

Труды МАИ. 2023. № 130  
Trudy MAI, 2023, no. 130

Научная статья  
УДК 539.3  
DOI: [10.34759/trd-2023-130-04](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-04)

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОПЕРЕНОСА В ЭЛЕМЕНТАХ ЭКРАННО-ВАКУУМНОЙ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ

**Полина Федоровна Пронина**

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия

[proninapf@mai.ru](mailto:proninapf@mai.ru)

*Аннотация.* Работа посвящена аналитическому моделированию элементов экранно-вакуумной теплоизоляции (ЭВТИ) для определения распределения температуры в композитном теплозащитном покрытии. Экранно-вакуумная теплоизоляция широко используется в аэрокосмической технике: автоматические межпланетные станции, космические корабли, спутники, топливные баки ракет-носителей. Изучение этого вида теплоизоляции имеет важное значение для обеспечения безопасности и ресурса элементов аэрокосмических комплексов на протяжении всего времени эксплуатации. Высокие требования к надежности обусловлены работой тепловой защиты в условиях перепадов температур и длительном воздействии Солнечного излучения. В работе рассматривается четырехслойная структура в одномерной постановке с решением нестационарной задачи теплопроводности на основе двухслойного однородного стержня. Четырехслойная структура представляет собой пакет из стеклоткани и

алюминиевой подложки. Структура находится под воздействием температурного поля. Необходимо найти распределение поля температуры в исследуемой структуре, а также определить напряженно-деформированное состояние, вызванное температурным воздействием. Для определения поля температур решается нестационарная задача теплопроводности для четырехслойного однородного стержня. Для оценки плоского напряженно-деформированного состояния используются предположения, что деформация реализуется в призматическом теле, теоретически бесконечной длины, нагруженном поверхностными и объемными силами, перпендикулярными оси  $z$ , интенсивность которых не зависит от  $z$ . Также предполагается, что структура деформируется как единое целое, что соответствует модели Фойхта. Сдвиговые деформации также отсутствуют. Представлены графики распределения поля температур и тепловых потоков по длине пакета в зависимости от времени.

**Ключевые слова:** экранно-вакуумная теплоизоляция, температура, напряженно деформированное состояние

**Финансирование:** работа проводилась при финансовой поддержке государственного проекта Министерства образования и науки РФ «Код проекта FSFF-2020-0016»

**Для цитирования:** Пронина П.Ф. Аналитическое моделирование теплопереноса в элементах экранно-вакуумной теплоизоляции // Труды МАИ. 2023. № 130. DOI:

[10.34759/trd-2023-130-04](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-04)

Original article

## **ANALYTICAL MODELING OF HEAT TRANSFER IN THE ELEMENTS OF THE SCREEN-VACUUM THERMAL INSULATION**

**Polina F. Pronina**

Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

[proninapf@mai.ru](mailto:proninapf@mai.ru)

**Abstract.** The article deals with analytical modeling of the screen-vacuum thermal insulation elements (SVTIE) for temperature distribution determining in the composite thermal protection coating. Screen-vacuum thermal insulation is widely used in aerospace engineering, namely in the automatic interplanetary stations, spacecraft, satellites, fuel tanks of launch vehicles. The study of this type of thermal insulation is of prime importance for ensuring safety and service life of aerospace complexes elements throughout their lifetime. High reliability requirements are stipulated by the thermal protection operation under conditions of temperature fluctuations and prolonged exposure to solar radiation. The article considers a four-layer structure in the one-dimensional formulation with the solution of the unsteady thermal conductivity problem based on a two-layer homogeneous rod. The four-layer structure represents a package of a glass fabric and aluminum substrate. The structure is being exposed to a temperature field. It is necessary to find the temperature distribution field in the structure under study and determine the stress-strain state caused by the temperature impact. To determine the temperature field, an unsteady thermal conductivity problem for a four-layer homogeneous rod is being solved. The assumption that deformation is being realized in a prismatic body of theoretically infinite length, loaded by the surface

and voluminous forces normal to the z-axis, which intensity does not depend on z, is used for stress-strain state. It is assumed as well that the structure deforms as a whole entity, which corresponds to the Feucht model. Shear deformations are also absent. The article presents the graphs of the temperature field and heat flux distribution along the length of the package as a function of time.

**Keywords:** screen-vacuum thermal insulation, temperature, stress-strain state

**Funding:** The work was carried out with the financial support of the state project of the Ministry of Education and Science project code FSFF-2020-0016

**For citation:** Pronina P.F. Analytical modeling of heat transfer in the elements of the screen-vacuum thermal insulation. *Trudy MAI*, 2023, no. 130. DOI: [10.34759/trd-2023-130-04](https://doi.org/10.34759/trd-2023-130-04)

## Введение

Необходимой предпосылкой надежного функционирования космического аппарата (КА), его систем и установленного на нем оборудования является обеспечение необходимого теплового режима всех его элементов. [1] Математическое моделирование теплообмена большинства типов КА связано с рядом трудностей, обусловленных сложностью и значительной неопределенностью протекания физических процессов внешнего и внутреннего теплообмена между элементами КА. В связи с этим большое значение при создании КА имеет его тепловая отработка, представляющая собой совокупность тепловых экспериментов (испытаний) и проводимых на основе их результатов мероприятий по доработке (в случае необходимости) средств обеспечения теплового режима, а иногда и конструкции аппарата. [2-4]

В настоящее время самым результативным методом защиты от внешних тепловых потоков, поступающих от солнца, планет, излучения наружных поверхностей элементов КА является экранно-вакуумная теплоизоляция (ЭВТИ). Именно ее использование позволяет снизить лучистый теплообмен КА с внешней средой. [5-7]

В настоящее время композитные покрытия применяются почти во всех сферах промышленности [8-12] для защиты от механических, температурных, химических и др. воздействий. Развитие технологий позволяет создавать тонкослойные композитные покрытия, управление строением их микроструктуры и составом (многослойные композитные покрытия, процент пористости, размер зерна и т. д.). Зачастую тонкослойные композитные покрытия применяют для снижения температуры до “нормальной”, приемлемой температуры подложки [14-20].

