

Научная статья

УДК 621.396

DOI: [10.34759/trd-2023-129-16](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-16)

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТИ ПРИЕМНИКОВ СИГНАЛОВ С ДИСКРЕТНОЙ ФАЗОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ В УСЛОВИЯХ ПОМЕХ С УГЛОВОЙ МОДУЛЯЦИЕЙ И ШУМОВ

Андрей Викторович Паршуткин¹, Дмитрий Игоревич Бучинский^{2✉},

Дмитрий Александрович Комлык³

^{1,2,3}Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского,

Санкт-Петербург, Россия

²vka@mil.ru✉

Аннотация. Статья посвящена исследованию помехоустойчивости когерентных квадратурных приемников, использующих сигналы с дискретной фазовой модуляцией. В статье рассмотрено воздействие аддитивной смеси белого гауссовского шума и непреднамеренной помехи с угловой модуляцией во время приема BPSK и QPSK сигналов. Ширина спектра помехи с угловой модуляцией и ее центральная частота совпадают с шириной спектра и центральной частотой полезного сигнала. В качестве показателя качества функционирования приемника использовалась вероятность битовой ошибки. В статье приводится аналитическое исследование зависимости вероятности битовой ошибки от отношения мощности полезного сигнала и мощностей воздействующих на приёмник непреднамеренной помехи с угловой модуляцией и белого гауссовского шума. Приведена связь

полученных выражений с известными выражениями описывающими воздействие отдельно белого гауссовского шума и непреднамеренной помехи с угловой модуляцией на когерентный приемник сигналов с дискретной фазовой модуляцией. В статье приведено, как указанные выражения могут быть получены из полученных путем предельного перехода. С помощью полученных выражений показано, что при определённых мощностях непреднамеренной помехи возможно существенное изменение характера зависимости вероятности битовой ошибки от отношения сигнал-шум. Полученные аналитические зависимости вероятности битовой ошибки при приеме BPSK и QPSK сигнала на фоне непреднамеренных помех и белого гауссовского шума могут быть использованы для оценки электромагнитной совместимости систем связи, использующих сигналы с дискретной фазовой модуляцией.

Ключевые слова: помехоустойчивость, помеха с угловой модуляцией, электромагнитная совместимость, вероятность битовой ошибки, BPSK, QPSK

Для цитирования: Паршуткин А.В., Бучинский Д.И., Комлык Д.А. Исследование помехоустойчивости приемников сигналов с дискретной фазовой модуляцией в условиях помех с угловой модуляцией и шумов // Труды МАИ. 2023. № 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-16](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-16)

Original article

INVESTIGATION OF NOISE IMMUNITY OF SIGNAL RECEIVERS WITH DISCRETE PHASE MODULATION IN THE CONDITIONS OF INTERFERENCE WITH ANGULAR MODULATION AND NOISE

Andrey V. Parshutkin¹, Dmitry I. Buchinsky²✉, Dmitry A. Komlyk³

^{1,2,3}Military space Academy named after A.F. Mozhaisky, 13, Zdanovskaya str., Saint Petersburg, Russia

²vka@mil.ru✉

Abstract. The article deals with the noise immunity study of the coherent quadrature receivers employing signals with discrete phase modulation, and considers the impact of an additive mixture of white Gaussian noise and angle-modulated unintentional interference during the BPSK and QPSK signals reception. Spectrum bandwidth of the interference with angular modulation and its center frequency match spectrum bandwidth and center frequency of the useful signal. The bit error rate was used as quality indicator of the receiver's functioning. The article presents an analytical study of the bit error rate dependence on the ratio of the useful signal power to the powers affecting the receiver of unintentional noise with angular modulation and white Gaussian noise. The association of the obtained expressions with the known expressions describing the effect of separately white Gaussian noise and unintentional interference with angular modulation on a coherent signal receiver with discrete phase modulation is adduced. The article explains how these expressions may be obtained from those obtained, by way of the passage to the limit. The authors demonstrate with the obtained expressions that at the certain powers of unintentional interference significant change of the bit error rate dependence on the signal-noise ratio is possible. The obtained analytical dependences of the bit error rate while receiving both BPSK and QPSK signal against the background of unintentional interference and white

Gaussian noise may be applied to assess the electromagnetic compatibility of communication systems using discrete phase modulation signals.

Keywords: noise immunity, angle-modulated noise, electromagnetic compatibility, bit error probability, BPSK, QPSK

For citation: Parshutkin A.V., Buchinsky D.I., Komlyk D.A. Investigation of noise immunity of signal receivers with discrete phase modulation in the conditions of interference with angular modulation and noise. *Trudy MAI*, 2023, no. 129. DOI: [10.34759/trd-2023-129-16](https://doi.org/10.34759/trd-2023-129-16)

Введение

Повсеместное внедрение телекоммуникационных технологий приводит к плотной загрузке электромагнитного спектра и обострению проблемы обеспечения электромагнитной совместимости радиоэлектронных средств. В настоящее время широкое распространение получили радиоэлектронные системы, использующие для передачи данных сигналы с угловой модуляцией и в частности сигналы с дискретной фазовой модуляцией [1-4]. Возникают ситуации, когда прием сигнала с дискретной фазовой модуляцией происходит в условиях наличия мешающих сигналов от передатчиков соседних радиоэлектронных средств [5-11]. Поэтому исследования помехоустойчивости приема сигналов с дискретной фазовой модуляцией при наличии непреднамеренных помех с угловой модуляцией являются актуальными.

Широко известны классические выражения для определения вероятности битовой ошибки при воздействии белого гауссовского шума на радиоэлектронные системы, использующие фазоманипулированные сигналы. Существуют выражения

для вероятности символьной ошибки при воздействии непреднамеренной помехи с угловой модуляцией [12-16]. Поэтому актуальной задачей является получение выражения для вероятности битовой ошибки при воздействии на радиоэлектронные системы связи использующие *BPSK* и *QPSK* сигналы смеси непреднамеренной помехи с угловой модуляцией и белого гауссовского шума.

Математическая модель полезного сигнала, непреднамеренной помехи с угловой модуляцией и шума

На входе устройства принятия решения когерентного квадратурного приемника комплексная огибающая смеси $\hat{s}(t)$ сигнала, шума и непреднамеренной помехи с угловой модуляцией нормированной к уровню сигнала может быть представлена в виде [17]:

$$\hat{s}(t) = e^{-j\varphi_c(t)} + A_{\text{п}} e^{-j\varphi_{\text{п}}(t)} + A_{\text{ш}}(t) e^{-j\varphi_{\text{ш}}(t)}, \quad (1)$$

где $\varphi_c(t)$ – разность фаз полезного и опорного сигнала, $\varphi_c(t) \in C_s$, где C_s – множество значений фазы полезного сигнала, $\varphi_{\text{п}}(t)$ – разность фаз непреднамеренной помехи и опорного колебания, распределенная равномерно от 0 до 2π , $\varphi_{\text{ш}}(t)$ – разность фаз шумового колебания и опорного сигнала, распределенная равномерно от 0 до 2π , $A_{\text{ш}}(t)$ – случайный процесс, $A_{\text{п}}$ – амплитуда помехи с угловой модуляцией нормированная, относительно амплитуды сигнала:

$$A_{\text{п}} = \frac{U_{\text{п}}}{U_c}, A_{\text{ш}}(t) = \frac{U_{\text{ш}}(t)}{U_c}, \quad (2)$$

где, U_c – амплитуда сигнала, $U_{\text{п}}$ – амплитуда помехи с угловой модуляцией, $U_{\text{ш}}(t)$ – случайный процесс.

