

Труды МАИ. 2022. № 124

Trudy MAI, 2022, no. 124

Научная статья

УДК 621.396

DOI: [10.34759/trd-2022-124-13](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-13)

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ВЛИЯНИЯ СКАНИРУЮЩЕЙ ПО ЧАСТОТЕ ПОМЕХИ НА ДОСТОВЕРНОСТЬ ПРИЕМА СИГНАЛА С QPSK МОДУЛЯЦИЕЙ

**Виталий Валерьевич Звонарев^{1✉}, Игорь Анатольевич, Карабельников²,
Александр Сергеевич Попов³**

^{1,2,3}Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского,

Санкт-Петербург, Россия

^{1,2,3}vka@mil.ru✉

Аннотация. В статье представлена математически корректная методика расчета вероятностей символьной и битовой ошибок когерентного оптимального посимвольного приема радиосигнала с QPSK модуляцией в присутствии помехи с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) внутри символа.

Ключевые слова: вероятность символьной и битовой ошибок, сканирующая по частоте помеха, четырехпозиционная фазовая манипуляция, помехоустойчивость, достоверность приема сигнала

Для цитирования: Звонарев В.В., Карабельников И.А., Попов А.С. Методика расчета влияния сканирующей по частоте помехи на достоверность приема сигнала с QPSK модуляцией // Труды МАИ. 2022. № 124. DOI: [10.34759/trd-2022-124-13](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-13)

METHOD OF CALCULATING INFLUENCE OF FREQUENCY SCANNING INTERFERENCE ON RELIABILITY OF SIGNAL RECEPTION WITH QPSK MODULATION

Vitaly V. Zvonarev^{1✉}, Igor A. Karabelnikov², Alexander S. Popov³

^{1,2,3}Military space academy named after A.F.Mozhaisky,

Saint Petersburg, Russia

^{1,2,3}vka@mil.ru[✉]

Abstract. To accurately assess the channel resource and determine the maximum signal attenuation in a complex electromagnetic environment, the article describes a technique that allows calculating the probabilistic-temporal characteristics of a radio channel with high accuracy and reliable forecasting. As the main characteristics of a radio channel in a complex electromagnetic environment, the article considers the probabilities of bit and character errors affecting the reliability of signal reception.

The article presents a mathematically correct method for calculating the probabilities of symbolic and bit errors of coherent optimal character-by-character reception of a radio signal with QPSK modulation in the presence of interference with linear frequency modulation inside the symbol.

The basis of the technique is the representation of a four-dimensional probability measure of the vector of output voltages of the correlation channels of the receiving device in the space of the eigenvectors of the covariance matrix of this vector. The results of the article are necessary to calculate the influence of interference in a connected radio channel, when finding the probabilities of symbolic and bit errors. The calculation method is integrated into the energy calculation algorithm of the transmission channel in the presence of interference with LFM modulation.

The developed technique of the influence of frequency-scanning interference on the reliability of receiving a signal with QPSK modulation makes it possible to accurately determine the probability of symbolic and bit errors at given values of the level and deviation of the interference frequency.

The results obtained show that the curves of the average probabilities of symbolic and bit errors have a threshold character. The presence of interference with linear frequency modulation significantly degrades the quality of the communication channel, completely disrupting the reception of information at the values of the interference level when the interference level exceeds the signal level. The extension of the graphs to the region of zero signal value at zero and non-zero interference value shows that the average probability of a symbolic error is 0.75. In the same case, the probability of a bit error is 0.5.

It is determined that the phase-averaged interference probabilities of correct reception, and, consequently, errors in receiving signal positions in the presence of interference with LFM modulation, are the same, which allows the calculation of the transmission channel to be limited to using as an average the probability of receiving one signal position.

Keywords: probability of symbol and bit errors, scanning by frequency of interference, four-position phase manipulation, noise immunity, reliability of signal reception

For citation: Zvonarev V.V., Karabelnikov I.A., Popov A.S. Method of calculating influence of frequency scanning interference on reliability of signal reception with QPSK modulation. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. DOI: [10.34759/trd-2022-124-13](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-13)

Введение

В последнее время опубликован ряд статей, содержащих результаты исследований помехозащищенности приема широко распространенных радиосигналов с *QPSK* модуляцией в присутствии помех различных структур, таких как, например, когерентная и некогерентная гармонические помехи, сканирующая по частоте помеха [1-5]. В данных работах не учитывается биортогональность *QPSK* радиосигналов, сигналы неявно принимаются ортогональными. Применяемый математический аппарат оказывается некорректным и неадекватным при расчете достоверности приема сигнала, что приводит к неправильным численным результатам, хотя общие качественные выводы в первом приближении оказываются справедливыми. Что касается линейно сканирующей по частоте помехи, то в статьях [3-5] дополнительно присутствует при численном расчете подмена сканирующей помехи гармонической со сдвигом частоты при случайном значении частоты сдвига с равномерным законом распределения вероятности этого сдвига частоты. При такой подмене численные результаты и качественные выводы на их основе оказываются далеки от истинных. Математически выверенная методика для случая гармонической помехи изложена в статьях авторов [6-7]. Целью настоящей статьи является

изложение корректной методики расчета вероятностей символьных и битовых ошибок приема *QPSK* радиосигналов при воздействии помехи с ЛЧМ модуляцией [3-5].

