Тепловые процессы в технике. 2024. Т. 16. № 2. С. 55–67
Thermal processes in engineering, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 55–67

Научная статья
УДК 536.2:533.9:519.6

О численном решении некоторых нелинейных эллиптических уравнений для тепловых приложений

В.В. Черепанов✉

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия
✉*vvcherepanov@yandex.ru*

Аннотация. Дан краткий обзор основных свойств нелинейных дифференциальных уравнений с линейным и квазилинейным дифференциальным оператором эллиптического типа, а также их обобщений. Наиболее известным примером таких операторов является оператор Лапласа – Бельтрами, который входят в основные уравнения теории функций комплексного переменных, теории потенциала меры и электромагнитной волновой теории, физики плазмы и теории тепло- и массообмена, а также других важных приложений. Основной целью данной работы является решение задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа второго порядка в евклидовом пространстве, имеющего существенную нелинейность в источнике. Рассматриваются два локальных итерационных метода, обладающих сходимостью к решению нелинейной задачи при условии ограниченности функции источника: метод установления, который применим только в случае экспоненциальной нелинейности источника, и метод разбиения области задачи, который позволяет рассматривать произвольные физически приемлемые функции источников и основан на оценках, вытекающих из фундаментальных теорем.

Ключевые слова: квазилинейные эллиптические операторы второго порядка, фундаментальные свойства, плазма, тепло- и массообмен, нелинейное уравнение Пуассона, принцип сжимающих отображений, итерационное решение

Для цитирования. Черепанов В.В. О численном решении некоторых нелинейных эллиптических уравнений для тепловых приложений // Тепловые процессы в технике. 2024. Т. 16. № 2. С. 55–67. URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=179325

Original article

On certain nonlinear elliptic equations numerical solving for thermal applications

V.V. Cherepanov✉

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
✉*vvcherepanov@yandex.ru*

Abstract. The work discusses some important properties of nonlinear differential equations with linear and quasilinear differential operators of elliptic type, as well as their generalizations. The most famous example of such operators is the Laplace – Beltrami operator, which is included in the key equations of the theory of functions of complex variables, the theory of measure potential and electromagnetic wave theory, plasma physics and the theory of heat and mass transfer, as well as other important applications In a narrow sense, this work solves the Dirichlet problem for a second-order elliptic type equation in Euclidean space that has a significant nonlinearity in the source. Two local iterative methods are considered that converge to solve a nonlinear problem under the condition that the source is limited. One of these methods is known but is applicable only in the case of exponential nonlinearity of the source. Another, original method has a significantly larger area of application and is based on some estimates arising from fundamental theorems.

Keywords: second-order quasilinear elliptic operators, fundamental properties, plasma, heat and mass transfer, nonlinear Poisson equation, principle of contraction mappings, iterative solution

For citation. Cherepanov V.V. On certain nonlinear elliptic equations numerical solving for thermal applications. *Thermal processes in engineering*, 2024, vol. 16, no. 2, pp. 55–67. URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=179325

Введение

Оператор Лапласа – Бельтрами хорошо известен широкому кругу специалистов, работающих в области классической и прикладной математики. Он входит в важнейшие уравнения теории функций комплексного переменных (уравнение Лапласа), теории потенциала и физики плазмы, электромагнитной волновой теории (уравнения Пуассона, Гельмгольца, Даламбера), теории тепло- и массообмена (входят в состав уравнений диффузии, энергии, теплопроводности) ряда других важных приложений. В современной геометрии на римановых многообразиях рассматривается его обобщенный вариант – оператор Лапласа – Бельтрами $\tilde{\Delta} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{g} \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$, в котором g_{ij} – матрица метрического тензора многообразия, g^{ij} – обратная к ней матрица, $g = \det(g_{ij})$, а по повторяющимся верхним и нижним индексам здесь и далее как обычно предполагается суммирование. Эти дифференциальные операторы являются представителями гораздо более широкого класса эллиптических квазилинейных операторов [1], действие которых может быть распространено и на случай математических объектов, не являющихся дифференцируемыми функциями в классическом понимании [2, 3]. И хотя многие основополагающие математические конструкции их теории построены достаточно давно, большинство общих методов решения уравнений с ними разработано в основном для случая именно линейных задач. Однако в современных исследованиях и приложениях уже давно ключевую роль играют именно нелинейные эффекты. Поэтому решение нелинейных задач всегда вызывает значительный интерес. Решение таких задач обычно сводится к поиску неподвижной точки некоторого нелинейного отображения, однако сам алгоритм поиска, хотя и укладывается в несколько принципиальных схем, остается во многом весьма специфическим и уникальным. Это касается как аналитических, так и численных методов [4].

В данной работе рассматривается задача Дирихле для уравнения эллиптического типа второго порядка в евклидовом пространстве, имеющая прежде всего существенную нелинейность в источнике. Такой тип нелинейности, как и любой другой, исключает получение на основе любой версии метода суперпозиции. В работе обсуждаются два локальных итерационных метода, имеющих условную сходимость к решению нелинейной задачи.

Об одном подходе к решению задач для эллиптических уравнений с нелинейным источником

При решении тепловых задач в газовой плазме, в которой почти всегда присутствует электронная компонента, использование равновесных, а потому, как правило, нелинейных распределений для электронов, позволяет решать задачу на временах релаксации более тяжелых частиц [5]. Однако уравнение Пуассона для потенциала φ электрического поля при этом становится нелинейным, и возникает проблема его решения. Для некоторых частных случаев известны специальные методы. Так, например, в случае экспоненциальной нелинейности применяется метод [6], основанный на установлении нестационарного уравнения неразрывности для электронов:

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} + div(\mathbf{j}) = 0\ ,\ \mathbf{j} = n\mathbf{v} = -\nabla n - \varepsilon n\,\mathbf{E}\,, \qquad (1)$$

с некоторым эффективным временем τ, произвольной постоянной ε и единичным коэффициентом диффузии. Действительно, для функции $n_e = \exp(\varepsilon\varphi)$ имеем:

$$\nabla n(\tau,\mathbf{r}) = \varepsilon \exp\left(\varepsilon\varphi(\tau,\mathbf{r})\right)\nabla\varphi(\tau,\mathbf{r}) =$$
$$= \varepsilon n(\tau,\mathbf{r})\nabla\varphi(\tau,\mathbf{r}),$$

поэтому эта функция обнуляет электронную «плотность тока» $\mathbf{j}$ и обеспечивает стационарность решения уравнения (1) при *любой* функции $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$. В частности, такой, которая получается из решения нелинейного уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi(\tau,\mathbf{r}) = \exp\left(\varepsilon\varphi(\tau,\mathbf{r})\right) - \sum_k Z_k n_{ik}(\mathbf{r}), \qquad (2)$$

соответствующего больцмановскому распределению электронов на фоне заданных стационарных распределений ионов $n_{ik}(\mathbf{r})$ с зарядовыми числами Z_k. Этот итерационный метод, пример реализации которого приведен ниже, далее будем называть *методом установления*.

