

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)»



На правах рукописи

**Паинг Сое Ту У**

**ОПТИМИЗАЦИЯ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ С КОНЕЧНОЙ ТЯГОЙ**

Специальность 2.5.16.

«Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов»

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, член-корреспондент РАН  
Петухов Вячеслав Георгиевич

Москва-2023

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ .....	17
1.1 Уравнения движения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой .....	17
1.2 Математическая модель движения космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем .....	18
1.3 Математическая модель движения космического аппарата с двигателем ограниченного ускорения.....	20
1.4 Математическая модель движения космического аппарата с двигателем ограниченной тяги.....	22
1.5 Математическая модель движения космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем с применением угловой независимой переменной .....	24
1.6 Математическая модель движения космического аппарата с двигателем ограниченной тяги с применением угловой независимой переменной .....	30
1.7 Заключение по разделу .....	33
2 МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ .....	33
2.1 Метод продолжения по параметру.....	33
2.2 Метод численного дифференцирования.....	35
2.3 Метод продолжения по гравитационному параметру .....	38
2.4 Заключение по главе .....	43
3 ОПТИМИЗАЦИЯ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ .....	45
3.1 Оптимизация межорбитальных перелетов космического аппарата с идеально регулируемым двигателем .....	45
3.2 Продолжение оптимальной траектории с идеально-регулируемым двигателем в оптимальную траекторию с двигателем ограниченного ускорения.....	46

3.3 Продолжение оптимальной траектории с идеально-регулируемым двигателем в оптимальную траекторию с двигателем ограниченной тяги.....	49
3.4 Метод оптимизации траектории перелета на конечную орбиту с частично заданными элементами.....	53
3.5. Заключение по разделу.....	59
4 ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЕТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В МОДИФИЦИРОВАННЫХ РАВНОДЕНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ С ПРИМЕНЕНИЕМ УГЛОВОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.....	61
4.1 Оптимизация многовитковых траекторий межорбитального перелета с идеально-регулируемым двигателем .....	61
4.2 Оптимизация многовитковых траекторий межорбитального перелета космического аппарата с двигателем ограниченной тяги .....	72
4.3 Заключение по разделу.....	80
5 АНАЛИЗ ВЫВЕДЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ГЕОСТАЦИОНАРНУЮ ОРБИТУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМБИНАЦИИ БОЛЬШОЙ И МАЛОЙ ТЯГИ.....	82
5.1 Описание схемы выведения и методики решения.....	82
5.2 Численные результаты.....	84
5.3 Заключение по разделу.....	92
6 ОПТИМИЗАЦИЯ СХЕМЫ ВЫВЕДЕНИЯ ГЕОСТАЦИОНАРНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ СРЕДНЕГО КЛАССА.....	94
6.1 Выведение космического аппарата разгонным блоком на эллиптическую промежуточную орбиту.....	97
6.2 Выведение КА с промежуточной орбиты на ГСО с использованием ЭРДУ .....	99
6.3 Задача условной минимизации.....	102

6.4 Решение системы нелинейных уравнений методом продолжения по параметру .....	104
6.5 Численные результаты.....	105
6.6 Заключение по разделу.....	115
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	116
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ.....	118
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	122

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** В начальный период практической космонавтики для выведения космических аппаратов (КА) на целевые орбиты использовались только традиционные химические ракетные двигатели. Развитие и внедрение в дальнейшем в практику космических полетов электроракетных двигательных установок (ЭРДУ) позволило существенно расширить возможности космических транспортных операций. Благодаря высокому удельному импульсу ЭРДУ появилась возможность существенного снижения массы топлива при маневрировании КА по сравнению с использованием химических ракетных двигателей. Применение ЭРДУ позволяет выводить на заданные орбиты более тяжелые КА или снизить начальную массу КА за счет снижения массы заправляемого топлива, что дает возможность использовать средства выведения более легкого класса. Однако тяга ЭРДУ ограничена доступной на борту КА электрической мощностью, точнее – тяга пропорциональна электрической мощности, деленной на эффективную скорость истечения ЭРДУ. Ввиду ограниченной мощности бортовых систем электропитания КА и высокого удельного импульса, тяга ЭРДУ имеет малое значение. Малость тяги ЭРДУ приводит к необходимости их длительной работы при выполнении космических транспортных операций и к увеличению длительности перелета по сравнению с транспортными операциями, реализуемыми с помощью химических ракетных двигателей большой тяги.

В настоящее время ЭРДУ с успехом используются для довыведения на целевые орбиты геостационарных и низкоорбитальных КА, разведения КА многоспутниковых группировок по орбитальным позициям, решения задач удержания КА в заданной орбитальной позиции, увода КА на орбиты захоронения после завершения их эксплуатации, формирования траекторий межпланетных КА. При планировании и проектно-баллистическом анализе перспективных космических миссий КА с ЭРДУ важное значение имеет оптимизация траекторий, так как

результаты оптимизации позволяют определить предельные возможности проектируемых космических миссий и проводить корректное сравнение различных вариантов реализации таких миссий при изменении схем перелета, состава и основных проектных параметров КА и средств выведения.