Случайные процессы $A_{ш}(t)$ и $U_{ш}(t)$ будут представлять собой случайные процессы, отсчеты которых в моменты принятия решения не коррелированы и распределены по рэлеевскому закону. Синфазная и квадратурная составляющие отсчетов $A_{ш}(t)$ будут представлять собой независимые случайные величины имеющие нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией:

$$\sigma_{ш}^2 = \frac{\sigma_U^2}{U_c^2}, \quad (3)$$

где, $\sigma_{ш}^2$ – дисперсия шума.

При этом, отсчеты шумового колебания и его квадратурных составляющих будут не коррелированы в моменты принятия решения.

Работа устройства принятия решения в таком случае может быть представлена как определение ближайшей точки сигнального созвездия к положению годографа вектора комплексной огибающей смеси сигнала, непреднамеренной помехи и шума в момент принятия решения и выбор в качестве оценки переданного символа этой точки сигнального созвездия. Под годографом комплексной огибающей входной реализации понимается геометрическое место концов вектора комплексной огибающей суммы сигнала, шума и непреднамеренной помехи.

Аналитическое выражение для определения вероятности битовой ошибки при воздействии непреднамеренной помехи с угловой модуляцией и шума на *BPSK* приемник

Для нахождения вероятности битовой ошибки рассмотрим поведение годографа комплексной огибающей смеси $\hat{s}(t)$. В соответствии с (1) в момент

принятия решения положение годографа $\hat{s}(t)$ может быть найдено как сумма трех векторов. На рисунке 1а представлено геометрическое место точек суммы векторов сигнала и непреднамеренной помехи с угловой модуляцией – окружность L . Ось абсцисс соответствует синфазной составляющей рассматриваемых сигналов, а ось ординат – квадратурной. В случае с *BPSK* сигналом положим, что $C_s = \{-\pi, \pi\}$, тогда границей принятия решения будет являться ось ординат. Если годограф вектора аддитивной смеси сигнала, шума и непреднамеренной помехи с угловой модуляцией при условии передачи символа, фаза которого равна π , окажется правее оси ординат, то символ будет принят правильно, а если левее, то будет принято ошибочное решение.

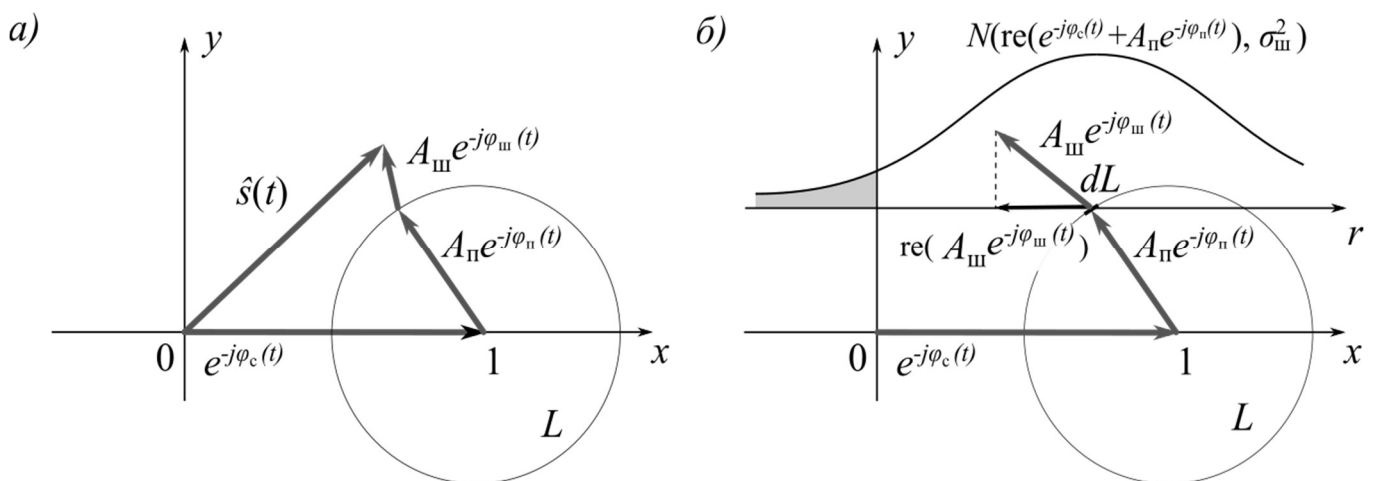


Рис. 1 – Годограф вектора комплексной огибающей смеси $\hat{s}(t)$

Рассмотрим случай, когда относительная амплитуда непреднамеренной помехи с угловой модуляцией, меньше единицы, т.е. амплитуда полезного сигнала превышает амплитуду помехи. Как видно, из рисунка 1а в таких условиях помеха не

может вызвать ошибки. Однако существует вероятность, что воздействие шума приведет к тому, что в момент принятия решения годограф вектора комплексной огибающей аддитивной шуми окажется левее оси ординат. Для того что бы рассчитать эту вероятность рассмотрим элементарную дугу dL окружности L . Через некоторую точку на этой дуге проведем ось Or параллельную оси Ox , как показано на рисунке 1б. Проекция синфазной составляющей шума будет распределена по нормальному закону с дисперсией равной $\sigma_{ш}^2$ и математическим ожиданием равным действительной части суммы комплексных огибающих сигнала и помехи $\text{re}(e^{-j\varphi_c(t)} + A_{ш}e^{-j\varphi_{п}(t)})$, т.е. значению координаты x выбранной точки на окружности L . Вероятность ошибки при условии, что сумма векторов сигнала и непреднамеренной помехи попадет в рассматриваемую дугу dL равна вероятности того, что синфазная составляющая шума будет меньше, чем расстояние от дуги dL до оси ординат и равна:

$$P_{dL} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\sigma_{ш})} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r-x(t)}{\sigma_{ш}}\right)^2} dr. \quad (4)$$

Используя в (4) замену $r' = (r - x(t)) / \sigma_{ш}$:

$$P_{dL} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x(t)}{\sigma_{ш}}} e^{-\frac{r'^2}{2}} dr' = \Phi\left(-\frac{x(t)}{\sigma_{ш}}\right). \quad (5)$$

Тогда, можно говорить о том, что в каждой точке окружности L задана функция равная вероятности того, что передаваемый символ будет принят с ошибкой при условии, что сумма векторов комплексной огибающей сигнала и непреднамеренной помехи попала в эту точку. Вероятность попадания суммы векторов сигнала и непреднамеренной помехи на дугу dL равна $dL/(2\pi A_{ш})$, поскольку фаза

непреднамеренной помехи распределена равномерно. Поэтому для получения вероятности битовой ошибки следует умножить (5) на $dL/(2\pi A_n)$ и просуммировать по всем точкам. Совершив предельный переход получим криволинейный интеграл первого рода:

$$p_{ber}^{bpsk} = \int_L \frac{1}{(2\pi A_n)} \Phi \left(-\frac{x(t)}{\sigma_{ш}} \right) dL. \quad (6)$$

Используя формулу для криволинейного интеграла первого рода, учитывая, что уравнение окружности L в параметрическом виде может быть задано как $x = A_n \cos t + 1$, $y = A_n \sin t$, $t \in [-\pi, \pi]$ запишем (6) в виде:

$$p_{ber}^{bpsk} = \frac{1}{2\pi A_n} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi \left(-\frac{x(t)}{\sigma_{ш}} \right) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (7)$$

Вычислив производные, используя основное тригонометрическое тождество и принимая во внимание симметрию получим:

$$p_{ber}^{bpsk} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi \left(-\frac{(A_n \cos t + 1)}{\sigma_{ш}} \right) dt. \quad (8)$$

Рассмотрим случай когда амплитуда непреднамеренной помехи превышает амплитуду полезного сигнала, т.е. случай когда $A_n > 1$. Из рисунка 2а видно, что для рассматриваемого случая справедливы рассуждения приведенные выше, поэтому формула (8) для вычисления вероятности битовой ошибки не изменится.