Поскольку для любой дифференцируемой векторной функции $\mathbf{u}$, зависящей от произвольных ортогональных координат q^k,

$$div(\mathbf{u}) = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial q^k}\left(Ju^k\right),$$

$$J = H_1H_2H_3,\ \mathbf{u} = u^k\boldsymbol{\omega}_k,\ \boldsymbol{\omega}_k = \frac{\mathbf{e}_k}{H_k},$$

где $\mathbf{e}_k$ и $\boldsymbol{\omega}_k$ – сопровождающий и ортонормированный базисы, H_k – коэффициенты Ламе, а J – якобиан, то в этих координатах уравнение (1) принимает вид:

$$\frac{\partial(Jn)}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial q^k}\left(\frac{Jnv^k}{H_k}\right) = \frac{\partial Q}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial q^k}\left(Q\tilde{v}^k\right) = 0,$$
$$Q = Jn\,,\ \tilde{v}^k = \frac{v^k}{H_k}. \qquad (3)$$

Напомним, что в декартовых, цилиндрических или сферических координатах мы имеем соответственно: $H_x = H_y = H_z = 1$; $H_r = 1$, $H_\varphi = r$, $H_z = 1$; $H_r = 1$, $H_\varphi = r cos\theta$, $H_\theta = r$.

При одномерном переносе в случае декартовых координат, отсутствии осевого или трансверсального переноса в случае цилиндрических или сферических координат уравнение (3), проинтегрированное по несущественным переменным и записанное для количества частиц в пределах одного слоя толщиной h_q единственной оставшейся переменной q, принимает еще более простой вид:

$$\frac{\partial N}{\partial\tau} + \frac{\partial}{\partial q}(Nv^q) = 0,\ v^q = -\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial q} - \varepsilon E^q,$$
$$q = \left[\begin{array}{l} x \\ r \\ r \end{array}\right.,\ N = n\left[\begin{array}{l} h_x \\ 2\pi r h_r \\ 4\pi r^2 h_r \end{array}\right., \qquad (4)$$

в котором альтернативные варианты приведены для декартовых, цилиндрических и сферических координат соответственно.

Учитывая специфику задач [5], для аппроксимации уравнения в этом случае проще всего использовать одномерную явную консервативную схему «дифференцирования против потока», родственную методу «крупных частиц» [6, 7]. Устойчивость метода достигается при выполнении условия Куранта $\Delta\tau < h_k/\max|\tilde{v}^k|$, где $\Delta\tau$ – шаг метода по времени. Для снижения потерь точности при вычислении производных в скорости (4), рассчитываемой во внутренних узлах однородной сетки переменной q, целесообразно использовать симметрическую аппроксимацию второго порядка. Для граничных узлов в аналогичных целях можно использовать несимметричные соотношения, например:

$$\left(\frac{\partial N}{\partial q}\right)_1 = \frac{-3N_1 + 4N_2 - N_3}{2h_q} + O\left(h_q^2\right),$$

однако следует помнить, что подобные аппроксимации не консервативны, а также могут приводить к генерации неустойчивости в явных схемах. Кроме того, приведенный выше метод, хотя и полезный, но все-таки специализированный, не позволяет рассматривать какие-либо иные варианты нелинейности уравнения Пуассона.

Основные свойства эллиптических операторов. Краткий обзор применительно к задаче Дирихле

Для уравнения Пуассона разработан мощный аппарат теории потенциалов меры, включающий обобщенные функции и обобщенные производные Шварца [2, 3]. Однако теория потенциала меры предназначена в первую очередь для линейных уравнений, имеющих к тому же конечную меру плотности заряда.

Заметим, что зависимости, подобные распределению Больцмана для электронов или его обобщениям, ограничены только, если электроны являются отталкивающимися частицами. Однако в окрестности заряженных тел в возмущенных зонах ионизированных газов могут возникать распределения объемной плотности заряда, приводящие к положительному знаку электрического потенциала. В этом случае равновесные распределения электронов перестают быть ограниченными функциями. Поскольку многие результаты теории потенциала тогда не работают, для дальнейшего продвижения целесообразно вспомнить наиболее важные из общих свойств уравнений, подобных уравнению Пуассона.

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для некоторой действительной функции u:

$$\begin{gathered} \mathrm{A}u = f(\mathbf{x}, u),\ u = u(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} \in G \\ u(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x} \in \partial G, \end{gathered} \tag{5}$$

где область $G \subset R^n$ – компакт, ∂G – ее граница, а функции $q(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x}, y)$ – заданы и ограничены. Будем рассматривать в общем случае в качестве А квазилинейный эллиптический дифференциальный оператор второго порядка:

$$\begin{gathered} \mathrm{A}(\mathbf{x}, u, Du) = \mathrm{M}(\mathbf{x}, u, Du) + b(\mathbf{x}, u) = \\ = a^{i,j}(\mathbf{x}, u, \mathrm{D}u)\,\mathrm{D}_{i,j} + a^{i}(\mathbf{x}, u)\,\mathrm{D}_i + b(\mathbf{x}, u), \\ \mathrm{D}_i = \frac{\partial}{\partial x^i},\ \ \mathrm{D}_{i,j} = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, \end{gathered} \tag{6}$$

у которого наличие аргумента Du означает возможную зависимость от компонент градиента $u(\mathbf{x})$. Коэффициенты $a^{i,j}(\mathbf{x}, z, \mathbf{p})$ оператора дифференцирования второго порядка в М предполагаются определенными во всех точках множества $G{\times}R{\times}R^n$, равно как и функции a_i и b на области изменения своих аргументов. Вначале предположим, что функция $u(\mathbf{x}) \in C^2(G)$. Далее мы рассмотрим и способы устранения этого ограничения.

Напомним, что эллиптичность оператора М и, следовательно, А на области $\Omega \subset G{\times}R{\times}R^n$ означает, что квадратическая форма $E(\mathbf{x}, z, \mathbf{p}|\boldsymbol{\omega})$ старших коэффициентов оператора является симметричной и определенной в каждой точке $\boldsymbol{\omega} \in R^n$. Для этого достаточно, чтобы в каждой точке Ω было выполнено условие

$$\begin{gathered} 0 < \lambda(\mathbf{x}, z, \mathbf{p})\left|\omega\right|^2 \le E(\mathbf{x}, z, \mathbf{p} \mid \boldsymbol{\omega}) \le \\ \le \Lambda(\mathbf{x}, z, \mathbf{p})\left|\omega\right|^2\ \ \forall(\mathbf{x}, z, \mathbf{p}) \in \Omega, \forall\boldsymbol{\omega} \in R^n \\ E(\mathbf{x}, z, \mathbf{p} \mid \boldsymbol{\omega}) = a^{i,j}(\mathbf{x}, z, \mathbf{p})\omega_i\omega_j, \end{gathered}$$

где $\lambda(\mathbf{x}, z, \mathbf{p})$ и $\Lambda(\mathbf{x}, z, \mathbf{p})$ – наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $a^{i,j}(\mathbf{x}, z, \mathbf{p})$ соответственно. Если, помимо этого, коэффициенты А и отношение Λ/λ равномерно ограничены, то операторы А и М будут равномерно эллиптическими.

