

О нахождении обобщенного аналитического решения задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости

Хатунцева О.Н.^{1,2}

*¹Ракетно-космическая корпорация «Энергия» имени С.П. Королёва, ул. Ленина, 4А,
Королев, Московская область, 141070, Россия*

*²Московский физико-технический институт, национальный исследовательский
университет, Институтский переулок, 9. Долгопрудный,
Московская область, 141701, Россия*

e-mail: Olga.Khatuntseva@rsce.ru

Статья поступила 19.05.2021

Аннотация

Модификация уравнений Навье-Стокса за счет учета дополнительных степеней свободы, связанных с возбуждением стохастических пульсаций в потоке жидкости, позволила выделить два решения задачи течения жидкости в трубе кругового сечения (задаче Хагена-Пуазеля). Одно из этих решений реализуется при любых значениях числа Рейнольдса и соответствует ламинарному режиму течения, второе – реализуется только при достаточно больших значениях числа Рейнольдса и соответствует турбулентному режиму течения.

Однако, граничные условия – «прилипание» жидкости на стенках трубы с образованием линейного профиля скорости вблизи стенок на длине вязкого слоя: $V^+ \sim y^+$, и нулевая производная скорости в ее центре – позволяют получить «гладкое» решение задачи для произвольного числа Рейнольдса только в случае

ламинарного режима течения.

Граничные условия, произвольным образом «закрепляющие» решение в двух или более точках, в общем случае не гарантируют существование гладкого решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) или уравнений в частных производных (УЧП), даже если эти уравнения подчиняются теореме Коши о существовании и единственности.

Отсутствие гладкого решения ОДУ или УЧП во всей исследуемой области можно рассматривать с точки зрения существования двух или более асимптот решения, а также областей неопределенности между ними. В качестве обобщенного (в определенном в статье смысле) решения ОДУ или УЧП, имеющих две асимптоты решения, можно рассмотреть функцию, являющуюся суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением двух функций: одна из которых определяет одну из асимптот решения, а вторая определяет степень влияние этой асимптоты на общее решение в каждой точке исследуемой области.

С этой точки зрения в работе рассмотрено обобщенное решение задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости. Одна асимптота решения удовлетворяет граничному условию «прилипания» жидкости на стенке трубы, второй асимптотой решения является константа, задающая нулевую производную скорости на ее оси. Приведено сравнение с экспериментальными данными для универсального профиля скорости в пристеночной области течения.

Ключевые слова: стохастические системы, плотность вероятности, турбулентность, задача Хагена-Пуазейля.

1. Введение

Использование обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и уравнений в частных производных (УЧП), подчиняющихся теореме Коши о существовании и единственности, для описания физических процессов с заданными граничными и начальными условиями, предполагает существование одного гладкого решения, отражающего состояние рассматриваемой физической системы.

Тем не менее, существуют системы, которые в некотором диапазоне параметров могут находиться в двух или более состояниях. Примером таких систем являются гидродинамические течения, имеющие либо ламинарный, либо турбулентный режимы. Турбулентный режим течения обусловлен стохастическим процессом и отличается от детерминированного - ламинарного режима - производством энтропии.

Для описания таких систем в работах [1-5] был разработан метод, в котором уравнения Навье-Стокса (УНС) записываются в расширенном фазовом пространстве переменных, где в качестве дополнительной используется «стохастическая» переменная. В выражении для полной производной скорости по времени, эта переменная позволяет учитывать производство энтропии при переходе от ламинарного к турбулентному режиму течения.

При решении УЧП, полученных для течения с заданной геометрии методом разделения переменных появляется дополнительный параметр, способный принимать два значения (одно нулевое, другое ненулевое), который и позволяет «расщеплять» одно решение на два и, в результате, описывать как ламинарный, так

и турбулентные режимы течения. Решение, описывающее ламинарный режим течения и отвечающее условиям: «прилипание» жидкости на стенках трубы с образованием линейного профиля скорости вблизи стенок на длине вязкого слоя: $V^+ \sim y^+$, и нулевая производная скорости в центре трубы, остается гладким. При этом условие на образование линейного профиля скорости вблизи стенок для ламинарного режима течения выполняется автоматически. А решение, описывающее турбулентный режим течения при соблюдении тех же граничных условий, не допускает выполнения абсолютной гладкости решения. Однако, для стохастических процессов абсолютная гладкость решения, по-видимому, не является критерием его «правильности», поскольку, для того, чтобы поддерживать стохастический процесс, необходимы соответствующие условия. Такими условиями могут являться «несовместимые» граничные условия произвольным образом «закрепляющие» решение в двух или более точках и не допускающие существования гладких решений ОДУ или УЧП, даже если эти уравнения подчиняются теореме Коши о существовании и единственности.

Отсутствие гладкого решения ОДУ или УЧП во всей исследуемой области можно рассматривать с точки зрения существования двух или более асимптот решения, а также областей неопределенности между ними. В этих областях решение не может быть детерминированным, так как это противоречило бы теореме Коши о существовании и единственности, поскольку эволюционно продолжая решения сначала из одной граничной точки, а затем из другой, мы будем двигаться по

разным асимптотам. В том случае, если эти асимптоты не являются частями одного гладкого решения, то искусственное «сращивание» их в переходной области, означало бы появление дополнительных решений в точках «сращивания». Поэтому в случае, если не существует гладкого решения уравнения, удовлетворяющего заданным граничным условиям, то в областях, находящихся между непересекающимися асимптотами, или пересекающимися в точке с разрывом производных, могут возникнуть самоподдерживающиеся стохастические процессы. Их источником является «несовместимые» между собой граничные условия.

В качестве обобщенного (в определенном в статье смысле) решения ОДУ или УЧП, имеющих две асимптоты решения, можно рассмотреть функцию, являющуюся суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением двух функций: одна из которых определяет одну из асимптот решения, а вторая определяет степень влияние этой асимптоты на обобщенное решение в каждой точке исследуемой области. Принятое в данной работе понятие обобщенного решения не совпадает в полной мере с определением обобщенной функции, определенной в математике. Однако у этих понятий есть и общие черты: обобщенное решение, также как и обобщенная функция, характеризует некоторую нелокальность распределения зависимости функции от аргумента. При этом граничные условия, удовлетворяемые для асимптот решения, должны удовлетворяться и для обобщенного решения, а сама функция, задающее обобщенное решение, должна удовлетворять заданному уравнению с определенной для этого уравнения степенью погрешности.

С этой точки зрения в работе будет рассмотрено обобщенное решение задачи

Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости, для которой ранее [1-2] было получено асимптотическое решения, удовлетворяющие граничному условию «прилипания» жидкости на стенке трубы с образованием линейного профиля скорости вблизи стенок на длине вязкого слоя: $V^+ \sim y^+$. Второй асимптотой решения является константа, задающая нулевую производную скорости на оси трубы.

Для начала напомним основные положения метода расширения фазового пространства, примененного к УНС, для описания как ламинарного, так и турбулентного режимов течения. На примере задачи Хагена-Пуазейля найдем решения полученных уравнений, удовлетворяющих граничным условиям «прилипания» жидкости на стенке трубы с образованием линейного профиля скорости вблизи стенок на длине вязкого слоя: $V^+ \sim y^+$, и нулевой производной скорости в центре.

2.Метод расширения фазового пространства с использованием стохастической переменной для решения задач в системах, допускающих реализацию как детерминированных, так и стохастических режимов.

Предположим, что для описания физической системы рассматриваются интегральные уравнения, определяющие протекание процессов обмена выделенной области с внешней средой и/или влияние на эту область внешних воздействий. В случае независимости этих соотношений от рассматриваемого объема, по которому

производится интегрирование, можно перейти к УЧП вида: $df/dt = \hat{A} f$ (\hat{A} - оператор, вид которого зависит от конкретной задачи). При рассмотрении детерминированных физических процессов, полная производная по времени в левой части этого уравнения определяется соотношением:

$$df/dt = \partial f / \partial t + \sum_i \dot{x}_i \partial f / \partial x_i .$$

В тех случаях, когда в системе возникают условия для возникновения стохастических возмущений, обусловленных внутренними процессами, вид интегральных соотношений, определяющих протекание процессов обмена выделенной области с внешней средой и/или влияние на эту область внешних воздействий, останется прежним, при этом функциональная зависимость в УЧП не будет ограничиваться только временной и пространственными координатами: ее необходимо рассматривать с учетом всех дополнительных независимых степеней свободы - стохастических возмущений. Функционалом, осуществляющим связь между микро- и макропроцессами является энтропия, которая характеризуется плотностью вероятности стохастических возмущений, поэтому в таком процессе можно перейти от рассмотрения функциональной зависимости от отдельных независимых возмущений к рассмотрению зависимости функции от энтропии в целом: $f = f(t, \bar{x}; S)$.

