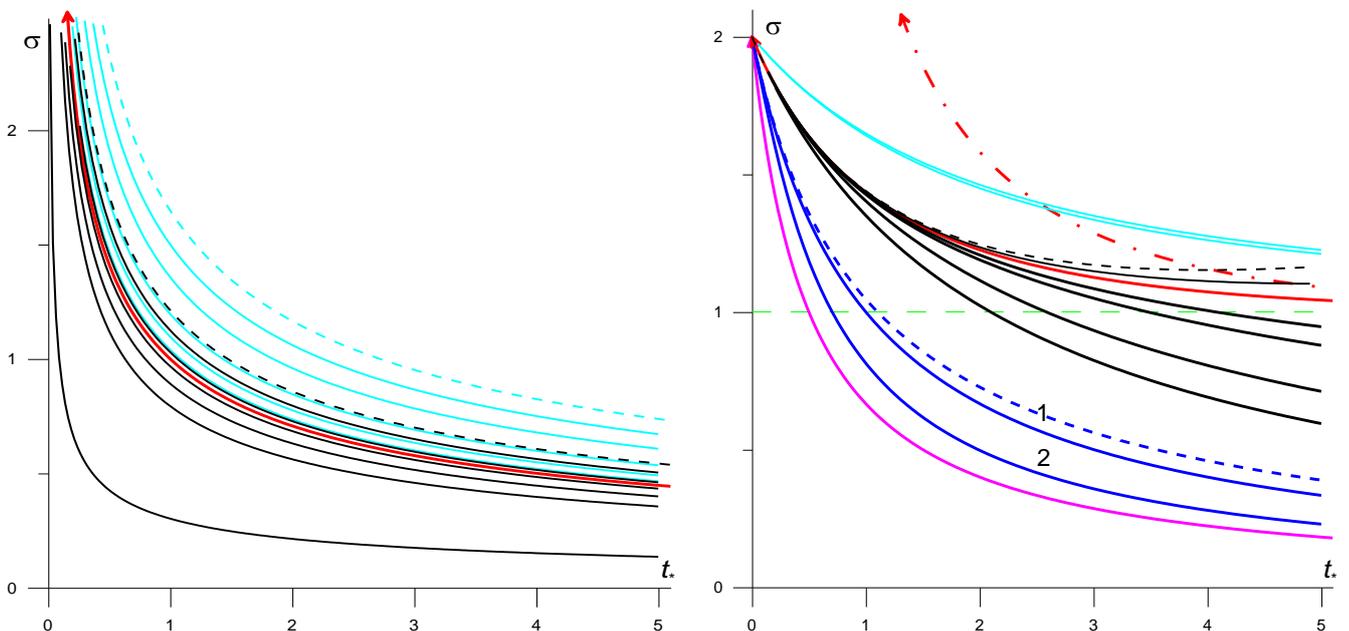


Рис.4. КДП (7), (16) и (17), порождённые ОС (2) в сочетании с ДКР и КР (10),(11) и (10),(12).

На рис. 4,б приведены КДП (7), (16) и (17) (с  $\omega_* = 1$ ) модели Кельвина (РеМ-3 задаётся ФП (5) с  $\alpha = 0$ ,  $\lambda = 0.5$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0.5$ ), порождённые ДКР (1) (красная КДП с горизонтальной асимптотой  $\sigma = \varepsilon_* / \Pi(\infty) = \varepsilon_* / \beta = 1$ ), интегральным КР (10),(11) с  $u = 1; 2$  (голубые КДП) и КР (10),(12) с  $u = 0,5$  и  $u = 2; 3; 10; 100$  (чёрные КДП). При  $u > 1$  КДП (17) лежит ниже КДП (7), а при  $u < 1$  КДП (17) лежит выше КДП (7) (и теряет монотонность). Чёрная штриховая линия – предельная КДП (17) при  $u \rightarrow 0+$ . Для сравнения на рис. 4,б приведены КДП модели Максвелла (РеМ-2) с  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.5$  в сочетании с ДКР (розовая КДП с горизонтальной асимптотой  $\sigma = \varepsilon_* / \Pi(\infty) = 0$ ) и в сочетании с КР (10),(11) для  $u = 1; 10$  (синие КДП 1, 2); синяя штриховая линия – предельная КДП при  $u \rightarrow 0+$ . КР (10),(12) с любым  $u > 0$  для модели Максвелла даёт  $\hat{\Pi}_u(t) = \beta + t\alpha = \Pi(t)$  и КДП, совпадающие с КДП (7), порождённой ДКР. Красная штрих-пунктирная линия – КДП (7) модели Фойгта с  $\gamma = \beta = 1$  (так как  $\Pi(0) = 0$ , то КДП имеет вертикальную асимптоту  $\sigma = 0$  при  $t_* \rightarrow 0$ ).