Для линейных операторов равномерная эллиптичность подразумевает существования таких постоянных $N > 0$ и $\beta > 0$, при которых для коэффициентов А справедливы условия:

$$\begin{gathered} |\,a_{i,j}(\mathbf{x})\,| \le N,\ \ |\,a_i(\mathbf{x})\,| \le N,\ \ b(\mathbf{x}) \le 0\ \ \forall \mathbf{x} \in G \\ E(\mathbf{x} \mid \boldsymbol{\omega}) \ge \beta\left|\omega\right|^2\ \ \forall \omega \in R^n, \forall \mathbf{x} \in \overline{G} = G \cup \partial G. \end{gathered}$$

Таким образом, введенное ограничение на знак коэффициента $b(\mathbf{x})$ не входит в определение равномерной эллиптичности оператора. Оно обычно добавляется, чтобы можно было бы в полной мере использовать ряд полезных теорем, доказанных для подобного рода операторов и задач. Поэтому мы предполагаем это условие выполненным. В узком смысле суть таких теорем сводится к тому, что любое свойство решения уравнения Пуассона справедливо и для более общего эллиптического уравнения. Это утверждение очевидно связано с тем, что любой линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка линейным преобразованием координат может быть приведен к форме уравнения, у которого дифференциальная часть второго порядка преобразуется в оператор Лапласа [1]. В частности, решение этого уравнения настолько гладко и настолько хорошо себя ведет, насколько это позволяют его коэффициенты. Так, в линейном (а иногда и не только) случае имеют место приведенные ниже теоремы.

Теорема 1 (об аналитичности). Если коэффициенты эллиптического оператора А и правая часть f являются вещественными аналитическими функциями, то и решения уравнения А$u = f$ также являются вещественными аналитическими функциями.

Данная теорема справедлива и для нелинейных уравнений, и для эллиптических систем [8]. Она имеет и более слабые варианты, которые говорят о том, что решение эллиптического уравнения наследует уровень гладкости коэффициентов оператора уравнения и его правой части. Это обстоятельство подтверждает, в частности, теорема 2.

Теорема 2 (о непрерывности по Гельдеру). Если коэффициенты и правая часть обобщенного (порядка m) эллиптического уравнения удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \alpha < 1$ (принадлежат классу C^{α}), то и производные порядка m любого решения этого уравнения удовлетворяют условию Гельдера с тем же показателем. Если же коэффициенты и правая часть имеют производные до порядка s, удовлетворяющие условию Гельдера с показателем $0 < \alpha < 1$ (принадлежат классу $C^{s+\alpha}$), то каждое решение уравнения имеет производные до порядка $s + m$, и эти производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем α.

Напомним, что функция $u(\mathbf{x})$ удовлетворяет на G условию непрерывности Гельдера с постоянной C и показателем s, если $\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in G\ |u(\mathbf{x}_1) - u(\mathbf{x}_2)| < C|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^s$. Это условие является существенным для справедливости теоремы 2 [8].

Теорема 3.1. Принцип максимума для линейного оператора. Пусть функция $u \in C^2$ определена на компакте G и непрерывна на замыкании G. Тогда, если $a \le 0$, А$u \ge 0$, и $u(\mathbf{x})$ достигает своего максимума во внутренней точке G, то $u(\mathbf{x})$ – постоянная функция.

Принцип максимума приведен выше в так называемой сильной форме и имеет несколько эквивалентных формулировок [1]. Из данной формулировки вытекают некоторые соотношения, являющиеся весьма полезными для решения краевых задач. Так, для линейной задачи (5) с равномерно эллиптическим оператором А и ограниченными функциями f и q оказывается справедливым следующая оценка [1]:

$$|u| \le \max_{\partial G}|b| + (e^{\alpha d} - 1)\max_{\bar{G}} f \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{G}, \quad \alpha = \alpha(N, m), \tag{7}$$

в которой d – диаметр области G, α – постоянная.

Для многих приложений оказывается достаточно следующего слабого принципа максимума [1].

Теорема 3.2. Слабый принцип максимума. Пусть А – эллиптический оператор в ограниченной области G, $u \in C^2(G) \cap C_0(\bar{G})$, А$u \ge 0$ и $b = 0$ в G, тогда максимум функции $u(\mathbf{x})$ в $\bar{G}$ достигается на ∂G.

Далее, при обсуждении так называемого принципа сравнения, мы рассмотрим пример использования данной теоремы.

Решение задачи (5) с оператором 6 понимается как функция, имеющая все производные, порядок которых не превышает порядок дифференциального уравнения (для обобщенного эллиптического уравнения порядка m функция класса C^m). Но иногда целесообразно расширить понятие решения на такие функции, которые не являются дифференцируемыми в обычном понимании.

Для расширения теории на подобного рода математические объекты используются такие важнейшие элементы функционального анализа, как теории меры, обобщенных функций и их производных [3]. В данном подходе рассматриваются измеримые (то есть интегрируемые в определенном смысле) функции, которые отождествляются, если они отличаются друг от друга на множестве меры ноль, а равенства считаются справедливыми, если они справедливы почти всюду, то есть могут нарушаться не более чем на множестве меры ноль. Подобного рода равенства называются слабыми.

Исходя из этого, функция $u(\mathbf{x}) \in L_2(G)$, наделенному интегральным скалярным произведением, в котором для линейного оператора А может быть определен сопряженный оператор А*, называется *слабым решением* уравнения А$u = f$, если

$$\int_G u(\mathbf{x}) \mathrm{A}^* v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_G f(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \forall v(\mathbf{x}) \in C^{\infty}(G), \tag{8}$$

где $d\mathbf{x}$ – мера Лебега. Входящие в такое определение вспомогательные функции $v(\mathbf{x})$ называются *пробными* и должны иметь *компактный* (замкнутый и ограниченный) носитель в G.

Заметим, что в определенном таким образом решении к функции $u(\mathbf{x})$ вообще не применяется никаких дополнительных математических операций, кроме интегрирования, что и определяет ее принадлежность к $L_2(G)$. Однако для того, чтобы прийти к понятию сильного решения уравнения, требуется предварительно обобщить как понятие функции, так и ее производной.

В теории дифференцирования Шварца под обобщенной функцией и ее производной (слабой или сильной) подразумеваются линейные функционалы (распределения), действующие на пространстве функций. В частности, *обобщенная функция T*, определенная в G, – это линейный функционал, переводящий любую последовательность $\{v_\alpha(\mathbf{x})\}$ бесконечно дифференцируемых пробных функций с компактным носителем из G, равномерно сходящуюся вместе со своими производными к нулю, в последовательность $\{Tv_\alpha(\mathbf{x})\}$, тоже сходящуюся к нулю. Так, например, каждая интегрируемая функция $u(\mathbf{x})$ порождает обобщенную функцию $U(v) = \int_G uv d\mathbf{x}$.

