УДК: 539.3

Нестационарные поверхностные функции влияния для упруго-пористой полуплоскости

Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В.

Аннотация

Рассматривается плоская нестационарная задача о распространении поверхностных возмущений от границы полуплоскости, заполнненой упруго-пористой средой. Состоящей из двух фаз: деформируемый скелет и расположенная сжимаемая жидкость в порах. Используется модель Био. Для решения применяются преобразования Фурье по пространственной координате и Лапласа по времени. Оригиналы находятся аналитически в частном случае одномерной задачи и на границе полуплоскости. При этом используется алгоритм совместного обращения преобразований, основанный на построении аналитических представлений изображений.

Ключевые слова

упруго-пористая среда; модель Био; полуплоскость; поверхностные функции влияния; интегральные преобразования Лапласа и Фурье.

Введение

Одной из неклассических моделей сплошных сред является упруго-пористая среда, для которой часто используется модель Био [1]. В монографии [2] рассмотрены различные нестационарные задачи для этой модели. В том числе построены изображения по Лапласу и Фурье поверхностных функций влияния для полупространства. Однако явный вид оригиналов не приводится. Подобные среды рассматриваются и в ряде других работ (см., например, [3,4]). В данной статье аналогично [5] для изотропной упруго-пористой полуплоскости с помощью интегральных преобразований построен явный вид нестационарных поверхностных влияния, соответствующих силовым граничным условиям. Подобные задачи находят применение в различных областях новой техники, в том числе являются составляющими проблемы приземления различных аппаратов авиационной и ракетно-космической техники.

1. Постановка задачи

Движение среды описывается линейными уравнениями модели Био относительно скалярных потенциалов $\varphi_1(x,z,\tau)$, $\varphi_2(x,z,\tau)$ и ненулевой компоненты $\psi(x,z,\tau)$ векторного потенциала перемещений [2] (точками обозначено дифференцирование по времени τ):

$$\Delta\varphi_k = \gamma_k^2\ddot{\varphi}_k \ (k=1,2),\ \Delta\psi = \gamma_3^2\ddot{\psi},\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \tag{1.1}$$

Здесь и далее используется прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, начало которой лежит на границе полуплоскости, а ось Oz направлена в глубь полуплоскости.

Тангенциальные u и U, а также нормальные w и W перемещения скелета и жидкости в порах связаны с потенциалами следующими соотношениями:

$$\begin{gathered} u = \frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z},\ w = \frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x}, \\ U = \frac{\partial(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)}{\partial x} - \frac{\beta_3\partial\psi}{\partial z},\ W = \frac{\partial(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)}{\partial z} + \frac{\beta_3\partial\psi}{\partial x}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Кинематические соотношения для такой среды записываются так (e_{ij} и ε_{ij} - компоненты тензоров деформаций в скелете и в жидкости; указаны только ненулевые величины):

$$\begin{gathered} e_{11} = \frac{\partial u}{\partial x},\ e_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\ e_{33} = \frac{\partial w}{\partial z},\ e = e_{11} + e_{33}, \\ \varepsilon_{11} = \frac{\partial U}{\partial x},\ \varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right),\ \varepsilon_{33} = \frac{\partial W}{\partial z},\ \varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{33}. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Компоненты тензора напряжений σ_{ij} в скелете и напряжения σ в жидкости связаны с тензорами деформаций физическими соотношениями [2]:

$$\begin{gathered} \sigma_{11} = 2\eta_1 e_{11} + \sigma_{22}, \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0, \sigma_{13} = 2\eta_1 e_{13}, \\ \sigma_{22} = \eta_2 e + \eta_3\varepsilon, \sigma_{33} = 2\eta_1 e_{33} + \sigma_{22}, \sigma = \eta_3 e + \eta_4\varepsilon. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Предполагаем, что на бесконечности возмущения отсутствуют, а на границе полуплоскости заданы напряжения ($\delta(x)$ - дельта-функция Дирака):

$$u\big|_{z=0} = 0,\ \ \sigma_{33}\big|_{z=0} = \sigma\big|_{z=0} = \delta(x)\delta(\tau). \tag{1.5}$$

В начальный момент времени возмущения отсутствуют:

$$\varphi_k\big|_{\tau=0} = \psi\big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_k\big|_{\tau=0} = \dot{\psi}\big|_{\tau=0} = 0\ (k=1,2). \tag{1.6}$$