Основой методики является, как и в названных статьях авторов [6-7], представление четырехмерной вероятностной меры вектора выходных напряжений корреляционных каналов приемного устройства в пространстве собственных векторов ковариационной матрицы этого вектора. Результаты статьи необходимы для расчета влияния помех в связном радиоканале, при нахождении вероятностей символьных и битовых ошибок. Методика расчета встраивается в алгоритм энергетического расчета канала передачи в присутствии помехи с ЛЧМ модуляцией.

Модели и задача

Примем формулы сигнала и помехи как $s_i(t)$ и $s_{\Pi}(t)$ в виде:

$$s_i(t) = A_c \cos(\omega_0 t + \varphi_i), \varphi_i = (i - 1) \frac{\pi}{2}, t \in [(l - 1)T, lT], i = 1, 2, 3, 4;$$

$$s_{\Pi}(t) = A_{\Pi} \cos \left[\omega_0 t + \Delta\omega_{\Pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\Pi} t^2}{T} + \varphi_{\Pi} \right],$$

где $A_c = \sqrt{2P_c}$, $A_{\Pi} = \sqrt{2P_{\Pi}}$ – амплитуды сигнала и помехи; P_c, P_{Π} – их мощности; ω_0 , $\Delta\omega_{\Pi}$ – несущая частота сигнала и девиация частоты помехи; φ_{Π} – сдвиг фазы помехи относительно фазы сигнала; T, l – длительность информационного символа и его номер в последовательности; i – номер позиции символа в сигнальном созвездии.

На вход корреляционного демодулятора, функциональная схема которого представлена в работах [6-7], поступает аддитивная смесь сигнала и помех [1-7]:

$$u^j(t) = s_j(t) + s_{\pi}(t) + n(t),$$

где j – номер позиции принятого информационного символа;

$n(t)$ – шумовая помеха, моделируемая белым гауссовым шумом (БГШ) с корреляционной функцией:

$$\langle n(t)n(t') \rangle = \frac{N_0}{2} \delta(t - t'),$$

где N_0 – односторонняя спектральная плотность БГШ;

$\delta(t - t')$ – дельта функция Дирака.

Требуется найти математические выражения для определения средних вероятностей символьных и битовых ошибок когерентного приема радиосигнала *QPSK* в присутствии помехи с линейной частотной модуляцией внутри символа.

Рассчитать вероятности символьных ошибок и ошибок на бит от уровня сигнал при фиксированных отклонениях частоты помехи от частоты сигнала.

Порядок решения

Как известно отклик i -го коррелятора при поступлении на его вход сигнала ξ_i^j с j -ой позиции сигнала в момент T равен [1–7]:

$$\xi_i^j = \frac{1}{N_0} \int_0^T [s_j + s_{\pi} + n(t)] s_i dt = \frac{1}{N_0} \int_0^T s_j s_i dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T s_{\pi} s_i dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T n(t) s_i dt,$$

где $i, j \in (1, 2, 3, 4)$.

Значение случайной составляющей $\frac{1}{N_0} \int_0^T n(t) s_i dt$ обозначим символом ζ_i .

Правило решения имеет вид [6-7]:

$\hat{x}_i = \max_i^{-1} \xi_i^j, i = 1, 2, 3, 4$ или, что тождественно [6,10], $\xi_j^j > \xi_i^j; j \neq i, i = 1, 2, 3, 4$.

Вектор напряжений на выходах корреляторов ξ^j и вектор случайных составляющих ζ представим в виде, соответственно:

$$\xi^j = (\xi_1^j, \xi_2^j, \xi_3^j, \xi_4^j)^T, \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4)^T,$$

где T – знак транспонирования.

Математическое ожидание вектора ξ^j есть:

$$\langle \xi^j \rangle = \xi^j - \zeta = \frac{1}{N_0} \int_0^T s_j s dt + \frac{1}{N_0} \int_0^T s_{\Pi}(t) s dt. \quad (1)$$

где s – вектор копий принимаемых радиосигналов информационных позиций:

$$s = (s_1, s_2, s_3, s_4)^T.$$

Тогда можно написать:

$$\xi^j = \langle \xi^j \rangle + \zeta.$$

Статистика вектора ξ^j описывается стандартной многомерной гауссовской плотностью вероятности [8-10]: с ковариационной матрицей

$$K_{\xi^j} = \langle (\xi^j - \langle \xi^j \rangle)(\xi^j - \langle \xi^j \rangle)^T \rangle - \text{ковариационная матрица вектора } \xi^j.$$

Несложно видеть, что имеет место равенство

$$K_{\xi^j} = \langle \zeta \zeta^T \rangle = K_{\zeta}$$

Вероятность правильного приема $P_{\text{прав}j}$ символа x_j определяется из следующего условия:

$$P\{\xi_j^j > \xi_i^j; j \neq i; j, i = 1, 2, 3, 4\} = P(\hat{x}_j/x_j). \quad (2)$$

Тогда средняя вероятность ошибки приема символа $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ (приема сигналов $\{s_1(t), s_2(t), s_3(t), s_4(t)\}$) находится по формуле:

$$P_{\text{ош ср}} = \sum_{j=1}^4 P_j (1 - P_{\text{прав } j}). \quad (3)$$

Для расчета средней вероятности ошибки приема символа необходимо матрицу преобразования вектора ξ^j перевести в новую систему координат, в которой ковариационная матрица K_{ξ^j} становится диагональной, и определить вероятности правильного приема каждого информационного символа.