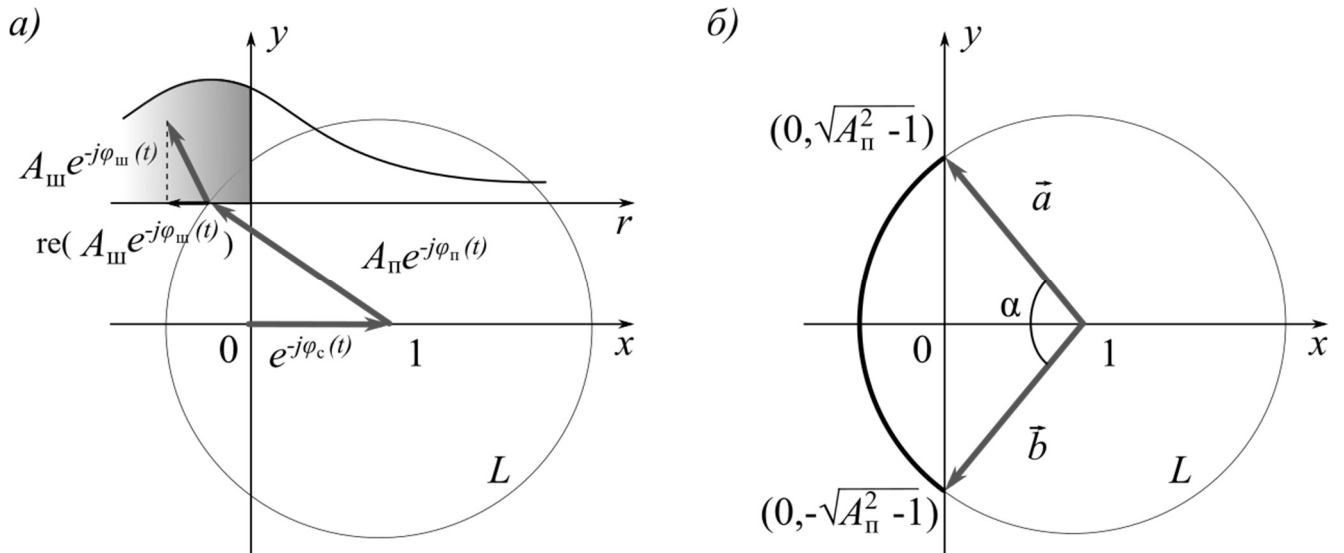


Рис. 2 – Годограф вектора комплексной огибающей смеси $\hat{s}(t)$ при $A_п > 1$

Для предельного перехода к формуле вычисления вероятности битовой ошибки при отсутствии шума, т.е. при $\sigma_ш \rightarrow 0$, рассмотрим рисунок 2б. Зная уравнение окружности, $(x-1)^2 + y^2 = A_п^2$, где x и y – координаты точек, для нахождения пересечения с осью y , $x=0$, получим: $y = \pm \sqrt{A_п^2 - 1}$, тогда вектора \vec{a} и \vec{b} имеют следующие координаты: $\vec{a} = (-1; -\sqrt{A_п^2 - 1})$, $\vec{b} = (-1; \sqrt{A_п^2 - 1})$.

Находим угол α из скалярного произведения векторов \vec{a} и \vec{b} :

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a}\vec{b}^T}{A_п^2} = \frac{2 - A_п^2}{A_п^2}, \quad (9)$$

отсюда:

$$\alpha = \arccos \left(\frac{2 - A_п^2}{A_п^2} \right). \quad (10)$$

Представим интеграл (8) в виде суммы интегралов:

$$P_{ber}^{bpsk} = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi - \alpha}{2}} \Phi \left(-\frac{(A_п \cos t + 1)}{\sigma_ш} \right) dt + \int_{\frac{\pi - \alpha}{2}}^{\pi} \Phi \left(-\frac{(A_п \cos t + 1)}{\sigma_ш} \right) dt \right). \quad (11)$$

Для получения вероятности битовой ошибки при воздействии только непреднамеренной помехи $p_{ber}^{bpsk}(\sigma_{ш} = 0)$ рассмотрим предел:

$$p_{ber}^{bpsk}(\sigma_{ш} = 0) = \lim_{\sigma_{ш} \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi - \frac{\alpha}{2}} \Phi \left(-\frac{(A_{п} \cos t + 1)}{\sigma_{ш}} \right) dt + \int_{\pi - \frac{\alpha}{2}}^{\pi} \Phi \left(-\frac{(A_{п} \cos t + 1)}{\sigma_{ш}} \right) dt \right). \quad (12)$$

Из рисунка 2б видно, что для точек на дуге α числитель аргумента функции Лапласа ограничен и отрицателен, для точек на остальной окружности ограничен и положителен. Поскольку знаменатель аргумента функции Лапласа стремится к нулю, выражение (12) принимает вид:

$$p_{ber}^{bpsk}(\sigma_{ш} = 0) = \frac{1}{\pi} \left(\int_0^{\pi - \frac{\alpha}{2}} \Phi(-\infty) dt + \int_{\pi - \frac{\alpha}{2}}^{\pi} \Phi(\infty) dt \right). \quad (13)$$

Воспользовавшись свойствами функции Лапласа $\Phi(-\infty)=0$ и $\Phi(\infty)=1$ получим:

$$p_{ber}^{bpsk}(\sigma_{ш} = 0) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi - \frac{\alpha}{2}}^{\pi} 1 dt. \quad (14)$$

Используя выражение (10) и формулу Ньютона-Лейбница:

$$p_{ber}^{bpsk}(\sigma_{ш} = 0) = \frac{1}{\pi} \left(\pi - \pi + \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{2 - A_{п}^2}{A_{п}^2} \right). \quad (15)$$

Учитывая, что длина дуги α равна нулю при $A_{ш} \leq 1$, итоговое выражение для вероятности битовой ошибки при воздействии только непреднамеренной помехи получим:

$$p_{ber}^{bpsk}(\sigma_{ш} = 0) = \begin{cases} 0, & \text{для } A_{п} \leq 1; \\ \frac{1}{2\pi} \arccos \left(\frac{2 - A_{п}^2}{A_{п}^2} \right), & \text{для } A_{п} > 1. \end{cases} \quad (16)$$

Введем отношение мощности сигнала к мощности помехи $Q_{\text{п}}$, которое в соответствии с (2) может быть записано в виде:

$$Q_{\text{п}} = \frac{1}{A_{\text{п}}^2}. \quad (17)$$

С учетом (17) выражение (16) принимает вид:

$$p_{\text{ber}}^{\text{bpsk}}(\sigma_{\text{ш}} = 0) = \begin{cases} 0, & \text{для } Q_{\text{п}} \geq 1; \\ \frac{1}{2\pi} \arccos(2Q_{\text{п}} - 1), & \text{для } Q_{\text{п}} < 1. \end{cases} \quad (18)$$