В соотношениях (1.1) – (1.5) и далее используются безразмерные величины (штрихи соответствуют безразмерным величинам; далее они опущены):

$$x' = \frac{x}{L},\ z' = \frac{z}{L},\ u' = \frac{u}{L},\ w' = \frac{w}{L},\ \ U' = \frac{U}{L}, W' = \frac{W}{L},\ \tau = \frac{c_1 t}{L},\ \sigma'_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{H},\ \sigma' = \frac{\sigma}{H},$$

$$\psi' = \frac{\psi}{L^2},\ c_j^2 = \frac{P + Q\beta_j}{\rho_{11} + \rho_{12}\beta_j}, \left(j = 1,2\right),\ c_3^2 = \frac{N}{\rho_{11} + \rho_{12}\beta_3},\ \varphi_k = \frac{\varphi_k}{L^2},\ \gamma_k = \frac{c_1}{c_k}\ \ \left(k = 1,2,3\right),$$

$$\beta_3 = -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}},\ \eta_1 = \frac{N}{H}, \eta_2 = \frac{A}{H}, \eta_3 = \frac{Q}{H}, \eta_4 = \frac{R}{H}, H = P + 2Q + R,\ P = A + 2N.$$

Здесь L - некоторый линейный размер; t - размерное время; c_1 и c_3 - скорости распространения волн растяжения-сжатия и формоизменения в скелете; c_2 - скорость распространения волн в жидкости; A и N - упругие постоянные скелета; R - давление, которое должно быть приложено к жидкости, чтобы заполнить пористый объем (при этом общий объем остается неизменным); Q - величина сцепления между твердыми и жидкими компонентами при деформации; ρ_{11}, ρ_{22} - эффективные массы компонент при их относительном движении; ρ_{12} - коэффициент динамической связи между твёрдым и жидким компонентами; $\beta_j\ \left(j = 1,2\right)$ - безразмерные физические параметры, которые являются корнями уравнения

$$\left(\rho_{22}Q - \rho_{12}P\right)\beta_k^2 + \left(\rho_{22}P - \rho_{11}R\right)\beta_k^2 + \rho_{12}P - \rho_{11}Q = 0.$$

2. Решение в пространстве изображений

К уравнениям (1.1) и граничным условиям (1.5) с учетом начальных условий (1.6) применяем преобразование Лапласа по времени и Фурье по пространственной координате x (индексы «L» и «F» указывают на соответствующие изображения, а s и q - параметры этих преобразований) [6]:

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \varphi_l^{LF}}{\partial z^2} - k_l^2\left(q^2, s^2\right)\varphi_l^{LF} = 0\ \left(l = 1,2\right),\ \frac{\partial^2 \psi^{LF}}{\partial z^2} - k_3^2\left(q^2, s^2\right)\psi^{LF} = 0,\\ k_j\left(q\ \ , s\ \ \right) = \sqrt{q\ \ + \gamma_j^2 s\ \ }\ \left(j = 1,2{,}3\right),\ \mathrm{Re}\sqrt{\bullet} > 0;\end{gathered} \tag{2.1}$$

$$u^{FL}\Big|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{33}^{LF}\Big|_{z=0} = \sigma^{LF}\Big|_{z=0} = 1. \tag{2.2}$$

Общие решение уравнений (2.1) с учетом их ограниченности имеют вид:

$$\varphi_l^{LF} = C_l E_l\left(q,z,s\right)\ \ (l = 1,2),\ \psi^{LF} = C_3 E_3\left(q,z,s\right),\ E_j\left(q,z,s\right) = e^{-k_j\left(q^2,s^2\right)z}\ \ (j = 1,2,3), \tag{2.3}$$

где C_1, C_2 и C_3 - постоянные интегрирования.