Свойство биортогональности сигналов созвездия при ФМ-4 обуславливает сингулярность матрицы \mathbf{K}_ζ , т.е. $\det \mathbf{K}_\zeta = 0$.

При расчетах осуществляется переход из пространства вектора ξ в пространство собственных векторов η ковариационной матрицы \mathbf{K}_ζ . Матрица \mathbf{K}_ζ в данном случае вычисляется по формуле:

$$\mathbf{K}_\zeta = \frac{h_c^2}{2} \mathbf{A},$$

где h_c^2 – отношение сигнал/шум: $h_c^2 = E_c/N_0$,

$E_c = P_c T$ – энергия сигнала на длительности информационного символа.

Непосредственным вычислением определяется вид матрицы \mathbf{A} :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Собственные числа матрицы \mathbf{A} находятся из известного определения характеристического уравнения матрицы \mathbf{A} [11, 12]:

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})=0,$$

имеющего вид:

$$[(1-\lambda)^2-1]^2=0.$$

Решениями этого уравнения являются:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0 \text{ и } \lambda_3 = \lambda_4 = 2.$$

В координатах $\boldsymbol{\eta}$ матрица $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\eta}}$ равна:

$$\mathbf{K}_{\boldsymbol{\eta}} = h_c^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вычислим матрицу преобразования координат $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$.

Собственные векторы матрицы \mathbf{A} находятся из известного определения

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}=\mathbf{0}.$$

Один из удобных вариантов собственных векторов имеет вид:

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}; \boldsymbol{\xi}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Все векторы попарно ортогональны, т.е. $\boldsymbol{\xi}_j^T \boldsymbol{\xi}_i = 0$ при $j \neq i$, где $j, i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Нормы всех векторов одинаковы $\|\boldsymbol{\xi}_j\|=\sqrt{2}$.

Ортонормированные имеют вид:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}; \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}; \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}; \mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, матрица преобразований \mathbf{V} системы координат ξ в новую систему координат η будет иметь вид:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Непосредственным вычислением можно установить, что для матрицы Якоби \mathbf{V} справедливы следующие равенства: $\mathbf{V}=\mathbf{V}^T=\mathbf{V}^{-1}$, т.е. имеем симметрию $\eta=\mathbf{V}\xi$ и $\xi=\mathbf{V}\eta$.

Рассмотрим первую позицию вектора $\langle \xi^j \rangle$, когда принимаемый сигнал равен $s_1(t) = A_c \cos \omega_0 t$. Непосредственными вычислениями получим вектор математических ожиданий вектора ξ^1 для первой позиции принимаемого сигнала [13]:

$$\langle \xi^1 \rangle = \begin{bmatrix} h_c^2 + h_c h_{\Pi} \frac{1}{T} \int_0^T \cos \left(\Delta \omega_{\Pi} t - \frac{2\Delta \omega_{\Pi} t^2}{T} + \varphi_{\Pi} \right) dt \\ -h_c h_{\Pi} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \left(\Delta \omega_{\Pi} t - \frac{2\Delta \omega_{\Pi} t^2}{T} + \varphi_{\Pi} \right) dt \\ -[h_c^2 + h_c h_{\Pi} \frac{1}{T} \int_0^T \cos \left(\Delta \omega_{\Pi} t - \frac{2\Delta \omega_{\Pi} t^2}{T} + \varphi_{\Pi} \right) dt] \\ h_c h_{\Pi} \frac{1}{T} \int_0^T \sin \left(\Delta \omega_{\Pi} t - \frac{2\Delta \omega_{\Pi} t^2}{T} + \varphi_{\Pi} \right) dt \end{bmatrix}.$$

где h_{Π}^2 – отношение помеха/шум: $h_{\Pi}^2 = E_{\Pi}/N_0$ [14, 15];

E_{Π} – энергия помехи на длительности информационного символа:

$$E_{\Pi} = P_{\Pi} T.$$

Используя матрицу преобразования \mathbf{V} , получаем вектор математических ожиданий в новой системе координат $\langle \eta^1 \rangle$:

$$\langle \boldsymbol{\eta}^1 \rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sqrt{2}h_c h_\pi \frac{1}{T} \int_0^T \cos\left(\Delta\omega_\pi t - \frac{2\Delta\omega_\pi t^2}{T} + \varphi_\pi\right) dt \\ \sqrt{2}[h_c^2 + h_c h_\pi \frac{1}{T} \int_0^T \sin\left(\Delta\omega_\pi t - \frac{2\Delta\omega_\pi t^2}{T} + \varphi_\pi\right) dt] \end{bmatrix}.$$

