УДК 517.938.5+531.38

# Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных

**Соколов С.В.**

*Институт машиноведения РАН им.А.А.Благонравова,*

*Малый Харитоньевский переулок, 4, Москва, 101990, Россия*

*e-mail: sokolovsv72@mail.ru*

**Аннотация**

В работе рассмотрена задача о движении волчка Ковалевской в неевклидовом пространстве. Применяя, как и в евклидовом случае, рассмотренном в классических работах Ковалевской и Кеттера, нетривиальные преобразования фазовых переменных, включающее как обобщенные координаты, так и сопряженные импульсы, найдены уравнения Абеля–Якоби и приведены разделяющиеся переменные на плоскости.

**Ключевые слова:** интегрируемые гамильтоновы системы, разделение переменных, неевклидово пространство.

## 1 Введение

Как известно (см. например работу [1]), Г. Гельмгольцем было предложено при аксиоматическом построении механики отказаться от свойства евклидовости пространства, а постулировать только типичную для всех римановых пространств постоянной кривизны возможность движения твердого тела. В свете этого очевидно, что изучение динамики твердого тела в пространствах постоянной кривизны имеет первоочередное значение.

Отсылая к недавно вышедшему обзору [1] за подробным изложением истории исследований, а также современными постановками задач в этой актуальной области, отметим только, что в классических работах внимание сконцентрировано на получении уравнений движения и поиске дополнительных интегралов. В данной работе мы, следуя работам Ковалевской [2] и Кеттера [3], получим разделенные уравнения для задачи о движении волчка Ковалевской в неевклидовом пространстве. Рассматриваемая в работе задача движения твердого тела в неевклидовом пространстве и анализ их устойчивости является актуальной проблемой при проработке теоретических аспектов движений гироскопов, применяемых в навигационных системах и системах стабилизации искусственных спутников Земли. В качестве направления дальнейших исследований можно указать анализ устойчивости движений специфическими для вполне интегрируемых по Лиувиллю гамильтоновых систем методами, которые были развиты в [4,5], а также классический анализ орбитальной устойчивости (см. например [6-18]).

## 2 Уравнения движения

Интегрируемым случаем Ковалевской в неевклидовом пространстве принято [1] называть следующую систему псевдосферических дифференциальных уравнений Эйлера–Пуассона

$$\dot{\mathbf{m}} = (g\mathbf{m})\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}} + (g\boldsymbol{\gamma})\times\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\gamma}}, \quad \dot{\boldsymbol{\gamma}} = (g\boldsymbol{\gamma})\times\frac{\partial H}{\partial \mathbf{m}} \tag{2.1}$$

с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 - 2k^2 m_3^2) - b_1\gamma_1 \tag{2.2}$$

и пуассоновой структурой

$$\Pi_r = \begin{pmatrix} 0 & k^2 m_3 & m_2 & 0 & k^2\gamma_3 & \gamma_2 \\ -k^2 m_3 & 0 & -m_1 & -k^2\gamma_3 & 0 & -\gamma_1 \\ -m_2 & m_1 & 0 & -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & k^2\gamma_3 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 \\ -k^2\gamma_3 & 0 & -\gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ -\gamma_2 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

Здесь $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ – вектор кинетического момента, $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ – единичный вектор оси симметрии. Параметр $k^2$ отвечает неевклидовой структуре, а $g = \mathrm{d}iag\,(1,1,–k^2)$ – диагональная матрица.