Пусть функция $u(\mathbf{x})$ локально суммируема в R^n, то есть $\int_B |u| d\mathbf{x} < \infty$ для любого шара $B \subset R^n$. Тогда под ***слабой производной*** $u(\mathbf{x})$ по переменной x_k будем понимать функционал

$$\frac{\partial u}{\partial x_k}(v) = -\int_{R^n} u(\mathbf{x}) \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial x_k} d\mathbf{x} \quad \forall v(\mathbf{x}) \in C^\infty(R^n), \quad (9)$$

рассматривая только такие пробные функции $v(\mathbf{x})$, которые имеют компактный носитель в R^n. Слабая обобщенная производная совпадает с обычной производной, если $u(\mathbf{x}) \in C^1(R^n)$; это можно проверить через формулу интегрирования по частям. Кроме того, если функция слабо дифференцируема по Шварцу, то она дифференцируема в этом смысле бесконечное число раз. На функцию $u(\mathbf{x})$ накладывается при этом лишь существенно более мягкое, по сравнению с классическим условием дифференцируемости, ограничение интегрируемости модуля на компакте в R^n.

Функция $q(\mathbf{x})$ называется *сильной производной* $u(\mathbf{x})$ на $L_m(R^n)$ $(m \geq 1)$, $D_k u = q(\mathbf{x})$, если для любого компакта $K \subset R^n$ существует такая последовательность определенных в K и имеющих в K компактный носитель пробных функций $\{v_\alpha(\mathbf{x})\}$, для которой

$$\int_K |v_\alpha - u|^m d\mathbf{x} \to 0 \Rightarrow \int_K \left| \frac{\partial v_\alpha}{\partial x_k} - q \right|^m d\mathbf{x} \to 0. \quad (10)$$

Таким образом, чтобы рассчитать сильную производную D_k функции $u(\mathbf{x}) \in L_m(K)$, не дифференцируемой в классическом понимании, необходимо взять последовательность абсолютно гладких функций $\{v_\alpha(\mathbf{x})\}$, слабо сходящуюся в метрике L_m к $u(\mathbf{x})$ на компакте K, и найти слабый предел соответствующего типа последовательности их производных.

Функции $u(\mathbf{x}) \in L_m$, имеющие обобщенные слабые производные до порядка s (дифференциальный порядок оператора A) включительно и удовлетворяющие почти всюду уравнению $\mathrm{A}u = f$, называются его *сильными решениями.*

Для обобщенных математических объектов справедлив ряд весьма полезных теорем [3, 11–14].

Теорема 4. О соотношении слабой и сильной дифференцируемости. Пусть функции $u(\mathbf{x})$ и $v(\mathbf{x})$ принадлежат $L_k(G)$, $k \geq 1$. Для того чтобы $v(\mathbf{x})$ была слабой производной $u(\mathbf{x})$ порядка p, необходимо и достаточно, чтобы $v(\mathbf{x})$ была сильной производной соответствующего типа $D^p u(\mathbf{x})$ в L_k.

Теорема 5. О непрерывной дифференцируемости сильных решений. Пусть коэффициенты и правая часть линейного эллиптического уравнения $\mathrm{A}u = f$ непрерывны по Гельдеру. Тогда каждое сильное решение является классическим.

Теорема 6. О сильной дифференцируемости слабых решений. Если для данного линейного эллиптического уравнения существует слабое решение, то всякое слабое решение также является и сильным.

Теорема 7. О решениях – обобщенных функциях. Пусть коэффициенты эллиптического оператора A бесконечно дифференцируемы, а $f \in L_2$. Если обобщенная функция T удовлетворяет уравнению $\mathrm{A}T = f$, то она является обычной функцией интегрируемой с квадратом и, следовательно, слабым решением этого уравнения.

Заметим, что теорема 7 обобщает теорему 6 на более широкий класс функций. Для эллиптического оператора справедлив также *принцип* *сравнения,* который выражают следующие теоремы 8.1 и 8.2 [1]:

Теорема 8.1. Принцип сравнения для линейного оператора. Пусть оператор A линеен и удовлетворяет слабому принципу максимума (теорема 3.2), а функции $u, v \in C^2(G) \cap C_0(\bar{G})$, причем $\mathrm{A}u \geq \mathrm{A}v$ в G и $u \leq v$ на ∂G. Тогда условие $u \leq v$ выполняется и в G.

Теорема 8.2. Принцип сравнения для квазилинейного оператора. Пусть квазилинейный оператор A (6) локально равномерно эллиптичен на функциях $u, v \in C_2(G) \cap C_0(\bar{G})$, $\mathrm{A}u \geq \mathrm{A}v$ в G, $u \leq v$ на ∂G, кроме того: (a) коэффициенты $a^{i,j}$ не зависят от z; (b) коэффициенты a^i являются неубывающими функциями z в каждой точке $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \in G\times R^n$; (c) коэффициенты A из (6) являются непрерывно дифференцируемыми по $\mathbf{p}$ в $G\times R\times R^n$. Тогда в G справедливо $u \leq v$. Кроме того, если оператор A локально равномерно эллиптичен на функциях u и v, $\mathrm{A}u > \mathrm{A}v$ в G и $u \leq v$ на ∂G, а также выполнены условия (a) и (b), то $u < v$ в G.

Можно показать, что из этой теоремы следует единственность решения задачи Дирихле для квазилинейных уравнений (5).

Теорема 8.3. О единственности решения квазилинейной задачи (6). Пусть оператор A (6) удовлетворяет условию теоремы 8.2, функции $u, v \in C^2(G) \cap C_0(\bar{G})$ удовлетворяют равенствам $\mathrm{A}u = \mathrm{A}v$ в G, $u = v$ на ∂G. Тогда $u = v$ в G.

Заметим, что также известны примеры, показывающие, что принцип сравнения нельзя обобщить на случай, когда старшие коэффициенты $a^{i,j}$ оператора A (6) зависят от u [1]. Кроме того, сопоставляя теоремы 8, нетрудно заметить, что соответствующие условия, необходимые для выполнения теорем, в случае квазилинейного оператора сложнее. Этот вывод, впрочем, достаточно очевиден. Так, например, принцип максимума для квазилинейного эллиптического оператора может быть сформулирован и доказан в виде теоремы 3.2 [1].

Теорема 3.2. Принцип максимума для квазилинейного оператора. Пусть оператор A из (6) эллиптичен в G и пусть существуют такие неотрицательные постоянные β_1 и β_2, что

$$q(\mathbf{x},z,\mathbf{p})\mathrm{sign}z/E(\mathbf{x},z,\mathbf{p}|\mathbf{p}) \leq (\beta_1|\mathbf{p}|+\beta_2)/|\mathbf{p}|^2 \quad \forall(\mathbf{x},z,\mathbf{p})\in\Omega. \tag{11}$$

Тогда, если $u \in C_2(G) \cap C^0(\bar{G})$ удовлетворяет в G неравенству $\mathrm{A}u \geq 0$ (равенству $\mathrm{A}u = 0$), то справедлива оценка:

$$\sup_G u \leq \sup_{\partial G} u^+ + C\beta_2 \quad \left(\sup_G u \leq \sup_{\partial G} u + C\beta_2\right), \quad u^+ = \max(0,u),\ C = C(\beta_1, diam(G)). \tag{12}$$

Принципы максимума и сравнения для (квази)линейных операторов имеет ряд альтернативных формулировок, учитывающих, в частности, специфику структуры оператора [1]. Кроме того, условие (11) может быть обобщено на случай неравномерной эллиптичности оператора A. Также отметим, что оценки (12) и (7) подобны по своей структуре.