С другой стороны, при отсутствии непреднамеренной помехи, т.е. при $A_{\text{п}} = 0$, выражение (8) принимает вид:

$$p_{\text{ber}}^{\text{bpsk}}(A_{\text{п}} = 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \Phi\left(-\frac{1}{\sigma_{\text{ш}}}\right) dt. \quad (19)$$

В полученном выражении подынтегральная функция не зависит от переменной интегрирования и может быть вынесена из под знака интеграла, а полученный интеграл равен единице и, учитывая (3), выражение (19) можно записать в виде:

$$p_{\text{ber}}^{\text{bpsk}}(A_{\text{п}} = 0) = \Phi\left(-\sqrt{Q_{\text{ш}}}\right), \quad (20)$$

где $Q_{\text{ш}}$ – отношение мощности сигнала к мощности шума. Выражение (20) является известной формулой для вычисления битовой ошибки при воздействии белого гауссовского шума.

Выражение (8) позволяет построить зависимости вероятности битовой ошибки при воздействии на приемное устройство BPSK сигналов непреднамеренной помехи и белого гауссовского шума. На рисунке 3а приведены зависимости вероятности битовой ошибки от отношения мощностей сигнала и шума при воздействии

непреднамеренной помехи с угловой модуляцией фиксированной мощности. Из рисунка видно, что помехи малой мощности существенного влияния на характер зависимости не оказывают. На рисунке 3б приведены зависимости вероятности битовой ошибки от отношения мощности сигнала к мощности помехи. Как видно из рисунка, непреднамеренная помеха при отсутствии шума не может приводить к ошибкам при приеме BSK сигнала только при отношении сигнал-помеха меньше 0 дБ. Это объясняется тем, что для смещения годографа комплексной огибающей смеси сигнала и помехи из области решения, соответствующей передаваемому символу, необходимо, чтобы амплитуда помехи превышала амплитуду сигнала. Однако, при добавлении к помехе белого гауссовского шума характер зависимостей существенно меняется. Так при наличии относительно небольшого шума, соответствующего отношению сигнал-шум в 10 дБ, вероятность битовой ошибки остается очень высокой при высоких отношениях сигнал-помеха – превышая значение 10^{-4} [18, 19], являющегося пороговым значением качества каналов для широкого класса телекоммуникационных систем.

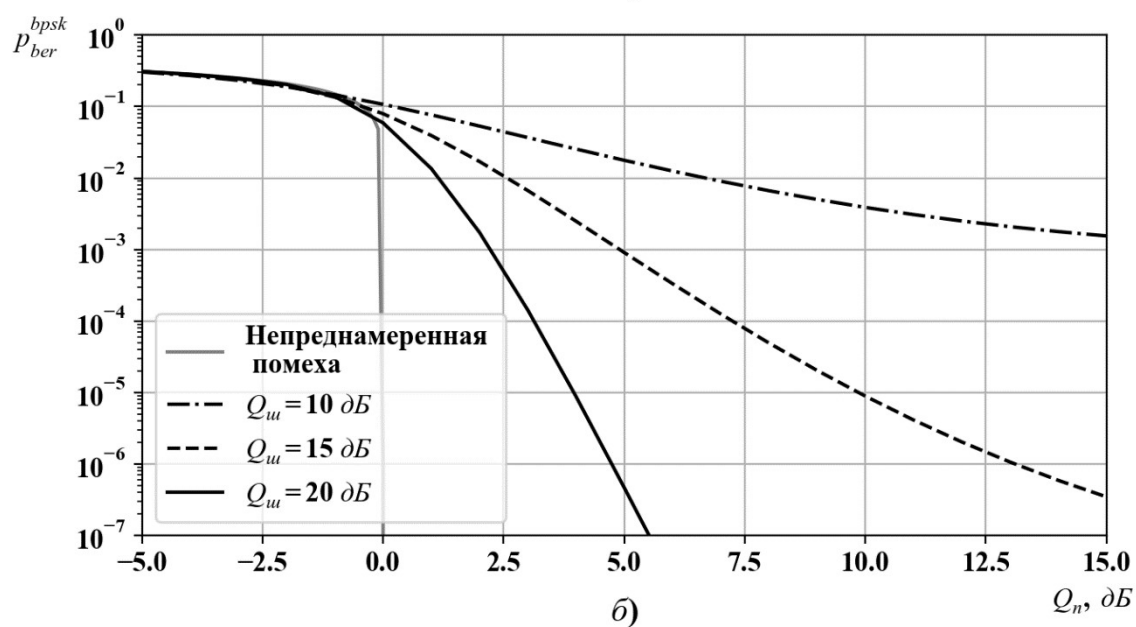
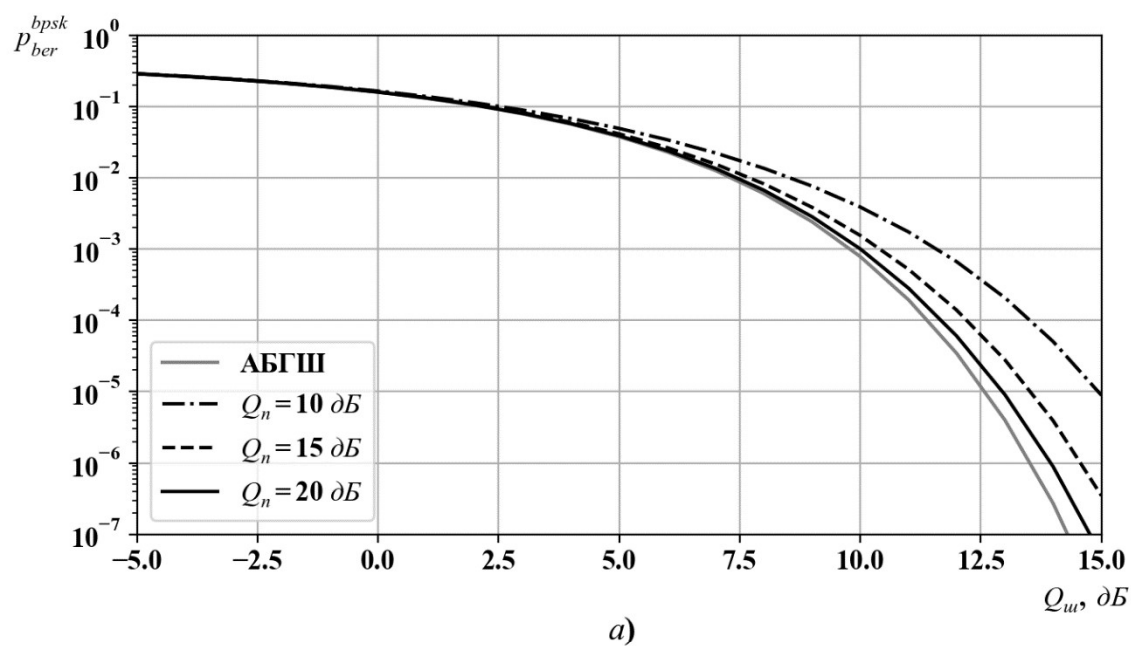


Рис. 3 – Зависимости вероятности битовой ошибки а) от отношения мощностей сигнала и шума и б) от отношения мощностей сигнала и непреднамеренной помехи

Отдельно следует отметить поведение зависимостей вероятности битовой ошибки при малых отношениях сигнал-помеха. Как видно из рисунка 4, при отношениях сигнал-помеха меньше -1 дБ добавление шума приводит к некоторому уменьшению вероятности битовой ошибки. Это связано с тем, что при таких

отношениях сигнал-помеха, дуга α , располагающаяся в области решения, соответствующей ошибочному решению, проходит близко к границе принятия решения, а части окружности L , остающиеся в пределах правильной области принятия решения, в основном, располагаются на более значительном расстоянии.