Подстановка их в (1.2) - (1.4) приводит к следующим равенствам для изображений перемещений и напряжений на площадке, параллельной граничной плоскости:

$$
\begin{aligned}
&u^{FL}=-iq\left[C_1E_1(q,z,s)+C_2E_2(q,z,s)\right]+C_3k_3\left(q^2,s^2\right)E_3(q,z,s),\\
&w^{FL}=-C_1k_1\left(q^2,s^2\right)E_1(q,z,s)-C_2k_2\left(q^2,s^2\right)E_2(q,z,s),\\
&U^{FL}=-iq\left[C_1\beta_1E_1(q,z,s)+C_2\beta_2E_2(q,z,s)\right]+C_3k_3\left(q^2,s^2\right)\beta_3E_3(q,z,s),\\
&W^{FL}=-C_1\beta_1k_1\left(q^2,s^2\right)E_1(q,z,s)-C_2\beta_2k_2\left(q^2,s^2\right)E_2(q,z,s)-iqC_3\beta_3E_3(q,z,s);
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{12}^{FL}=\eta_1\Big\{-2iq\left[C_1E_1(q,z,s)k_1\left(q^2,s^2\right)+C_2E_2(q,z,s)k_2\left(q^2,s^2\right)\right]\\
&\qquad -k_4\left(q^2,s^2\right)C_3E_3(q,z,s)\Big\},\\
&\sigma_{33}^{FL}=\left(2\eta_1q^2+\xi_1\gamma_1^2s^2\right)C_1E_1(q,z,s)+\left(2\eta_1q^2+\xi_2\gamma_2^2s^2\right)C_2E_2(q,z,s)+\\
&\qquad +2iq\eta_1C_3E_3(q,z,s)k_3\left(q^2,s^2\right),\\
&\sigma^{FL}=\xi_3\gamma_1^2s^2C_1E_1(q,z,s)+\xi_4\gamma_2^2s^2C_2E_2(q,z,s),
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&k_4(q,s)=2q+\gamma_3^2s,\ \xi_1=2\eta_1+\eta_2+\eta_3\beta_1,\ \xi_2=2\eta_1+\eta_2+\eta_3\beta_2,\\
&\xi_3=\eta_3+\eta_4\beta_1,\ \xi_4=\eta_3+\eta_4\beta_2.
\end{aligned}
$$

Подставляя равенства (2.4) и (2.5) в граничные условия (2.2), находим постоянные интегрирования. В результате изображения перемещений и напряжений записываются так:

$$
\begin{aligned}
&u^{FL}=\sum_{j=1}^{3}u_j^{FL}(q,s)E_j(q,z,s),\ w^{FL}=\sum_{j=1}^{2}w_j^{FL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
&U^{FL}=\sum_{j=1}^{3}U_j^{FL}(q,s)E_j(q,z,s),\ W^{FL}=\sum_{j=1}^{2}W_j^{FL}(q,s)E_j(q,z,s),\\
&\sigma_{k3}^{FL}=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{k3j}^{FL}(q,s)E_j(q,z,s)\ (k=1,3),\ \ \sigma^{FL}=\sum_{j=1}^{2}\sigma_j^{FL}(q,s)E_j(q,z,s).
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
&u_l^{FL}=(-1)^{l+1}\frac{iq}{\eta_1\varsigma_1q^2+\varsigma_2\gamma_1^2\gamma_2^2s^2}\left[\eta_1\frac{q^2}{s^2}+(-1)^l\alpha_l\gamma_{3-l}^2\right],U_j^{FL}=\beta_ju_j^{FL}(q,s);\\
&w_l^{FL}=(-1)^{l+1}\frac{iqk_l\left(q^2,s^2\right)}{\eta_1\varsigma_1q^2+\varsigma_2\gamma_1^2\gamma_2^2s^2}\left[\eta_1\frac{q^2}{s^2}+(-1)^l\alpha_l\gamma_{3-l}^2\right],W_l^{FL}=\beta_lw_l^{FL}(q,s);\\
&u_3^{FL}=-\frac{iq\varsigma_3}{\eta_1\varsigma_1q^2+\varsigma_2\gamma_1^2\gamma_2^2s^2};\sigma_{13l}^{FL}=2iq\eta_1w_l^{FL},(j=1,2,3),(l=1,2),\\
&\sigma_{133}^{FL}=-\frac{iqs^2\varsigma_3}{\left(\eta_1\varsigma_1q^2+\varsigma_2\gamma_1^2\gamma_2^2s^2\right)\sqrt{q^2+\gamma_3^2s^2}}\left(2\frac{q^2}{s^2}+\gamma_3^2\right);
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$\sigma_{33l}^{FL} = (-1)^{l+1} \frac{2\eta_1 q^2 + \xi_l \gamma_l^2 s^2}{\eta_1 \varsigma_1 q^2 + \varsigma_2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 s^2} \left[\eta_1 \frac{q^2}{s^2} + (-1)^l \alpha_l \gamma_{3-l}^2 \right], \sigma_{333}^{FL} = -2\eta_1 \varsigma_3 \frac{iq^2}{\eta_1 \varsigma_1 q^2 + \varsigma_2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 s^2};$$