Функциями Казимира пуассоновой структуры являются

$$\begin{aligned} C &= <\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}>_g = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - k^2\gamma_3^2, \\ L &= <\mathbf{m}, \boldsymbol{\gamma}>_g = m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 - k^2 m_3\gamma_3. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь через $<\cdot,\cdot>_g$ обозначено скалярное произведение, которое задается соотношением

$$<\mathbf{R}, \mathbf{R}>_g = (\mathbf{R}, g\mathbf{R}) = R_1^2 + R_2^2 - k^2 R_3^2. \tag{2.5}$$

Дополнительный интеграл $F$ совпадает с классическим

$$F = \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{2} + b_1\gamma_1\right)^2 + \left(m_1 m_2 + b_1\gamma_2\right)^2. \tag{2.6}$$

Заметим, что для уравнений Эйлера–Пуассона (2.1) справедливо следующее наблюдение [1]: всем известным интегрируемым случаям динамики твердого тела соответствует их обобщение на группу $SO(2,1)$. Скобка Пуассона (2.3) отвечает алгебре $so(2,1)$.

## 3 Разделение переменных

Далее мы приводим вывод разделения переменных для случая интегрируемости Ковалевской в неевклидовом пространстве, который следует классическим работам Ковалевской [2] и Кеттера [3] о движении волчка в евклидовом пространстве, а также изложению в [19] и [20]. Полученные аналитические выражения необходимы для исследования фазовой топологии. Обозначим через $Z_1$ и $Z_2$ следующие выражения

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{1}{2}(m_1^2 - m_2^2) + b_1\gamma_1, \\ Z_2 &= m_1 m_2 + b_1\gamma_2. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Следуя Ковалевской, положим

$$\begin{aligned} \xi_1 &= Z_1 + \mathrm{i}Z_2,\ x_1 = m_1 + \mathrm{i}m_2,\ y_1 = \gamma_1 + \mathrm{i}\gamma_2, \\ \xi_2 &= Z_1 - \mathrm{i}Z_2,\ x_2 = m_1 - \mathrm{i}m_2,\ y_2 = \gamma_1 - \mathrm{i}\gamma_2. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{1}{2}x_1^2 + b_1 y_1, \\ \xi_2 &= \frac{1}{2}x_2^2 + b_1 y_2. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Дополнительный интеграл $F$ запишется в виде

$$F = \xi_1\xi_2 = f. \tag{3.4}$$

Составим дифференциальные соотношения

$$\begin{aligned} x_1' &= k^2(m_3 x_1 + b_1\gamma_3), \\ x_2' &= -k^2(m_3 x_2 + b_1\gamma_3). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь введено обозначение $(\ \ )' = d/d(it)$. Из (3.5) найдем

$$m_3 = -\frac{\mathrm{i}(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)}{k^2(x_1 - x_2)},$$
$$\gamma_3 = \frac{\mathrm{i}(\dot{x}_1 x_2 + x_1\dot{x}_2)}{k^2 b_1(x_1 - x_2)}. \tag{3.6}$$

Используя (3.2) и (3.3), находим

$$y_1 = -\frac{x_1^2 - 2\xi_1}{2b_1},\ \gamma_1 = -\frac{x_1^2 + x_2^2 - 2(\xi_1 + \xi_2)}{4b_1},$$
$$y_2 = -\frac{x_2^2 - 2\xi_2}{2b_1},\ \gamma_2 = \frac{\mathrm{i}[x_1^2 - x_2^2 - 2(\xi_1 - \xi_2)]}{4b_1}. \tag{3.7}$$

Введем многочлены

$$R_{12} = R(x_1, x_2) = k^2\left[-\frac{1}{4}x_1^2x_2^2 + \frac{1}{2}h(x_1^2 + x_2^2) + \ell b_1(x_1 + x_2) + (cb_1^2 - f)\right],$$
$$R_1 = R(x_1, x_1) = k^2\left[-\frac{1}{4}x_1^4 + hx_1^2 + 2\ell b_1 x_1 + (cb_1^2 - f)\right], \tag{3.8}$$
$$R_2 = R(x_2, x_2) = k^2\left[-\frac{1}{4}x_2^4 + hx_2^2 + 2\ell b_1 x_2 + (cb_1^2 - f)\right].$$