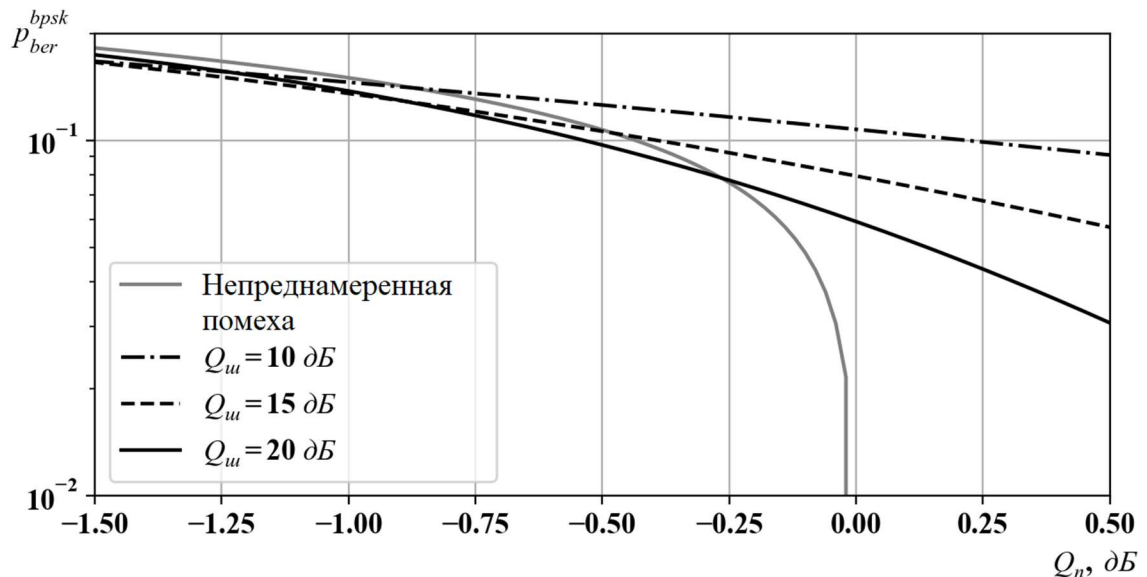


Рис. 4 – Зависимости вероятности битовой ошибки при малых отношениях сигнал-помеха

Поэтому при добавлении шума вероятность возвращения годографа смеси $\hat{s}(t)$ в область решения, соответствующая передаваемому символу, при условии попадания суммы сигнала и помехи на дугу α , возрастает быстрее, чем условная вероятность попадания годографа с остальной части окружности L в область решения, соответствующую ошибке.

**Аналитическое выражение для определения вероятности битовой ошибки при
воздействии непреднамеренной помехи с угловой модуляцией и шума на QPSK
приемник**

Для вычисления вероятности битовой ошибки при воздействии непреднамеренной помехи и шума на приемник QPSK сигналов рассмотрим возможные варианты символьных ошибок. Любой QPSK символ отличается от других либо на один бит, либо на два. Положим сигнальное созвездие $C_s = \{\pi/4, 3\pi/4, -\pi/4, -3\pi/4\}$, тогда границами принятия решения будут оси комплексной плоскости. Будем считать, что используется код Грея, т.е. символы, соответствующие точкам в противоположенных квадрантах отличаются на два бита, а в соседних – на один. Рассмотрим передачу символа, соответствующего точке сигнального созвездия, расположенной в первом квадранте. Тогда полная вероятность битовой ошибки p_{ber}^{qpsk} может быть записана следующим образом [венцель]:

$$p_{ber}^{qpsk} = p_{ber}^{qpsk}(P_{II})P_{II} + p_{ber}^{qpsk}(P_{III})P_{III} + p_{ber}^{qpsk}(P_{IV})P_{IV}, \quad (21)$$

где $p_{ber}^{qpsk}(P_i)$ – вероятность, битовой ошибки при условии смещения годографа комплексной огибающей суммы сигнала, непреднамеренной помехи и шума $\hat{s}(t)$ в i -й квадрант, P_i – вероятность смещения годографа комплексной огибающей $\hat{s}(t)$ в i -й квадрант, $i \in \{II, III, IV\}$. Учитывая, что при смещении годографа комплексной огибающей $\hat{s}(t)$ во второй и четвертый квадрант ошибки возникают в половине битов, а при смещении в четвертый – во всех запишем выражение (21) в виде:

$$p_{ber}^{qpsk} = \frac{1}{2}(P_{II} + P_{IV}) + P_{III}. \quad (22)$$

Для нахождения вероятностей P_i будем рассуждать аналогично случаю с *BPSK* сигналом и рассмотрим вероятность попадания годографа $\hat{s}(t)$ в различные квадранты при условии, что сумма векторов комплексных огибающих сигнала и непреднамеренной помехи попала на элементарную дугу dL , как показано на рисунке 5.

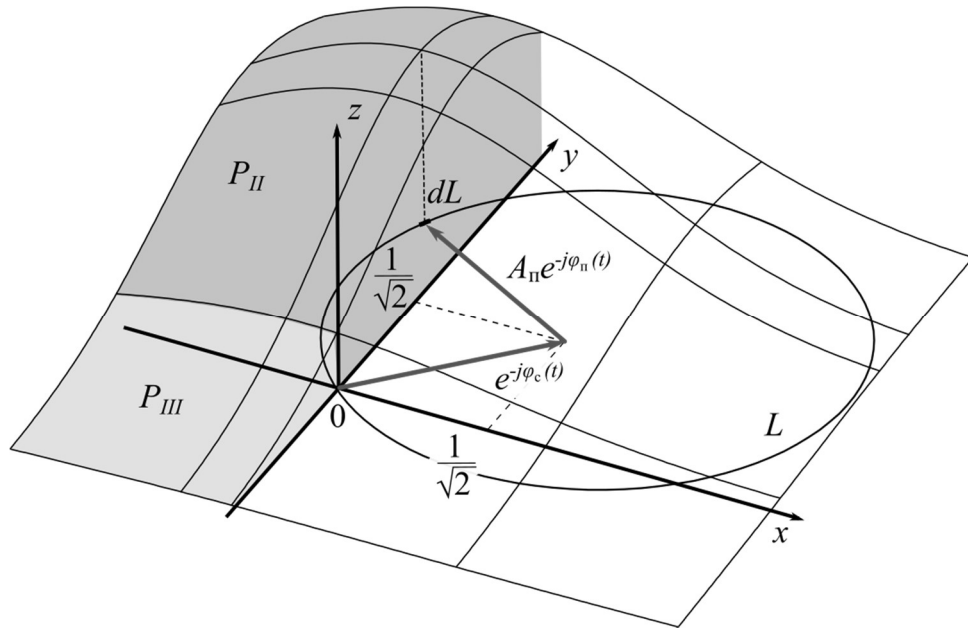


Рис. 5 – Плотность распределения годографа вектора комплексной огибающей смеси $\hat{s}(t)$ при условии попадания суммы сигнала и помехи на элементарную дугу dL