## 6. Заключение.

В статье изучены возможности подключения к линейному определяющему соотношению вязкоупругости (2) критериев разрушения (КР) для описания разрушения при ползучести с постоянным напряжением и длительной прочности вязкоупругопластичных материалов. Выведены и аналитически исследованы уравнения кривых длительной прочности (КДП), порождённых ОС (2) с произвольной функцией ползучести в сочетании с деформационным критерием

разрушения (ДКР) (1), а также – с двумя семействами интегральных критериев (10), (11) и (10), (12), родственных ДКР, но учитывающими историю деформирования.

Показано, что ОС (2) в сочетании с ДКР (1) порождает КДП, обладающие такими же качественными свойствами, что и типичные экспериментальные КДП вязкоупругих материалов (см. п.1). В п.3 доказаны следующие утверждения:

**Теорема 2.** Пусть функция ползучести ОС (2) положительна, дифференцируема, возрастает и выпукла вверх на  $(0; \infty)$ . Тогда кривая длительной прочности, порождённая ОС (2) и ДКР (1), задаётся уравнением (7) и обладает следующими свойствами: 1) КДП (7) убывает и выпукла вниз (как в форме  $\sigma(t_*)$ , так и  $t_*(\sigma)$ ); 2) для регулярных моделей  $\sigma(0+) = \sigma_* < \infty$ , где параметр  $\sigma_* := \varepsilon_* / \Pi(0)$  имеет смысл предела прочности при растяжении, и КДП можно записать в виде  $\sigma / \sigma_* = \Pi(0) / \Pi(t_*)$ ; 3) для нерегулярных моделей (с  $\Pi(0) = 0$ )  $\sigma_* = \infty$  и  $\sigma(t_*) \rightarrow \infty$  при  $t_* \rightarrow 0+$ ; 4) для степенных функций ползучести  $\Pi(t) = Bt^w$  с  $w \in (0; 1]$ , КДП (7) имеет вид  $t_*(\sigma) = (\varepsilon_* / B)^{1/w} \sigma^{-1/w}$  и в логарифмических координатах представляется отрезком прямой линии  $\lg t_* = w^{-1} \lg(\varepsilon_* / B) - w^{-1} \lg \sigma$  с угловым коэффициентом  $-w^{-1} < 0$ ; 5) если функция ползучести ограничена, то КДП  $t_*(\sigma)$  обладает вертикальной асимптотой  $\sigma = \bar{\sigma} / \Pi(\infty) \neq 0$  (разрушение моделируется лишь при  $\sigma > \bar{\sigma} / \Pi(\infty)$ ); если  $\Pi(\infty) = \infty$ , то КДП имеет вертикальную асимптоту  $\sigma = 0$ .

Рассмотрено обобщение ДКР (1), учитывающее зависимость деформации разрушения от напряжения, т.е. случай с  $\varepsilon_* = f(\sigma)$ , и получено ограничение (9) на материальную функцию  $f(x)$ , обеспечивающее монотонное убывание КДП. Критерий (9) выполняется, в частности, для любой убывающей (положительной)

функции, а также – для любой строго выпуклой вверх функции  $f(x)$  (не обязательно монотонной) с  $f(0) \geq 0$ . Поэтому задание  $\varepsilon_* = f(\sigma)$  в ДКР (1) даёт возможность моделировать как монотонные зависимости  $\varepsilon_*(\sigma)$ , так и немонотонные.

Помимо ДКР, исследованы два семейства критериев разрушения при монотонном деформировании (10),(11) и (10),(12), родственные ДКР (1), но учитывающие историю нарастания деформации. Доказано (см. п.5), что в сочетании с ОС (2) эти КР порождают КДП, обладающие такими же качественными свойствами, что и типичные экспериментальные КДП (см. теорему 3).