В этом случае полную производную функции f по времени можно записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x}, S)}{\Delta t}.$$

Добавляя и одновременно вычитая слагаемые в этом выражение, его можно переписать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{f(t + \Delta t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S)}{\Delta t} + \frac{f(t, \vec{x} + \Delta \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x}, S + \Delta S)}{\Delta t} + \frac{f(t, \vec{x}, S + \Delta S) - f(t, \vec{x}, S)}{\Delta t} \right].$$

В результате можно заметить, что при выполнении условий: $\Delta \vec{r} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, $\Delta S \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} 0$, в полученном выражение первое слагаемое равно: $\partial f / \partial t$; второе слагаемое: $\partial f / \partial \vec{r} \cdot d\vec{r} / dt = (\vec{v} \nabla) f$; третье слагаемое: $\partial f / \partial S \cdot dS / dt$.

Таким образом, учет влияния изменения энтропии приведет к изменению полных производных по времени:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial S} \frac{dS}{dt}. \quad (1)$$

Включение дополнительного члена, характеризующего производство энтропии, в полную производную по времени (1) аналогично добавлению конвективных членов, когда возникает необходимость в учете пространственных степеней свободы, например, при переходе от второго закона Ньютона, характеризующего движение твердых тел, к описанию движения жидкой «частицы» в поле течения в уравнениях Навье-Стокса.

На примере гидродинамических стохастических процессов (турбулентного режима течения) можно видеть, что температура в них практически не изменяется и, следовательно, нельзя учитывать только изменение термодинамической энтропии, связанной с процессом броуновского движения молекул. Учет изменения энтропии в таких процессах должен производиться на всех возможных масштабах. Поэтому в качестве соотношения для энтропии в стохастических процессах необходимо использовать выражение для дифференциальной энтропии:

$$S(t, \vec{r}; \tau) = - \int \varphi[p(t, \vec{r}; \tau)] \ln \varphi[p(t, \vec{r}; \tau)] d[p(t, \vec{r}; \tau)]. \quad (2)$$

В выражении (2) функция $\varphi[p(t, \vec{r}; \tau)]$ - это плотность вероятности реализации возмущения скорости величины $p(t, \vec{r}; \tau)$ в заданный момент времени t в рассматриваемой точке пространства \vec{r} на временном масштабе рассмотрения τ .

Отсчет энтропии можно начинать с любого уровня и, поэтому, возникает неопределенность при постановке начальных и граничных условий к уравнению в расширенном пространстве переменных, включающих энтропию. Чтобы этого избежать, представим выражение (1) через переменную определяемую плотностью вероятности реализации случайной величины:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \frac{1}{\delta S / \delta \varphi} \frac{dS}{dt}. \quad (3)$$

Производная $\delta S / \delta \varphi$, входящая в выражение (3), является функциональной производной. Найдем ее значение:

$$\left\langle \frac{\delta S}{\delta \varphi}, h \right\rangle = - \frac{d}{d \vartheta} \int (\varphi(p) + \vartheta h(p)) \ln(\varphi(p) + \vartheta h(p)) dp \Big|_{\vartheta=0} =$$

$$= - \int (\ln \varphi(p) + 1) h(p) dp = \langle -(\ln \varphi(p) + 1), h \rangle.$$

Откуда следует, что $\delta S / \delta \varphi = -\ln \varphi(p) - 1$. Поскольку, $-(\ln \varphi + 1)\delta \varphi = \delta(-\varphi \ln \varphi)$, то, обозначив, $\tilde{s}(p) = -\varphi(p) \ln \varphi(p)$, перепишем выражение (3) в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} \frac{dS}{dt}.$$

Из этого выражения, в частности, видно, что последнее слагаемое становится ненулевым только в том случае, когда в рассматриваемой системе осуществляется производство энтропии: $dS/dt > 0$.

Производство энтропии: dS/dt , можно охарактеризовать временным масштабом τ , на котором происходит необратимое изменение энтропии стохастической системы на единицу. В результате, выражение для полной производной от функции f можно окончательно записать в виде:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}}.$$

А, учитывая, что влияние на выделенную область внешних воздействий не изменяется, можно записать соотношение для нахождения функции

$$f = f(t, \vec{x}; \tilde{s}(p)):$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \dot{x}_i + \frac{1}{\tau} \frac{\partial f}{\partial \tilde{s}} = \hat{A}f. \quad (4)$$

Уравнения Навье-Стокса (УНС) (совместно с уравнением неразрывности):

$$\begin{cases} \nabla \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f}, \end{cases} \quad (5)$$

в виде (5) используются для описания процессов течения вязкой несжимаемой нетеплопроводной жидкости. УНС являются вторым законом Ньютона для выделенного объема жидкости и описывают ускорение этого объема под действием силы, обусловленной градиентом давления $-\nabla P/\rho$ и внешних сил \vec{f} , с одной стороны, а также вязкой силы, действующей по поверхности этого объема $\nu \Delta \vec{V}$, с другой стороны.

В случае детерминированного – ламинарного режима течения жидкости корректность использования УНС для описания такого процесса не вызывает сомнений. Однако, при переходе к стохастическому – турбулентному режиму течения жидкости - вопрос о возможности описания такой системы с помощью УНС, несмотря на свою многолетнюю историю [6-26], остается открытым, и по сей день.

В силу своей сложности УНС имеют аналитические решения в ограниченном круге задач - для очень простых геометрий, например, течение несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения (течение Хагена-Пуазейля), плоское течение в

канале (плоское течение Пуазейля) и течение жидкости в плоском канале, происходящее вследствие движения стенок канала в противоположных направлениях (плоское течение Куэтта).

Единственными аналитическими решениями этих задач в стационарном случае являются выражения, описывающие ламинарные режимы течения. Предложенный выше метод учета изменения энтропии в стохастических системах позволяет находить решения этих задач, как для ламинарного, так и для турбулентного режимов течения.

Используя этот метод, запишем УНС в модифицированном виде:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{s}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V} + \vec{f}. \quad (6)$$

Решением уравнения (6) (с граничными и начальными условиями, соответствующими конкретной задаче) будет являться значение скорости $\vec{V} = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}; \tau) = \vec{V}(t, \vec{r}, \tilde{s}(\varphi); \tau)$, реализующейся с вероятностью φ , при рассмотрении системы на временном масштабе τ , в момент времени t , в точке $\vec{r}(x, y, z)$.

Для того чтобы корректно в общем случае описывать дополнительное слагаемое в левой части модифицированного УНС (6), необходимо построить замыкающую модель стохастических процессов и метод их описания [5]. Однако в тех случаях, когда дополнительный член уравнения существенно влияет на вид решения, но, при этом, само решение практически не зависит от дополнительной

переменной (в данном случае \tilde{S}), можно обойтись без построения такой модели. Как было показано в работах [1-4], вышеприведенные задачи относятся как раз к такому случаю. Поэтому, обратимся сразу непосредственно к нахождению и анализу решения задачи Хагена-Пуазейля.

3. Описание течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения (течение Хагена-Пуазейля).

Для решения этой задачи достаточно рассмотреть систему уравнений, состоящую из уравнения неразрывности (которое в случае рассмотрения несжимаемой жидкости остается неизменным) и модифицированных УНС (6) в отсутствии внешних сил \vec{f} :

$$\begin{cases} \nabla \vec{V} = 0 \\ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V} + \frac{1}{\tau} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \tilde{S}} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \vec{V}. \end{cases} \quad (7)$$

Задачу будем решать в классической постановке [21]. А именно, ограничимся рассмотрением изменения скорости только в поперечном сечении. Тогда УНС с учетом уравнения неразрывности, а также дополнительного члена для описания стохастических пульсаций скорости при квазистационарном (когда $\partial V / \partial t = 0$) течении вязкой несжимаемой жидкости, можно переписать в виде соотношения:

$$\frac{1}{\tau} \frac{\partial V}{\partial \tilde{S}} = \frac{\Delta P}{\rho l} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right), \quad (8)$$

где $V = V(r, \tilde{s})$ - квазистационарная компонента скорости в поперечном направлении в расширенном стохастическом пространстве с дополнительной переменной \tilde{s} ; ΔP - падение давления на длине трубы l ; ν - вязкость жидкости; τ - временной масштаб, на котором происходит необратимое изменение энтропии стохастической системы на единицу.

Уравнение (8) будем решать, используя граничные условия – “прилипание” жидкости на стенке трубы в отсутствии пульсаций: $V(r, \tilde{s})|_{\substack{r=R \\ \tilde{s}=0}} = 0$, с образованием линейного профиля скорости вблизи стенок на длине вязкого слоя $V^+ \sim y^+$ (смысл динамической скорости V^+ и динамической длины y^+ будет разъяснен позднее), а также равенство нулю, в отсутствии пульсаций, производной скорости в поперечном направлении в центре трубы: $\partial V(r, \tilde{s})/\partial r|_{\substack{r=0 \\ \tilde{s}=0}} = 0$.