Для тестовой задачи проводилось моделирование элемента подложка и слой в рамках плоской задачи

## **1. Постановка задачи**

Рассматривается элемент экранно-вакуумной теплоизоляции, представляющей собой слоистую композитную конструкцию, состоящую из теплозащитного покрытия, состоящего из слоя стеклоткани и алюминиевой подложки, а также полиамида. Рассматриваемая теплоизоляция находится под действием температурного поля. (рис1). Необходимо найти распределения поля температур и тепловых потоков по толщине пакета, а также определить напряженно-деформированное состояние от действия температурного поля.

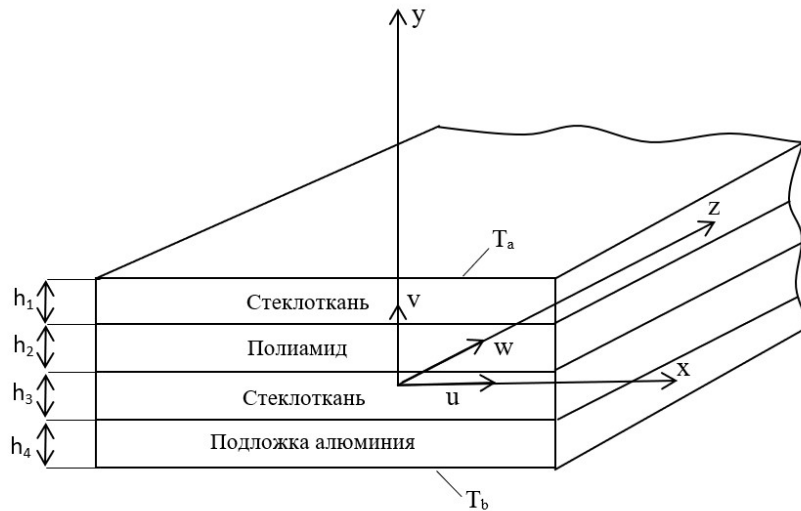


Рис.1 Общий вид слоистого стержня.  $h_1, h_2, h_3, h_4$  – толщина покрытия и подложки, соответственно.

Для определения поля температур в многослойной конструкции рассмотрим нестационарную задачу теплопроводности на основе четырехслойного однородного стержня. На фронтальной поверхности двухслойного стержня действует температура  $T_a$ , а на тыловой задано охлаждение с температурой  $T_b$ .

Запишем математическую постановку задачи для композитного элемента экранно-вакуумной теплоизоляции, образованной несколькими слоями, состоящими из различных материалов под действием температурного поля расположенного на верхней и нижней поверхности слоя. В этом случае следует учитывать контактные условия на границах слоев (равенство напряжений и перемещений).

Нестационарное уравнение теплопроводности в этом случае будет иметь вид:

$$\frac{\partial T(t, x, y, z)}{\partial t} - a^2 \nabla^2 T(t, x, y, z) = 0 \quad (1)$$

Где  $T(t, x, y, z)$  – температура,  $t, x, y, z$  – время и система декартовых координат соответственно,  $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа,  $a$  – коэффициент теплового расширения материала.

Введем безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= \frac{c_1}{\chi} \frac{\lambda + 2\mu}{\beta T_0} u; \quad \bar{x} = \frac{c}{a^2} x; \quad \bar{y} = \frac{c}{a^2} y; \\ \bar{z} &= \frac{c}{a^2} z; \quad \tau = \frac{c^2}{a^2} t; \quad \bar{T} = \frac{T(t, x, y, z)}{T_0}, \end{aligned} \quad (2)$$

В этих выражениях  $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$   $\mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – параметры Ламе,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha$  – коэффициент линейного расширения материала,  $G$  – модуль сдвига,  $c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$  – скорость распространения волн расширения в упругой среде,  $T_0$  – характерное значение температуры.

Тогда уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\partial T(\tau, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}{\partial \tau} - \nabla^2 T(\tau, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = 0 \quad (3)$$

Предположим, что данная конструкция находится в плоском деформированном состоянии. Перемещения  $u(t, x, y, z)$ ,  $v(t, x, y, z)$  предполагаются не зависящими от координаты  $z$ , тогда как  $w(t, x, y, z)$  не зависит от координат  $x, y$  а его зависимость от  $z$  может быть только линейна, тогда компоненты вектора смещений будут иметь вид:

$$u = u(x, y), v = v(x, y), w = w_0 + \zeta z \quad (4)$$

$\zeta$  – деформация в направлении оси  $z$ .

Используя безразмерные перемещения представим в виде:

$$\bar{u} = u(x, y) \frac{c}{a^2}, \bar{v} = v(x, y) \frac{c}{a^2}, \bar{w} = w_0 \frac{c}{a^2} + \zeta z \frac{c}{a^2} \quad (5)$$

Следствием этих предположений является отсутствие касательных напряжений  $\tau_{zx}$ ,

$$\tau_{yz} \tau_{zx} = G \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0 \quad \tau_{yz} = G \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = 0 \quad (6)$$

Ненулевые компоненты тензора напряжений также не зависят от координаты  $z$ .