Следовательно, вероятностная мера задана на двумерной плоскости (η_3, η_4) в новой системе координат $\boldsymbol{\eta}$. Тогда плотность вероятности (ПВ) $w_4(\boldsymbol{\eta})$ представляет собой произведение одномерных ПВ:

$$w_4(\boldsymbol{\eta}^1) = w_1(\eta_1^1)w_1(\eta_2^1)w_1(\eta_3^1)w_1(\eta_4^1).$$

Тогда $w_1(\eta_1^1)$ и $w_1(\eta_2^1)$ есть дельта-функции Дирака:

$$w_1(\eta_1^1) = \delta(\eta_1^1 - \langle \eta_1^1 \rangle), w_1(\eta_2^1) = \delta(\eta_2^1 - \langle \eta_2^1 \rangle),$$

с $\langle \eta_1^1 \rangle = \langle \eta_2^1 \rangle = 0$. Интегрирование дельта-функции в данном случае приводит к единице и четырехкратный интеграл становится двукратным [16, 17].

Тогда расчет вероятности приема первого информационного символа для обеих систем координат $\boldsymbol{\xi}^1$ и $\boldsymbol{\eta}^1$ будет выполняться по формуле [8-9]:

$$\begin{aligned} P_{\text{прав } 1} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\xi_1^1} \int_{-\infty}^{\xi_1^1} \int_{-\infty}^{\xi_1^1} w_4(\boldsymbol{\xi}/s_1) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\xi_4 = \\ &= \int_{\eta_{1Н}^1}^{\eta_{1В}^1} w_1(\eta_1^1) d\eta_1 \int_{\eta_{2Н}^1}^{\eta_{2В}^1} w_1(\eta_2^1) d\eta_2 \int_{\eta_{3Н}^1}^{\eta_{3В}^1} w_1(\eta_3^1) d\eta_3 \int_{\eta_{4Н}^1}^{\eta_{4В}^1} w_1(\eta_4^1) d\eta_4, \end{aligned}$$

где $w_4(\boldsymbol{\xi}/s_1)$ – условная по s_1 плотность вероятности вектора $\boldsymbol{\xi}$; $\eta_{iН}^1$ и $\eta_{iВ}^1$ – нижний и верхний пределы интегрирования, подлежащие определению [18].

Первые два интеграла в их произведении равны единице, поэтому имеем:

$$P_{\text{прав } 1} = \int_{\eta_{3\text{H}}}^{\eta_{3\text{В}}} w_1(\eta_3) d\eta_3 \int_{\eta_{4\text{H}}}^{\eta_{4\text{В}}} w_1(\eta_4) d\eta_4. \quad ((4))$$

Определяем пределы интегрирования в формуле (4). Вычисление верхних и нижних пределов интегрирования разобрано в [6-7].

Пределы интегрирования для интегралов в формуле (4) имеют значения $\eta_{4\text{H}} = 0, \eta_{4\text{В}} = \infty, \eta_{3\text{H}} = -\eta_4, \eta_{3\text{В}} = \eta_4$, а одномерные ПВ определены выражениями:

$$w_1(\eta_3) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_c} \exp\left(-\frac{(\eta_3^1 - \langle \eta_3^1 \rangle)^2}{2h_c^2}\right);$$

$$w_1(\eta_4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}h_c} \exp\left(-\frac{(\eta_4^1 - \langle \eta_4^1 \rangle)^2}{2h_c^2}\right).$$

Для вывода окончательной формулы, позволяющей определить значение вероятности правильного приема первого информационного символа $P_{\text{прав } 1}$, необходимо определить нормированные переменные [6-7]:

$$x = \frac{\eta_4 - \langle \eta_4 \rangle}{h_c}; \quad y = \frac{\eta_3 - \langle \eta_3 \rangle}{h_c}.$$

ПВ для переменных x и y имеют вид:

$$\begin{cases} w(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right); \\ w(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right). \end{cases}$$

Полученные значения ПВ подставляются в формулу (4) для вычисления вероятности правильного приема информационного символа $P_{\text{прав } 1}$.

В нормированных переменных определение пределов интегрирования рассмотрено в [6-7].

Пользуясь данной методикой, можно показать, что нижние $(x_{н1}, y_{н1})$ и верхние $(x_{в1}, y_{в1})$ границы определяются следующими выражениями:

$$\begin{cases} x_{н1} = -\sqrt{2} \left\{ h_c + \frac{h_{\pi}}{T} \int_0^T \sin \left(\Delta\omega_{\pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\pi} t^2}{T} + \varphi_{\pi} \right) dt \right\}, & x_{в1} = \infty; \\ y_{н1} = -x - \sqrt{2} \left\{ h_c + \frac{h_{\pi}}{T} \int_0^T \left[\sin \left(\Delta\omega_{\pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\pi} t^2}{T} + \varphi_{\pi} \right) + \cos \left(\Delta\omega_{\pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\pi} t^2}{T} + \varphi_{\pi} \right) \right] dt \right\}; \\ y_{в1} = x + \sqrt{2} \left\{ h_c + \frac{h_{\pi}}{T} \int_0^T \left[\sin \left(\Delta\omega_{\pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\pi} t^2}{T} + \varphi_{\pi} \right) + \cos \left(\Delta\omega_{\pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\pi} t^2}{T} + \varphi_{\pi} \right) \right] dt \right\}. \end{cases} \quad (5)$$