**Теорема 3.** Пусть функция ползучести ОС (2) положительна, дифференцируема, возрастает и выпукла вверх на  $(0; \infty)$ . Тогда кривые длительной прочности, порождённые ОС (2) и критериями разрушения (10), (11) и (10), (12) (с  $u > 0$ ), задаются уравнениями (16) и (17) и обладают следующими свойствами:

- 1) КДП (16) с  $u > 0$  и КДП (17) с  $u > 1$  убывают и выпуклы вниз;
  - 2) семейства КДП (16) и (17) непрерывны и убывают по параметру  $u$  при всех  $u > 0$ ;
  - 3) при  $u = 1$  КДП (17) совпадает с КДП (7), порождённой ДКР:  $\hat{t}_*(\sigma) = t_*(\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ ;
- при  $u \rightarrow +\infty$  семейство КДП (16) сходится к КДП (7):  $\tilde{t}_*(\sigma) \rightarrow t_*(\sigma)$ ,  $\sigma > 0$ ;
- 4) для КДП (7),(16),(17) при любом  $\sigma > 0$  справедливы неравенства

$$\hat{t}_*(\sigma) < t_*(\sigma) \text{ при } u > 1 \text{ и } t_*(\sigma) < \tilde{t}_*(\sigma) \text{ при } u > 0;$$

- 5) для степенных функций ползучести  $\Pi = Bt^w$  с  $w \in (0; 1]$  КДП (16) и (17) получаются из КДП (7), порождённой ДКР, растяжением вдоль оси напряжений с коэффициентами  $\tilde{\mu}(u, w)$  и  $\hat{\mu}(u, w)$  (см. (13) и (14)):

$$\tilde{t}_*(\sigma) = \omega_*^{1/w} (B\tilde{\mu}\sigma)^{-1/w}, \quad u > 0, \quad \text{и} \quad \hat{t}_*(\sigma) = \omega_*^{1/w} (B\hat{\mu}\sigma)^{-1/w}, \quad 1 \leq u < (1-w)^{-1},$$

где  $\tilde{\mu} \in (e^{-w}; 1)$  при  $u > 0$  и  $\hat{\mu} \in [1; +\infty)$  при  $u \in [1; (1-w)^{-1})$ ; в логарифмических координатах эти КДП являются отрезками прямой линии  $\lg t_* = w^{-1} \lg(\omega_* / (\mu B)) - w^{-1} \lg \sigma$  с тем же угловым коэффициентом  $-w^{-1}$ , что и у КДП (7), порождённой ДКР.

Существенно, что каждое из семейств КР (10), (11) и (10), (12) образует шкалу критериев, непрерывно и монотонно зависящих от параметра  $u$ ; критерии первого семейства всегда дают большее время разрушения, чем ДКР, критерии второго семейства – меньшее, а различие можно сделать сколь угодно малым за счёт выбора значения  $u$  у края шкалы (п.3 теоремы 3). Вместе с тем различие можно сделать большим, выбрав значение  $u$  вдали от этого края. Эти свойства очень полезны для точной настройки модели на имеющиеся опытные данные о зависимости времени разрушения от уровня напряжения, температуры, радиации и других факторов: если эти данные плохо описывает ДКР, то можно выбрать подходящий КР из построенных семейств, плавно и монотонно изменяя параметр  $u$ . Таким образом, показано, что предложенные критерии разрушения в сочетании с ОС (2) позволяют адекватно описывать КДП широкого класса вязкоупругопластичных материалов и прогнозировать их длительную прочность при ползучести при малых и умеренных напряжениях (в области линейности поведения материала). Можно ожидать, что вследствие применения процедуры усреднения деформации, оказывающей сглаживающее воздействие, КР из семейств (10),(11), (10),(12) и (10),(15) окажутся более устойчивыми, чем ДКР, по отношению к разбросу характеристик образцов из одного и того же материала (при данной температуре), т.е. разброс критической

величины  $\omega_*$  для мер повреждённости (11), (12) или (15) в опытах на разрушение окажется меньше, чем разброс предельной деформации  $\varepsilon_*$ .

Создание арсенала критериев разрушения, хорошо взаимодействующих с определяющими соотношениями (не только с ОС (2)) и позволяющих аналитическое исследование уравнений КДП в общем виде и их настройку за счёт параметров, которые изменяют КДП известным (в силу результатов анализа) образом, полезно для обработки результатов испытаний, моделирования КДП и прогнозирования длительной прочности вязкоупругопластичных материалов.