Уравнение (8) можно упростить, введя вместо временного масштаба τ коэффициент γ – безразмерный параметр, характеризующий пространственный масштаб, на котором происходит необратимое изменение энтропии стохастической системы на единицу, и воспользовавшись соотношением:

$$\tau = \frac{\gamma R}{U_0} = \frac{\gamma R^2}{\nu \text{Re}}, \quad \text{где} \quad \text{Re} = \frac{RU_0}{\nu} = \frac{R^3 \Delta P}{4\nu^2 \rho l} - \text{число Рейнольдса.}$$

Здесь $U_0 = R^2 \Delta P / (4\nu \rho l)$ - скорость жидкости в центре трубы при ламинарном режиме течения, ΔP - падение давления на длине трубы l , ν - вязкость жидкости, R – радиус трубы.

Подставляя зависимость $\tau(\gamma)$ и вводя безразмерные переменные: $\tilde{r} = r/R$, $\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) = V(\tilde{r}, \tilde{s})/U_0$, приходим к уравнению:

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{s}} = \frac{\gamma}{\text{Re}} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \tilde{r}} \right) + \frac{4\gamma}{\text{Re}}. \quad (9)$$

Сделав в нем замену: $\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) = u(\tilde{r}, \tilde{s}) - \tilde{r}^2$, запишем

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{s}} = \frac{\gamma}{\text{Re}} \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{\partial u}{\partial \tilde{r}} \right). \quad (10)$$

Решая уравнение (10) методом разделения переменных: $u(\tilde{r}, \tilde{s}) = F(\tilde{r})N(\tilde{s})$, получим два соотношения:

$$\frac{1}{N} \frac{dN}{d\tilde{s}} = a \quad \text{и} \quad \frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{dF}{d\tilde{r}} \right) = \frac{a \text{Re}}{\gamma} \tilde{r} F, \quad (11)$$

где $a = a(\gamma, \text{Re})$ - произвольная константа при любых фиксированных значениях параметров γ и Re .

Нетрудно заметить, что нулевое значение константы a (с учетом граничных условий задачи: “прилипание” жидкости на стенке трубы и нулевое значение производной скорости в центре трубы) соответствует решению уравнений Навье-Стокса для течения несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения без учета дополнительных стохастических переменных: $\tilde{V}(\tilde{r}) = 1 - \tilde{r}^2$. Это будет первое решение задачи описания течения несжимаемой жидкости в трубе кругового сечения с учетом стохастических возмущений скорости для любых значений числа

Рейнольдса. Условие образования линейного профиля скорости вблизи стенок на длине вязкого слоя $V^+ \sim y^+$ для ламинарного режима течения выполняется автоматически.

В случае $a \neq 0$, решением первого уравнения (11) являются функции $N(\tilde{s}) = N_0 e^{\pm |a| \tilde{s}}$, где $N_0 = const$, $a = \pm |a|$.

А второе уравнение (11) преобразуется к виду:

$$\tilde{r}^2 \frac{d^2 F}{d\tilde{r}^2} + \tilde{r} \frac{dF}{d\tilde{r}} \mp \frac{|a| \text{Re}}{\gamma} \tilde{r}^2 F = 0. \quad (12)$$

в котором знак «-» соответствует условию: $a > 0$, знак «+» - условию: $a < 0$.

В случае знака «+» уравнение (12) заменой: $x = \tilde{r} \sqrt{|a| \text{Re} / \gamma}$, сводится к дифференциальному уравнению Бесселя первого рода нулевого порядка относительно функции $F(x)$:

$$x^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + x \frac{dF}{dx} + x^2 F = 0.$$

График функции Бесселя похож на синусоиду, колебания которой затухают пропорционально $1/\sqrt{x}$, хотя на самом деле нули функции расположены не периодически.

Переходя обратно к переменной \tilde{r} , его решение можно записать в виде:

$$F(\tilde{r}) = J_0(\tilde{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+1)} \left(\frac{1}{2} \sqrt{|a| \text{Re} / \gamma} \cdot \tilde{r} \right)^{2m}. \quad (13)$$

В случае знака «-» уравнение (12) заменой: $x = \tilde{r} \sqrt{|a| \text{Re} / \gamma}$, сводится к дифференциальному модифицированному уравнению Бесселя первого рода нулевого порядка относительно функции $F(x)$:

$$x^2 \frac{d^2 F}{dx^2} + x \frac{dF}{dx} - x^2 F = 0.$$

Переходя обратно к переменной \tilde{r} , его решение можно записать в виде:

$$F(\tilde{r}) = I_0(\tilde{r}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k+1)} \left(\frac{1}{2} \sqrt{|a| \text{Re} / \gamma} \cdot \tilde{r} \right)^{2k}. \quad (14)$$

График модифицированной функции Бесселя (или функции Инфельда) представляет собой монотонно возрастающую функцию при увеличении аргумента.

Проанализируем возможные решения задачи и значения параметра $\sqrt{|a| \text{Re} / \gamma}$.

Этот параметр не может иметь зависимость от числа Рейнольдса вида: $\sqrt{|a| \text{Re} / \gamma} \sim \text{Re}^n$, где $n < 0$, так как при достаточно больших значениях числа Рейнольдса он стремился бы к нулю, и решение уравнения (12) сводилось бы только к тривиальному решению - к ламинарному случаю. Поскольку из экспериментов известно, что это не так, то этот случай дальше рассматривать не будем.

Параметр $\sqrt{|a| \text{Re} / \gamma}$ не может быть константой, так как в этом случае, зафиксировав значение константы, мы, тем самым, зафиксируем крупномасштабную структуру течения (определяемую функциями Бесселя или Инфельда), которая не

будет изменяться при изменении значения числа Рейнольдса. Поскольку такое невозможно, то случай, когда $\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} = \text{const}$, также будем считать «нефизичным» и рассматривать не будем.

Таким образом, параметр $\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma}$ может иметь зависимость от числа Рейнольдса только вида: $\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} \sim \text{Re}^k$, где $k > 0$. В этом случае он увеличивается с увеличением числа Рейнольдса.

Однако, при ненулевом значении параметра $\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma}$, модифицированная функция Бесселя (или функция Инфельда) не удовлетворяет условию «прилипания» жидкости в отсутствии возмущения (при $\tilde{s} = 0$) на стенке трубы (при $\tilde{r} = 1$) для безразмерной скорости:

$$\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) = N(\tilde{s})F(\tilde{r}) - \tilde{r}^2 = u_0 F(\tilde{r})e^{a\tilde{s}} - \tilde{r}^2, \quad \text{где } u_0 = \text{const}. \quad (15)$$

Поэтому решение уравнения (12) в виде (14) (совместно с выражением (15)) не является гладким решением задачи течения жидкости в трубе кругового сечения.

В случае если $\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} \sim \text{Re}^k$, где $k > 0$, гладкое аналитическое решение для скорости (15), когда функция F представима в виде функции Бесселя (13) (найденное как разложение в ряд в окрестности точки $\tilde{r} = 0$) будет изменять свое значение на стенке (когда $\tilde{r} = 1$) при изменении числа Рейнольдса, что недопустимо с точки зрения выполнения граничного условия - «прилипания» жидкости на стенке трубы.

Следовательно, можно констатировать, что, во-первых, параметр $\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma}$ должен увеличиваться с ростом числа Рейнольдса; во-вторых, если это условие выполняется, то для произвольных значений числа Рейнольдса гладких решений уравнения (12), удовлетворяющих его граничным условиям, в общем случае не существует, поэтому остается допустить возможность существования «негладких» решений.