$$\sigma_l^{FL} = (-1)^{l+1} \frac{\xi_{l+2} \gamma_1^2}{\eta_1 \varsigma_1 q^2 + \varsigma_2 \gamma_1^2 \gamma_2^2 s^2} \left[\eta_1 q^2 + (-1)^l \alpha_l \gamma_{3-l}^2 s^2 \right];$$

$$\alpha_1 = \xi_4 - \xi_2, \alpha_2 = \xi_1 - \xi_3,$$

$$\varsigma_1 = \xi_4 \gamma_2^2 - \xi_3 \gamma_1^2, \varsigma_2 = \xi_4 \xi_1 - \xi_2 \xi_3, \varsigma_3 = -\varsigma_1 \alpha_2 + \varsigma_2 \gamma_2^2.$$

Структура изображений в (2.7) такова, что она существенно затрудняет построение оригиналов для двумерной задачи при $z > 0$. Поэтому далее рассмотрим два частных случая.

3. Одномерная задача

В рамках указанной в п. 1 постановки задачи рассматриваем ее одномерный вариант, полагая, что искомые функции зависят только от одной пространственной координаты z. При этом граничные условия (1.5) заменяются следующими (нормальное перемещение скелета распределено равномерно по x):

$$\sigma_{33}\big|_{z=0} = \sigma\big|_{z=0} = \delta(x)\delta(\tau). \qquad (3.1)$$

Решение этой задачи в пространстве изображений может быть получено из формул (2.6), (2.7), в которых необходимо положить $q = 0$. В результате получаем следующие изображения перемещений ($u = U \equiv 0$) и напряжений ($\sigma_{13} \equiv 0$):

$$w^{FL} = -\frac{\alpha_1}{\varsigma_2 \gamma_1} \frac{e^{-\gamma_1 sz}}{s} - \frac{\alpha_2}{\varsigma_2 \gamma_2} \frac{e^{-\gamma_2 sz}}{s}, \quad W^{FL} = -\frac{\alpha_1 \beta_1}{\varsigma_2 \gamma_1} \frac{e^{-\gamma_1 sz}}{s} - \frac{\alpha_2 \beta_2}{\varsigma_2 \gamma_2 s} \frac{e^{-\gamma_2 sz}}{s}; \qquad (3.2)$$

$$\sigma_{33}^{FL} = \frac{\alpha_1 \xi_1}{\varsigma_2} e^{-\gamma_1 sz} + \frac{\alpha_2 \xi_2}{\varsigma_2} e^{-\gamma_2 sz}, \sigma^{FL} = \frac{\alpha_1 \xi_3}{\varsigma_2} e^{-\gamma_1 sz} + \frac{\alpha_2 \xi_4}{\varsigma_2} e^{-\gamma_2 sz}. \qquad (3.3)$$

Оригиналы этих функций находятся с помощью свойств преобразования Лапласа и таблиц [6]:

$$\begin{aligned} w &= -\frac{\alpha_1}{\varsigma_2 \gamma_1} \delta'(\tau - \gamma_1 z) - \frac{\alpha_2}{\varsigma_2 \gamma_2} \delta'(\tau - \gamma_2 z), \\ W &= -\frac{\alpha_1 \beta_1}{\varsigma_2 \gamma_1} \delta'(\tau - \gamma_1 z) - \frac{\alpha_2 \beta_2}{\varsigma_2 \gamma_2 s} \delta'(\tau - \gamma_2 z); \end{aligned} \qquad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33} &= \frac{\alpha_1 \xi_1}{\varsigma_2} \delta(\tau - \gamma_1 z) + \frac{\alpha_2 \xi_2}{\varsigma_2} \delta(\tau - \gamma_2 z), \\ \sigma &= \frac{\alpha_1 \xi_3}{\varsigma_2} \delta(\tau - \gamma_1 z) + \frac{\alpha_2 \xi_4}{\varsigma_2} \delta(\tau - \gamma_2 z). \end{aligned} \qquad (3.5)$$

где штрих обозначает производную.