### **Библиографический список**

1. Качанов Л.М. О времени разрушения в условиях ползучести // Известия АН СССР. Отделение технических наук. 1958. №8. С. 26-31.
2. Работнов Ю.Н. Механизм длительного разрушения: Сборник «Вопросы прочности материалов и конструкций». - М.: АН СССР, 1959. С.5-7.
3. Качанов Л.М. Теория ползучести. - М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
4. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. - М.: Наука, 1966. – 752 с.
5. Odqvist F.K.G. Mathematical Theory of Creep and Creep Rupture. Oxford: Clarendon Press, 1966. - 170 p.
6. Ильюшин А.А. Об одной теории длительной прочности // Механика твердого тела. 1967. №3. С.21-35.
7. Качанов Л.М. Основы механики разрушения. - М. Наука, 1974. 312 с.

8. Шестериков С.А., Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела: Сб. – М.: ВИНТИ, 1980. Т. 13. С. 3–104.
9. Махутов Н.А. Деформационные критерии разрушения и расчёт элементов конструкций на прочность. - М.: Машиностроение, 1981. - 272 с.
10. Победря Б.Е. О моделях повреждаемости реономных сред // Известия РАН. Механика твердого тела. 1998. №4. С. 128-148.
11. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. - М.: Изд-во МГУ, 2000. 179 с.
12. Betten J. Creep Mechanics. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. – 367 p.
13. Быков Д.Л. и др. О законе накопления поврежденности и критерии разрушения в высоконаполненных полимерных материалах // Известия РАН. Механика твердого тела. 2014. №5. С. 76-97.
14. Bergstrom J.S. Mechanics of Solid Polymers. Theory and Computational Modeling. Elsevier, William Andrew: 2015. 520 p.
15. Волегов П.С., Грибов Д.С., Трусков П.В. Поврежденность и разрушение: классические континуальные теории // Физическая мезомеханика. 2015. Т.18. №4. С.68–87.
16. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов. - М.: Физматлит, 2016. – 504 с.
17. Никитенко А.Ф., Соснин О.В. О разрушении при ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1967. №3. С.74-75.

18. Соснин О.В., Горев Б.В., Никитенко А.Ф. Энергетический вариант теории ползучести. – Новосибирск, Институт гидродинамики СО АН СССР, 1986. – 95 с.
19. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск, НГАСУ, 1997. – 278 с.
20. Соснин О.В., Никитенко А.Ф., Горев Б.В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести и длительной прочности металлов // Прикладная механика и техническая физика. 2010. №4. С. 188-197.
21. Кузнецов Е.Б., Леонов С.С. Математическое моделирование чистого изгиба балки из авиационного материала в условиях ползучести // Труды МАИ, 2013, № 65: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=35927>
22. Радченко В.П. Энергетический вариант одноосной теории ползучести и длительной прочности // Прикладная механика и техническая физика. 1991. №4. С. 172–179.
23. Радченко В.П., Еремин Ю.А. Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкции. - М.: Машиностроение-1, 2004. – 265 с.
24. Радченко В.П., Кичаев П.Е. Энергетическая концепция ползучести и виброползучести металлов. - Самара: Самарский государственный технический университет. 2011. – 157 с.
25. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Энергетические критерии расслоения полимерных волокнистых композитов (ПКМ) // Вестник ПНИПУ. Механика. 2012. №3. С.176-203.

26. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // Известия РАН. Механика твердого тела. 2007. Т. 42. №2. С.147-166.
27. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // Известия РАН. Механика твердого тела. 2008. № 2. С. 140-160.
28. Хохлов А.В. Критерии разрушения при ползучести, учитывающие историю деформирования, и моделирование длительной прочности // Известия РАН. Механика твердого тела. 2009. № 4. С.121-135.
29. Хохлов А.В. Общие свойства кривых ползучести и длительной прочности, порождаемых нелинейной теорией наследственности Ю.Н. Работнова. Отчёт о НИР № 5288. – М: НИИ механики МГУ, 2015. -74 с.
30. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях и условия накопления пластической деформации // Машиностроение и инженерное образование. 2016. №3. С. 35-48
31. Хохлов А.В. Кривые обратной ползучести в рамках линейной вязкоупругости и необходимые ограничения на функцию ползучести // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Вып. 75. № 4. С. 257-267.
32. Хохлов А.В. Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости // Наука и образование, 2016, №5: <http://technomag.edu.ru/doc/840650.html> (дата обращения 14.06.2016).

33. Хохлов А.В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Вып. 77. № 1. С. 60-74.
34. Локощенко А.М., Шестериков С.А. Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения // Прикладная механика и техническая физика. 1982. №2. С.160-163.
35. Дачева М.Д., Локощенко А.М., Шестериков С.А. Модельное представление предельной деформации при ползучести // Прикладная механика и техническая физика. 1984. №4. С. 139-142.