Чтобы понять, какие значения на самом деле может принимать параметр $\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma}$ (и, соответственно, параметр a) исходя из граничных условий на стенке трубы, исследуем асимптоты решения уравнения (12) при $\tilde{r} \rightarrow 1$. Для этого уравнение (12) преобразуем к виду:

$$\frac{df}{dx} + f^2 + \frac{1}{4x^2} \mp 1 = 0, \quad \text{где} \quad f = f(x) = \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} + \frac{1}{2x}, \quad x = \tilde{r} \sqrt{|a|\text{Re}/\gamma}.$$

Как было показано выше, параметр $\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma}$ увеличивается с увеличением числа Рейнольдса, поэтому при достаточно больших значениях числа Рейнольдса он будет принимать значения: $\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} \gg 1$, следовательно, в области $\tilde{r} \rightarrow 1$ ($x \gg 1$) членом $1/(4x^2)$ в последнем уравнении можно пренебречь и, переходя обратно к функции $F(\tilde{r})$, асимптотику решения уравнения (12) можно записать с точностью до $O(|a|\text{Re}/\gamma)^{-1}$ в виде:

$$F(\tilde{r}) = \frac{F_0}{\sqrt{\tilde{r}}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{|a| \operatorname{Re}/\gamma}(\tilde{r} + c)\right), \text{ при } a > 0;$$

$$F(\tilde{r}) = \frac{F_0}{\sqrt{\tilde{r}}} \cos\left(\sqrt{|a| \operatorname{Re}/\gamma}(\tilde{r} + b)\right), \text{ при } a < 0.$$

Здесь c и b – константы интегрирования. Учитывая (15), запишем

$$\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) = \frac{u_0}{\sqrt{\tilde{r}}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{|a| \operatorname{Re}/\gamma}(\tilde{r} + c)\right) e^{|a|\tilde{s}} - \tilde{r}^2, \text{ при } a > 0;$$

$$\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) = \frac{u_0}{\sqrt{\tilde{r}}} \cos\left(\sqrt{|a| \operatorname{Re}/\gamma}(\tilde{r} + b)\right) e^{-|a|\tilde{s}} - \tilde{r}^2, \text{ при } a < 0.$$

Из условия “прилипания” на стенке трубы в отсутствии стохастических возмущений: $\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s})\Big|_{\substack{\tilde{s}=0 \\ \tilde{r}=1}} = 0$, следует, что $u_0 = 1$, $b = c = -1$. Таким образом, учитывая четность функций косинуса и гиперболического косинуса, в пристеночной области трубы, можно записать соотношения для безразмерной скорости в виде:

$$\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \operatorname{ch}\left(\sqrt{|a| \operatorname{Re}/\gamma}(1 - \tilde{r})\right) e^{|a|\tilde{s}} - \tilde{r}^2, \text{ при } a > 0, \quad (16)$$

$$\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) = \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \cos\left(\sqrt{|a| \operatorname{Re}/\gamma}(1 - \tilde{r})\right) e^{-|a|\tilde{s}} - \tilde{r}^2, \text{ при } a < 0. \quad (17)$$

Уравнения (16)-(17) можно переписать, используя динамические величины скорости V_* и расстояния y_* (см., например, [6]):

$$V_* = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} = \sqrt{\frac{R\Delta P}{2\rho l}} = \sqrt{\frac{2\nu}{R} U_0} = \frac{2U_0}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}}$$

здесь σ - отнесенная к единице площади стенки сила трения,

$$\frac{y_*}{R} = \frac{y_* V_*}{\nu} \cdot \frac{\nu}{R V_*} \sim \frac{1}{\sqrt{2 R U_0 / \nu}} = \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}}, \quad V_* y_* / \nu \sim 1.$$

В результате получим

$$\frac{V(y, \tilde{s})}{V_*} \sim \frac{\sqrt{2 \operatorname{Re}}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}} \frac{y V_*}{\nu}}} \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{|a|}{2 \gamma}} \frac{y V_*}{\nu} \right) e^{|a| \tilde{s}} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}} \frac{y V_*}{\nu} \right)^2 \right),$$

$$a > 0, \quad (18)$$

$$\frac{V(y, \tilde{s})}{V_*} \sim \frac{\sqrt{2 \operatorname{Re}}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}} \frac{y V_*}{\nu}}} \cos \left(\sqrt{\frac{|a|}{2 \gamma}} \frac{y V_*}{\nu} \right) e^{-|a| \tilde{s}} - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}} \frac{y V_*}{\nu} \right)^2 \right),$$

$$a < 0, \quad (19)$$

где $y = R - r$.

В точке $y = y_*$, в отсутствии стохастических возмущений (при $\tilde{s} = 0$), выполняются условия: $V|_{\substack{\tilde{s}=0 \\ y=y_*}} = V_*$, $V_* y_* / \nu \sim 1$. Разложив функции скоростей, определяемых выражениями (18)-(19), в этой точке, при значении $\tilde{s} = 0$, в ряд Тейлора с точностью до $O(1/(2 \operatorname{Re}))$, получим соотношения:

$$1 \sim \left(1 + \frac{1}{2 \sqrt{2 \operatorname{Re}}} \right) \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{|a|}{2 \gamma}} \right), \quad \text{при } a > 0; \quad 1 \sim \left(1 + \frac{1}{2 \sqrt{2 \operatorname{Re}}} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{|a|}{2 \gamma}} \right), \quad \text{при } a < 0. \quad (20)$$

Если $|a|/(2 \gamma) \geq 1$, то решений первого из уравнений (20) не существует, а

решения второго уравнения можно записать с точностью до $O(1/\sqrt{2\text{Re}})$ в виде

$$a_n \approx -8\gamma\pi^2 n^2 \text{ и, следовательно, } \sqrt{|a_n|\text{Re}/\gamma} = 2\sqrt{2\text{Re}}\pi n, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

Используя значения этих параметров, выражение для различных мод скорости (17) вблизи стенки трубы, запишем в виде:

$$\tilde{V}_n \approx \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \cos(2\sqrt{2\text{Re}}\pi n(1-\tilde{r})) e^{-8\gamma\pi^2 n^2 \tilde{s}} - \tilde{r}^2, \quad \tilde{r} \rightarrow 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Это выражение для компонент безразмерной скорости характеризует коротковолновые возмущения с амплитудой $1/(2\sqrt{2\text{Re}}\pi n)$. Амплитуда колебаний компонент скорости не должна быть меньше характерного размера «вязкого» слоя: $\tilde{y}_* = 1/\sqrt{2\text{Re}}$, поэтому $1/(2\sqrt{2\text{Re}}\pi n) \geq 1/\sqrt{2\text{Re}}$, то есть $\pi n \leq 1/2$, что невыполнимо для $n \geq 1$. Это означает, что такие моды колебаний существовать не могут и, следовательно, условие $|a|/(2\gamma) \geq 1$ не выполнимо.

Остается рассмотреть условие $|a|/(2\gamma) < 1$. При его выполнении уравнения (20) можно переписать в виде:

$$1 = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2\text{Re}}}\right) \left(1 + \frac{|a|}{4\gamma}\right) + O\left(\frac{1}{2\text{Re}}; \left(\frac{|a|}{2\gamma}\right)^2\right), \text{ при } a > 0,$$

$$1 = \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2\text{Re}}}\right) \left(1 - \frac{|a|}{4\gamma}\right) + O\left(\frac{1}{2\text{Re}}; \left(\frac{|a|}{2\gamma}\right)^2\right), \text{ при } a < 0.$$

Полученные выражения сводятся к соотношению:

$$-1 \approx \pm |a| \sqrt{2 \operatorname{Re}} / (2\gamma), \quad (21)$$

где знак «+» соответствует случаю, когда $a > 0$; знак «-» - случаю, когда $a < 0$.

Очевидно, что выражение (21) имеет смысл только в том случае, когда в правой части стоит знак «-» (поскольку $\gamma > 0$). Следовательно, параметр a может иметь только отрицательные значения, и выражения для скорости должны определяться соотношениями (17), (19).

Значение параметра a , найденное из уравнения (21), представимо в виде:

$$a \approx -2\gamma / \sqrt{2 \operatorname{Re}} \quad \text{и, следовательно,} \quad \sqrt{|a| \operatorname{Re} / \gamma} \approx \sqrt[4]{2 \operatorname{Re}}. \quad (22)$$

Из выражения (22), в частности, видно, что поставленное условие: $|a| / (2\gamma) < 1$, для найденного значения параметра a , является выполненным.

Таким образом, параметр $\sqrt{|a| \operatorname{Re} / \gamma}$ (где $a < 0$) растет с увеличением числа Рейнольдса и, следовательно, как было отмечено выше, выражение (13) не удовлетворяет граничным условиям уравнения (12) при произвольном значении числа Рейнольдса и, соответственно, не может быть его решением, то есть рассматриваемая задача не имеет гладких решений. Попробуем определить ее возможные «негладкие» решения. Для этого сначала найдем асимптоту решения, удовлетворяющую граничному условию «прилипания» жидкости на стенке трубы.

Подставляя значение параметра a из (22) в уравнение (17), получим выражение для безразмерной скорости жидкости вблизи стенки трубы в виде:

$$\tilde{V}(\tilde{r}, \tilde{s}) \approx \frac{1}{\sqrt{\tilde{r}}} \cos\left(\sqrt[4]{2\text{Re}}(1-\tilde{r})\right) e^{-\frac{2\gamma}{\sqrt{2\text{Re}}}\tilde{s}} - \tilde{r}^2, \quad \text{где } \tilde{r} \rightarrow 1. \quad (23)$$

Это выражение для скорости характеризует длинноволновые возмущения с амплитудой $1/\sqrt[4]{2\text{Re}}$. Величина этой амплитуды больше характерного размера вязкого слоя $\tilde{y}_* = y_*/R = 1/\sqrt{2\text{Re}}$, поэтому такие возмущения существовать могут.