Вопрос решения квазилинейных уравнений обычно сводится к поиску неподвижной точки некоторого нелинейного оператора. Действительно, поскольку решение линейного уравнения $\mathrm{A}(\mathbf{x}, q, \mathrm{D}q)u = f(\mathbf{x}, q)$ представляет собой отображение $\mathrm{P}q = u$ с нелинейным оператором P, то решение нелинейного уравнения $\mathrm{A}(\mathbf{x}, u, \mathrm{D}u)u = f(\mathbf{x}, u)$ приводит к соотношению $\mathrm{P}u = u$, определяющему неподвижную точку оператора P. Наличие таких точек определяет теорема 9.

Теорема 9. Принцип сжимающих отображений Банаха. Пусть $\{\mathrm{X}, \rho\}$ полное метрическое пространство, $\mathrm{P}:\mathrm{X}\to\mathrm{X}$ и $\forall x, y \in \mathrm{X}\ \exists\ \alpha \in [0, 1)$: $\rho(\mathrm{P}x, \mathrm{P}y) \leq \alpha\rho(x, y)$ (то есть P – сжимающее отображение). Тогда у отображения P существует единственная неподвижная точка.

Сходимость итерационных методов на малых областях. Метод разбиений

Рассмотрим краевую задачу (5) с равномерно эллиптическим квазилинейным оператором A и непрерывной ограниченной правой частью. Организуем следующий итерационный процесс:

$$\mathrm{A}(x, u^s, \mathrm{D}u^s)u^{s+1} = f(\mathbf{x}, u^s),\quad u^{s+1} = u^{s+1}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in G,\quad u^{s+1}(\mathbf{x}) = b(\mathbf{x}),\ \mathbf{x}\in\partial G, \tag{13}$$

где s + 1 – номер текущей итерации. Рассмотрим сначала случай линейного оператора A. Вычитая из соотношений (12) аналогичные соотношения для итерации s, получим задачу:

$$\mathrm{A}(\mathbf{x})(u^{s+1}-u^{s}) = f(\mathbf{x},u^{s}) - f(\mathbf{x},u^{s-1}),\ \ \mathbf{x}\in G$$
$$u^{s+1}(\mathbf{x}) - u^{s}(\mathbf{x}) = 0,\ \ \mathbf{x}\in \partial G.$$

Поскольку оператор A задачи (13) линеен, для ее решения справедлива оценка (7):

$$|u^{s+1}-u^{s}| \le (e^{\alpha d}-1)\max_{\bar G\times R}|f(\mathbf{x},u^{s})-f(\mathbf{x},u^{s-1})|$$
$$\forall\mathbf{x}\in\bar G,\ \alpha=\alpha(N,m), \tag{14}$$

поэтому если функция $f(\mathbf{x}, z)$ непрерывна и ограничена вместе со своими производными на $G\times R$, то оператор перехода между итерациями (13) всегда можно сделать сжимающим в метрике $\rho(a, b) = \max|a-b|$, если область G имеет достаточно малый диаметр. Даже если функция $f(\mathbf{x}, z)$ не является ограниченной по z на R, но в остальном ведет себя достаточно хорошо, условие сжатия можно добиваться, учитывая ее специфику и подбирая соответствующие малые области. Для квазилинейных уравнений этот вывод также остается справедливым, в силу существования оценки (12). Назовем область G, на которой сходится итерационный процесс (13) *областью сжатия* оператора перехода P. Поскольку f зависит от $\mathbf{x}$, то имеет смысл говорить только о локальной области сжатия, размеры которой варьируются от ее места расположения в R^n.

Вернемся теперь к задачам, сформулированным в начале работы, и рассмотрим следующие двухшаговые (α = 2) или трехшаговые (α = 3) итерационные алгоритмы разбиения. Разобьем G на непересекающиеся локальные области сжатия P_k:

$$G=\bigcup_{k=1}^{m_1}P_k,\ \ P_i\cap P_k=\varnothing\ i\ne k. \tag{15}$$

Имея функцию $u^s(\mathbf{x})$, заданную как начальное приближение или полученную на предыдущем шаге метода, решим сначала m_1 итерационных задач на локальных областях:

$$\mathrm{A}(\mathbf{x})u^{s+1/\alpha} = f(\mathbf{x},u^{s}),\ \ \ \mathbf{x}\in P_k$$
$$u^{s+1/\alpha}(\mathbf{x}) = u^{s}(\mathbf{x}),\ \ \mathbf{x}\in\partial P_k. \tag{16}$$

Таким образом, итерируемые значения будут изменены во всех точках G, кроме точек границ P_k, являющихся внутренними точками области G. На втором «дробном» шаге алгоритма рассмотрим подмножество $Q \subseteq G$, включающее как внутренние все такие внутренние точки G, не охваченные итерациями первого дробного шага. Построим новое разбиение:

$$Q=\bigcup_{k=1}^{m_2}Q_k,\ \ Q_i\cap Q_k=\varnothing\ i\ne k,$$
$$\bigcup_{k=1}^{m_1}\partial P_k\setminus\partial G\subset Q, \tag{17}$$

в котором области Q_k содержат точки границ ∂P_n как внутренние, и повторим для них до сходимости итерации, подобные (16). Тем самым мы сформируем функцию $u^{s+2/\alpha}(\mathbf{x})$, которую можно рассматривать как следующее итерационное приближение в двухшаговой схеме. Если по результатам второй группы итераций достигается условие сходимости метода $\rho(u^s, u^{s+1}) < \varepsilon$, где ε – наперед заданная точность установления, то итерации прекращаются.

Следует помнить, что мы все-таки решаем нелинейную задачу, для которой даже в рассматриваемой сравнительно простой версии, возможны трудно предсказуемые эффекты, обусловленные нелинейностью. Так, практика моделирования показывает, что сходимость итерационных алгоритмов, нормально работающих в случае линейных задач, может не гарантировать решения задач в нелинейной версии. В частности, сходимость итераций в приведенном методе с двумя «дробными» шагами может быть не эквивалентна сходимости к решению задачи (5). Например, накопление ошибок в ходе итерационного процесса может приводить к потере алгоритмом свойства сходимости по невязке уравнения [15]. Поэтому при использовании подобных двухшаговых схем необходимо постоянно контролировать поведение невязки уравнения $\rho(\mathrm{A}^s u^{s+1}, f^s)$ и прекращать итерации, если она начинает возрастать.