Формула для расчета вероятности правильного приема первого информационного символа с учетом найденных пределов интегрирования (5) будет иметь вид:

$$P_{\text{прав } 1} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_{н1}}^{x_{в1}} \int_{y_{н1}}^{y_{в1}} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \right) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{2} \left[h_c + \frac{h_{\pi}}{T} \int_0^T \sin \left(\Delta\omega_{\pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\pi} t^2}{T} + \varphi_{\pi} \right) dt \right]}^{\infty} dx \times$$

$$\times \int_{-x - \sqrt{2} \left[h_c + \frac{h_{\pi}}{T} \int_0^T \left[\sin \left(\Delta\omega_{\pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\pi} t^2}{T} + \varphi_{\pi} \right) + \cos \left(\Delta\omega_{\pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\pi} t^2}{T} + \varphi_{\pi} \right) \right] dt}^{x + \sqrt{2} \left[h_c + \frac{h_{\pi}}{T} \int_0^T \left[\sin \left(\Delta\omega_{\pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\pi} t^2}{T} + \varphi_{\pi} \right) + \cos \left(\Delta\omega_{\pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\pi} t^2}{T} + \varphi_{\pi} \right) \right] dt} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \right) dy.$$

Представленная методика позволяет вывести формулы для расчета вероятности правильного приема второго $P_{\text{прав } 2}$, третьего $P_{\text{прав } 3}$ и четвертого $P_{\text{прав } 4}$ информационных символов, имеющие для каждой из вероятностей свои пределы интегрирования $(x_{н2}, x_{в2}, y_{н2}, y_{в2})$, $(x_{н3}, x_{в3}, y_{н3}, y_{в3})$ и $(x_{н4}, x_{в4}, y_{н4}, y_{в4})$:

$$P_{\text{прав } 2} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_{н2}}^{x_{в2}} \int_{y_{н2}}^{y_{в2}} \exp \left(-\frac{x^2 + y^2}{2} \right) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{2} \left[h_c - \frac{h_{\pi}}{T} \int_0^T \sin \left(\Delta\omega_{\pi} t - \frac{2\Delta\omega_{\pi} t^2}{T} + \varphi_{\pi} \right) dt \right]}^{\infty} dx \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \int_{-x-\sqrt{2}\left[h_c+\frac{h_{\Pi}}{T}\int_0^T\left[\cos\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)-\sin\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)\right]dt\right]}^{x+\sqrt{2}\left[h_c-\frac{h_{\Pi}}{T}\int_0^T\left[\sin\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)+\cos\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)\right]dt\right]} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy. \\
P_{\text{прав } 3} &= \frac{1}{2\pi} \int_{x_{\text{Н}3}}^{x_{\text{В}3}} \int_{y_{\text{Н}3}}^{y_{\text{В}3}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{2}\left[h_c-\frac{h_{\Pi}}{T}\int_0^T\cos\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)dt\right]}^{\infty} dx \times \\
& \times \int_{-x-\sqrt{2}\left[h_c-\frac{h_{\Pi}}{T}\int_0^T\left[\cos\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)+\sin\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)\right]dt\right]}^{x+\sqrt{2}\left[h_c-\frac{h_{\Pi}}{T}\int_0^T\left[\cos\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)+\sin\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)\right]dt\right]} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy. \\
P_{\text{прав } 4} &= \frac{1}{2\pi} \int_{x_{\text{Н}4}}^{x_{\text{В}4}} \int_{y_{\text{Н}4}}^{y_{\text{В}4}} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dx dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sqrt{2}\left[h_c+\frac{h_{\Pi}}{T}\int_0^T\sin\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)dt\right]}^{\infty} dx \times \\
& \times \int_{-x-\sqrt{2}\left[h_c+\frac{h_{\Pi}}{T}\int_0^T\left[\cos\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)-\sin\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)\right]dt\right]}^{x+\sqrt{2}\left[h_c-\frac{h_{\Pi}}{T}\int_0^T\left[\sin\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)+\cos\left(\Delta\omega_{\Pi}t-\frac{2\Delta\omega_{\Pi}t^2}{T}+\varphi_{\Pi}\right)\right]dt\right]} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) dy.
\end{aligned}$$

Вероятность правильного приема символа $P_{\text{прав}}$ в среднем определяется по формуле:

$$P_{\text{прав}} = (P_{\text{прав}1} + P_{\text{прав}2} + P_{\text{прав}3} + P_{\text{прав}4})/4.$$

Средняя по символам вероятность символьной и битовой ошибок приема при кодированию по Грейю, соответственно, определяется по следующим формулам [19, 20]:

$$P_{\text{ош симв}} = 1 - P_{\text{прав}} ; P_{\text{ош бит}} = 1 - \sqrt{P_{\text{прав}}}.$$

Формулы для вычисления $P_{\text{прав}1}$, $P_{\text{прав}2}$, $P_{\text{прав}3}$, $P_{\text{прав}4}$ вместе с формулой (4) и последней формулой для получения вероятностей символьных и битовых ошибок являются целью данной статьи.