Из уравнения (23) видно, что с увеличением числа Рейнольдса модуль показателя экспоненты будет уменьшаться. И, следовательно, при достаточно больших значениях числа Рейнольдса изменением стохастической переменной можно пренебречь. Поэтому, выбор записи уравнения Навье-Стокса в расширенном фазовом пространстве в виде уравнений типа (7) без учета уравнений, описывающих эволюцию траекторий в фазовом стохастическом пространстве, является оправданным при достаточно больших числах Рейнольдса.

Уравнение (19), при подстановке параметра a , при условии $y \rightarrow 0$ преобразуется к виду:

$$V^+(y^+, \tilde{s}) \approx \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^+}{\sqrt{2\text{Re}}}}} \cos\left(\frac{y^+}{\sqrt[4]{2\text{Re}}}\right) e^{-\frac{2\gamma}{\sqrt{2\text{Re}}}\tilde{s}} - \left(1-\frac{y^+}{\sqrt{2\text{Re}}}\right)^2 \right), \quad (24)$$

где $V^+ = V/V_*$, $y^+ = yV_*/\nu$.

Если записать это выражение для области $y \leq y_*$ (или $y^+ \leq 1$) с той же точностью, с которой осуществлялся поиск решения уравнений (23)-(24), то есть до

$O(1/\sqrt{2\text{Re}})$, то получим соотношение:

$$V^+(y^+, \tilde{s}) = \frac{5}{4}y^+ - \frac{1}{4}(y^+)^2 - \gamma\tilde{s} + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right).$$

И, следовательно, среднее значение динамической скорости (при $\tilde{s} = 0$) с точностью до $O(1/\sqrt{2\text{Re}})$ представимо в виде:

$$V^+(y^+, \tilde{s})\Big|_{\tilde{s}=0} = \frac{5}{4}y^+ - \frac{1}{4}(y^+)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right).$$

Далее для краткости везде вместо $V^+(y^+, \tilde{s})\Big|_{\tilde{s}=0}$ будем писать просто V^+ :

$$V^+ = \frac{5}{4}y^+ - \frac{1}{4}(y^+)^2 + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}}\right), \quad (25)$$

которое в линейном (по величине y^+) приближении сводится к выражению:

$$V^+ \approx \frac{5}{4}y^+. \quad (26)$$

Это решение удовлетворяет граничному условию «прилипания» жидкости на стенке трубы с образованием линейного профиля скорости вблизи стенок на длине вязкого слоя: $V^+ \sim y^+$, и хорошо соотносится с экспериментальными данными в случае реализации турбулентного режима [21-25].

В области $y^+ > 1$ дополнительно могут начать играть значительную роль только слагаемые вида $(y^+)^m$, где $m > 2$, которые были малы в области $y^+ \leq 1$, поэтому скорость может быть представима в виде разложения:

$$V^+ = \frac{5}{4}y^+ - \frac{1}{4}(y^+)^2 + \sum_{m \geq 3} c_m (y^+)^m + O(1/\sqrt{2\text{Re}}).$$

Функция $V^+(y^+)$ должна быть выпуклой, чтобы профиль скорости был устойчивым. А в центре трубы при значениях $y^+ \gg 1$ производная скорости должна стремиться к нулю. Чтобы найти зависимость скорости V^+ от координаты y^+ за границей вязкого слоя, выберем недалеко от точки $y^+ \sim 1$ (по направлению к центру канала) точку y_0^+ и в ее окрестности рассмотрим разложение скорости. В результате, соотношение (25) для функции скорости можно представить в виде:

$$V^+ = \frac{5}{4}y_0^+ \left(\frac{y^+}{y_0^+} - \frac{1}{2} \left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^2 \right) + \frac{5}{4}y_0^+ \left(\frac{1}{2} - \frac{y_0^+}{5} \right) \left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^2 + \sum_{n \geq 3} c_n \left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^n + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \right).$$

где $V^+ = V/V_*$, $y^+ = yV_*/\nu$, $y_0^+ = y_0V_*/\nu$ - точка за границей вязкого подслоя (ближе к центру трубы).

Выражение, стоящее в скобках первого слагаемого в правой части последнего соотношения, является разложением функции логарифма: $\ln(1 + y^+/y_0^+)$, в окрестности точки $y^+ = y_0^+$ до второго члена разложения - квадратичного члена - включительно. Поэтому в области $y^+ > 1$, в окрестности точки y_0^+ , последнее выражение можно переписать в виде:

$$V^+ = \frac{5}{4}y_0^+ \ln\left(1 + \frac{y^+}{y_0^+}\right) + \frac{5}{4}y_0^+ \left(\frac{1}{2} - \frac{y_0^+}{5} \right) \left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^2 + \sum_{k \geq 3} c_k \left(\frac{y^+}{y_0^+} \right)^k + O\left(\frac{1}{\sqrt{2\text{Re}}} \right). \quad (27)$$

До границы вязкого слоя - в области $y^+ \leq 1$, выражение (27) совпадает с выражением для скорости в пристеночной части (25) с точностью не хуже, чем $O\left((1/y_0^+)^3\right)$, при любом $1 < y_0^+ \leq 12/5$.

Если приближаться к точке $y^+ = 1$ (границе вязкого подслоя) со стороны центральной части трубы – от точки y_0^+ , то скорость V^+ должна стремиться к значению единица. Поэтому из выражения (27) следует соотношение:

$$\frac{5}{4} y_0^+ \ln\left(1 + \frac{1}{y_0^+}\right) + \frac{5}{4} \left(\frac{1}{2y_0^+} - \frac{1}{5}\right) + \sum_{k \geq 3} c_k \left(\frac{1}{y_0^+}\right)^k \approx 1.$$

Нетрудно видеть, что этой зависимости с точностью $\sim O\left((1/y_0^+)^3\right)$, удовлетворяют значения y_0^+ из интервала: $1 < y_0^+ \leq 12/5$. Учитывая это, а также то, что в области $y^+ \geq 1$ для любых значений y_0^+ из интервала: $1 < y_0^+ \leq 12/5$, кубический член разложения логарифма: $1/3 \cdot (y^+/y_0^+)^3$, по абсолютной величине превосходит значение квадратичного слагаемого, входящего в выражение (27): $(1/2 - y_0^+/5)(y^+/y_0^+)^2$, выражение (27) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} V^+ &\approx \frac{5}{4} y_0^+ \ln\left(1 + \frac{y^+}{y_0^+}\right) + O\left(\left(\frac{y^+}{y_0^+}\right)^3, \frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}}\right) = \\ &= \frac{5}{4} y_0^+ \ln\left(1 + \frac{y^+}{y_0^+}\right) + \sum_{k \geq 3} b_k \left(\frac{y^+}{y_0^+}\right)^k + O\left(\frac{1}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}}\right). \quad (28) \end{aligned}$$

В точке $y^+ = 1$, значение скорости V^+ должно быть равно единице. Второе слагаемое (28) в окрестности точки $y^+ = 1$ должно быть пренебрежимо мало (по построению решения выше), а первое слагаемое в этом выражении ближе всего к единице при значении $y_0^+ \approx 2$ (для значений y_0^+ из интервала $1 < y_0^+ \leq 12/5$).

Учитывая это, и приняв $y_0^+ \approx 2$, выражение (28) можно записать его в виде:

$$V^+ = 5/2 \cdot \ln(1 + y^+/2) + \sum_{k \geq 3} b_k (y^+/2)^k + O(1/\sqrt{2\text{Re}}). \quad (29)$$

В центре трубы, задаваемом координатой:

$$y_c^+ = (R - r)/y_*|_{r=0} = R/y_* = \sqrt{2\text{Re}},$$

производная скорости должна, по крайней мере, стремиться к нулю, так как в противном случае скорость будет задаваться быстрорастущей «вогнутой» функцией, что противоречит условию устойчивости.

Для выполнения с заданной точностью $\sim O(1/\sqrt{2\text{Re}})$ условия, накладываемого на

производную скорости в центре трубы, необходимо, чтобы коэффициенты b_k в

выражении (29) по абсолютной величине были меньше или порядка $1/(\sqrt{2\text{Re}})^k$,

где $k \geq 3$. Такие абсолютные значения коэффициентов меньше принятой

погрешности вычисления $\sim O(1/\sqrt{2\text{Re}})$ и, следовательно, для асимптоты решения,

определяемой вблизи стенки трубы, слагаемые, с такими множителями,

рассматриваться не могут. Исходя из этого, выражение (29) должно быть

переписано в виде:

$$V^+ = 5/2 \cdot \ln(1 + y^+/2) + O(1/\sqrt{2\text{Re}}). \quad (30)$$

Выражение (30) определяет ветвь решения, найденную вблизи стенки трубы при задании граничного условия «прилипания» жидкости на стенке и условии на границе «вязкого» пограничного слоя, экстраполированную на всю область течения.