Длительность перелетов с малой тягой, включающих в себя длительные периоды работы ЭРДУ, приводит к необходимости применения специфических методов их расчета и оптимизация. Оптимизация траекторий с малой тягой проводится для вычисления траекторий и управления, обеспечивающих перелет с минимальным значением какого-либо функционала, например – массы затратченного топлива или времени перелета. Начальные и конечные условия перелета определяются некоторыми заданными многообразиями, которые фиксируют начальную массу КА и все или некоторые орбитальные элементы начальной и конечной орбит. Во многих постановках фиксируется длительность или угловая дальность перелета.

В диссертации рассматриваются задачи оптимизации межорбитальных перелетов КА с двигателями малой тяги и с комбинацией двигателей большой и малой тяги. Для решения этих задач используется непрямой подход, основанный на применении принципа максимума Понтрягина (ПМП). ПМП позволяет свести рассматриваемые задачи оптимизации траектории, представленные в виде задач оптимального управления (ЗОУ), к краевой задаче (КЗ) для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Эта система ОДУ состоит из дифференциальных уравнений для фазовых и сопряженных переменных. Полученная КЗ решается методом продолжения по параметру (ПП), который сводит ее к задаче интегрирования вложенных систем ОДУ с заданными начальными условиями. Для обеспечения эффективности разрабатываемых методов оптимизации траекторий важно решить проблему выбора начального приближения, так как

области существования решений и сходимости метода в пространстве неизвестных параметров КЗ ПМП обычно ограничены, а чувствительность траекторий к вариации этих неизвестных параметров – высокая. Для решения этой проблемы вводится в рассмотрение математическая модель КА с идеально-регулируемым двигателем (ИРД). Решение задачи оптимизации траектории КА с ИРД во многих случаях удается получить с использованием тривиального (нулевого) начального приближения для неизвестных параметров краевой задачи, которое соответствует пассивному движению КА по начальной орбите. После вычисления оптимальной траектории КА с ИРД методом ПП, она используется в качестве начального приближения при расчете оптимальной траектория КА с двигателем ограниченного ускорения (ДОУ) или двигателем ограниченной тяги (ДОТ). Применение математической модели КА с ДОТ (в которой заданы значения тяги и удельного импульса) обеспечивает достаточно точную оценку параметров траектории КА с однорежимными ЭРДУ, а вычисление оптимальных траекторий КА с ДОУ позволяет получить верхнюю оценку требуемых затрат характеристической скорости для рассматриваемого перелета на ранних стадиях проектирования космической миссии, когда еще не выбраны все основные проектные параметры КА и ЭРДУ, включая удельный импульс.

В задачах выведения КА на высокие целевые орбиты применение ЭРДУ позволяет выводить КА увеличенной массы либо использовать средства выведения более легкого класса. Во многих случаях применение ЭРДУ позволяет исключить использование разгонных блоков (РБ), и решить комплекс задач, включающих довыведение на целевую орбиту (ЦО), разведение КА по орбитальным плоскостям и позициям, поддержание орбитальных позиций и увод КА на орбиту захоронения после завершения его эксплуатации. С точки зрения повышения эффективности космических транспортных операций с двигателями малой и конечной тяги актуальной является задача оптимизации траекторий КА, особенно важная при

проведении проектно-баллистического анализа перспективных космических миссий. В настоящее время существует теория и методы, позволяющие проводить оптимизацию траекторий КА с конечной тягой. Типичные недостатки существующих методов связаны с недостаточно хорошей вычислительной устойчивостью и существованием проблемы выбора начального приближения. Поэтому рассматриваемые в диссертации задачи развития теории межорбитальных перелетов с двигателями конечной тяги и разработки устойчивых быстродействующих методов оптимизации таких траекторий являются актуальными.

**Состояние задачи.** Задаче оптимизации траекторий КА с ЭРДУ посвящено большое количество работ. Один из первых обзоров методов оптимизации и свойств оптимальных траекторий с малой тягой приведен в работе [12], обзоры более современных работ даны в работах [58, 63, 104]. Среди работ, посвященных оптимизации многовитковых межорбитальных траекторий КА с ЭРДУ можно отметить, в частности, [3, 4, 11, 15, 20, 39, 42, 46, 47, 51, 53, 59, 64, 65 67, 70-73, 80, 90, 99, 103, 105]. Во многих из этих работ задача оптимизации траектории с малой тягой рассматривается как ЗОУ, для решения которой используются необходимые условия оптимальности в форме ПМП. В части из перечисленных работ для расширения области сходимости и повышения вычислительной устойчивости при решении КЗ ПМП используется метод ПП, включая метод продолжения по гравитационному параметру (ПГП). В ряде работ, например, в [4, 39, 99] отмечалось существование множество локальных экстремумов в задаче оптимизации многовитковых перелетов с малой тягой с фиксированным временем перелета, отличающихся различной угловой дальностью, то есть траекторий с одинаковой длительностью, удовлетворяющих всем необходимым условиям оптимальности, но отличающихся числом витков. Аналогично, в задаче минимизации затрат топлива существует множество локально-оптимальных траекторий с различной