Здесь $c, \ell, h, f$ – константы функций Казимира $C, L$, функции Гамильтона $H$ и дополнительного интеграла $F$ соответственно. Заметим, что имеет место тождество

$$R_{12} = \frac{1}{2}\left[R_1 + R_2 + \frac{1}{4}k^2(x_1^2 - x_2^2)^2\right]. \tag{3.9}$$

Тогда получим дифференциальные соотношения

$$(\mathrm{i}\dot{x}_1)^2 + R_1 + \frac{1}{2}k^2\xi_1(x_1 - x_2)^2 = 0,$$
$$(\mathrm{i}\dot{x}_2)^2 + R_2 + \frac{1}{2}k^2\xi_2(x_1 - x_2)^2 = 0, \tag{3.10}$$
$$(\mathrm{i}\dot{x}_1)(\mathrm{i}\dot{x}_2) - R_{12} + \frac{1}{2}hk^2(x_1 - x_2)^2 = 0.$$

С учетом (3.4) исключим из (3.10) переменные $\xi_1$ и $\xi_2$

$$[\dot{x}_1{}^2 - R_1][\dot{x}_2{}^2 - R_2] = \frac{1}{4}k^4\xi_1\xi_2(x_1 - x_2)^4 = \frac{1}{4}k^4 f(x_1 - x_2)^4. \tag{3.11}$$

Составим дифференциальные соотношения

$$\left(\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R_1}}+\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R_2}}\right)^2=\left(1+\frac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{\sqrt{R_1R_2}}\right)^2-\frac{(R_1-\dot{x}_1^2)(R_2-\dot{x}_2^2)}{R_1R_2}=$$
$$=\left(1+\frac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{\sqrt{R_1R_2}}\right)^2-\frac{k^4f(x_1-x_2)^4}{4R_1R_2}\equiv f_1, \tag{3.12}$$

и

$$\left(\frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R_1}}-\frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R_2}}\right)^2=\left(1-\frac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{\sqrt{R_1R_2}}\right)^2-\frac{(R_1-\dot{x}_1^2)(R_2-\dot{x}_2^2)}{R_1R_2}=$$
$$=\left(1-\frac{\dot{x}_1\dot{x}_2}{\sqrt{R_1R_2}}\right)^2-\frac{k^4f(x_1-x_2)^4}{4R_1R_2}\equiv f_2. \tag{3.13}$$

Далее, следую Ковалевской, перейдем от переменных $x_1$ и $x_2$ к переменным разделения $s_1$ и $s_2$ с помощью формул

$$s_1=\frac{R_{12}-\sqrt{R_1R_2}}{(x_1-x_2)^2},\qquad s_2=\frac{R_{12}+\sqrt{R_1R_2}}{(x_1-x_2)^2}. \tag{3.14}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что переменные разделения коммутируют:

$$\{s_1,s_2\}=0.$$

Переменные Ковалевской (3.14) являются решениями квадратного уравнения

$$S(x_1,x_2,s)\equiv(x_1-x_2)^2s^2-2R_{12}s-G=0, \tag{3.15}$$

где

$$G=\frac{R_1R_2-R_{12}^2}{(x_1-x_2)^2}=k^4\left[-\frac{1}{4}(cb_1^2-f+h^2)(x_1+x_2)^2-\ell b_1\left(h+\frac{1}{2}x_1x_2\right)(x_1+x_2)-\ell^2b_1^2\right]. \tag{3.16}$$

Преобразуем левые части дифференциальных соотношений (3.12) и (3.13). Для этого представим функцию $S$ как квадратный трехчлен от каждой из переменных $s$, $x_1$ и $x_2$

$$\begin{aligned}&S(x_1,x_2,s)\equiv(x_1-x_2)^2s^2-2R_{12}s-G=0,\\&S(x_1,x_2,s)\equiv A_1x_1^2+B_1x_1+C_1=0,\\&S(x_1,x_2,s)\equiv A_2x_2^2+B_2x_2+C_2=0,\end{aligned} \tag{3.17}$$