Необходимо отметить, что выражение (30) не удовлетворяет в точности граничному условию в центре трубы - заданию нулевого градиента скорости. Однако этому граничному условию может соответствовать другая ветвь решения уравнения. Попытаемся найти ее.

Учитывая, что параметр a должен оставаться постоянным во всей области течения, то есть определяться соотношением (22), можно перейти к рассмотрению зависимости скорости течения жидкости от радиуса при больших значениях числа Рейнольдса, для произвольных граничных условий в диапазоне значений: $0 \leq \tilde{r} < 1$.

А именно, подставив значение $a = -2\gamma/\sqrt{2\text{Re}} + O(1/(2\text{Re}))$ и, следовательно, $a\text{Re}/\gamma = -\sqrt{2\text{Re}} + O(1/\gamma)$ во вторую зависимость (11), перейдем к уравнению:

$$\tilde{r}^2 \frac{d^2 F}{d\tilde{r}^2} + \tilde{r} \frac{dF}{d\tilde{r}} + \sqrt{2\text{Re}} \tilde{r}^2 F = O(1/\gamma). \quad (31)$$

Интересно отметить, что безразмерный масштаб γ вошел в уравнение для описания стохастического (турбулентного) режима течения жидкости (31) только как мера погрешности. Однако учет существования масштабов, на которых происходит необратимое изменение состояния стохастической системы, позволил

перейти от уравнения типа: $\frac{d}{d\tilde{r}} \left(\tilde{r} \frac{dF}{d\tilde{r}} \right) = 0$ (в ламинарном случае) к уравнению

(31). Исследуем его подробнее.

Уравнение (31) отличается от уравнения (12) (для заданного значения параметра a) наличием слагаемого $O(1/\gamma)$. Значение этого слагаемого задает конечную неисчезающую погрешность, с которой можно найти решения этого уравнения. При малых значениях γ : $\gamma \sim 1/\sqrt{2\text{Re}}$, погрешность может быть сопоставима по величине с последним слагаемым в левой части уравнения (31). При этом само уравнение (31) в пределах данной погрешности должно описывать течение жидкости во все области трубы. Необходимо отметить, что появление конечной погрешности в уравнении (31) связано с существованием в стохастической системе конечного ненулевого размера вязкого подслоя: $\tilde{y}_* = y_*/R = 1/\sqrt{2\text{Re}}$, который ограничивает «снизу» амплитуду возмущений, поскольку именно с использованием этого характерного размера происходит отбор (фильтр) «правильных» мод решений вблизи стенки трубы при нахождении параметра a . Это является дополнительным фактором (помимо самого уравнения и граничных условий к нему), влияющим на функциональную зависимость искомого решения от переменной. Как правило, эти факторы не являются полностью совместимыми во всей области значений переменной или в какой-либо его части. В результате, отсутствует гладкое решение для всей области значений переменной, удовлетворяющее теореме Коши о существовании и единственности.

Неоднозначная область решений становится источником стохастических возмущений, а это, в свою очередь, замыкает причинно-следственные связи для самоподдерживающегося стохастического процесса.

Общее решение уравнения (31) может быть найдено либо численными методами, либо с помощью аналитических оценок с определенной (неисчезающей) степенью погрешности. Здесь мы будем рассматривать именно аналитический подход к решению задачи.

Решение уравнения (31), для граничного условия - нулевого градиента скорости в центре трубы будет определяться выражением (13) для значения параметра $\sqrt{|a|\text{Re}/\gamma} = \sqrt[4]{2\text{Re}}$. Записанное для переменной y^+ оно будет иметь вид:

$$F(y^+) = J_0(y^+) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+1)} \left(\frac{\sqrt[4]{2\text{Re}}}{2} \cdot \left(1 - \frac{y^+}{\sqrt{2\text{Re}}} \right) \right)^{2m}. \quad (32)$$

Используя выражения для динамической скорости, запишем:

$$\begin{aligned} V^+ &= \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} (u_0 F - \tilde{r}^2) = \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left(u_0 F - \left(1 - \frac{y^+}{\sqrt{2\text{Re}}} \right)^2 \right) = \\ &= \frac{\sqrt{2\text{Re}}}{2} \left(u_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (\sqrt{2\text{Re}}/4)^m}{m! \Gamma(m+1)} \left(1 - \frac{y^+}{\sqrt{2\text{Re}}} \right)^{2m} - \left(1 - \frac{y^+}{\sqrt{2\text{Re}}} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Однако в качестве нулевого приближения скорости, определенной с заданной погрешностью: $O(1/\gamma)$, из уравнения (31) в центральной части трубы, можно

воспользоваться постоянным значением динамической скорости:

$$V^+ \approx V_0^+ = const. \quad (33)$$

Эта асимптота решений будет характеризовать самый большой масштаб стохастических возмущений при турбулентном режиме течения жидкости в трубе кругового сечения.

Таким образом, определив две асимптоты решения: для центральной и пристеночной областей, можно констатировать, что во всей области течения скорость может иметь только нестационарный стохастический характер (иначе это противоречило бы теореме Коши о существовании и единственности).

Для описания такого типа течения предлагается ввести понятие обобщенного решения. В качестве обобщенного (в определенном в данной работе смысле) решения ОДУ или УЧП, имеющих две асимптоты решения, можно рассмотреть функцию, являющуюся суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением двух функций: одна из которых определяет одну из асимптот решения, а вторая определяет степень влияние этой асимптоты на обобщенное решение в каждой точке исследуемой области. При этом граничные условия, удовлетворяемые для асимптот решения, должны удовлетворяться и для обобщенного решения, а сама функция, задающее обобщенное решение, должна удовлетворять заданному уравнению с определенной для этого уравнения степенью погрешности.

На значение обобщенной скорости должно усиливаться влияние выражения

(30) при приближении к пристеночной области и выражения (32) при приближении к центральной части. Влияние выражений (30) и (32) на значение обобщенной скорости должно стремиться к нулю при приближении к центральной и пристеночной частям, соответственно. Поэтому, выражение для обобщенной скорости можно определить, в виде соотношения:

$$\langle V^+ \rangle \approx 5/2 \cdot \ln(1 + y^+/2) f(y^+) + V_0^+ \cdot g(y^+),$$

где $f(y^+) \Big|_{y^+=0} = 1$, $f(y^+) \Big|_{y^+=\sqrt{2\text{Re}}} = 0$, $g(y^+) \Big|_{y^+=0} = 0$, $g(y^+) \Big|_{y^+=\sqrt{2\text{Re}}} = 1$.

Множители: $f(y^+)$ и $g(y^+)$, в этом выражении характеризуют степень влияние асимптот, задаваемых зависимостями (30) и (33), соответственно, на обобщенное решение в каждой точке исследуемой области распределения скорости (в направлении перпендикулярному потоку).

Ветвь решения, описываемая выражением (30), находилась вблизи стенки, а затем определялась последовательно вдоль всей области течения вплоть до центра трубы, с погрешностью, характеризуемой размером вязкого пограничного слоя, и никакие другие масштабы течения не являются выделенными для этого решения. Поэтому изменение влияния этой ветви решения на среднюю скорость течения при приближении к центру трубы может иметь только линейный характер. Следовательно, функция $f(y^+)$, может иметь только линейную зависимость, соответствующую граничным условиям, то есть определяться выражением:

$$f(y^+) = 1 - y^+ / \sqrt{2\text{Re}}.$$

Ветвь решения (33) определена в центре трубы. На появление этого решения главным образом оказывают влияние макро масштабы течения жидкости. Поэтому изменение влияния этой ветви решения на среднюю скорость течения при приближении к стенке трубы может иметь нелинейный монотонный характер. Следовательно, такой же вид зависимости должна иметь функция $g(y^+)$. Будем предполагать, что вид этой функции имеет зависимость $g(y^+) = (y^+ / \sqrt{2\text{Re}})^k$, где $k = \text{const}$ при заданном значении числа Рейнольдса. В этом случае функция $g(y^+)$ будет удовлетворять требованию равенства единице и нулю в центре трубы и у стенки, соответственно.