длительностью и угловой дальностью перелета. В то же время, в задаче с фиксированной угловой дальностью перелета и свободным временем перелета для оптимальных траекторий одного типа ( $C$ - или  $E$ -траекторий в терминологии [39]) обнаружено единственное оптимальное значение времени перелета [39, 98]. Таким образом, решение такой задачи оптимизации позволяет найти оптимальное соотношение между угловой дальностью и временем перелета, что крайне затруднительно сделать при использовании других постановок задачи. В некоторых работах, в частности в [67], для облегчения решения задач с фиксированной угловой дальностью предлагалось использовать в качестве независимой переменной (НП) истинную долготу. Однако такой выбор имеет два существенных недостатка. Во-первых, в этом случае управление появляется в числителях и знаменателях правых частей ОДУ движения, что приводит к сложностям при вычислении оптимального управления, максимизирующего функцию Понтрягина. Именно поэтому в работе [67] использовался прямой метод оптимизации. Во-вторых, при достаточно большой величине бинормального ускорения, производная от истинной долготы по времени может менять знак, что приведет к серьезным вычислительным проблемам. Поэтому в настоящей диссертации предлагается использовать другую независимую угловую переменную, позволяющую избежать перечисленных недостатков.

Малая величина тяги ЭРДУ приводит к существенному увеличению длительности перелета. Поэтому, при решении многих прикладных задач, таких как выведение КА на ГСО, перелет между начальной низкой и высокой целевой орбитами будет иметь большую длительность. При этом на целевую орбиту будет доставлен КА большой массы из-за относительно малого расхода рабочего топлива при высоком удельном импульсе ЭРДУ. При использовании традиционных химических двигателей большой тяги длительность выведения существенно меньше, однако на целевую орбиту выводится КА меньшей массы из-за относительно низкого удельного импульса таких двигателей. Поэтому на практике часто

используют компромиссную комбинированную схему выведения, когда химические ракетные двигатели большой тяги формируют некоторую ПО, с которой КА совершает перелет на целевую орбиту с помощью собственной ЭРДУ. Задача оптимизации комбинированной схемы выведения рассматривалась во многих работах, например в [19, 47, 73, 93, 105]. Представленные в известных работах методы позволяют получить оценки оптимальных параметров комбинированных схем выведения, однако практически везде используется ряд допущений и методических приемов (например, использование осредненных уравнений движения, трехмерная линейная интерполяция), снижающих точность вычислений. Поэтому представляется целесообразной разработка методов оптимизации комбинированных схем повышенной точности.

**Целью работы** является развитие теории и разработка методов численной оптимизации траекторий межорбитальных перелетов КА с двигателями конечной тяги.

Для достижения цели решаются **научные задачи** разработки метода оптимизации траекторий перелета КА с ограниченным реактивным ускорением на основе применения ПМП, метода продолжения и условий трансверсальности для свободных элементов конечной орбиты; математической постановки и численного метода вычисления оптимальных траекторий с фиксированной большой угловой дальностью, свободным временем перелета и с использованием невозмущенной истинной долготы в качестве независимой переменной; методики для быстрого анализа комбинированных схем выведения КА с ЭРДУ на геостационарную орбиту.

**Объектом исследования** являются траектории межорбитального перелета КА.

**Предмет исследования** являются математические модели оптимального движения КА с двигателями конечной тяги.

**Научная новизна** работы заключается в следующем.

- Разработан новый метод вычисления оптимальных траекторий КА с ограниченным реактивным ускорением. В рамках этого метода применяются ПМП, метод продолжения и условия трансверсальности для свободных элементов конечной орбиты.
- Разработана новая математическая постановка задачи оптимизации многовитковых траекторий с фиксированной угловой дальностью, свободным временем перелета и с использованием невозмущенной истинной долготы в качестве независимой переменной.
- Разработан численный метод решения этой задачи оптимизации.
- Обнаружена немонотонная зависимость оптимального времени перелета от величины тяги на траекториях с фиксированной угловой дальностью в задаче перелета с минимальными затратами топлива.
- Разработана методика для быстрого анализа комбинированных схем выведения КА с ЭРДУ на геостационарную орбиту (ГСО). Получены зависимости оптимальных параметров промежуточных орбит (ПО) и массы КА на ГСО от длительности выведения.