Поскольку шум может быть представлен, как сумма двух проекций, распределенных независимо по нормальному закону с математическими ожиданиями, равными координатам элементарной дуги, и среднеквадратическими отклонениями, равными $\sigma_{ш}$, то условная плотность вероятности шума может быть записана как:

$$\omega_{ш}(r, s | e^{-j\varphi_c(t)} + A_n e^{-j\varphi_n(t)} \in dL) = \frac{1}{2\pi\sigma_{ш}^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r-x}{\sigma_{ш}}\right)^2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-y}{\sigma_{ш}}\right)^2}. \quad (23)$$

Тогда сумма вероятностей попадания годографа $\hat{s}(t)$ в третий P'_{III} и второй P'_{II} квадрант, при условии попадания суммы сигнала и помехи на дугу dL равна:

$$P'_{II} + P'_{III} = \frac{1}{2\pi\sigma_{ш}^2} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r-x}{\sigma_{ш}}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s-y}{\sigma_{ш}}\right)^2} ds dr. \quad (24)$$

После интегрирования по переменной s имеем:

$$P'_{II} + P'_{III} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ш}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r-x}{\sigma_{ш}}\right)^2} dr. \quad (25)$$

Используя замену $r' = (r - x) / \sigma_{ш}$ и выражая P'_{II} получим:

$$P'_{II} = \Phi\left(-\frac{x}{\sigma_{ш}}\right) - P'_{III}. \quad (26)$$

Аналогично находим вероятность P'_{IV} :

$$P'_{IV} = \Phi\left(-\frac{y}{\sigma_{ш}}\right) - P'_{III}. \quad (27)$$

Подставляя (26), (27) в (22) и приведя подобные, получаем:

$$p_{ber}^{qpsk}(x, y | e^{-j\varphi_c(t)} + A_n e^{-j\varphi_n(t)} \in dL) = \frac{1}{2} \left(\Phi\left(-\frac{x}{\sigma_{ш}}\right) + \Phi\left(-\frac{y}{\sigma_{ш}}\right) \right). \quad (28)$$

Умножая (28) на $dL/(2\pi A_n)$ и интегрируя по окружности L , найдем вероятность битовой ошибки:

$$p_{ber}^{qpsk} = \frac{1}{4\pi A_n} \int_L \left(\Phi\left(-\frac{x}{\sigma_{ш}}\right) + \Phi\left(-\frac{y}{\sigma_{ш}}\right) \right) dL. \quad (29)$$

Используя формулу для криволинейного интеграла первого рода, учитывая, что уравнение окружности L теперь задано как $x = A_n \cos t + 1/\sqrt{2}$, $y = A_n \sin t + 1/\sqrt{2}$, $t \in [0, 2\pi]$, запишем (29) в виде:

$$p_{ber}^{qpsk} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\Phi \left(-\frac{A_n \cos t + 1/\sqrt{2}}{\sigma_{ш}} \right) + \Phi \left(-\frac{A_n \sin t + 1/\sqrt{2}}{\sigma_{ш}} \right) \right) dt. \quad (30)$$

Выражение (30) можно привести к виду:

$$p_{ber}^{qpsk} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi \left(-\frac{A_n \cos t + 1/\sqrt{2}}{\sigma_{ш}} \right) dt. \quad (31)$$

Для получения формулы битовой ошибки при воздействии только непреднамеренной помехи рассмотрим предел:

$$p_{ber}^{qpsk}(\sigma_{ш} = 0) = \lim_{\sigma_{ш} \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\Phi \left(-\frac{A_n \cos t + 1/\sqrt{2}}{\sigma_{ш}} \right) + \Phi \left(-\frac{A_n \sin t + 1/\sqrt{2}}{\sigma_{ш}} \right) \right) dt. \quad (32)$$

При $A_n < 1/\sqrt{2}$ аргумент обеих подынтегральных функций Лапласа будет стремиться к минус бесконечности поскольку числители их аргументов ограничены и положительны, а знаменатель стремится к нулю. Ввиду того, что $\Phi(-\infty)=0$, все подынтегральное выражение стремится к нулю, а значит вероятность битовой ошибки при этом равна нулю.

Из рисунка ба видно, что в случае $1/\sqrt{2} \leq A_n \leq 1$, аргумент первой подынтегральной функции Лапласа в выражении (32) будет стремиться к нулю всюду, за исключением дуги α , а аргумент второй подынтегральной функции Лапласа будет стремиться к нулю всюду за исключением дуги γ . На дуге α первая функция Лапласа будет равна единице, равно как и вторая функция будет равна единице на дуге γ .

Поэтому выражение (32) можно переписать в виде суммы интегралов:

$$p_{ber}^{qpsk}(\sigma_{ш} = 0) = \frac{1}{4\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi-\alpha}{2}} 0 dt + \int_{\frac{\pi-\alpha}{2}}^{\frac{\pi+\alpha}{2}} 1 + 0 dt + \int_{\frac{3}{4}\pi-\frac{\gamma}{2}}^{\frac{3}{4}\pi+\frac{\gamma}{2}} 0 + 1 dt + \int_{\frac{3}{4}\pi+\frac{\gamma}{2}}^{2\pi} 0 dt \right). \quad (33)$$

Используя формулу Ньютона-Лейбница и учитывая, что $\alpha = \gamma$ получим:

$$p_{ber}^{qpsk}(\sigma_{ш} = 0) = \frac{\alpha}{2\pi}. \quad (34)$$

Найдя длину дуги альфа, аналогично случаю с *BPSK* сигналом и подставив ее в (34) имеем:

$$p_{ber}^{qpsk}(\sigma_{ш} = 0) = \frac{1}{2\pi} \arccos\left(\frac{1 - A_{п}^2}{A_{п}^2}\right). \quad (35)$$

Для случая когда $A_{п} > 1$ появляется участок окружности L , где обе функции Лапласа будут стремиться к единице – это дуга β , показанная на рисунке бб.

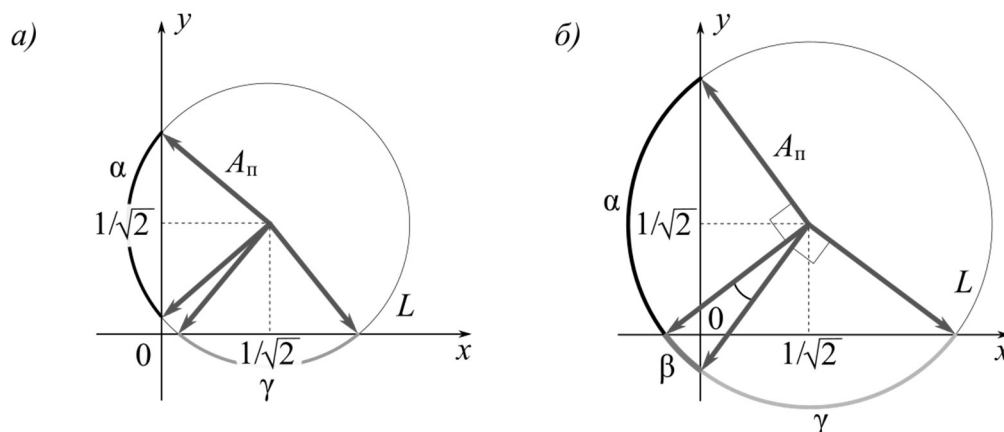


Рис. 6 – Геометрическое место точек годографа комплексной огибающей сигнала и непреднамеренной помехи для *QPSK* сигнала, когда а) окружность L находится в I,