Соответственно, выражение для обобщенной скорости может быть записано в виде:

$$\langle V^+ \rangle \approx 5/2 \cdot \ln(1 + y^+/2) (1 - y^+ / \sqrt{2\text{Re}}) + V_0^+ \cdot (y^+ / \sqrt{2\text{Re}})^k.$$

Вычислив производную средней скорости:

$$\langle V^+ \rangle' = \frac{5}{4} \frac{1 - y^+ / \sqrt{2\text{Re}}}{1 + y^+ / 2} - \frac{5}{2\sqrt{2\text{Re}}} \cdot \ln(1 + y^+ / 2) + \frac{V_0^+ k}{\sqrt{2\text{Re}}} \cdot \left(\frac{y^+}{\sqrt{2\text{Re}}} \right)^{k-1},$$

нетрудно убедиться, что для того чтобы в центре трубы (в точке $y^+ = \sqrt{2\text{Re}}$) производная обобщенной скорости равнялась нулю, значение динамической скорости в центре трубы должно быть равным:

$$V_0^+ = \frac{5}{2k} \ln(1 + \sqrt{2\text{Re}}/2).$$

Исходя из этого, выражение для обобщенной скорости можно записать в виде:

$$\langle V^+ \rangle \approx \frac{5}{2} \ln \left(1 + \frac{y^+}{2} \right) \left(1 - \frac{y^+}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}} \right) + \frac{5}{2k} \ln \left(1 + \frac{\sqrt{2 \operatorname{Re}}}{2} \right) \cdot \left(\frac{y^+}{\sqrt{2 \operatorname{Re}}} \right)^k. \quad (34)$$

Воспользовавшись условием равенства производной обобщенной динамической скорости $\langle V^+ \rangle$ в точке $y^+ = 1$ единице, можно найти значения показателей степени k при различных значениях числа Рейнольдса:

$$k \approx 1 - \ln \left(\left(\sqrt{2 \operatorname{Re}} / 15 + 1/3 + \ln 3/2 \right) / \ln \left(1 + \sqrt{2 \operatorname{Re}} / 2 \right) \right) / \ln \sqrt{2 \operatorname{Re}}. \quad (35)$$

Выражения (34) совместно с (35) характеризуют осредненный профиль скорости турбулентного течения жидкости в трубе кругового сечения в зависимости от значения числа Рейнольдса.

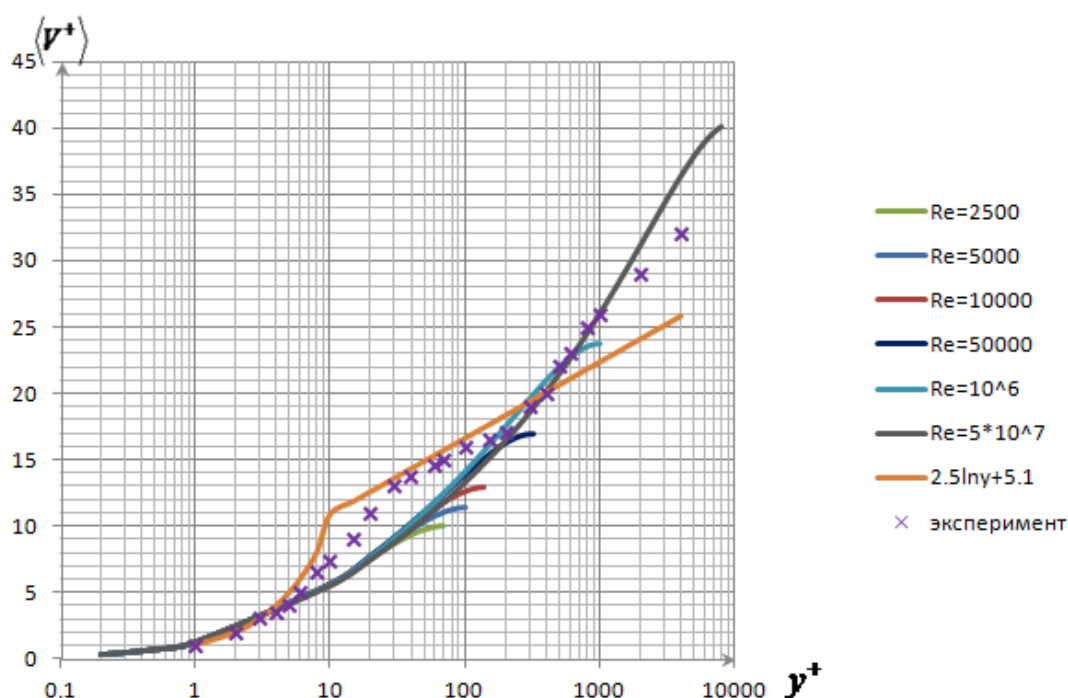


Рис.1. Аналитические и экспериментальные зависимости динамической скорости от расстояния для разных значений числа Рейнольдса.

На рисунке 1 представлены зависимости $\langle V^+ \rangle(y^+)$ для разных значений числа Рейнольдса, а также приведены экспериментальные данные (см. [24]) для пристеночного универсального профиля скорости турбулентного течения жидкости, имеющие минимальное отклонение от полученных аналитических значений, а также эмпирический логарифмический профиль скорости: $\langle V^+ \rangle = 2.5 \ln y^+ + 5.1$, который используется в работе [24], как функция для приближенного описания универсального профиля скорости.

Видно хорошее совпадение найденных в настоящей работе аналитических зависимостей с экспериментальными данными в широком диапазоне значений y^+ .

Одной из причин отличия характера поведения аналитических и экспериментальных значений в диапазоне $10 \leq y^+ \leq 100$ может быть явление перемежаемости, обусловленное возможностью смены турбулентных и ламинарных режимов течения, как во времени, так и в пространстве, которое наблюдается в экспериментах при небольших закритических значениях числа Рейнольдса. Этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Заключение

Полностью детерминированный подход к описанию течения жидкости с помощью уравнений Навье-Стокса, не учитывающий возбуждения внутренних (стохастических) степеней свободы на микро-, мезо- и макромасштабах и соответствующего изменения энтропии жидкости, приводит к результату

абсолютной устойчивости параболического профиля скорости течения в трубе кругового сечения при любых значениях числа Рейнольдса для бесконечно малых возмущений. В отличие от него, разработанный метод описания стохастических систем с использованием модифицированных уравнений Навье-Стокса, записанных в пространстве, расширенном с помощью дополнительной переменной, характеризующей производство энтропии стохастической системы, позволяет при больших числах Рейнольдса найти два решения этой задачи: одно из которых, соответствует ламинарному режиму течения, второе – турбулентному. Первое решение во всей области течения жидкости характеризуется параболическим профилем скорости, второе характеризуется двумя асимптотами решения для осредненной скорости: одна из которых является асимптотическим решением уравнения в пристеночной части трубы, а вторая - в центральной.

В случае если фиксация двух или более граничных условий, не позволяют уравнению иметь гладкие решения, это может означать, что в рассматриваемом физическом процессе неизбежно должны возникать и поддерживаться стохастические возмущения, в противном случае это привело бы к невыполнению теоремы Коши о существовании и единственности. В качестве обобщенного решения ОДУ или УЧП, имеющих две асимптоты решения, можно рассматривать функцию, являющуюся суммой двух слагаемых, каждое из которых является произведением двух функций: одна из которых определяет одну из асимптот решения, а вторая определяет степень влияние этой асимптоты на общее решение в каждой точке исследуемой области.

С помощью такого подхода в работе было получено обобщенное решение задачи Хагена-Пуазейля для турбулентного режима течения жидкости. Приведено сравнение найденного решения для разных значений числа Рейнольдса с экспериментальными данными пристеночного универсального профиля скорости. Показано, что в широком диапазоне значений y^+ имеется совпадение найденных аналитических зависимостей с экспериментальными данными.

Одной из причин отличия характера поведения аналитических и экспериментальных значений в диапазоне $10 \leq y^+ \leq 100$ может быть явление перемежаемости, обусловленное возможностью смены турбулентных и ламинарных режимов течения. Этот вопрос требует дальнейшего исследования.