Тогда обобщенный закон Гука можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= (2\mu + \lambda) \varepsilon_x + \lambda (\varepsilon_y + \varepsilon_z) - 3K\alpha T \\ \sigma_y &= (2\mu + \lambda) \varepsilon_y + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_z) - 3K\alpha T \\ \sigma_z &= (2\mu + \lambda) \varepsilon_z + \lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y) - 3K\alpha T \\ \tau_{xy} &= G\varepsilon_{xy}, \tau_{xz} = G\varepsilon_{xz}, \tau_{yz} = G\varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (7)$$

Введем безразмерные параметры напряжений

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \frac{\sigma_x}{\lambda + 2\mu} \quad \bar{\sigma}_y = \frac{\sigma_y}{\lambda + 2\mu} \quad \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{\lambda + 2\mu} \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{G}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{xy}, \bar{\tau}_{xz} = \frac{G}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{xz}, \bar{\tau}_{yz} = \frac{G}{2\mu + \lambda} \varepsilon_{yz} \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда с учетом (8) получаем:



$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}_x &= \varepsilon_x + \gamma(\varepsilon_y + \varepsilon_z) - \beta\bar{T} \\
\bar{\sigma}_y &= \varepsilon_y + \gamma(\varepsilon_x + \varepsilon_z) - \beta\bar{T} \\
\bar{\sigma}_z &= \varepsilon_z + \gamma(\varepsilon_x + \varepsilon_y) - \beta\bar{T} \\
\bar{\tau}_{xy} &= \gamma\varepsilon_{xy}, \bar{\tau}_{xz} = \gamma\varepsilon_{xz}, \bar{\tau}_{yz} = \gamma\varepsilon_{yz}
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь  $\beta = \frac{3K\alpha T_0}{2\mu + \lambda} = \frac{3(2\mu + 3\lambda)\alpha T_0}{2\mu + \lambda}$   $\gamma = \frac{\lambda}{2\mu + \lambda} = \frac{\nu}{1 - \nu}$ , здесь и далее черточки над

безразмерными функциями в (5,9) опускаем

Здесь  $K = 2\mu + 3\lambda$ ,  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  - нормальные напряжения в направлении соответствующих осей,  $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$  - касательные напряжения.

Ненулевые деформации в (9) определяются соотношениями Коши:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \zeta \tag{10}$$

Плоская деформация реализуется в призматическом теле, теоретически бесконечной длины, нагруженном поверхностными и объемными силами, перпендикулярными оси  $z$ , интенсивность которых не зависит от  $z$ . Тогда все поперечные сечения тела находятся в одинаковых условиях, чем оправдывается задание перемещений в форме (4). Приближенно плоская деформация осуществляется в удаленной от торцов средней части тела конечного протяжения по оси  $z$ .

Уравнения статики при реализации плоской деформации при отсутствии массовых сил будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{11}$$

Краевые условия на контуре поперечного сечения тела будут иметь вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y &= F_x \\ \sigma_y n_y + \tau_{xy} n_x &= F_y\end{aligned}\tag{12}$$

Начальные условия предполагаются однородными.

Здесь  $K_x, K_y, F_x, F_y$  – объемные силы и поверхностные силы в направлениях осей  $x, y$  соответственно,  $n_x, n_y$  – внешние нормали,  $\rho$  – плотность.

Используя безразмерные параметры (5,8) из (11) при отсутствии массовых сил получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x(\tau, y)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u(\tau, y)}{\partial \tau^2} \\ \frac{\partial \sigma_y(\tau, y)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 v(\tau, y)}{\partial \tau^2}\end{aligned}\tag{13}$$

Также естественно предположить что вся композитная структура деформируется в направлении оси  $x$  как одно целое (деформации  $\varepsilon_x^i$  в каждом слое одинаковы и постоянны), и, по сути, в рассматриваемой постановке задачи предполагается справедливость модели Фойхта (параллельного расположения фаз) в направлении плоскости слоя и отсутствуют деформации сдвига. При этом естественно

предполагаем, что все компоненты напряженно-деформированного состояния зависят лишь от одной координаты  $y$ , тогда соотношения Коши (10) будут:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \frac{\partial u(\tau, y)}{\partial x} = 0 \quad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u(\tau, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial x} \right] = 0 \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \zeta \end{aligned} \quad (14)$$

С учетом принятых допущений (4,6,10) математическая постановка задачи для  $i$  слоя будет иметь вид:

-уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial T_i(\tau, y)}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 T_i(\tau, y)}{\partial y^2} = 0 \quad (15)$$

-напряжения (9) в  $i$  слое определяются с учетом соотношений (14):

$$\begin{aligned} \sigma_x^i(\tau, y) &= \gamma \left[ \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} + \zeta \right] - \beta T_i(\tau, y) \\ \sigma_y^i(\tau, y) &= \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} + \gamma \zeta - \beta T_i(\tau, y) \\ \sigma_z^i(\tau, y) &= \zeta + \gamma \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} - \beta T_i(\tau, y) \\ \tau_{xy}(\tau, y) &= \tau_{xz}(\tau, y) = \tau_{yz}(\tau, y) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Уравнения статики при реализации плоской деформации для  $i$  слоя при отсутствии объемных и поверхностных сил будут иметь вид:

$$\frac{\partial \sigma_y^i(\tau, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 v_i(\tau, y)}{\partial \tau^2} \quad (17)$$

Начальные условия для системы уравнений (15-17) предполагаются однородными, краевые условия будут иметь вид:

Краевые условия на стыках для  $i$  слоя имеют вид

$$\begin{aligned} T_i(\tau, y) \Big|_{y=y_i} &= T_{i+1}(\tau, y) \Big|_{y=y_i} \quad \frac{\partial T_i(\tau, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_i} = \tilde{\beta}_i \frac{\partial T_{i+1}(\tau, y)}{\partial y} \Big|_{y=y_i} \\ v_i(\tau, y) \Big|_{y=y_i} &= v_{i+1}(\tau, y) \Big|_{y=y_i} \quad \sigma_y^i(\tau, y) \Big|_{y=y_i} = \sigma_y^{i+1}(\tau, y) \Big|_{y=y_i} \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь  $\tilde{\beta} = \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i}$  где  $\lambda_i$  – теплопроводность  $i$ -го слоя

Краевые условия на границе слоев имеют вид

$$\begin{aligned} T_1(\tau, y) \Big|_{y=0} &= T_a \quad v_1(\tau, y) \Big|_{y=0} = 0 \\ T_1(\tau, y) \Big|_{y=h} &= T_b \quad \sigma_y^i(\tau, y) = \frac{\partial v(\tau, y)}{\partial y} + \gamma \zeta - \beta T_i(\tau, y) \Big|_{y=\bar{h}} = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Где  $\bar{h} = \frac{c}{a^2} h$  – безразмерный параметр толщины,  $\bar{T}_a = \frac{T_a}{T_0}$ ,  $\bar{T}_b = \frac{T_b}{T_0}$  –

безразмерная температура на границе слоя.