где

$$
\begin{aligned}
A_1 &= s^2 + \frac{1}{2}k^2(x_2^2 - 2h)s + \frac{1}{4}k^4[(cb_1^2 - f + h^2) + 2\ell b_1 x_2],\\
B_1 &= -2x_2 s^2 - 2k^2 \ell b_1 s + \frac{1}{2}k^4[(cb_1^2 - f + h^2)x_2 + \ell b_1(x_2^2 + 2h)],\\
C_1 &= x_2^2 s^2 - 2k^2\left(\frac{1}{2}hx_2^2 + \ell b_1 x_2 + cb_1^2 - f\right)s + k^4\left[\frac{1}{4}(cb_1^2 - f + h^2)x_2^2 + \ell b_1 h x_2 + \ell^2 b_1^2\right],
\end{aligned}
\tag{3.18}
$$

и

$$
\begin{aligned}
A_2 &= A_1(x_2 \to x_1),\\
B_2 &= B_1(x_2 \to x_1),\\
C_2 &= C_1(x_2 \to x_1).
\end{aligned}
\tag{3.19}
$$

Далее последовательно находим частные производные

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right) &= 2(x_1 - x_2)^2 s - 2R_{12},\\
\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right) &= 2A_1 x_1 + B_1,\\
\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right) &= 2A_2 x_2 + B_2.
\end{aligned}
$$

возводим полученные выражения в квадрат

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2 &= 4\{(x_1 - x_2)^2[(x_1 - x_2)^2 s^2 - 2R_{12}s] + R_{12}^2\},\\
\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 &= 4A_1(A_1 x_1^2 + B_1 x_1) + B_1^2,\\
\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 &= 4A_2(A_2 x_2^2 + B_2 x_2) + B_2^2.
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Исключая последовательно из каждого выражения (3.20) с помощью выражений (3.17) переменные $s$, $x_1$ и $x_2$ приходим к соотношениям

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2 &= 4[G(x_1 - x_2)^2 + R_{12}^2],\\
\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 &= B_1^2 - 4A_1 C_1,\\
\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 &= B_2^2 - 4A_2 C_2.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

Подставляя в полученные выражения их определения, приходим окончательно к соотношениям

$$\left(\frac{\partial S}{\partial s}\right)^2 = 4R_1R_2, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\right)^2 = 8\varphi(s)R_2, \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 = 8\varphi(s)R_1.$$

Здесь $\varphi(s)$ – многочлен, связанный с резольвентой Эйлера для полинома $R(x)$

$$\varphi(s) = s^3 - hk^2s^2 + \frac{1}{4}k^4(cb_1^2 - f + h^2)s - \frac{1}{8}k^6\ell^2b_1^2,$$
$$R(x) = x^4 - 4hx^2 - 8\ell b_1x - 4cb_1^2 + 4f.$$

Резольвента Эйлера для многочлена

$$x^4 + px^2 + qx + r$$

определяется формулой

$$Res(z) = z^3 + \frac{p}{2}z^2 + \frac{p^2 - 4r}{16}z - \frac{q^2}{64}$$

Если в приведенные выше уравнения подставить следующие значения коэффициентов многочлена $R(x)$

$$p = -4h,\ q = -8\ell b_1,\ r = -4cb_1^2 + 4f$$

то получим $\frac{k^6}{8}Res(\frac{2s}{k^2}) = \varphi(s)$. Одно из достоинств резольвенты Эйлера состоит в том, что условие кратности корней уравнения $R(x) = 0$ совпадает с условием кратности корней резольвенты $\varphi(s)$.