4. Решение двумерной задача на поверхности

Соответствующие изображения находим из формул (2.6) – (2.9), подставляя в них $z=0$. При этом $u^{LF}\big|_{z=0}=0,\ \sigma_{33}^{LF}\big|_{z=0}=\sigma^{LF}\big|_{z=0}=1$, что находится в согласии с граничными условиями (2.2). Для перемещений из (2.6) и (2.7) получаем следующий результат:

$$w^{FL}=\sum_{j=1}^{2}w_j^{FL}\left(q,s\right),\ U^{FL}=\sum_{j=1}^{3}U_j^{FL}\left(q,s\right),\ W^{FL}=\sum_{j=1}^{3}W_j^{FL}\left(q,s\right),\ \sigma_{13}^{FL}=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{13j}^{FL}. \tag{4.1}$$

Для вычисления оригиналов слагаемые в этих суммах, определяемые равенствами в (2.7), преобразуем следующим образом:

$$\begin{gathered}
w_l^{FL}=\left(-1\right)^{l+1}\left[\eta_1\frac{q^2}{s^2}+\left(-1\right)^l\alpha_l\gamma_{3-l}^2\right]f_1^{FL}\left(q,s;\gamma_l\right),\\
U_l^{FL}=\left(-1\right)^{l+1}\beta_l\left[\eta_1\frac{q^2}{s^2}+\left(-1\right)^l\alpha_l\gamma_{3-l}^2\right]f_2^{FL}\left(q,s\right),\\
W_l^{FL}=\sum_{1}^{3}\beta_l w_l^{FL},\quad \sigma_{13l}^{FL}=2iq\eta_1 w_l^{FL},U_3^{FL}=\beta_3\varsigma_3 f_2^{FL}\left(q,s\right),\\
W_3^{FL}=\beta_3\varsigma_3\frac{q^2}{s^2}f_3^{FL}\left(q,s\right),\quad \sigma_{133}^{FL}=-iq\varsigma_3\left(2\frac{q^2}{s^2}+\gamma_3^2\right)f_3^{FL}\left(q,s\right).
\end{gathered} \tag{4.2}$$

Здесь

$$\begin{gathered}
f_1^{FL}\left(q,s;\gamma_l\right)=\frac{\sqrt{q^2+\gamma_l^2s^2}}{\eta_1\varsigma_1q^2+\varsigma_2\gamma_1^2\gamma_2^2s^2},\ f_2^{FL}\left(q,s\right)=\frac{iq}{\eta_1\varsigma_1q^2+\varsigma_2\gamma_1^2\gamma_2^2s^2},\\
f_3^{FL}\left(q,s\right)=\frac{s^2}{\left(\eta_1\varsigma_1q^2+\varsigma_2\gamma_1^2\gamma_2^2s^2\right)\sqrt{q^2+\gamma_3^2s^2}}.
\end{gathered} \tag{4.3}$$

Оригинал функции $f_2^{LF}\left(q,s\right)$ находим последовательным обращением преобразований Фурье и Лапласа с использованием свойств этих преобразований и таблиц [6]:

$$f_2^L\left(x,s\right)=\frac{1}{2}e^{-\gamma_1\gamma_2 s\sqrt{\frac{\varsigma_2}{\eta_1\varsigma_1}}|x|}\mathrm{sign}x,\ f_2\left(x,\tau\right)=\frac{1}{2}\delta\left(\tau-\gamma_1\gamma_2 s\sqrt{\frac{\varsigma_2}{\eta_1\varsigma_1}}\left|x\right|\right)\mathrm{sign}x \tag{4.4}$$

Оригинал функций $f_2^{LF}\left(q,s;\gamma_l\right),\ f_3^{LF}\left(q,s\right)$ определяем с помощью алгоритма совместного обращения преобразований Фурье и Лапласа, основанном на использовании аналитического представления изображения по Лапласу [6,7]:

$$f_1^{FL}(q,s;\gamma_l) \div -\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\left[\varphi(x+i\varepsilon,\tau)-\varphi(x-i\varepsilon,\tau)\right] = -\frac{1}{\pi}\frac{\left(\tau^2-\gamma_l^2x^2\right)_+^{1/2}}{\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2},$$