В постановке задачи присутствуют дополнительные константы в каждом слое, которые по своему физическому смыслу являются деформациями в направлении оси  $x$  из которых образована композитная слоистая структура. Эти константы следует определять из интегрального условия равновесия слоя:

$$\sum_{i=1}^N \int_{y_i}^{y_{i+1}} \sigma_x^i(\tau, y) dy = 0, \quad (20)$$

Таким образом, система уравнений (15-17) с краевыми условиями (18-19) при однородных начальных условиях представляет собой математическую постановку задачи для определения температурного поля и напряженно-деформированного состояния в современных элементах экранно-вакуумная теплоизоляция космического аппарата, состоящих из теплоизолирующих слоев.

## **2. Определение напряженно-деформированного состояния для элемента экранно-вакуумной теплоизоляции.**

Для решения поставленной задачи воспользуемся уравнением теплопроводности (15) для  $i$  слоя. С учетом принятых допущений напряжения в  $i$  слое вычисляются по формулам (16). Уравнения статики принимаем в виде (17).

Начальные условия предполагаются однородными. Краевые условия на стыках для  $i$  слоя имеют вид (18-19). Дополнительные константы в каждом слое определяются из соотношений (20). Используя преобразование Лапласа по времени получаем обыкновенные дифференциальные уравнения относительно трансформант  $T_i^L(s, y)$  где  $s$  – параметр преобразования Лапласа,  $i=1..4$  – номер слоя:

$$\frac{d^2 T_i^L(s, y)}{dy^2} - s T_i^L(s, y) = 0 \quad (21)$$

Решение этого уравнения будет иметь вид:

$$T_i^L(s, y) = c_{i1} e^{\sqrt{s}y} + c_{i2} e^{-\sqrt{s}y} \quad (22)$$

Константы интегрирования в (22) определяются из следующих граничных условий, выраженных через соответствующие трансформанты:

- 1) на фронтальной и тыловой поверхностях тела заданы температуры:

$$T_1^L(s, y)\Big|_{y=0} = \frac{T_a}{s} \quad T_4^L(s, y)\Big|_{y=h_1+h_2+h_3+h_4} = \frac{T_b}{s} \quad (23)$$

2) Трансформанты температуры и тепловых потоков в месте соединения двух слоев должны быть одинаковы:

$$\begin{aligned} T_1^L(s, y)\Big|_{y=h_1} &= T_2^L(s, y)\Big|_{y=h_1}, \quad \frac{dT_1^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1} = \tilde{\beta}_1 \frac{dT_2^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1} \\ T_2^L(s, y)\Big|_{y=h_1+h_2} &= T_3^L(s, y)\Big|_{y=h_1+h_2}, \quad \frac{dT_2^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1+h_2} = \tilde{\beta}_2 \frac{dT_3^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1+h_2} \\ T_3^L(s, y)\Big|_{y=h_1+h_2+h_3} &= T_4^L(s, y)\Big|_{y=h_1+h_2+h_3}, \quad \frac{dT_3^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1+h_2+h_3} = \tilde{\beta}_3 \frac{dT_4^L(s, y)}{dy}\Big|_{y=h_1+h_2+h_3} \end{aligned} \quad (24)$$

Краевые условия (23-24) позволяют определить постоянные интегрирования в (22).

Подставляя найденные константы в уравнение (22), получаем трансформанты распределения поля температур внутри каждого слоя стержня внешний вид которых будет:

$$\begin{aligned} T_1^L(s, y, n) &= \\ &= \left[ T_a \sum_{i=0}^6 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^1(y)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^1(y)\sqrt{s}}}{s} + T_b g_7 \frac{e^{-\gamma_-^1(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_+^1(y)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right] \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} T_2^L(s, y, n) &= \left\{ 2T_a \sum_{i=1}^4 g_i \frac{e^{-2\gamma_i^2(y)\sqrt{s}} - e^{-2\bar{\gamma}_i^2(y)\sqrt{s}}}{s} \right. \\ &+ 4T_b \left[ g_5^2 \frac{e^{-\gamma_-^2(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_+^2(y)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} + g_6^2 \frac{e^{-\gamma_6^2(y)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_6^2(y)\sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right] \left. \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$T_3^L(s, y, n) = 2 \left[ 2T_a \sum_{i=1}^2 g_i^3 \frac{\left( e^{-2\gamma_i^3(y)\sqrt{s}} + e^{-2\bar{\gamma}_i^3(y)\sqrt{s}} \right)}{s} + \right. \\ \left. + T_b \sum_{i=3}^6 g_i^3 \frac{\left( e^{-\gamma_i^3(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_i^3(y)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}} \right] \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n y \quad (27)$$

$$T_4^L(s, y, n) = \\ = \left[ 4T_a g_8^4 \frac{\left( e^{-\gamma_8^4(y)\sqrt{s}} + e^{-\bar{\gamma}_8^4(y)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}} + T_b \sum_{i=0}^7 g_i^4 \frac{\left( e^{-\gamma_i^4(y)\sqrt{s}} - e^{-\bar{\gamma}_i^4(y)\sqrt{s}} \right)}{s\sqrt{s}} \right] \sum_0^\infty \left( \sum_{k=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i\sqrt{s}} \right)^n$$

(28)