Составим полный дифференциал функции $S$

$$dS = \frac{\partial S}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial S}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial S}{\partial s}ds = 0. \qquad (3.22)$$

Подставляя значения производных и выбирая надлежащим образом знаки у радикалов, приходим к дифференциальным соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R_1}} + \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R_2}} &= \frac{\dot{s}_1}{\sqrt{2\varphi(s_1)}}, \\ \frac{\dot{x}_1}{\sqrt{R_1}} - \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{R_2}} &= \frac{\dot{s}_2}{\sqrt{2\varphi(s_2)}}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Перейдем теперь к определению $f_1$ и $f_2$ правых частей (3.12) и (3.13). Из (3.14) выразим

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{1}{2}(s_1 + s_2)(x_1 - x_2)^2, \\ \sqrt{R_1 R_2} &= \frac{1}{2}(s_2 - s_1)(x_1 - x_2)^2. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Используя (3.10), находим

$$\begin{aligned} f_1 &= \left(1 + \frac{\dot{x}_1 \dot{x}_2}{\sqrt{R_1 R_2}}\right)^2 - \frac{k^4 f (x_1 - x_2)^4}{4 R_1 R_2} = \\ &= \left(1 + \frac{-R_{12} + \frac{1}{2} h k^2 (x_1 - x_2)^2}{\sqrt{R_1 R_2}}\right)^2 - \frac{k^4 f (x_1 - x_2)^4}{4 R_1 R_2} = \\ &= \left(1 + \frac{-(s_1 + s_2) + h k^2}{(s_2 - s_1)}\right)^2 - \frac{k^4 f}{(s_2 - s_1)^2} = \frac{P(s_1)}{(s_2 - s_1)^2} \end{aligned} \tag{3.25}$$

и

$$\begin{aligned} f_2 &= \left(1 - \frac{\dot{x}_1 \dot{x}_2}{\sqrt{R_1 R_2}}\right)^2 - \frac{k^4 f (x_1 - x_2)^4}{4 R_1 R_2} = \\ &= \left(1 - \frac{-R_{12} + \frac{1}{2} h k^2 (x_1 - x_2)^2}{\sqrt{R_1 R_2}}\right)^2 - \frac{k^4 f (x_1 - x_2)^4}{4 R_1 R_2} = \\ &= \left(1 - \frac{-(s_1 + s_2) + h k^2}{(s_2 - s_1)}\right)^2 - \frac{k^4 f}{(s_2 - s_1)^2} = \frac{P(s_2)}{(s_2 - s_1)^2} \end{aligned} \tag{3.26}$$

В результате система разделенных уравнений для интегрируемого случая Ковалевской в неевклидовом пространстве имеет вид

$$\begin{cases} (s_1 - s_2)^2 \dot{s}_1^2 = 2\varphi(s_1) P(s_1), \\ (s_1 - s_2)^2 \dot{s}_2^2 = 2\varphi(s_2) P(s_2). \end{cases}$$

Здесь $\varphi(s)$ и $P(s)$ полиномы

$$\varphi(s) = s^3 - k^2 h s^2 + \frac{1}{4} k^4 (c b_1^2 - f + h^2) s - \frac{1}{8} k^6 \ell^2 b_1^2,$$
$$P(s) = (2s - k^2 h)^2 - k^4 f.$$

Таким образом интегрирование исходной задачи сведено к гиперэллиптическим квадратурам.

## 4 Заключение

В работе получены разделенные уравнения для случая интегрируемости Ковалевской в неевклидовом пространстве. Приведенные аналитические выражения могут использованы для последующего анализа фазовой топологии. Практическое применение полученные теоретические результаты несомненно найдут в задачах анализа устойчивости гироскопических систем, которыми оснащаются системы ориентации и стабилизации искуственных спутников Земли.

В дальнейшем необходимо получить связь между переменными разделения и фазовыми переменными, получить дискриминантные поверхности, выделить критические подсистемы и исследовать фазовую топологию данного случая.

**Благодарности**

*Автор выражает признательность А. В. Борисову, И. С. Мамаеву и П. Е. Рябову за плодотворные обсуждения, касающиеся как постановки задачи, так и деталей работы.*

*Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 16-01-00170, 16-01-00809, 18-01-00335.*

## Библиографический список

1. Borisov A.V., Mamaev I.S. Rigid Body Dynamics in Non-Euclidean Spaces // Russian Journal of Mathematical Physics, 2016, vol. 23, no. 4, pp. 431 - 454.