Поскольку при подобном непрерывном контроле за решением информация о невязке уравнения все равно нарабатывается, целесообразно, как это показывает практика вычислений, добавить в алгоритм еще один «дробный» шаг, который улучшает сходимость метода и суть которого сводится к следующему. Так как после первого «дробного» шага по областям P_k становятся известными также и точки этих областей сжатия с минимальной невязкой решаемого уравнения, по ним целесообразно проводить дополнительное интерполирование искомой функции перед началом итераций по областям Q_k. По крайней мере, такой прием, не требующий значительных затрат машинного времени, уменьшает число итераций, необходимых для достижения условия сходимости итераций на второй группе частичных областей. Именно такой итерационный метод с тремя «дробными» шагами далее будем называть *методом разбиений.*

Реализация методов и результаты расчетов

Представленные выше методы были программно реализованы на платформе MATLAB. Ниже приводятся некоторые результаты их применения для решения *безразмерной* сферически симметричной задачи (5) для уравнения Пуассона (2) с больцмановским распределением электронов. Рассматривался сферический слой [7, 25] с граничными условиями $\varphi(7) = -6$, $\varphi(25) = 0$. Распределение ионов считалось заданным и неизменным, их концентрация заметно отличалась от единицы лишь в окрестности внутренней границы слоя. В качестве нулевого приближения электрического потенциала в обоих методах рассматривался кулоновский потенциал [5].

Для аппроксимации уравнений применялись равномерные пространственные сетки. В методе установления сетка содержала 91 узел, а в методе разбиения – 201. Применялась явная упомянутая в разделе 1 аппроксимация уравнения (1). Для пространственных производных этого уравнения использовалась схема дифференцирования против потока первого порядка точности аппроксимации, эквивалентная методу крупных частиц. Шаг метода по эффективному времени определялся условием устойчивости Куранта.

В методе разбиения использовались равновеликие области сжатия, включающие пять узлов. На начальном итерационном дробном шаге их было 50 (границы слоя при этом включались в границы первой и последней области сжатия P_k), на завершающем – 49. Области Q_n завершающего дробного шага начинались и заканчивались в центральных узлах областей P_k начального дробного шага. В методе разбиения использовалась аппроксимация второго порядка точности пространственных производных, включая крайние узлы сферического слоя (для них такая аппроксимация была несимметричной).

Итерации на всех областях каждого из методов проводились либо до достижения задаваемого априори условия сходимости итераций, либо завершались, если они переставали улучшать качество решения φ. Во всех случаях контролировалась сходимость в *метрике максимум модуля*.

Как уже отмечалось, сходимость итерационного процесса решения нелинейных уравнений необязательно сопровождается повышением качества решения. В методе установления качество решения определялось отклонением рассчитанной концентрации электронов от больцмановской для соответствующего текущей итерации поля. В методе разбиения контролировалась невязка уравнения Пуассона, умноженная на h^2, где h – шаг сетки. Для повышения скорости сходимости метода разбиения на областях сжатия P_k определялись узлы с невязкой, минимальной для начального дробного шага, и по ним проводилась интерполяция искомой функции кубическими сплайнами. Завершающий дробный шаг использовал в качестве начального приближения для итераций на областях разбиения Q_n такой результат интерполяции. При ухудшении качества решения по результатам текущей итерации на любой области каждого метода осуществлялся «откат» на предыдущую итерацию, после чего итерации на рассматриваемой области завершались.

Результаты расчета контролируемых невязок для метода установления и метода разбиения представлены в табл. 1 и 2 соответственно. Еще раз подчеркнем, что речь идет о различных величинах, которые показывают качество описанных выше методов, каждого в своем смысле.

Эти же величины сведены в графики на рис. 1. Поскольку в методе разбиения начинался рост невязки уравнения Пуассона, начиная с шестой итерации, а в методе разбиения, начиная со 151-й, для удобства сопоставления «скорости сходимости» методов результаты метода разбиения были интерполяционно «растянуты» соответствующим образом вдоль оси абсцисс. Реальные точки невязки, приведенные в табл. 2, на рис. 1 отмечены маркерами в форме кружков.

Приведенные результаты не означают, что в методе разбиения было сделано только пять трехэтапных итерационных шагов для достижения продемонстрированных значений невязки метода. В табл. 2 представлены результаты итераций, соответствующих рассматриваемому сферическому слою в целом. На каждой из областей сжатия P_k или Q_n проводились независимые итерации вида (15), общее количество которых варьировалось от одного-двух до полутора десятков, особенно на первой итерации для сферического слоя в целом. На остальных «глобальных» шагах в качестве начального приближения рассматривался результат предыдущей итерации. Это являлось хорошим начальным приближением для итераций на областях разбиения, поэтому их число редко превышало три-пять. На 6-м глобальном шаге метода разбиения программа сделала 18 итераций на области P_1, однако условие окончания так и не было достигнуто, вместо этого начался рост невязки уравнения Пуассона. Как уже отмечалось, в этом случае итерации для соответствующей области разбиения прекращались. Итерации откатывались на один шаг, и осуществлялся переход к следующей области разбиения.

На рис. 2 приведены распределения потенциала, полученные методами установления (I) и разбиения (II). Эти зависимости получены соответствующими методами к моменту завершения итераций, представленных невязками в табл. 1 и 2, что соответствовало первому ионному шагу по времени процесса установления возмущенного слоя плазмы в задаче [5].

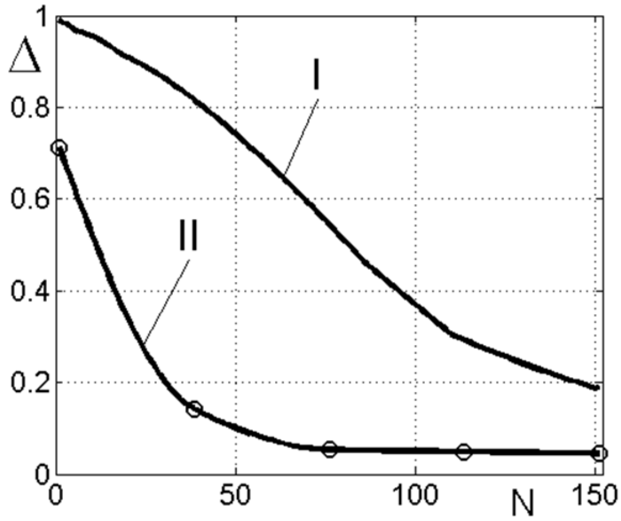

Рис. 1. Поведение контролируемых невязок в методе установления (I) и методе разбиения (II). N – номер итерации в методе установления (см. табл. 1). Значения невязки метода разбиения из табл. 2 отмечены маркерами (сплошная линия – интерполяция)

На рис. 3 показаны аналогичные результаты для концентрации электронов n_e и приведено распределение (Ib) Больцмана для электронов в поле с потенциалом (I) на рис. 2. Напомним, что задаваемый (в данном случае больцмановский) закон распределения электронов является безальтернативным в методе разбиения, поэтому соответствующая ему кривая на рис. 3 совпадает с приведенной кривой II.