II и IV квадрантах и б) во всех квадрантах

Кроме того, можно показать, что для этого случая дуги α и γ равны $\pi/2$ и не зависят от $A_{п}$. Повторяя рассуждения приведенные выше, вычислив длину дуги β аналогично случаю с *BPSK* получим:

$$p_{ber}^{qpsk}(\sigma_{ш} = 0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2\pi} \arccos \cos \left(\frac{\sqrt{2A_{п}^2 - 1}}{A_{п}^2} \right). \quad (36)$$

Вспоминая выражение (17) и учитывая (35), (36) запишем:

$$p_{ber}^{qpsk}(\sigma_{ш} = 0) = \begin{cases} 0, & \text{для } Q_{п} > 2; \\ \frac{1}{2\pi} \arccos(Q_{п} - 1), & \text{для } 1 \leq Q_{п} \leq 2; \\ 0,25 + \frac{1}{2\pi} \arccos(\sqrt{2Q_{п} - Q_{п}^2}), & \text{для } Q_{п} < 1. \end{cases} \quad (37)$$

Рассматривая отсутствие помехи, т.е. при $A_{п} = 0$, легко видеть, что выражение (30) принимает вид:

$$p_{ber}^{qpsk}(A_{п} = 0) = \Phi \left(-\sqrt{\frac{Q_{ш}}{2}} \right). \quad (38)$$

Выражение (20) и (38) при переходе от отношения мощностей сигнала и помехи к отношению энергии бита к спектральной плотности шума совпадают, что соответствует известным теоретическим результатам.

На рисунке 7 представлены зависимости вероятности битовой ошибки от отношения мощностей сигнала и непреднамеренной помехи для *QPSK* сигнала, полученные с помощью выражения (31).

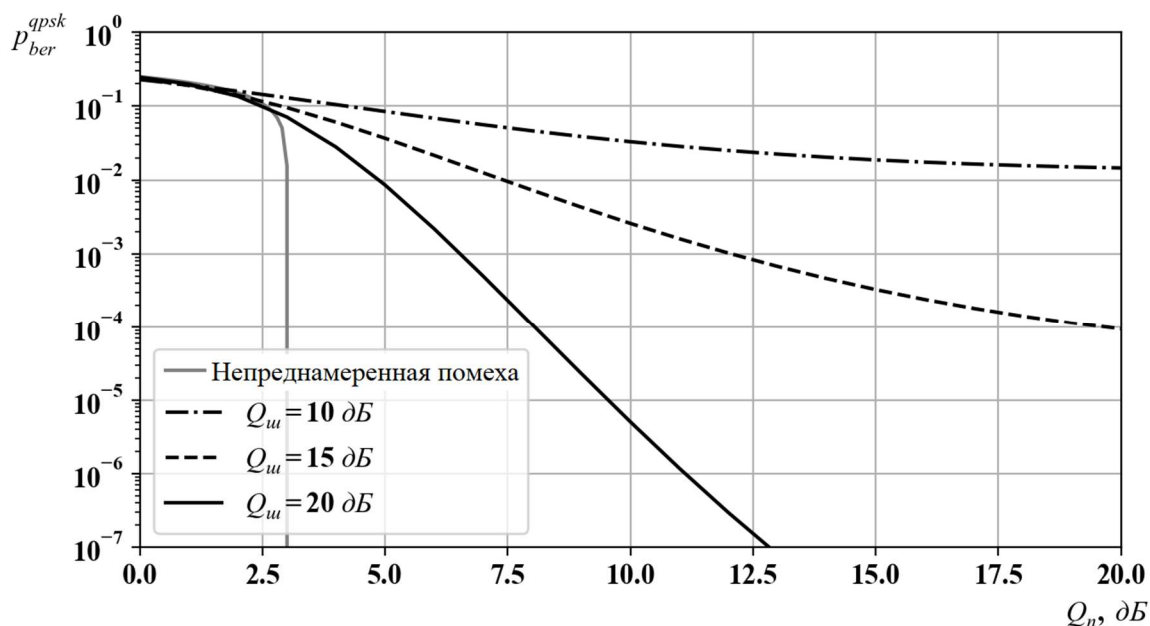


Рис. 7 – Зависимости вероятности битовой ошибки от отношения мощностей сигнала и непреднамеренной помехи для *QPSK* сигнала

Как видно из рисунка, характер зависимостей в целом повторяет характер зависимостей для случая с *BPSK*. При этом следует отметить, что при отношении мощностей сигнала и помехи в 3 дБ при отсутствии шума вероятность битовой ошибки стремится к нулю, так как отношение амплитуд сигнала и непреднамеренной помехи в этом случае не превышает $1/\sqrt{2}$. Поэтому, как видно из рисунка б, не может вызвать ошибку при приеме канальных символов.

Заключение

В статье получены аналитические выражения для расчета вероятности битовой ошибки при воздействии непреднамеренной помехи с угловой модуляцией и белого гауссовского шума на радиоэлектронные средства использующие *BPSK* и *QPSK* сигналы. Полученные зависимости показывают, что наличие непреднамеренной

помехи с угловой модуляцией на фоне гауссовского белого шума способно привести к неприемлимому снижению качества канала связи даже в условиях когда отношения мощностей сигнала, непреднамеренной помехи и шума находится в диапазоне значений, характерных для нормальной работы.

Полученные выражения (19) и (31) могут быть использованы при оценке качества функционирования систем связи в условиях взаимных помех с угловой модуляцией для количественной оценки электромагнитной совместимости.

Список источников

1. Казак П.Г., Шевцов В.А. Принципы построения энергоэффективной системы сотовой связи и беспроводного широкополосного доступа в Интернет для Арктики // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=158239>. DOI 10.34759/trd-2021-118-06
2. Шевцов В.А., Бородин В.В., Крылов М.А. Построение совмещенной сети сотовой связи и самоорганизующейся сети с динамической структурой // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=66417>
3. Гуревич О.С., Кессельман М.Г., Трофимов А.С., Чернышов В.И. Современные беспроводные технологии: проблемы применения на авиационном борту // Труды МАИ. 2017. № 94. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=81143>
4. Бахтин А.А., Омелянчук Е.В., Семенова А.Ю. Анализ современных возможностей организации сверхвысокоскоростных спутниковых радиолиний // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=85828>