Библиографический список

1. Хатунцева О.Н. Об учете влияния стохастических возмущений на решения уравнений Навье-Стокса в задаче Хагена-Пуазейля // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93311>
2. Хатунцева О.Н. Определение критического числа Рейнольдса ламинарно-турбулентного перехода в плоской задаче Пуазейля на основе метода «разрывных функций» // Труды МАИ. 2019. № 108. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=109382>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-3](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-3)

3. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Пуазейля // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=105673>
4. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102091>
5. Хатунцева О.Н. О механизме возникновения в стохастических процессах гауссовских распределений случайной величины с «тяжелыми» степенными «хвостами» // Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98854>
6. Ларина Е.В., Крюков И.А., Иванов И.Э. Моделирование осесимметричных струйных течений с использованием дифференциальных моделей турбулентной вязкости // Труды МАИ. 2016. № 91. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=75540>
7. Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В., Третьякова О.Н. Численное моделирование взаимодействия многоблочных сверхзвуковых турбулентных струй с преградой // Труды МАИ. 2013. № 70. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=44440>
8. Кравчук М.О., Кудимов Н.Ф., Сафронов А.В. Вопросы моделирования турбулентности для расчета сверхзвуковых высокотемпературных струй // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=58536>
9. Ву М.Х., Попов С.А., Рыжов Ю.А. Проблемы моделирования течения в осевых вентиляторах аэродинамических труб // Труды МАИ. 2012. № 53. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=29361>

10. До С.З. Численное моделирование вихрей в течении Куэтта-Тейлора сжимаемого газа // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49670>
11. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Верификация численной модели взаимодействия прямоугольной пластины с поверхностью воды // Труды МАИ. 2014. № 75. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=49676>
12. Крупенин А.М., Мартиросов М.И. Численное моделирование поведения трехслойной прямоугольной пластины при вертикальном ударе о жидкость // Труды МАИ. 2013. № 69. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=43066>
13. Махров В.П., Глущенко А.А., Юрьев А.И. Влияние гидродинамических особенностей на поведение свободной поверхности жидкости в высокоскоростном потоке // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=36423>
14. Горбатенко С.А., Махров В.П., Юрьев А.И. Об особенностях кавитационного обтекания тел большого удлинения в вертикальном потоке // Труды МАИ. 2013. № 64. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=36459>
15. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. Simulation of flow around aerofoil with DES model of turbulence // Труды МАИ. 2012. № 59. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=34840>
16. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow // Physics of Fluids, 1995, no. 7, pp. 335 - 343.
17. Bottin S., Daviaud F., Manneville P., Dauchot O. Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow // Europhysics Letters, 1998, no. 43, pp. 171 - 176.

18. Tuckerman Laurette S., Kreilos T, Schrobsdorff H., Schneider Tobias M., Gibson John F. Turbulent-laminar patterns in plane Poiseuille flow // *Physics of Fluids*, 2014, no. 26 (11). DOI: [10.1063/1.4900874](https://doi.org/10.1063/1.4900874)
19. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow // *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, no. 96, pp. 59 - 205.
20. Павловский В.А., Хитрых Д.П., Маламанов С.Ю. Численное исследование нестационарного кавитационного обтекания гидрокрыла NACA009 // *Морские интеллектуальные технологии*. 2018. Т. 1. № 2 (40). С. 138 - 143.
21. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.VI. Гидродинамика. - М.: Наука, 1988. - 731 с.
22. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. - М.: Наука, 1974. - 712 с.
23. Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. - М.: Физмалит, 2005. - 288 с.
24. Монин А.С., Яглом А.М. Статическая гидромеханика. - М.: Наука, 1965: Ч. 1. - 640 с. 1967: Ч. 2. - 720 с.
25. Никитин Н.В. Прямое численное моделирование трехмерных турбулентных течений в трубах кругового сечения // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 1994. № 6. С. 14 - 26.
26. Никитин Н.В., Пименов В.О. Численное исследование локализованных структур в трубах // *Известия РАН. Механика жидкости и газа*. 2015. № 5. С. 64 - 75.

On finding a generalized analytical solution to the Hagen-Poiseuille problem for a turbulent flow mode

Khatuntseva O.N.^{1,2}

*¹Korolev Rocket and Space Corporation “Energia”,
4a, Lenin str., Korolev, Moscow region, 141070, Russia*

*²Moscow Institute of Physics and Technology,
9, Institutskiy per., Dolgoprudny, Moscow region, 141701, Russia*

e-mail: Olga.Khatuntseva@rsce.ru

Abstract

The modification of the Navier-Stokes equations by accounting for the additional degrees of freedom associated with the excitation of stochastic pulsations in the fluid flow allowed distinguishing two solutions to the fluid flow problem in a circular pipe (the Hagen-Poiseuille problem). One of these solutions is implemented for any values of Reynolds number and corresponds to the laminar flow regime, the second one is implemented only for large enough values of the Reynolds number and corresponds to the turbulent flow regime.

However, the boundary conditions, i.e. of the liquid “sticking” on the walls of the pipe with the of a linear velocity profile formation near the walls along the length of the viscous layer are $V^+ \sim y^+$. The zero derivative of the velocity in its center herewith allows obtaining a “smooth” solution to the problem for an arbitrary Reynolds number only in the case of a laminar flow regime.

Boundary conditions that arbitrarily “fixing” a solution at two or more points generally do not guarantee existence of a smooth solution to ordinary differential

equations (ODE) or partial differential equations (PDE), even if these equations obey Cauchy's existence and uniqueness theorem.

The absence of a smooth solution of the ODE or the PDE in the entire domain under study can be considered from the point of view of the existence of two or more asymptotes of the solution, as well as areas of uncertainty between them. A function of two summand, each of which is the product of two functions can be considered as a generalized (in the sense defined in the article) an ODE or a PDE solution. One function defines one of the solution asymptotes, while the other one defines the degree of this asymptote effect of the overall solution in each point of the area under study.

From this point of view, the presented work considers a generalized solution of the Hagen-Poiseuille problem for the turbulent flow regime of a liquid. One asymptote of the solution satisfies the boundary condition of liquid “sticking” on the pipe wall, while the second asymptote of the solution is a constant setting zero velocity derivative on its axis. A comparison with experimental data for the universal velocity profile in the near-wall flow region is presented.

Keywords: stochastic systems, probability density, turbulence, Hagen-Poiseuille problem.

References

1. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93311>

2. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 108. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=109382>. DOI: [10.34759/trd-2019-108-3](https://doi.org/10.34759/trd-2019-108-3)
3. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 106. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=105673>
4. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2019, no. 104. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=102091>
5. Khatuntseva O.N. *Trudy MAI*, 2018, no. 102. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=98854>
6. Larina E.V., Kryukov I.A., Ivanov I.E. *Trudy MAI*, 2016, no. 91. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=75540>
7. Kudimov N.F., Safronov A.V., Tret'yakova O.N. *Trudy MAI*, 2013, no. 70. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=44440>
8. Kravchuk M.O., Kudimov N.F., Safronov A.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 82. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=58536>
9. Vu M.Kh., Popov S.A., Ryzhov Yu.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 53. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=29361>
10. Do S.Z. *Trudy MAI*, 2014, no. 75. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49670>
11. Krupenin A.M., Martirosov M.I. *Trudy MAI*, 2014, no. 75. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=49676>
12. Krupenin A.M., Martirosov M.I. *Trudy MAI*, 2013, no. 69. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=43066>

13. Makhrov V.P., Glushchenko A.A., Yur'ev A.I. *Trudy MAI*, 2013, no. 64. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=36423>
14. Gorbatenko S.A., Makhrov V.P., Yur'ev A.I. *Trudy MAI*, 2013, no. 64. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=36459>
15. Dehaeze F., Barakos G.N., Batrakov A.S., Kusyumov A.N., Mikhailov S.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 59. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=34840>
16. Dauchot O., Daviaud F. Finite-amplitude perturbation and spots growth mechanism in plane Couette flow, *Physics of Fluids*, 1995, no. 7, pp. 335 - 343.
17. Bottin S., Daviaud F., Manneville P., Dauchot O. Discontinuous transition to spatiotemporal intermittency in plane Couette flow, *Europhysics Letters*, 1998, no. 43, pp. 171 - 176.
18. Tuckerman Laurette S., Kreilos T, Schrobsdorff H., Schneider Tobias M., Gibson John F. Turbulent-laminar patterns in plane Poiseuille flow, *Physics of Fluids*, 2014, no. 26 (11). DOI: [10.1063/1.4900874](https://doi.org/10.1063/1.4900874)
19. Orszag Steven A., Kells Lawrence C. Transition to turbulence in plane Poiseuille and plane Couette flow, *Journal of Fluid Mechanics*, 1980, no. 96, pp. 59 - 205.
20. Pavlovskii V.A., Khitrykh D.P., Malamanov S.Yu. *Morskie intellektual'nye tekhnologii*, 2018, vol. 1, no. 2 (40), pp. 138 - 143.
21. Landau L.D., Lifshitz E.M. *Fluid Mechanics*, 1987, vol. 6 (2nd ed.). Butterworth-Heinemann. ISBN 978-0-08-033933-7. - 731 p.
22. Schlichting H. *Boundary layer theory*, London, 1955, 535 p.

23. Drazin F. *Vvedenie v teoriyu gidrodinamicheskoi ustoichivosti* (Introduction to hydrodynamic stability), Moscow, Fizmatlit, 2005, 288 p.
24. Monin A. S., Yaglom A.M. *Statistical Fluid Mechanics: The Mechanics of Turbulence*. Part I, 1971, Part II, 1976.
25. Nikitin N.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 1994, no. 6, pp. 14 - 26.
26. Nikitin N.V., Pimenov V.O. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2015, no. 5, pp. 64 - 75.