**Достоверность** полученных результатов подтверждается обоснованным применением известных математических моделей и методов, а также сравнением полученных в работе результатов с результатами, опубликованными другими авторами.

**Практическая значимость** данной диссертационной работы состоит в следующем:

- Разработаны методы оптимизации траекторий КА с конечной тягой, позволяющие вычислять траектории, удовлетворяющие необходимым

условиям оптимальности, без необходимости выбора начального приближения для параметров, определяющих оптимальное управление.

- Разработанный метод оптимизации траекторий КА с двигателями ограниченного ускорения позволяет получать верхнюю оценку затрат характеристической скорости, требуемых на выполнение заданной космической транспортной операции.
- Разработанные методы и программно-математическое обеспечение, а также полученные численные результаты могут применяться для проведения проектно-баллистического анализа перспективных космических миссий.

Для решения поставленных задач в диссертации использовались **методы** механики космического полета, оптимального управления, вычислительной математики. Для решения задачи оптимизации траектории используется непрямой метод, основанный на использовании ПМП. С использованием ПМП задача оптимизации межорбитального перелета космического аппарата с двигательной установкой малой тяги сводится к двухточечной КЗ. Для решения этой КЗ используется метод ПП, включая базовый вариант метода и метод ППП. В правых частях ОДУ метода продолжения присутствуют частные производные от вектора невязок по начальным значениям сопряженных переменных, а в ряде случаев и по параметру продолжения. Для вычисления этих производных используется метод комплексного шага (МКШ). Задача оптимизации комбинированной схемы выведения КА с ЭРДУ на ГСО сводится к задаче условной минимизации, для решения которой используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Для приближенной оценки затрат характеристической скорости на участке перелета с малой тягой при оптимизации комбинированной схемы выведения используется интерполяция этих затрат трехмерными В-сплайнами по таблице зависимостей асимптотических значений характеристической скорости от наклона, радиуса перигея и апогея ПО, полученными в результате решения массива осредненных

задач оптимального быстродействия. Для интегрирования уравнений движения КА и ОДУ метода продолжения используется численный метод интегрирования Дормана-Принса 7(8)-го порядка с адаптивным выбором длины шага.

**Апробация.** Результаты исследования были представлены на 10 российских и международных конференциях, а также на семинаре кафедры 601 МАИ:

1. Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения», 2018, 2020, МАИ, г. Москва, Россия.
2. Авиация и космонавтика, 2019, 2020, МАИ, г. Москва, Россия.
3. Академические чтения по космонавтике, 2020, 2021, 2022, МГТУ, г. Москва, Россия.
4. XXV Международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация», 2021, г. Евпатория, Крым, Россия.
5. XIV Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли, 2022, г. Алушта, Россия.
6. XIV Всероссийский межотраслевой молодежный конкурс научно-технических работ и проектов. Молодежь и будущее авиации и космонавтики, 2022, МАИ, г. Москва, Россия.
7. Семинар «Механика космического полета», 2023, кафедра 601 МАИ, г. Москва, Россия.

**Личный вклад и публикации.** Все результаты, приведенные в диссертации, получены лично автором. Основные результаты опубликованы в 15 работах [24-36, 95], из которых 4 [24, 25, 26, 37] входят в издания списка ВАК Минобрнауки России и 1 работа [95] – в журнал от системы Scopus, а остальные 10 работ опубликованы в виде тезисов докладов [26-36], представленных на российских и международных конференциях.

**На защиту выносятся:**

1. Метод оптимизации траекторий перелета КА с ограниченным реактивным ускорением на основе применения ПМП, метода продолжения и условий трансверсальности для свободных элементов конечной орбиты.

2. Математическая постановка и численный метод решения задачи оптимизации многовитковых траекторий с фиксированной угловой дальностью, свободным временем перелета и с использованием невозмущенной истинной долготы в качестве независимой переменной.

3. Методика быстрого анализа комбинированных схем выведения КА с ЭРДУ на ГСО.

4. Результаты численного анализа оптимальных межорбитальных перелетов с конечной тягой и с комбинацией большой и малой тяги.

**Структура и объем работы.** Работа включает введение, шесть глав, заключение и список литературы. Объем работы составляет 130 страницы, 43 рисунка и 12 таблиц. Список литературы содержит 108 наименований.

В **первой главе** приведены математические модели движения КА с ЭРДУ. Приведена система ОДУ движения КА с ЭРДУ в центральном ньютоновском гравитационном поле в инерциальной декартовой системе координат. Представлены формулировки задач оптимизации траекторий перелета с фиксированным временем для КА с ИРД, ДОУ и ДОТ и типичные КЗ, к которым сводятся эти задачи оптимизации после применения к ним ПМП. Для оптимизации многовитковых траекторий КА с ЭРДУ рассмотрены уравнения невозмущенного движения в равноденственных элементах. Представлены математические формулировки задачи оптимизации траекторий КА с ИРД и ДОТ. В этих формулировках фиксируется угловая дальность перелета, а длительность перелета считается фиксированной. В качестве НП вместо времени используется вспомогательная долгота.