$$\varphi(z,\tau) = -\frac{\sqrt{\lambda^2+\gamma_l^2s^2}}{z\left(\eta_1\varsigma_1\lambda^2+\varsigma_2\gamma_1^2\gamma_2^2\right)},\ \lambda = \frac{\tau}{iz};$$

$$iqf_1^{FL}(q,s;\gamma_l) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\left(\tau^2-\gamma_l^2x^2\right)_+^{1/2}}{\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2} = -\frac{1}{\pi}Q_{11}(\tau,x)\left(\tau^2-\gamma_l^2x^2\right)_+^{-1/2},$$

$$\frac{q^2}{s^2}f_1^{FL}(q,s;\gamma_l) \div \frac{\tau^2}{\pi x^2}\frac{\left(\tau^2-\gamma_l^2x^2\right)_+^{1/2}}{\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2},$$

$$\frac{iq^3}{s^2}f_1^{FL}(q,s;\gamma_l) = \frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tau^2}{x^2}\frac{\left(\tau^2-\gamma_l^2x^2\right)_+^{1/2}}{\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2} = \frac{\tau^4x}{\pi}Q_{12}(\tau,x)\left(\tau^2-\gamma_l^2x^2\right)_+^{-1/2},$$

$$\frac{q^2}{s^2}f_2^{LF}(q,s) \div -\frac{\tau^2}{\pi x\left(\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2\right)},\ f_3^{FL}(q,s) \div -\frac{x^2}{\pi}\frac{\left(\tau^2-\gamma_3^2x^2\right)_+^{-1/2}}{\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2},$$

$$iqf_3^{FL}(q,s) = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^2\left(\tau^2-\gamma_3^2x^2\right)_+^{-1/2}}{\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2} = -\frac{x}{\pi}Q_{31}(\tau,x)\left(\tau^2-\gamma_3^2x^2\right)_+^{-3/2},$$

$$\frac{q^2}{s^2}f_3^{FL}(q,s) \div \frac{\tau^2}{\pi}\frac{\left(\tau^2-\gamma_3^2x^2\right)_+^{-1/2}}{\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2}, \tag{4.5}$$

$$\frac{iq^3}{s^2}f_3^{FL}(q,s) = \frac{\tau^2}{\pi}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\left(\tau^2-\gamma_3^2x^2\right)_+^{-1/2}}{\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2} = \frac{\tau^2}{\pi}Q_{32}(\tau,x)\left(\tau^2-\gamma_3^2x^2\right)_+^{-3/2},$$

$$Q_{11}(\tau,x;\gamma_l) = \frac{\left(\eta_1\varsigma_1\gamma_l^2-2\varsigma_2\gamma_1^2\gamma_2^2\right)\tau^2x+2\varsigma_2\gamma_1^2\gamma_2^2\gamma_l^2x^3}{\left(\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2\right)^2},Q_{12}(\tau,x;\gamma_l) = \frac{3\eta_1\varsigma_1\gamma_l^2x^2-2\eta_1\varsigma_1\tau^2}{\left(\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2\right)^2},$$

$$Q_{31}(\tau,x) = \frac{\eta_1\varsigma_1\gamma_3^2\tau^2x^2-2\eta_1\varsigma_1\tau^4+\gamma_3^2\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^4}{\left(\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2\right)^2},Q_{32}(\tau,x) = \frac{3\gamma_3^2\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^3-\left(2\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2+\eta_1\varsigma_1\gamma_3^2\right)\tau^2x}{\left(\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2\right)^2}.$$

где «$\div$» - знак соответствия изображения и оригинала; производные здесь и далее понимаются в обобщенном смысле: $x_+^\alpha = x^\alpha H(x)$; $H(x)$ - функция Хевисайда.