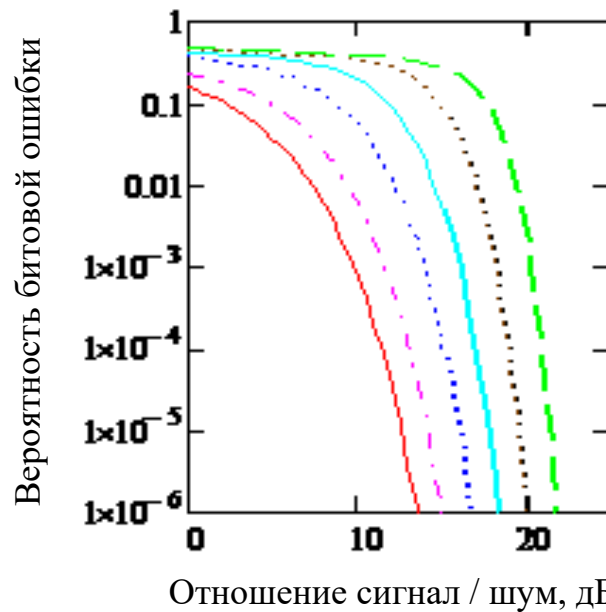
Пример расчета вероятности ошибки приема информационного символа и бита

Фазовый сдвиг гармонической помехи $\varphi_{\text{п}}$ может принимать любые значения как в течение времени одного сеанса связи, так и от сеанса к сеансу. Обычно принимают $\varphi_{\text{п}}$ равномерно распределенной в диапазоне значений $[-\pi, \pi]$ случайной величиной. При усреднении по $\varphi_{\text{п}}$ вероятности правильного приема принимают взаимно равные значения. Таким образом, можно в расчетах использовать формулу лишь одной вероятности правильного приема символа сигнала *QPSK*.

При расчете учтено, что $h_c^2 = E_c/N_0 = 2 E_b/N_0 = 2h_b^2$, здесь E_b – энергия бита. Отсюда $h_c = \sqrt{2}h_b$.

Графики вероятностей битовых ошибок $P_{\text{ош бит}}(E_b/N_0)$ от отношения (E_b/N_0) для бита при заданных величинах отношения помеха/шум $h_{\text{п}}$ - 0, 5, 15 дБ и девиации частоты $\Delta\omega_{\text{п}}$ - 0, 100 и 250 Гц построены на рис. 1. При расчете принято $T = 0,004$ сек – длительность символа.

Первые три кривые построены при девиации частоты, равной нулю. Первая кривая построена при уровне помехи, равном нулю, т.е. помеха отсутствует. Две следующие кривые имеют параметры, соответствуют гармонической когерентной помехе с уровнями 5 и 15 дБ. Далее две кривые имеют девиацию частоты помехи 250 Гц. У последней кривой $\Delta\omega_{\text{п}} = 100$ Гц.



- Отношение помеха / шум -60 дБ при девиации частоты 0 Гц
- Отношение помеха / шум 5 дБ при девиации частоты 0 Гц
- - - Отношение помеха / шум 15 дБ при девиации частоты 0 Гц
- · - Отношение помеха / шум 5 дБ при девиации частоты 250 Гц
- Отношение помеха / шум 15 дБ при девиации частоты 250 Гц
- · · · Отношение помеха / шум 15 дБ при девиации частоты 100 Гц

Рис. 1. Зависимость вероятности ошибки приема бита от отношения сигнал/шум

При одинаковом значении отношения помеха/шум, и заданном отношении сигнал/шум, вероятность ошибки приема символа имеет большую значение, чем вероятность ошибки приема бита.

Выводы

Анализ графиков приводит к следующим утверждениям:

1. Наличие помехи с линейной частотной модуляцией существенно ухудшает качество канала связи, полностью нарушая прием информации при значениях уровня помехи при превышении уровнем помехи уровня сигнала, то есть $h_{п} \geq h_{с}$.

2. Продление графиков в область нулевого значения сигнала при нулевом и ненулевом значении помехи показывает, что средняя вероятность символьной ошибки равна 0,75. В том же случае вероятность битовой ошибки равна 0,5, как и должно быть.

3. Как оказалось, даже при наличии помехи отношение вероятностей символьной и битовой ошибок равно 2, что ранее доказано не было.

4. Математически строго показано, что вероятностная мера четырехмерного вектора ξ значений выходов корреляционных каналов располагается в двумерном пространстве с осями η_3 и η_4 .

5. Прямым вычислением определено, что при кодированию по Грей усредненные по фазе помехи вероятности правильного приема, а, следовательно, и ошибок приема позиций сигнала при наличии помехи с ЛЧМ оказываются одинаковыми, что позволяет при расчете канала передачи ограничиться использованием в качестве среднего значения вероятности приема одной позиции сигнала.

6. При ненулевом значении девиации частоты кривые идут ниже, чем кривые для когерентной гармонической помехи, и тем ниже, чем больше девиация частоты помехи. С этой точки зрения влияние помехи с ЛЧМ меньше. Однако подавить такую помеху в приемнике существенно труднее.