В этих выражениях

$\gamma_{1i}(y), \bar{\gamma}_{1i}(y), \gamma_{1b}(y), \tilde{\gamma}_{1b}(y), \dots, \gamma_{4i}(y), \bar{\gamma}_{4i}(y), \gamma_{4b}(y), \tilde{\gamma}_{4b}(y)$  – некоторые коэффициенты, зависящие от толщины слоев и координаты  $y$ . Коэффициенты  $g_i$  зависят от соотношений параметров  $\lambda$ . Оригиналы нулевого приближения ( $n=0$ ) трансформант (25-28) достаточно просто получить, используя соответствующие таблицы [14] и свойства преобразования Лапласа:

$$T_1(\tau, y, 0) = 2T_a \sum_{i=0}^6 g_i \left[ -\Phi_1^3(2\gamma_i^1, \tau) + \Phi_1^3(2\bar{\gamma}_i^1, \tau) \right] + T_b g_7 \left[ \Phi_1(\gamma_-^1, \tau) + \Phi_1(\bar{\gamma}_+^1(y), \tau) \right] \quad (29)$$

$$T_2(\tau, x, 0) = 4T_a \sum_{i=1}^4 g_i \left[ \Phi_1^3(2\gamma_i^2, \tau) + \Phi_1^3(\bar{\gamma}_i^2, \tau) \right] + 4T_b \left\{ g_5^2 \left[ \Phi_1(\gamma_-^2, \tau) + \Phi_1(\bar{\gamma}_+^2, \tau) \right] + \right. \\ \left. + g_6^2 \left[ \Phi_1(\gamma_6^2, \tau) + \Phi_2(\bar{\gamma}_6^2, \tau) \right] \right\} \quad (30)$$

$$T_3(\tau, x, 0) = -8T_a \sum_{i=1}^2 g_i \left[ \Phi_1^3(2\gamma_i^3, \tau) + \Phi_1^3(2\bar{\gamma}_i^3, \tau) \right] - 2T_b \sum_{i=3}^6 g_i \left[ \Phi_1(\gamma_i^3, \tau) + \Phi_1(\bar{\gamma}_i^3, \tau) \right] \quad (31)$$

$$T_4(\tau, x, 0) = -4T_a g_8^4 [\Phi_1(\gamma_8^4, \tau t) + \Phi_1(\bar{\gamma}_8^4(y), \tau)] + T_b \sum_{i=0}^7 g_i^4 [\Phi_1(\gamma_i^4, \tau) + \Phi_1(\bar{\gamma}_i^4(x), \tau)] \quad (32)$$

В этих выражениях

$$\Phi_1(x, t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \Phi_1^2(x, t) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - x \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right)$$

$$\Phi_1^3(x, t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{\pi t}}$$

Где  $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$  – дополнительная функция ошибок

Оригиналы выражений (25-28) для  $n \geq 1$  определяются аналогичным образом и ввиду громоздкости здесь не приводятся.

Для определения перемещений и напряжений в слоях теплоизоляции воспользуемся уравнением (17) и применим к нему преобразование Лапласа по времени. Это уравнение в трансформантах будет иметь вид:

$$\frac{d\sigma_{yi}^L(s, y)}{dy} = s^2 v_i^L(s, y) \quad (33)$$

Уравнение (33) с учетом выражения  $\sigma_y^i(\tau, y)$  в (16) приводится к

дифференциальному уравнению относительно перемещения  $v_i^L(s, y)$

Тогда трансформанту перемещений для  $i$  слоя получаем в виде:

$$v_i^L(s, y) = \bar{C}_{1i} e^{sy} + \bar{C}_{2i} e^{-sy} - \beta \frac{T_i^L(s, y, n)}{s-1} \quad (34)$$



Трансформанты нормального напряжения  $\sigma_{yi}^L(s, y)$  получаем в виде:

$$\sigma_{yi}^L(s, y) = s(\bar{C}_{1i}e^{sy} - \bar{C}_{2i}e^{-sy}) + \beta T_i^L(s, y, n) \frac{2-s}{s-1} \quad (35)$$

Трансформанты краевых условий на стыках для  $i$  слоя имеют вид

$$v_i^L(s, y) \Big|_{y=h_i} = v_{i+1}^L(s, y) \Big|_{y=h_{i+1}} \quad \sigma_{yi}^L(s, y) \Big|_{y=h_i} = \sigma_{yi+1}^L(s, y) \Big|_{y=h_{i+1}} \quad (36)$$

Краевые условия на границе слоев имеют вид

$$v_1^L(s, y) \Big|_{y=0} = 0 \quad \sigma_{y4}^L(s, y) \Big|_{y=h} = 0 \quad (37)$$

Подставляя соотношения (34-35) в краевые условия (36-37) получаем систему алгебраических уравнений относительно 8 констант  $\bar{C}_{1i}, \bar{C}_{2i}$ . Решая эту систему уравнений, получаем константы интегрирования. Тогда трансформанты перемещений и напряжений в слоях можно определить по формулам, следующую структуру:

$$\begin{aligned} v_i^L(s, y) &= F_i \left( f(s), e^{-s\lambda_m}, \frac{e^{-\alpha_0^i \sqrt{s}}}{s}, \frac{e^{-\alpha_1^i \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \\ \sigma_{yi}^L(s, y) &= \hat{F}_1 \left( \hat{f}(s), e^{-s\lambda_m}, \frac{e^{-\alpha_0^i \sqrt{s}}}{s}, \frac{e^{-\alpha_1^i \sqrt{s}}}{s\sqrt{s}} \right) \\ &\sum_{k=0}^{\infty} \left[ e^{-2s(h_1+h_2)} - e^{-2sh_1} + e^{-2sh_2} + 2e^{-4s(h_1+h_2)} \right]^k \left( \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{13} \tilde{g}_i e^{-2\tilde{\gamma}_i \sqrt{s}} \right)^n \end{aligned} \quad (38)$$