Используя теперь равенства (4.1) - (4.5), получаем оригиналы перемещений скелета и жидкости:

$$w = \sum_{j=1}^{2}w_j(q,s),\ U = \sum_{j=1}^{3}U_j(q,s),\ W = \sum_{j=1}^{3}W_j(q,s),\ \sigma_{13} = \sum_{j=1}^{3}\sigma_{13j}. \tag{4.6}$$

Здесь

$$w_l = \frac{(-1)^{l+1}}{\pi}\left[\eta_1 \frac{\tau^2}{x^2} + (-1)^{l+1}\alpha_l \gamma_{3-l}^2\right]\frac{\left(\tau^2-\gamma_l^2 x^2\right)_+^{1/2}}{\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2 x^2 - \eta_1\varsigma_1\tau^2},$$

$$U_l^{FL} = (-1)^{l+1}\beta_l\left[\eta_1\frac{\tau^2}{\pi x\left(\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2 x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2\right)} + \frac{(-1)^l\alpha_l\gamma_{3-l}^2}{2}\delta\left(\tau-\gamma_1\gamma_2 s\sqrt{\frac{\varsigma_2}{\eta_1\varsigma_1}}|x|\right)signx\right],$$

$$W_l^{FL} = \sum_1^3 \beta_l w_l^{FL}, \tag{4.7}$$

$$\sigma_{13l}^{FL} = \frac{2\eta_1(-1)^{l+1}}{\pi}\left[\eta_1\tau^4 x Q_{12}(\tau,x;\gamma_l) + (-1)^{l+1}\alpha_l\gamma_{3-l}^2 Q_{11}(\tau,x;\gamma_l)\right]\left(\tau^2-\gamma_l^2x^2\right)_+^{-1/2},$$

$$U_3^{FL} = \beta_3\varsigma_3\frac{1}{2}\delta\left(\tau-\gamma_1\gamma_2 s\sqrt{\frac{\varsigma_2}{\eta_1\varsigma_1}}|x|\right)signx, W_3^{FL} = \beta_3\varsigma_3\frac{\tau^2}{\pi}\frac{\left(\tau^2-\gamma_l^2x^2\right)_+^{-1/2}}{\gamma_1^2\gamma_2^2\varsigma_2x^2-\eta_1\varsigma_1\tau^2},$$

$$\sigma_{133}^{FL} = -\frac{\varsigma_3}{\pi}\left[2\tau^2 Q_{32}(\tau,x) - \gamma_3^2 x Q_{31}(\tau,x)\right]\left(\tau^2-\gamma_3^2x^2\right)_+^{-3/2}.$$

5. Пример

В качестве заполняющего полуплоскость материала рассмотрим песчаник, поры которого насыщены керосином, со следующими физическими характеристиками [3]:

$A = 0,4026\cdot 10^4$ МПа, $N = 0,2493\cdot 10^3$ МПа, $R = 0,672\cdot 10^4$ МПа, $Q = 0,295\cdot 10^4$ МПа,
$\rho_{11} =\ 0,6087.10^{-3}$ кг/м^3, $\rho_{22} =\ 0,2159.10^{-3}$ кг/м^3, $\rho_{12} = -0,19.10^{-5}$ кг/м^3.

Этим величинам соответствуют следующие значения безразмерных параметров:

$\beta_0 = 0,3; \beta_1 = 0,8757; \beta_2 = -10,3287; \beta_3 = 0,0088;\ \gamma_1 = 1; \gamma_2 = 2,1612; \gamma_3 = 1,963;$
$\eta_1 = 0,055099; \eta_2 = 0,889802; \eta_3 = 0,651991; \eta_4 = 1,485214.$

Результаты расчетов по формулам (4.6) напряжения σ_{33}, перемещений скелета w и жидкости U,W на поверхности полупространства в зависимости от координаты x представлены на рис. 1–4. Сплошные кривые соответствуют моменту времени $\tau = 0,15$, штрихпунктирные - $\tau = 0,3$, а пунктирные - $\tau = 0,45$. Графики построены только в правой полуплоскости, поскольку первые две функции являются нечетными, а вторые – четными. Отметим, что разрывы второго рода на графиках имеют место в точках $|x| = \left(\tau\sqrt{2}\right)/\gamma_3$, а также в точках $|x| = \tau/\gamma_k$ $(k = 1,2,3)$, определяющих фронты волн в скелете и жидкости.