Во **второй главе** приведено описание метода ПП, реализующего гомотопию между известным решением некоторой системы нелинейных уравнений и искомым решением заданной системы нелинейных уравнений. Показано, как применение метода продолжения позволяет свести решение системы нелинейных уравнений (в качестве которой формально можно представить КЗ ПМП) к задаче Коши для вложенных систем ОДУ. Приведено описание метода комплексного шага (МКШ), который используется в методе продолжения для высокоточного вычисления требуемых производных от невязок КЗ ПМП по ее неизвестным параметрам. Приведено описание метода ППП, позволяющего вычислить траекторию с заданным числом витков вокруг притягивающего центра, удовлетворяющую необходимым условиям оптимальности.

В **третьей главе** рассмотрены методы оптимизации межорбитальных перелетов КА с ИРД, ДОУ и ДОТ в декартовых координатах. Рассмотрены задачи перелета за фиксированное время между заданными точками заданных орбит и перелетов за фиксированное время на конечную орбиту с частично заданными элементами. Приводится полная система краевых условий, включающих условия трансверсальности, описание разработанных методов решения и численные примеры оптимальных траекторий, полученных с использованием этих методов.

В **четвертой главе** рассмотрен метод оптимизации многовитковых межорбитальных траекторий с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета при использовании уравнений движения в равноденственных элементах и вспомогательной долготы в качестве НП. Приводится описание разработанного метода оптимизации и численных результатов, полученных с его применением. Обсуждаются обнаруженные свойства оптимальных траекторий с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета, в частности, немонотонная зависимость оптимального времени перелета от величины тяги.

В пятой главе приводятся методика и результаты оптимизации комбинированной схемы выведения КА с ЭРДУ на ГСО при использовании высокой эллиптической ПО (орбиты отделения КА), что характерно для схем выведения без использования долгоживущих РБ. Рассматривается задача максимизации доставляемой на ГСО массы КА за ограниченное (или минимальное) время перелета при использовании в качестве средства выведения КА на ПО ракеты-носителя (РН) Falcon-9. Приводится методика решения задачи и численные результаты, включая аппроксимацию Парето-фронта оптимальных решений на плоскости «длительность перелета – масса КА на ГСО».

В шестой главе приводятся методика и результаты оптимизации комбинированной схемы выведения с использованием РБ, позволяющего формировать произвольную ПО (без жестких ограничений на высоту перигея и наклонение). Задача максимизации массы КА, доставляемого на ГСО за фиксированное время, сведена к задаче условной минимизации, которая решается с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа и метода продолжения. Для гладкой аппроксимации зависимости характеристической скорости перелета КА с ЭРДУ с ПО на ГСО используется трехмерная аппроксимация В-сплайнами асимптотических значений характеристической скорости апсидального многовиткового перелета между заданной эллиптической орбитой и ГСО, полученных в результате решения осредненной задачи оптимального быстрогодействия. Для расчета перелета между низкой околоземной (опорной) орбитой и ПО используется импульсная аппроксимация решения. Приведены численные результаты, включающие в себя зависимости максимальной массы КА на ГСО и параметров ПО от времени перелета.

# 1 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ

## 1.1 Уравнения движения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой

Рассмотрим использование для анализа невозмущенного движения КА с ЭРДУ в гравитационном поле Земли ОДУ движения в инерциальной системе координат J2000 в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{\mu}{r^3}\mathbf{x} + \frac{P}{m}\delta \cdot \mathbf{e}, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{\delta \cdot P}{w}. \end{aligned} \quad (1.1.1)$$

Здесь  $\mathbf{x}$  – радиус-вектор КА,  $\mathbf{v}$  – вектор скорости КА,  $t$  – время,  $\mu$  - гравитационный параметр Земли,  $r$  – удаление КА от центра Земли,  $P$  – величина реактивной тяги двигателя КА,  $\delta$  - функции тяги,  $\mathbf{e}$  – орт в направлении вектора тяги,  $m$  - масса КА,  $w$  - величина скорости истечения двигателя КА. Для снижения ошибок численного интегрирования, в уравнениях движения применяются безразмерные переменные. Для геоцентрических траекторий в качестве шкалы длины  $L^*$  обычно используется большая полуось начальной или конечной орбиты КА, за единицу измерения скорости принимают скорость орбитального движения по круговой орбите с радиусом, равным шкале длины  $v^* = \sqrt{\mu/L^*}$ . В этом случае масштаб времени будет равен  $T^* = L^*/v^*$ , масштаб ускорения равен  $A^* = v^*/T^*$ . В качестве масштаба массы обычно берется начальная масса  $m_0$ :  $M^* = m_0$ ; за масштаб тяги принимается величина  $P^* = m^*A^*$ . Для обезразмеривания используются следующие выражения: для величин, имеющих размерность длины:  $r = r_r / L^*$ , для величин, имеющих