5. Куликов Г.В., Данг С.Х. Помехоустойчивость приема сигналов с амплитудно-фазовой манипуляцией в присутствии фазоманипулированной помехи // Журнал радиоэлектроники. 2021. № 11. DOI 10.30898/1684-1719.2021.11.7
6. Мальцев Г.Н., Травкин В.С. Оптимальный прием сложных фазоманипулированных сигналов в спутниковых радиоканалах в условиях внутрисистемных помех // Информационно-управляющие системы. 2006. № 5. С. 32–42.
7. Куликов Г.В., Лелюх А.А., Граченко Е.Н. Помехоустойчивость когерентного приемника сигналов с квадратурной амплитудной модуляцией при наличии ретранслированной помехи // Радиотехника и электроника. 2020. Т. 65. № 8. С. 804-808. DOI 10.31857/S0033849420070074.
8. Агеев Ф.И., Вознюк В.В., Худик М.Ю. Повышение помехоустойчивости систем передачи данных фазоманипулированными шумоподобными сигналами в условиях действия помех с различной спектральной структурой на основе целенаправленной модификации спектра сигнала // Труды МАИ. 2021. № 118. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=158242>. DOI 10.34759/trd-2021-118-08
9. Бояршинов М.А., Зыкин А.А. Помехоустойчивость сигналов ФМ-2 с ППРЧ в условиях воздействия преднамеренных помех // XIII Международная научно-техническая конференция «Приборостроение в XXI веке - 2017. Интеграция науки, образования и производства» (Ижевск, 22–24 ноября 2017): сборник трудов. - Ижевск: Ижевский государственный технический университет им. М.Т. Калашникова, 2018. С. 533-539.
10. Паршуткин А.В., Бучинский Д.И. Модель функционирования канала спутниковой связи в условиях искажений служебной части кадров нестационарными //

Информатика и автоматизация. 2020. Т. 19. № 5. С. 967-990. DOI: [10.15622/ia.2020.19.5.3](https://doi.org/10.15622/ia.2020.19.5.3)

11. Агеев Ф.И., Ворона М.С., Звонарев В.В., Попов А.С. Методика расчета помехоустойчивости системы радиосвязи с учетом динамических характеристик случайных замираний сигнала // Радиотехника. 2018. № 5. С. 92-99.

12. Довбня В.Г., Коптев Д.С., Бабанин И.Г. Оценка потенциальной помехоустойчивости приёма цифровых сигналов, используемых в современных и перспективных системах радиорелейной и спутниковой связи // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. 2020. Т. 10. № 1. С. 21-35.

13. S. Ahn, S. An, H. Oh, D. Yoon. Approximate Closed-form Expression for the Average BER of M-ary PSK with Gaussian-distributed Phase Error // 27th International Conference on Telecommunications (ICT), 2020, pp. 1-4. DOI: 10.1109/ICT49546.2020.9239556

14. Ложкин К.Ю., Прожеторко С.С. Синтез и оценка эффективности помех приемно-решающему устройству M-КАМ-сигнала на интервале приема последовательности из m посылок // Радиотехника. 2021. Т. 85. № 3. С. 37-48. DOI 10.18127/j00338486-202103-04

15. Ложкин К.Ю., Петров А.В., Миронов В.А. и др. Аналитические зависимости средней вероятности искажения бита W-КАМ-сигнала на фоне гармонической или фазоманипулированной помех с учетом замираний // Радиотехника. 2020. Т. 84. № 4 (8). С. 27-35. DOI 10.18127/j00338486-202004(8)-03.

16. Звонарев В.В., Попов А.С., Худик М.Ю. Методика расчета вероятности ошибки посимвольного приема дискретных сообщений при наличии помех // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=104213>
17. Радзиевский В.Г. Современная радиоэлектронная борьба. Вопросы методологии. – М.: Радиотехника, 2006. - 424 с.
18. Баранов В.М., Маслаков П.А., Ворона С.Г., Заживихин И.М. Модель исследования помехоустойчивости канала радиосвязи с двоичной фазовой манипуляцией при передаче видеоданных // Нелинейный мир. 2018. Т. 16. № 1. С. 26-32.
19. Куку К.И. Спутниковая связь: прошлое, настоящее и будущее. – М.: Горячая линия – Телеком, 2019. – 256 с.
20. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – М.: Советское радио, 1966. – 680 с.

References

1. Kazak P.G., Shevtsov V.A. *Trudy MAI*, 2021, no. 118. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158239>. DOI 10.34759/trd-2021-118-06
2. Shevtsov V.A., Borodin V.V., Krylov M.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=66417>
3. Gurevich O.S., Kessel'man M.G., Trofimov A.S., Chernyshov V.I. *Trudy MAI*, 2017, no. 94. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=81143>
4. Bakhtin A.A., Omel'yanchuk E.V., Semenova A.Yu. *Trudy MAI*, 2017, no. 96. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=85828>
5. Kulikov G.V., Dang S.Kh. *Zhurnal radioelektroniki*, 2021, no. 11. DOI 10.30898/1684-1719.2021.11.7

6. Mal'tsev G.N., Travkin V.S. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy*, 2006, no. 5, pp. 32–42.
7. Kulikov G.V., Lelyukh A.A., Grachenko E.N. *Radiotekhnika i elektronika*, 2020, vol. 65, no. 8, pp. 804-808. DOI 10.31857/S0033849420070074
8. Ageev F.I., Voznyuk V.V., Khudik M.Yu. *Trudy MAI*, 2021, no. 118. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=158242>. DOI 10.34759/trd-2021-118-08
9. Boyarshinov M.A., Zykin A.A. *XIII Mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Priborostroenie v XXI veke - 2017. Integratsiya nauki, obrazovaniya i proizvodstva»*: sbornik trudov. Izhevsk, Izhevskii gosudarstvennyi tekhnicheskii universitet im. M.T. Kalashnikova, 2018, pp. 533-539.
10. Parshutkin A.V., Buchinskii D.I. *Informatika i avtomatizatsiya*, 2020, vol. 19, no. 5, pp. 967-990. DOI: 10.15622/ia.2020.19.5.3
11. Ageev F.I., Vorona M.S., Zvonarev V.V., Popov A.S. *Radiotekhnika*, 2018, no. 5, pp. 92-99.
12. Dovbnaya V.G., Koptev D.S., Babanin I.G. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Upravlenie, vychislitel'naya tekhnika, informatika. Meditsinskoe priborostroenie*, 2020, vol. 10, no. 1, pp. 21-35.
13. S. Ahn, S. An, H. Oh, D. Yoon. Approximate Closed-form Expression for the Average BER of M-ary PSK with Gaussian-distributed Phase Error, *27th International Conference on Telecommunications (ICT)*, 2020, pp. 1-4. DOI: 10.1109/ICT49546.2020.9239556
14. Lozhkin K.Yu., Prozhetskoy S.S. *Radiotekhnika*, 2021, vol. 85, no. 3, pp. 37-48. DOI 10.18127/j00338486-202103-04

15. Lozhkin K.Yu., Petrov A.V., Mironov V.A. et al. *Radiotekhnika*, 2020, vol. 84, no. 4 (8), pp. 27-35. DOI 10.18127/j00338486-202004(8)-03
16. Zvonarev V.V., Popov A.S., Khudik M.Yu. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104213>
17. Radzievskii V.G. *Sovremennaya radioelektronnaya bor'ba. Voprosy metodologii* (Modern electronic warfare. Methodology issues), Moscow, Radiotekhnika, 2006, 424 p.
18. Baranov V.M., Maslakov P.A., Vorona S.G., Zazhivikhin I.M. *Nelineinyi mir*, 2018, vol. 16, no. 1, pp. 26-32.
19. Kukk K.I. *Sputnikovaya svyaz': proshloe, nastoyashchee i budushchee* (Satellite communications: past, present and future), Moscow, Goryachaya liniya – Telekom, 2019, 256 p.
20. Tikhonov V.I. *Statisticheskaya radiotekhnika* (Statistical radio engineering), Moscow, Sovetskoe radio, 1966, 680 p.

Статья поступила в редакцию 20.01.2023

Одобрена после рецензирования 02.03.2023

Принята к публикации 27.04.2023

The article was submitted on 20.01.2023; approved after reviewing on 02.03.2023; accepted for publication on 27.04.2023