Список источников

1. Куликов Г.В., Ван Зунг Нгуен, Нестеров А.В. и др. Помехоустойчивость приема сигналов с многопозиционной фазовой манипуляцией в присутствии

- гармонической помехи // Научные технологии. 2018. № 11. С. 32-38.
DOI: [10.18127/j19998465-201811-06](https://doi.org/10.18127/j19998465-201811-06)
2. Куликов Г.В., Нестеров А.В., Лелюх А.А. Помехоустойчивость приема сигналов с квадратурной амплитудной манипуляцией в присутствии гармонической помехи // Журнал радиоэлектроники. 2018. № 11. URL <http://jre.cplire.ru/jre/nov18/9/text.pdf>
3. Куликов Г.В., Нгуен Ван Зунг, До Чунг Тиен. Помехоустойчивость приема сигналов с многопозиционной фазовой манипуляцией в канале связи с нефлуктуационными помехами // II Международный научно-технический форум «Современные технологии в науке и образовании», СТНО-2019: сборник трудов. – Рязань: Рязанский государственный радиотехнический университет, 2019. Т. 1. – 206 с.
4. Куликов Г.В., Лелюх А.А. Анализ помехоустойчивости приема сигналов с квадратурной амплитудной манипуляцией при воздействии сканирующей помехи // Журнал радиоэлектроники. 2019. № 2. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/feb19/5/text.pdf>. DOI: [10.30898/1684-1719.2019.2.5](https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.2.5)
5. Куликов Г.В., Нгуен Ван Зунг. Анализ помехоустойчивости приема сигналов с многопозиционной фазовой манипуляцией при воздействии сканирующей помехи // Российский технологический журнал. 2018. Т. 6. № 6. С. 5-12. DOI: [10.32362/2500-316X-2018-6-6-5-12](https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-6-5-12)
6. Звонарев В.В., Пименов В.Ф., Попов А.С. Методика расчета помехоустойчивости приема четырехпозиционной квадратурной фазовой

манипуляцией при воздействии гармонической когерентной помехи // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2020. № 673. С. 79-89.

7. Звонарев В.В., Попов А.С. Потенциальная помехоустойчивость когерентного приема четырехпозиционного фазоманипулированного радиосигнала в присутствии когерентной гармонической помехи // Информационно-управляющие системы. 2021. № 1. С. 45-54. DOI: [10.31799/1684-8853-2021-1-45-54](https://doi.org/10.31799/1684-8853-2021-1-45-54)

8. Скляр Б. Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение: Пер. с англ. – М.: Вильямс, 2003. - 1104 с.

9. Прокис Дж. Цифровая связь: Пер. с англ. – М.: Радио и связь, 2000. – 800 с.

10. Финк Л. М. Теория передачи дискретных сообщений. – М.: Советское радио, 1975. – 400 с.

11. Звонарев В.В., Попов А.С., Худик М.Ю. Методика расчета вероятности ошибки посимвольного приема дискретных сообщений при наличии помех // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=104213>

12. Звонарев В.В., Пименов В.Ф., Попов А.С. Методика вычисления вероятностей символьных и битовых ошибок для QPSK сигналов при наличии гармонической помехи со сдвигом частоты // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2021. № 677. С. 50-60.

13. Звонарев В.В., Мороз А.В., Шерстюк А.В. Методика оценивания характеристик диаграммы направленности ультразвукового локатора в режиме синтезирования апертуры антенны // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=105683>

14. Куликов Г.В., Лелюх А.А., Граченко Е.Н. Помехоустойчивость когерентного приемника сигналов с квадратурной амплитудной манипуляцией при наличии ретранслированной помехи // Радиотехника и электроника. 2020. Т. 65. № 8. С. 804-808. DOI: [10.31857/S0033849420070074](https://doi.org/10.31857/S0033849420070074)
15. Kirillov S.N., Lisnichuk A.A. Analysis of narrow-band interference effect on cognitive radio systems based on synthesized four-position radio signals // Proc. 14th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering, IEEE, Novosibirsk, 2018, pp. 50-54. DOI: [10.1109/APEIE.2018.8545965](https://doi.org/10.1109/APEIE.2018.8545965)
16. Миронов А.Н., Цветков К.Ю., Ковальский А.А., Пальгунов В.Ю. Методика обоснования возможности и условий продления назначенных показателей срока службы антенных систем наземных станций измерительного комплекса космодрома // Труды МАИ. 2018. № 99. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=91968>
17. Бродский М.С., Розганов М.В., Уткин Д.Р. Обоснование технических требований к земным станциям спутниковых связных комплексов на основе модели функционирования активных фазированных антенных решеток // Известия института инженерной физики. 2021. № 1 (59). С. 24-28.
18. Савищенко Н.В., Лебеда Е.В. Вероятности ошибки когерентного приема многопозиционных сигналов в канале с общими гамма- или К-замираниями и белым шумом // Информационно-управляющие системы. 2019. № 1. С. 76-88. DOI: [10.31799/1684-8853-2019-1-76-88](https://doi.org/10.31799/1684-8853-2019-1-76-88)
19. Лихачев В.П., Сидоренко С.В. Помехоустойчивость алгоритма автофокусировки изображений по минимуму энтропии при сложной фоновой