Таблица 1. Невязка рассчитанной концентрации электронов с больцмановским распределением в методе установления

9.90103e-001	9.83814e-001	9.81889e-001	9.77217e-001	9.69633e-001	9.65635e-001	9.63817e-001	9.61573e-001
9.58844e-001	9.55611e-001	9.51887e-001	9.47703e-001	9.43101e-001	9.38127e-001	9.32826e-001	9.27242e-001
9.21415e-001	9.16525e-001	9.12992e-001	9.09283e-001	9.05403e-001	9.01357e-001	8.97151e-001	8.92790e-001
8.88283e-001	8.83634e-001	8.78849e-001	8.73935e-001	8.68898e-001	8.63742e-001	8.58472e-001	8.53094e-001
8.47612e-001	8.42029e-001	8.36350e-001	8.30579e-001	8.24718e-001	8.18770e-001	8.12738e-001	8.06626e-001
8.00435e-001	7.94167e-001	7.87824e-001	7.81409e-001	7.74922e-001	7.68366e-001	7.61743e-001	7.55052e-001
7.48296e-001	7.41476e-001	7.34592e-001	7.27647e-001	7.20640e-001	7.13574e-001	7.06447e-001	6.99263e-001
6.92021e-001	6.84722e-001	6.77367e-001	6.69957e-001	6.62492e-001	6.54974e-001	6.47403e-001	6.39779e-001
6.32105e-001	6.24380e-001	6.16605e-001	6.08782e-001	6.00910e-001	5.92992e-001	5.85025e-001	5.77013e-001
5.68955e-001	5.60853e-001	5.52708e-001	5.44520e-001	5.36292e-001	5.28024e-001	5.19717e-001	5.11372e-001
5.02991e-001	4.94574e-001	4.86124e-001	4.77641e-001	4.69126e-001	4.61099e-001	4.54497e-001	4.47898e-001
4.41302e-001	4.34710e-001	4.28122e-001	4.21539e-001	4.14962e-001	4.08391e-001	4.01827e-001	3.95270e-001
3.88722e-001	3.82183e-001	3.75654e-001	3.69135e-001	3.62627e-001	3.56132e-001	3.49650e-001	3.43182e-001
3.36729e-001	3.30291e-001	3.23870e-001	3.17466e-001	3.11081e-001	3.04716e-001	3.01000e-001	2.97613e-001
2.94248e-001	2.90907e-001	2.87588e-001	2.84293e-001	2.81021e-001	2.77772e-001	2.74547e-001	2.71345e-001
2.68167e-001	2.65012e-001	2.61882e-001	2.58775e-001	2.55693e-001	2.52634e-001	2.49600e-001	2.46592e-001
2.43609e-001	2.40651e-001	2.37718e-001	2.34810e-001	2.31929e-001	2.29073e-001	2.26244e-001	2.23440e-001
2.20663e-001	2.17912e-001	2.15188e-001	2.12491e-001	2.09820e-001	2.07176e-001	2.04560e-001	2.01971e-001
1.99409e-001	1.96875e-001	1.94369e-001	1.91891e-001	1.89440e-001	1.87025e-001	1.89344e-001	

Таблица 2. Невязка уравнения Пуассона в методе разбиений

7.12384e-001	1.42154e-001	5.35227e-002	4.9011e-002	4.51263e-002

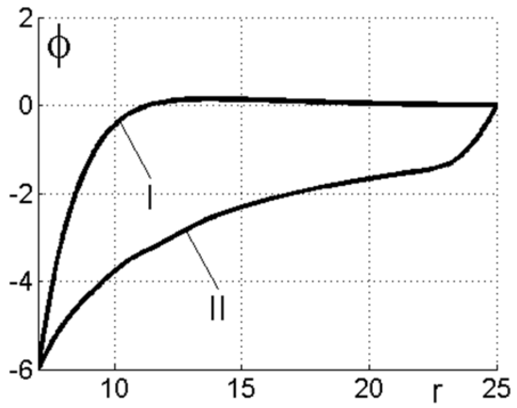

Рис. 2. Распределения потенциала, полученные для n_i = 1: I – в методе установления, II – в методе разбиения

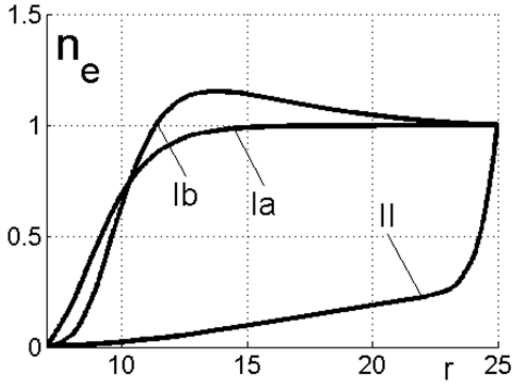

Рис. 3. Распределения n_e электронов, полученные для n_i = 1: I – в методе установления (a – результат расчета, b – распределение Больцмана), II – в методе разбиения

Как показывают представленные зависимости, либо решение задачи Дирихле для нелинейного уравнения Пуассона (2) может быть и не единственным, либо метод установления при грубом начальном приближении, каким в данном случае оказывается кулоновское начальное поле, может просто не успеть вывести решение уравнения неразрывности для электронов на стационарный режим к моменту начала увеличения соответствующей невязки. Косвенно об этом говорит монотонный ход зависимости невязки метода установления от номера итерации, показанный на рис. 1, на котором не прослеживается ее стабилизация.

Тем не менее ход кривых Ia и Ib на рис. 3 качественно подобен, но слишком сильно отличается от хода кривой II. Это обстоятельство косвенно свидетельствует о возможности существования и нескольких решений нелинейного уравнения Пуассона. Заметим, что эта возможность никоим образом не противоречит приведенной ранее теореме Банаха о неподвижной точке в силу упомянутой выше инверсии знака потенциала и возникающей неограниченности экспоненциального распределения Больцмана для электронов. Очевидно, что данный вопрос нуждается в дополнительной проработке.

В завершение отметим, что физический процесс релаксации слоя объемного заряда в обсуждаемом примере шарового слоя все-таки устраняет различия в стационарных состояниях, полученных с использованием разных методов решения задачи для поля. Как показывают расчеты, при достижении стационарного состояния объемного заряда, включающего и самосогласованное распределение ионов, независимо от метода расчета поля в ходе решения самосогласованных задач релаксации [5], достигается одно и то же стационарное состояние. Подтверждением этого утверждения является рис. 4, на котором приведены потенциальные кривые в стационарном двойном слое. Как видим, с точки зрения физики кривые I и II на рис. 4 практически не отличаются.

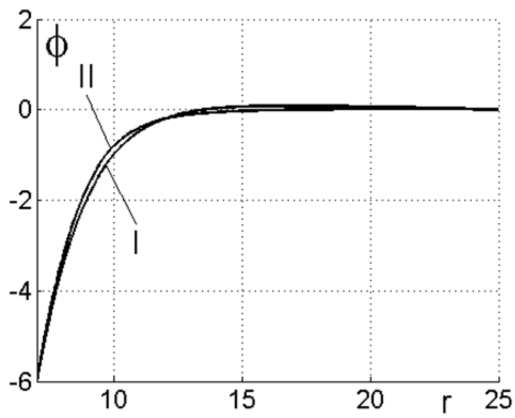

Рис. 4. Распределения потенциала в установившейся зоне возмущения, полученные с использованием метода установления (I) и метода разбиения (II)

Тем не менее релаксационные кривые задач [5] могут, очевидно, зависеть от выбора вспомогательных методов. Также от них зависит скорость сходимости соответствующих численных алгоритмов. Так, стационарные кривые рис. 4 соответствуют 1000-й итерации с методом установления и 500-й с методом разбиения, хотя и одному и тому же времени безразмерной задачи [5].