В этих выражениях

$$m = 1..15$$

$$\lambda_1 = h1 - y \quad \lambda_2 = h1 + h2 + 2h3 - y \quad \lambda_3 = 3h1 + 2h2 + 2h3 - y$$

$$\lambda_4 = h1 + h2 + h3 - y \quad \lambda_5 = 2h1 - y \quad \lambda_6 = 2(h1 + h2) - y \quad \lambda_7 = 3h1 + 2h2 + h3 - y$$

$$\lambda_8 = y \quad \lambda_9 = 2h2 + y \quad \lambda_{10} = h1 + 2h4 + y \quad \lambda_{11} = 3h1 + 2h2 + 2h3 + y \quad \lambda_{12} = 2h1 + 2h2 + y$$

$$\lambda_{13} = 2h1 + 4h2 + 2h3 + y \quad \lambda_{14} = h1 + 4h2 + 2h3 + y \quad \lambda_{15} = 3h1 + 4h2 + 2h3 + y$$

Оригиналы трансформант перемещений и напряжений достаточно просто получаются, используя соответствующие таблицы [14] и свойства преобразования Лапласа для нулевого  $n=0 \quad k=0$ .

$$\begin{aligned} v_i(\tau, y) = & \\ = & \beta \left\{ T_a \left[ Q_i(\tau, y, \lambda_m, \alpha_k^{11}) + Q_i(\tau, y, \lambda_m, \alpha_k^{21}) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{e^{t+\alpha_{10}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) + e^{t-\alpha_{10}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\tau}\right)}{2} - \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{\tau}}\right) \right] + \right. \\ & + T_b \left[ Q_i(\tau, y, \lambda_m, \alpha_k^{11}) + Q_i(\tau, y, \lambda_m, \alpha_k^{21}) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{e^{t+\alpha_{11}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{11}}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\right) + e^{t-\alpha_{11}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{11}}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)}{2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{\alpha_{11}^2}{4t}} - \alpha_{11} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{11}}{2\sqrt{t}}\right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (39)$$

Оригиналы перемещений по слоям определяются аналогичным образом

Функции  $Q_i(t, y, \lambda_k, \alpha)$  в выражении имеют вид:

$$Q_1(t, y, \lambda, a) = \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{t-\lambda} + \frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} - \sqrt{t-\lambda}\right)}{4} - \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right)$$

$$Q_2(t, y, \lambda, a) = \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} + \sqrt{t-\lambda}\right) + e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} - \sqrt{t-\lambda}\right)}{4} + \frac{\alpha}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - \sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{4(t-\lambda)}}$$

$$Q_3(t, y, \lambda, a) = -\frac{1}{2\gamma} H(t-\lambda-\alpha) [2(t-\lambda-\alpha) + 1 - e^{t-\lambda-\alpha}]$$

$$Q_4(t, y, \lambda, a) = -\frac{1}{2\gamma} H(t-\lambda-\alpha) [e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erf}(t-\lambda-\alpha) - \frac{2}{3} \sqrt{\frac{t-\lambda-\alpha}{\pi}} [3 + 4(t-\lambda-\alpha)]]$$

$$Q_5(t, y, \lambda, a) = -(1+\gamma) \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} + \sqrt{t-\lambda}\right) + e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} - \sqrt{t-\lambda}\right)}{4\gamma} - \frac{1}{\gamma} \operatorname{erfc} \frac{\alpha}{2\sqrt{t}}$$

$$\begin{aligned}
Q_6(t, y, \lambda, \alpha) &= \\
&= \frac{\gamma+1}{2\gamma} \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} + \sqrt{t-\lambda}\right) + e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} - \sqrt{t-\lambda}\right)}{2} - \\
&- \frac{1}{2\gamma} \left[ 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) - 4 \sqrt{\frac{t-\lambda}{\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{4(t-\lambda)}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{y1}(t, y) &= \\
&= \beta \left\{ T_a \left[ \hat{Q}_i(\tau, y, \lambda_m, \alpha_k^{11}) + \hat{Q}_i(\tau, y, \lambda_m, \alpha_k^{21}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \frac{e^{t+\alpha_{10}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\right) + e^{t-\alpha_{10}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)}{2} - \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{10}}{2\sqrt{t}}\right) \right] + \right. \\
&+ T_b \left[ \hat{Q}_i(\tau, y, \lambda_m, \alpha_k^{11}) + \hat{Q}_i(\tau, y, \lambda_m, \alpha_k^{21}) - \right. \\
&\quad \left. \frac{e^{t+\alpha_{11}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{11}}{2\sqrt{t}} + \sqrt{t}\right) + e^{t-\alpha_{11}} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{11}}{2\sqrt{t}} - \sqrt{t}\right)}{2} - \right. \\
&\quad \left. \left. - 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-\frac{\alpha_{11}^2}{4t}} - \alpha_{11} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha_{11}}{2\sqrt{t}}\right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

Напряжения по слоям будут

Функции  $\hat{Q}_i(t, y, \lambda_k, \alpha)$   $i = 1 \dots 4$  в выражении имеют вид:

$$\hat{Q}_1(t, y, \lambda, a) = \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\sqrt{t-\lambda} + \frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}}\right) + e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} - \sqrt{t-\lambda}\right)}{4}$$

$$\hat{Q}_2(t, y, \lambda, a) = \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} - \sqrt{t-\lambda}\right) - e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} + \sqrt{t-\lambda}\right)}{4}$$

$$\hat{Q}_3(t, y, \lambda, a) = -\frac{1}{2\gamma} H(t - \lambda - \alpha) (e^{t-\lambda-\alpha} - 2)$$

$$\hat{Q}_4(t, y, \lambda, a) = \frac{1}{2\gamma} H(t - \lambda - \alpha) \left[ e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erf}(t - \lambda - \alpha) - 4\sqrt{\frac{t - \lambda - \alpha}{\pi}} \right]$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_5(t, y, \lambda, a) &= \\ &= (1 + \gamma) \frac{e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} + \sqrt{t-\lambda}\right) + e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} - \sqrt{t-\lambda}\right)}{4\gamma} - \\ &+ \frac{(\gamma - 1)\alpha}{\gamma\sqrt{\pi}(t - \lambda)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{\alpha^2}{4(t-\lambda)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{Q}_6(t, y, \lambda, a) &= \\ &= \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{e^{t-\lambda-\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} - \sqrt{t-\lambda}\right) - e^{t-\lambda+\alpha} \operatorname{erfc}\left(\frac{\alpha}{2\sqrt{t-\lambda}} + \sqrt{t-\lambda}\right)}{2} + \\ &+ \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma\sqrt{\pi}(t - \lambda)} e^{-\frac{\alpha^2}{4(t-\lambda)}} \end{aligned}$$

Ниже приводятся результаты расчетов, проведенные по формулам.