обстановке // Труды МАИ. 2018. № 99. URL:
<https://trudymai.ru/published.php?ID=92074>

20. Вознюк В.В., Куценко Е.В. Помехоустойчивость систем радиосвязи с бинарными фазоманипулированными шумоподобными сигналами при воздействии ретранслированных компенсационных помех типа инверсии огибающей сигнала // Радиоэлектроника. 2018. № 2. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/feb18/1/text.pdf>

References

1. Kulikov G.V., Van Zung Nguen, Nesterov A.V. et al. *Naukoemkie tekhnologii*, 2018, no. 11, pp. 32-38. DOI: [10.18127/j19998465-201811-06](https://doi.org/10.18127/j19998465-201811-06)
2. Kulikov G.V., Nesterov A.V., Lelyukh A.A. *Zhurnal radioelektroniki*, 2018, no. 11. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/nov18/9/text.pdf>
3. Kulikov G.V., Nguen Van Zung, Do Chung Tien. *II Mezhdunarodnyi nauchno-tekhnicheskii forum «Sovremennye tekhnologii v nauke i obrazovanii», STNO-2019: sbornik trudov*. Ryazan', Ryazanskii gosudarstvennyi radiotekhnicheskii universitet, 2019, vol.1, 206 p.
4. Kulikov G.V., Lelyukh A.A. *Zhurnal radioelektroniki*, 2019, no. 2. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/feb19/5/text.pdf>. DOI: [10.30898/1684-1719.2019.2.5](https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.2.5)
5. Kulikov G.V., Nguen Van Zung. *Rossiiskii tekhnologicheskii zhurnal*, 2018, vol. 6, no. 6, pp. 5-12. DOI: [10.32362/2500-316X-2018-6-6-5-12](https://doi.org/10.32362/2500-316X-2018-6-6-5-12)
6. Zvonarev V.V., Pimenov V.F., Popov A.S. *Trudy Voенno-kosmicheskoi akademii imeni A.F. Mozhaiskogo*, 2020, no. 673, pp. 79-89.

7. Zvonarev V.V., Popov A.S. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy*, 2021, no. 1, pp. 45-54. DOI: [10.31799/1684-8853-2021-1-45-54](https://doi.org/10.31799/1684-8853-2021-1-45-54)
8. Sklyar B. *Tsifrovaya svyaz'. Teoreticheskie osnovy i prakticheskoe primenenie* (Digital communication. Theoretical foundations and practical application), Moscow, Vil'yams, 2003, 1104 p.
9. Prokis Dzh. *Tsifrovaya svyaz'* (Digital communication), Moscow, Radio i svyaz', 2000, 800 p.
10. Fink L. M. *Teoriya peredachi diskretnykh soobshchenii* (Theory of transmission of discrete messages), Moscow, Sovetskoe radio, 1975, 400 p.
11. Zvonarev V.V., Popov A.S., Khudik M.Yu. *Trudy MAI*, 2019, no. 105, URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104213>
12. Zvonarev V.V., Pimenov V.F., Popov A.S. *Trudy Voенно-kosmicheskoi akademii imeni A.F. Mozhaiskogo*, 2021, no. 677, pp. 50-60.
13. Zvonarev V.V., Moroz A.V., Sherstyuk A.V. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105683>
14. Kulikov G.V., Lelyukh A.A., Grachenko E.N. *Radiotekhnika i elektronika*, 2020, vol. 65, no. 8, pp. 804-808. DOI: [10.31857/S0033849420070074](https://doi.org/10.31857/S0033849420070074)
15. Kirillov S.N., Lisnichuk A.A. *Proc. 14th International Scientific-Technical Conference on Actual Problems of Electronics Instrument Engineering*, IEEE, Novosibirsk, 2018, pp. 50-54. DOI:[10.1109/APEIE.2018.8545965](https://doi.org/10.1109/APEIE.2018.8545965)
16. Mironov A.N., Tsvetkov K.Yu., Koval'skii A.A., Pal'gunov V.Yu. *Trudy MAI*, 2018, no. 99, URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=91968>

17. Brodskii M.S., Rozganov M.V., Utkin D.R. *Izvestiya instituta inzhenernoi fiziki*, 2021, no. 1 (59), pp. 24-28.
18. Savishchenko N.V., Lebeda E.V. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy*, 2019, no. 1, pp. 76-88. DOI: [10.31799/1684-8853-2019-1-76-88](https://doi.org/10.31799/1684-8853-2019-1-76-88)
19. Likhachev V.P., Sidorenko S.V. *Trudy MAI*, 2018, no. 99. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=92074>
20. Voznyuk V.V., Kutsenko E.V. *Radioelektronika*, 2018, no. 2. URL: <http://jre.cplire.ru/jre/feb18/1/text.pdf>

Статья поступила в редакцию 02.03.2022

Статья после доработки 04.03.2022

Одобрена после рецензирования 19.04.2022

Принята к публикации 21.06.2022

The article was submitted on 02.03.2022; approved after reviewing on 19.04.2022; accepted for publication on 21.06.2022