Заключение

Рассмотрены основные свойства линейных и квазилинейных эллиптических дифференциальных операторов. В связи с необходимостью решения тепловых задач для возмущенной зоны неподвижных тел, помещенных в газовую плазму, проанализированы возможности решения нелинейных уравнений с оператором Лапласа (Лапласа – Бельтрами). Наряду с известным методом установления, позволяющим при решении уравнения Пуассона рассматривать плотность заряда с нелинейностью экспоненциального вида, в работе предложен оригинальный локальный метод разбиений, использующий принцип сжимающих отображений и теорему Банаха о неподвижной точке. Метод разбиений основан на связи нормы эллиптического оператора перехода в простых итерациях с диаметром области решения нелинейной задачи Дирихле. Приведены результаты расчета на компьютере, показывающие, что выбором диаметра области можно достаточно эффективно влиять на свойство эллиптического оператора итерационного перехода задачи, преодолевая, в частности, нежелательные последствия нарушения в ходе решения условия ограниченности правой части уравнения. Метод разбиений позволяет также существенно расширить класс функций плотности в уравнении Пуассона. Представлены сравнительные результаты тестовых расчетов, позволяющие судить об адекватности предложенного метода. Обсуждаются показатели качества решений, получаемых при традиционном и новом подходе. Показаны их взаимно дополняющие свойства. Продемонстрировано, что предложенный метод может быть достаточно полезен при решении задач Дирихле для нелинейных уравнений с равномерно эллиптическими операторами.

Список источников

1. **Gilbarg D., Trudinger N.S.** Elliptic partial differential equations of second order. 2nd Ed. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer–Verlag, 1983. 447 p.
2. **Wermer J.** Potential theory. Berlin, New York, 1974. 127 p.
3. **Reed M., Simon B.** Methods of modern mathematical physics. Vol. 1. Functional analysis. Berlin, New York, London: Academic Press, 1972. 341 p.
4. **Полянин А.Д., Зайцев В.Ф., Журов А.И.** Методы решения нелинейных уравнений математической физики. Москва: Физматлит, 2005. 256 с.
5. **Черепанов В.В.** О моделировании тепловых возмущений, вносимых в разреженную плазму неподвижными каноническими телами // Тепловые процессы в технике. 2023. Т. 15. № 10. С. 448–455.
6. **Алексеев Б.В., Котельников В.А., Черепанов В.В.** Электростатический зонд в многокомпонентной плазме // Теплофизика высоких температур. 1984. Т. 22. № 2. С. 395–396.
7. **Hockney R.G., Eastwood J.W.** Computer simulation using particles. Bristol, Philadelphia: IOP (Institute of Physics) Publishing, 1988. 568 p.
8. **John F.** Plane waves and spherical means applied to a partial differential equations. New York: Interscience, 1955. 180 p.
9. **Douglis A., Nirenberg L.** Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1955. Vol. 8. P. 503–538.
10. **Giraud G.** Generalizations des problemes sur les operations du type elliptique // Bulletin de la Societe Mathematique de France. 1932. Vol. 56. P. 248–352. (In France).
11. **Соболев С.Л.** Об одной теореме функционального анализа // Математический сборник. 1938. Т. 4. С. 471–497.
12. **Friedrichs K.O.** The identity of weak and strong extensions of differential operators // Transactions on the American Mathematical Society. 1944. Vol. 55. P. 132–151.
13. **Friedrichs K.O.** On the differentiability of solutions of linear elliptic differential equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1953. Vol. 6. P. 299–326.
14. **John F.** Derivatives of continuous weak solutions of linear elliptic equations // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1953. Vol. 6. P. 327–335.
15. **Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V.** Extreme methods for solving ill – posed problems with applications to inverse heat problems. New York: Begell House, 1995. 292 p.

References

1. **Gilbarg D., Trudinger N.S.** Elliptic partial differential equations of second order. 2nd Ed. Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer–Verlag, 1983, 447 p.
2. **Wermer J.** Potential theory. Berlin, New York, 1974, 127 p.
3. **Reed M., Simon B.** Methods of modern mathematical physics. Vol. 1 Functional analysis. Berlin, New York, London: Academic Press, 1972, 341 p.
4. **Polianin A.D., Zaitsev V.F., Tjurov A.I.** Metodi resheniya nelineinikh uravneniy matematicheskoy fiziki [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics]. Moscow: Fizmatlit, 2005, 256 p. (In Russ.).
5. **Cherepanov V.V.** O modelirovanii teplovikh vozmuschenii, vnosimikh v razrejennuju plasmu nepodvijnimi kanonitheskimi telami [On the modeling of thermal disturbances introduced into a rarefied plasma by motionless canonical bodies]. *Thermal processes in engineering*, 2023, vol. 15, no. 10, pp. 448–455.

6. **Alekseev B.V., Kotelnikov V.A., Cherepanov V.V.** Electrostatitheskiy zond v mnogo komponentnoy plasme [Electrostatic probe in multicomponent plasma]. *High Temperature*, 1984, vol. 22, no. 2, pp. 395–396. (In Russ.).
7. **Hockney R.G., Eastwood J.W.** Computer simulation using particles. Bristol, Philadelphia: IOP (Institute of Physics) Publishing, 1988, 568 p.
8. **John F.** Plane waves and spherical means applied to a partial differential equations. New York: Interscience, 1955, 180 p.
9. **Douglis A., Nirenberg L.** Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1955, vol. 8, pp. 503–538.
10. **Giraud G.** Generalizations des problemes sur les operations du type elliptique. (In France). *Bulletin de la Societe Mathematique de France*, 1932, vol. 56, pp. 248–352.
11. **Sobolev S.L.** Ob odnoy teoreme functionalnogo analiza [On a theorem of functional analysis]. *Mathematical collection*, 1938, vol. 4, pp. 471–497. (In Russ.).
12. **Friedrichs K.O.** The identity of weak and strong extensions of differential operators. *Transactions on the American Mathematical Society*, 1944, vol. 55, pp. 132–151.
13. **Friedrichs K.O.** On the differentiability of solutions of linear elliptic differential equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1953, vol. 6, pp. 299–326.
14. **John F.** Derivatives of continuous weak solutions of linear elliptic equations. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1953, vol. 6, pp. 327–335.
15. **Alifanov O.M., Artyukhin E.A., Rumyantsev S.V.** Extreme methods for solving ill – posed problems with applications to inverse heat problems. New York: Begell House, 1995, 292 p.

Статья поступила в редакцию 02.02.2024; одобрена после рецензирования 17.02.2024; принята к публикации 27.02.2024.

The article was submitted on 02.02.2024; approved after reviewing on 17.02.2024; accepted for publication on 27.02.2024.