размерность скорости:  $v = v_r / v$ , для величин, имеющих размерность времени:  $T = T_r / T^*$ , для величин, имеющих размерность ускорения:  $A = A_r / A^*$ , для величин, имеющих размерность силы:  $P = P_r / P^*$ , для величин, имеющих размерность массы:  $m = m_r / m^*$ . Здесь все величины с нижним индексом  $r$  являются размерными, величины с верхним индексом  $*$  представляют масштабы единиц измерения, а величины без индексов соответствуют безразмерным величинам. При введенных таким образом переменных гравитационный параметр притягивающего центра  $\mu$  равен 1 и система ОДУ, описывающих движение КА в безразмерном виде, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= -\frac{1}{r^3} \mathbf{x} + \frac{P}{m} \cdot \delta \cdot \mathbf{e}, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{\delta \cdot P}{w}. \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

## 1.2 Математическая модель движения космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем

ИРД является математической моделью электроракетного двигателя (ЭРД), в рамках которой полагается, что задана только механическая мощность реактивной струи (половина произведения тяги на скорость истечения), а значения тяги и скорости истечения, в рамках этого ограничения, могут изменяться произвольным способом. Уравнения движения КА с ИРД в гравитационном поле Земли с силовой функцией  $\Omega = \mu/r$ ,  $r = |\mathbf{x}|$  в инерциальной декартовой геоцентрической системе координат имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \Omega_x + \mathbf{a},\end{aligned}\tag{1.2.1}$$

где  $\mathbf{a}$  – вектор реактивного ускорения.

В работе [68] была представлена математическая модель оптимальной траектории КА с ИРД и было выявлено, что ОДУ, описывающие оптимальное движение КА с таким двигателем, могут быть разделены на две составляющие: динамическую и параметрическую части. Динамическая часть не имеет зависимости от массы КА. В результате её решения будет вычислена оптимальная программа управления  $\mathbf{a}(t)$ . Согласно рассматриваемой модели, эти программы представляют собой непрерывные и гладкие функции времени, что упрощает процесс решения краевой задачи, полученной после применения ПМП. После вычисления программы изменения реактивного ускорения можно вычислить зависимость между массой КА и временем (а также конечную массу КА и требуемые затраты топлива). Для этого решается параметрическая задача, сводящаяся к одной квадратуре. В данной работе рассматривается только динамическая часть задачи оптимизации траекторий КА с ИРД, результаты решения которой в дальнейшем будет использоваться в качестве начального приближения при оптимизации траекторий КА с ДООУ и ДОТ.

Рассмотрим ЗОУ для системы ОДУ (1.2.1) на заданном интервале  $t \in [t_0, t_f]$  с целью минимизации функционала:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a^2 dt,\tag{1.2.2}$$

где  $a^2 = \mathbf{a}^T \mathbf{a}$ .

Применим формализм ПМП [45] к задаче (1.2.1), (1.2.2). Функции Понtryгина этой задачи имеет следующий вид:

$$H = -\frac{1}{2}a^2 + \mathbf{p}_v^T \Omega_x + \mathbf{p}_v^T \mathbf{a} + \mathbf{p}_x^T \mathbf{v}. \quad (1.2.3)$$

Здесь  $\mathbf{p}_x$ , и  $\mathbf{p}_v$ , сопряженные переменные к  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{v}$  соответственно. Из условия максимума гамильтониана (1.2.3) по управлению  $\mathbf{a}$ , оптимальное управление имеет следующий вид:

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v, \quad (1.2.4)$$

Система ОДУ оптимального движения, исходя из ПМП, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \Omega_x + \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} &= -\Omega_{xx} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} &= -\mathbf{p}_x, \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

Уравнения (1.2.5) должны быть дополнены краевыми условиями. Для перелета между двумя заданными точками фазового пространства краевые условия имеют вид:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, \quad (1.2.6)$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, \quad (1.2.7)$$

Таким образом, после применения ПМП, задача оптимизации межорбитального перелета КА с ИРД сводится к двухточечной КЗ (1.2.5), (1.2.6), (1.2.7).

### **1.3 Математическая модель движения космического аппарата с двигателем ограниченного ускорения**

В рамках математической модели КА с ДОУ предполагается, что величина реактивного ускорения не меняется со временем. Формально, такая математическая модель соответствует двигателю с бесконечной скоростью истечения. В рамках этой

модели нет необходимости анализировать изменение массы КА. Ее использование, при условии равенства заданного значения реактивного ускорения начальному значению реактивного ускорения КА с ДОТ, определяет верхнюю границу затрат характеристической скорости в задаче минимизации массы топлива для перелета КА с ДОТ (нижнюю границу затрат характеристической скорости можно получить из решения задачи оптимизации импульсного перелета).