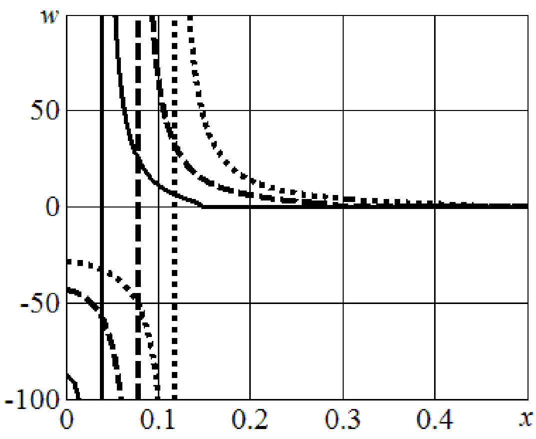

Рис.1

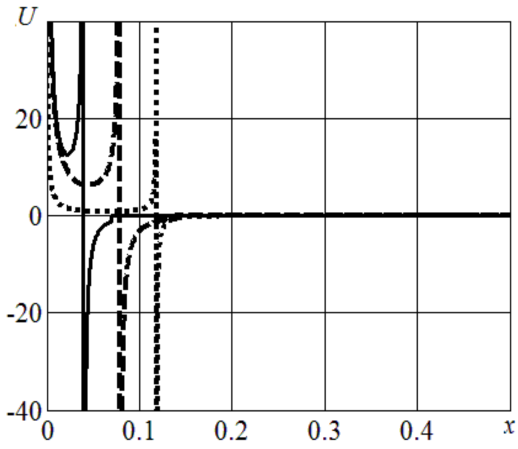

Рис.2

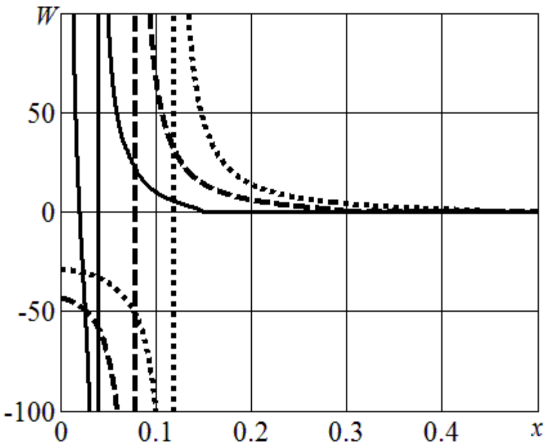

Рис. 3

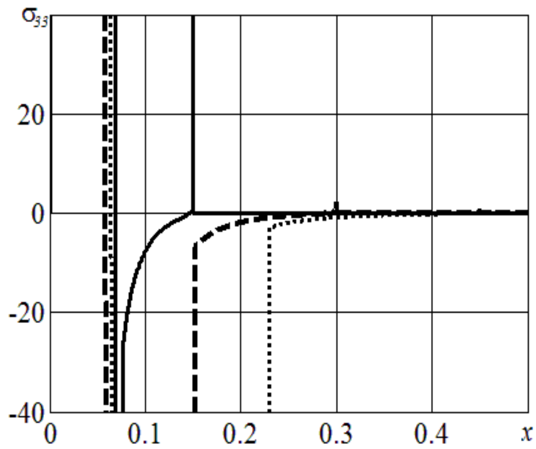

Рис. 4

Библиографический список

1. Био М.А. Механика деформирования и распространения акустических волн в пористой среде // Механика: Сб. пер. и обзор иностр. литер. 1963. № 6. С. 103-134.

2. Наримов Ш.Н. Волновые процессы в насыщенных пористых средах. Ташкент: Мехнат, 1988. 304 с.

3. Горшков А.Г., Салиев А.А., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных возмущений от сферической полости в упруго-пористой среде // ДАН УзССР, 1987. № 7. С. 15-16.

4. Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С, Литвинчук С.Ю. Применение метода ГИУ для решения краевых задач трехмерных динамических теорий вязко- и пороупругости // Электронный журнал «Труды МАИ», 2010. Вып. № 40. 1-20.

5. Нгуен Нгок Хоа, Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных поверхностных кинематических возмущений в упруго-пористой полуплоскости // Механика композиционных материалов и конструкций, 2011, Т. 17, № 4. 483 – 492

6. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. Волны в слошных средах. М.: Физматлит, 2004. 472 с.

7. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Динамические контактные задачи с подвижными границами. М.: Физматлит, 1995. 352 с.

Сведения о авторах

Нгуен Нгок Хоа, аспирант Московского авиационного института (национального исследовательского университета), тел.: (964)7987998, email: nguyenhoa.mta@gmail.com.

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, профессор Московского авиационного института (национального исследовательского университета),д.ф.-м.н.,тел.:(499)1584306, (903)7660347, e-mail: tvd902@mai.ru