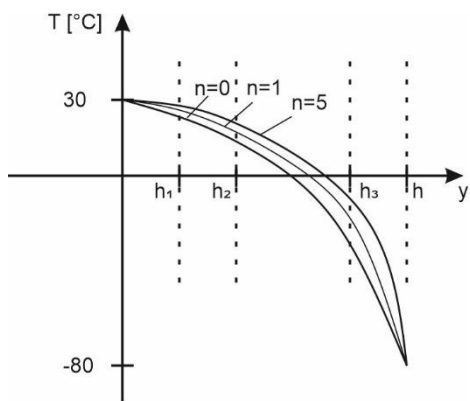


Рис 2. Зависимость распределения поля температур по толщине пакета при различных значениях параметра  $n$ .

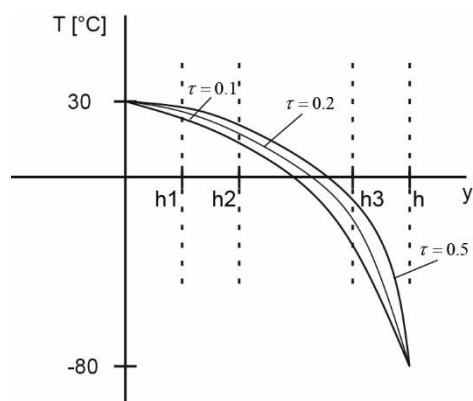


Рис 3. Распределение поля температур по толщине пакета в зависимости от времени

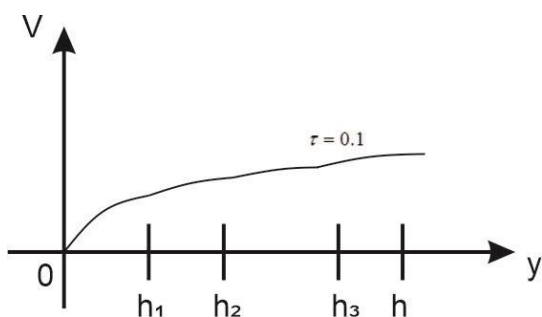


Рис 4. Зависимость перемещений по толщине пакета.

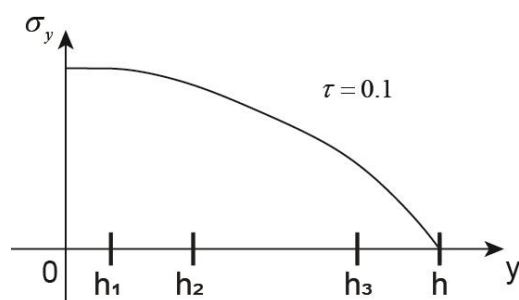


Рис 5. Зависимость напряжений по толщине пакета.

### Заключение

Приводятся зависимости распределения искомых параметров в зависимости толщин пакета и времени.

На рис 2 показаны зависимости распределения поля температур по толщине пакета при различных значениях параметра  $n$ . По графику видна хорошая сходимость решения уже при  $n=5$ . Рис 3 иллюстрирует распределения поля температур по толщине пакета в зависимости от времени.

Зависимости перемещений и напряжений по толщине пакета в различные моменты времени приведены на рис 4-5 соответственно.

### **Список источников**

1. Залетаев В.М. Собственное излучения Земли на частично экранируемые от нее элементы космических аппаратов // Космические исследования. 1970. Т. VIII. № 4. С. 636–639.
2. Залетаев В.М., Капинос Ю.В., Сургучев О.В. Расчет теплообмена космического аппарата. - М.: Машиностроение, 1979. С. 46-78.
3. Зигель Р., Хауэлл Дж. Теплообмен излучением / Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 234 с.
4. Кобранов Г.П., Цветков А.П., Белов А.И., Сухнев В.А. Внешний теплообмен космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1977. - 104 с.
5. Козлов Л.В., Нусинов М.Д. и др. Моделирование тепловых режимов космического аппарата и окружающей его среды. - М.: Машиностроение, 1971. - 380 с.
6. Колесников А.В., Сербин В.И. Моделирование условий внешнего теплообмена космических аппаратов. - М.: Информация –XXI век, 1997. - 170 с.
7. Малоземов В.В. Тепловой режим космических аппаратов. - М.: Машиностроение, 1980. – 260 с.
8. Кристанс Р.М. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.
9. Лурье А.И. Теория упругости. - М.: Наука, 1970. – 939 с.