Пусть КА движется в гравитационном поле, имеющем силовую функцию  $\Omega$ . Тогда уравнения движения центра масс КА в инерциальной декартовой геоцентрической системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \Omega_{\mathbf{x}} + a \cdot \delta \cdot \mathbf{e}.\end{aligned}\tag{1.3.1}$$

Здесь  $a$  - реактивное ускорение,  $\delta$  - функции тяги (при работающем двигателе  $\delta=1$ , на участках пассивного полета  $\delta=0$ ),  $\mathbf{e}$  - единичный вектор в направлении действия реактивного ускорения.

Оптимизируемыми программами управления являются программы изменения ориентации вектора реактивного ускорения и программа включения-выключения двигателя. Рассмотрим задачу минимизации характеристической скорости:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} a \cdot \delta dt\tag{1.3.2}$$

Применяя формализм ПМП к задаче (1.3.1), (1.3.2) получаем следующее выражение для функции Понтрягина:

$$H = -\delta \cdot a + \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_x + \delta \cdot a \cdot \mathbf{p}_v^T \mathbf{e}.\tag{1.3.3}$$

Оптимальное управление определяется из условия максимума (1.3.3) по  $\mathbf{e}$  и  $\delta$ :

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \quad (1.3.4)$$

$$\delta = \begin{cases} 1, & \psi > 0 \\ 0, & \psi \leq 0 \end{cases}, \quad (1.3.5)$$

где  $\psi$  - функция переключения, имеющая для рассматриваемой задачи вид:

$$\psi = p_v - 1, \quad (1.3.6)$$

Система ОДУ оптимального движения, в соответствии с ПМП, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \Omega_x + \frac{a \cdot \delta}{p_v} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} &= -\Omega_{xx} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} &= -\mathbf{p}_x, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Краевые условия для задачи перелета КА с ДООУ между заданными точками фазового пространства имеют вид (1.2.6) и (1.2.7).

#### 1.4 Математическая модель движения космического аппарата с двигателем ограниченной тяги

Уравнения движения центра масс КА с ДОТ в инерциальной декартовой геоцентрической системе координат имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \Omega_x + \frac{P}{m} \cdot \delta \cdot \mathbf{e}, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{\delta \cdot P}{w}, \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

где  $P$  – тяга,  $w$  – скорость истечения,  $m$  – масса КА.

Рассматривается задача минимизации затрат рабочего тела:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \delta \cdot \frac{P}{w} dt \quad (1.4.2)$$

Применяя формализм ПМП к задаче (1.4.1) и (1.4.2) получаем следующее выражение для функции Понтрягина:

$$H = -\delta \cdot \frac{P}{w} + \mathbf{p}_x^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_v^T \Omega_x + \delta \cdot \frac{P}{m} \cdot \mathbf{p}_v^T \mathbf{e} - \delta \cdot \frac{P}{w} p_m. \quad (1.4.3)$$

Здесь  $p_m$  – сопряженная к массе КА переменная. Оптимальное управление определяется из условия максимума функции Понтрягина (1.4.3):

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_v}{p_v}, \delta = \begin{cases} 1, & \psi > 0 \\ 0, & \psi \leq 0 \end{cases}, \psi = \frac{p_v}{m} - \frac{p_m + 1}{w}. \quad (1.4.4)$$

Полная система ОДУ оптимального движения КА, в соответствии с ПМП, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \Omega_x + \frac{P \cdot \delta}{p_v} \mathbf{p}_v, \\ \frac{dm}{dt} &= -\frac{\delta \cdot P}{w}, \\ \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} &= -\Omega_{xx} \mathbf{p}_v, \\ \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} &= -\mathbf{p}_x, \\ \frac{dp_m}{dt} &= \frac{\delta \cdot P \cdot p_v}{m^2}. \end{aligned} \quad (1.4.5)$$

Для задачи оптимизации траектории перелета между двумя заданными точками заданных орбит с заданной начальной массой КА, уравнения (1.4.5) должны быть дополнены краевыми условиями:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}_0, m(0) = m_0, \quad (1.4.6)$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \mathbf{v}(t_f) = \mathbf{v}_f, p_m(t_f) = 0. \quad (1.4.7)$$

Последнее условие в (1.4.7) является известным условием трансверсальности для свободного значения конечной массы КА.