2. Kowalevski S. Sur le probléme de la rotation d’un corps solide autour d’un point fixe // Acta Mathematica, 1889, vol. 12, pp. 177 - 232.

3. Kötter F. Sur le cas trait’e par M-me Kowalevski de rotation d’un corps solide autour d’un point fixe // Acta Mathematica, 1893, vol. 17, no. 1–2, pp. 209 - 263.

4. Smale S. Topology and mechanics // Nventiones Mathematicae, 1970, vol. 10, no. 4, pp. 305 - 331.

5. Болсинов А.В., Борисов А.В., Мамаев И.С. Топология и устойчивость интегрируемых систем // Успехи математических наук. 2010. Т. 65. № 2 (392). С. 71 - 132.

6. Bardin B.S., Savin A.A. On the orbital stability of pendulum-like oscillations and rotations of a symmetric rigid body with a fixed point // Regular and Chaotic Dynamics, 2012, vol. 17, no. 3–4, pp. 243 - 257.

7. Bardin B.S., Chekina E.A. On the Stability of Resonant Rotation of a Symmetric Satellite in an Elliptical Orbit // Regular and Chaotic Dynamics, 2016, vol. 21, no. 4, pp. 377 - 389.

8. Bardin B.S., Lanchares V. On the Stability of Periodic Hamiltonian Systems with One Degree of Freedom in the Case of Degeneracy // Regular and Chaotic Dynamics, 2015, vol. 20, no. 6, pp. 627 - 648.

9. Бардин Б.С., Чекина Е.А. Об устойчивости резонансного вращения динамически

симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=72568

10. Bardin B.S., Chekina E.A. On the Constructive Algorithm for Stability Analysis of an Equilibriмum Point of a Periodic Hamiltonian System with Two Degrees of Freedom in the Second-order Resonance Case // Regular and Chaotic Dynamics, 2017, vol. 22, no. 7, pp. 808 - 823.

11. Маркеев А.П. Об устойчивости плоских движений твердого тела в случае Ковалевской // Прикладная математика и механика. 2001. Т. 65. № 1. С. 51 – 58.

12. Markeev A.P. On stability of regular precessions of a non-symmetric gyroscope // Regular and Chaotic Dynamics, 2003, vol. 8, no. 3, pp. 297 - 304.

13. Bardin B.S., Chekina E.A., Chekin A.M. On the Stability of a Planar Resonant Rotation of a Satellite in an Elliptic Orbit // Regular and Chaotic Dynamics, 2015, vol. 20, no. 1, pp. 63 - 73.

14. Bardin B.S., Rudenko T.V., Savin A.A. On the Orbital Stability of Planar Periodic Motions of a Rigid Body in the Bobylev–Steklov Case // Regular and Chaotic Dynamics, 2012, vol. 17, no. 6, pp. 533 - 546.

15. Bardin B.S. On the orbital stability of pendulum-like motions of a rigid body in the Bobylev–Steklov case // Regular and Chaotic Dynamics, 2010, vol. 15, no. 6, pp. 704 - 716.

16. Markeev A.P. On the Stability of Periodic Motions of an Autonomous Hamiltonian System in a Critical Case of the Fourth-order Resonance // Regular and Chaotic Dynamics, 2017, vol. 22, no. 7, pp. 773 - 781.

17. Bardin B.S. On Nonlinear Motions of Hamiltonian System in Case of Fourth Order Resonance // Regular and Chaotic Dynamics, 2007, vol. 12, no. 1, pp. 86 - 100.

18. Bardin B.S., Maciejewski A.J., Przybylska M. Integrability of generalized Jacobi problem // Regular and Chaotic Dynamics, 2005, vol. 10, no. 4, pp. 437 - 461.

19. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. - Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. - 384 с.

20. Суслов Г.К. Теоретическая механика. - М.: Гостехиздат, 1946. - 655 с.