10. Aifantis E.C. The physics of plastic deformation // International Journal of Plasticity, 1987, vol. 3, pp. 211-247. DOI: 10.1016/0749-6419(87)90021-0
11. Shackelford J.F. Introduction to Material Science for Engineers, New Jersey, Prentice Hall, 2000, 877 p.
12. Vardoulakis I., Georgiadis H.G. Sh surface waves in a homogeneous gradient-elastic half-space with surface energy // Journal of Elasticity, 1997, vol. 47, pp. 147–165.
13. S. Li, I. Miskioglu, B.S. Altan. Solution to line loading of a semi-infinite solid in gradient elasticity // International Journal of Solids and Structures, 2004, vol. 41, pp. 3395–3410. DOI:[10.1016/j.ijsolstr.2004.02.010](https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2004.02.010)
14. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление по двум переменным и его приложения. – М.: Физматлит, 1958. – 178 с.
15. Хатунцева О.Н. О нахождении обобщенного аналитического решения плоской задачи Куэтта для турбулентного режима течения жидкости // Труды МАИ. № 2022. № 122. [URL:https://trudymai.ru/published.php?ID=164194](https://trudymai.ru/published.php?ID=164194). DOI: [10.34759/trd-2022-122-07](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-07)
16. Хатунцева О.Н. Обобщенное аналитическое решение плоской задачи Пуазейля для турбулентного режима течения несжимаемой жидкости // Труды МАИ. 2022. № 123. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=165492>. DOI: [10.34759/trd-2022-123-08](https://doi.org/10.34759/trd-2022-123-08)
17. Городнов А.О., Лаптев И.В. Влияние теплоемкости стенки на рост давления и температурное расслоение при тепловой конвекции паров водорода в вертикальной цилиндрической емкости // Труды МАИ. 2021. № 116. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=121008>. DOI: [10.34759/trd-2021-116-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-116-02)



18. Лурье С.А., Шрамко К.К. Об условии корректности в краевых задачах градиентных теорий упругости // Труды МАИ. 2021. № 120. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=161414>. DOI: [10.34759/trd-2021-120-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-02)
19. Бендерский Б.Я., Чернова А.А. Теплообмен в камере сгорания ракетного двигателя при изменении геометрии канально-щелевого заряда твердого топлива // Труды МАИ. 2020. № 111. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=115121>. DOI: [10.34759/trd-2020-111-5](https://doi.org/10.34759/trd-2020-111-5)
20. Пронина П.Ф., Тушавина О.В., Шумская С.А., Егорова М.С. Аналитическое моделирование теплопереноса в элементах ЭВТИ // Тепловые процессы в технике. 2022. Т. 14. № 8. С. 348-353.

## References

1. Zaletaev V.M. *Kosmicheskie issledovaniya*, 1970, vol. VIII, no. 4, pp. 636–639.
2. Zaletaev V.M., Kapinos Yu.V., Surguchev O.V. *Raschet teploobmena kosmicheskogo apparata* (Calculation of spacecraft heat transfer), Moscow, Mashinostroenie, 1979, pp. 46-78.
3. Zigel' R., Khauell Dzh. *Teploobmen izlucheniem* (Radiant heat transfer), Moscow, Mir, 1975, 234 p.
4. Kobranov G.P., Tsvetkov A.P., Belov A.I., Sukhnev V.A. *Vneshnii teploobmen kosmicheskikh apparatov* (External heat exchange of spacecraft), Moscow, Mashinostroenie, 1977, 104 p.
5. Kozlov L.V., Nusinov M.D. et al. *Modelirovanie teplovykh rezhimov kosmicheskogo apparata i okruzhayushchei ego sredy* (Simulation of thermal regimes of the spacecraft and its environment), Moscow, Mashinostroenie, 1971, 380 p.

6. Kolesnikov A.V., Serbin V.I. *Modelirovanie uslovii vneshnego teploobmena kosmicheskikh apparatov* (Simulation of external heat exchange conditions of spacecraft), Moscow, Informatsiya –XXI vek, 1997, 170 p.
7. Malozemov V.V. *Teplovoi rezhim kosmicheskikh apparatov* (Thermal regime of spacecraft), Moscow, Mashinostroenie, 1980, 260 p.
8. Kristans R.M. *Vvedenie v mekhaniku kompozitov* (Introduction to Mechanics of Composites), Moscow, Mir, 1982, 334 p.
9. Lur'e A.I. *Teoriya uprugosti* (Theory of Elasticity), Moscow, Nauka, 1970, 939 p.
10. Aifantis E.C. The physics of plastic deformation, *International Journal of Plasticity*, 1987, vol. 3, pp. 211-247. DOI: 10.1016/0749-6419(87)90021-0
11. Shackelford J.F. *Introduction to Material Science for Engineers*, New Jersey, Prentice Hall, 2000, 877 p.
12. Vardoulakis I., Georgiadis H.G. Sh surface waves in a homogeneous gradient-elastic half-space with surface energy, *Journal of Elasticity*, 1997, vol. 47, pp. 147–165.
13. S. Li, I. Miskioglu, B.S. Altan. Solution to line loading of a semi-infinite solid in gradient elasticity, *International Journal of Solids and Structures*, 2004, vol. 41, pp. 3395–3410. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2004.02.010
14. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Operatsionnoe ischislenie po dvum peremennym i ego prilozheniya* (Two-Variable Operational Calculus and its Applications), Moscow, Fizmatlit, 1958, 178 p.
15. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, no. 2022, no. 122.  
[URL:https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164194](https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164194). DOI: 10.34759/trd-2022-122-07

16. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2022, no. 123. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=165492>. DOI: 10.34759/trd-2022-123-08
17. Gorodnov A.O., Laptev I.V. *Trudy MAI*, 2021, no. 116. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=121008>. DOI: 10.34759/trd-2021-116-02
18. Lur'e S.A., Shramko K.K. *Trudy MAI*, 2021, no. 120. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=161414>. DOI: 10.34759/trd-2021-120-02
19. Benderskii B.Ya., Chernova A.A. *Trudy MAI*, 2020, no. 111. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=115121>. DOI: 10.34759/trd-2020-111-5
20. Pronina P.F., Tushavina O.V., Shumskaya S.A., Egorova M.S. *Teplovye protsessy v tekhnike*, 2022, vol. 14, no. 8, pp. 348-353.

Статья поступила в редакцию 14.05.2023

Одобрена после рецензирования 23.05.2023

Принята к публикации 27.06.2023

The article was submitted on 14.05.2023; approved after reviewing on 23.05.2023; accepted for publication on 27.06.2023