### **1.5 Математическая модель движения космического аппарата с идеально-регулируемым двигателем с применением угловой независимой переменной**

Эффективность представленной в предыдущем разделе математической модели существенно снижается с ростом угловой дальности перелета. С целью повышения точности и вычислительной производительности, для анализа невозмущенных многовитковых траекторий КА с ЭРДУ используются уравнения движения в равноденственных элементах. Рассмотрим задачу оптимизации многовиткового перелета КА с ИРД в центральном ньютоновском гравитационном поле. ОДУ движения КА под действием сил гравитации и тяги в модифицированных равноденственных элементах  $p, e_x, e_y, i_x, i_y, L$  [62] имеют вид:

$$\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2p}{q} a_t, \\
\frac{de_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ \sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\
\frac{de_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \\
\frac{di_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \cos L \cdot a_n, \quad \frac{di_y}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \sin L \cdot a_n, \\
\frac{dL}{dt} &= \sqrt{\mu p} \left( \frac{q}{p} \right)^2 + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\xi}{q} \cdot a_n,
\end{aligned} \tag{1.5.1}$$

при этом  $s^2 = 1 + i_x^2 + i_y^2$ ,  $q = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$ ,  $\xi = i_x \sin L - i_y \cos L$ ,

Используются следующие обозначения:

- $p$  – фокальный параметр;
- $e$  – эксцентриситет,  $e_x = e \cos(\omega + \Omega)$ ,  $e_y = e \sin(\omega + \Omega)$ ;
- $i$  – наклонение,  $i_x = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega$ ,  $i_y = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega$ ;
- $L = \nu + \omega + \Omega$  – истинная долгота;
- $\omega$  – аргумент перицентра;
- $\Omega$  – долгота восходящего узла (ДВУ);
- $\mu$  – гравитационный параметр Земли;
- $a_t$ ,  $a_r$ ,  $a_n$  – трансверсальная, радиальная и бинормальная компоненты реактивного ускорения, соответственно.

Введем новые переменные – вспомогательную долготу  $K$ , производная которой по времени имеет следующий вид:

$$\frac{dK}{dt} = \sqrt{\mu p} \left( \frac{q}{p} \right)^2, \tag{1.5.2}$$

и  $L_K = L - K$  (отклонение истинной долготы от вспомогательной), производная которой по времени, как следует из (1.5.1) и (1.5.2), будет иметь следующий вид

$$\frac{dL_K}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\xi}{q} a_n. \quad (1.5.3)$$

После замены последнего уравнения (1.5.1) на (1.5.2) и (1.5.3), получим систему ОДУ седьмого порядка:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2p}{q} a_r, \\ \frac{de_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ \sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\ \frac{de_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[ -\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \\ \frac{di_x}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \cos L \cdot a_n, \quad \frac{di_y}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \sin L \cdot a_n, \\ \frac{dL_K}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\xi}{q} a_n, \quad \frac{dK}{dt} = \sqrt{\mu p} \left( \frac{q}{p} \right)^2. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

В системе (1.5.4) везде при вычислении истинной долготы  $L$  используется выражение  $L = K + L_K$ . При малой величине ускорения от реактивной тяги уравнения (1.5.4) представляют собой систему ОДУ с одной быстрой переменной  $K$ , а остальные переменные являются медленными, так как правые части ОДУ для этих переменных содержат малые множители – компоненты реактивного ускорения.

Система (1.5.4) явно не зависит от времени, а производная  $dK/dt$ , как следует из последнего уравнения (1.5.4), всегда положительна и определена при  $p > 0$ . Отсюда следует, что если ограничиться рассмотрением невырожденных орбит (то есть орбит с ненулевым фокальным параметром), то можно использовать независимую переменную  $K$  вместо  $t$ . Соотношение для такой замены независимой переменной, с учетом последнего уравнения (1.5.4), имеет следующий вид:

$$dK = \frac{dK}{dt} dt \Rightarrow \frac{d}{dK} = \frac{dt}{dK} \frac{d}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left( \frac{p}{q} \right)^2 \frac{d}{dt}. \quad (1.5.5)$$

В итоге получим следующую систему ОДУ:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dK} &= \frac{2p^3}{\mu q^3} a_t, \\ \frac{de_x}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \left[ \sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\ \frac{de_y}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \left[ -\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \\ \frac{di_x}{dK} &= \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \cos L \cdot a_n, \quad \frac{di_y}{dK} = \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \sin L \cdot a_n, \quad \frac{dL_K}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^3} \xi \cdot a_n. \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

При необходимости, система может быть дополнена уравнением для времени

$$\frac{dt}{dK} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left( \frac{p}{q} \right)^2. \quad (1.5.7)$$

Использование истинной долготы  $L$  в качестве НП в задачах оптимизации траекторий КА рассматривалось ранее в ряде работ [67, 59]. Важно подчеркнуть, что производная  $dL/dt$  может изменять свой знак при больших значениях бинормальной компоненты реактивного ускорения. Из-за этого выбор истинной долготы в качестве НП требует постоянного контроля за знаком её производной и, в некоторых случаях, может привести к некорректным результатам.

Вспомогательная долгота  $K$ , в отличие от  $L$ , обладает положительной производной по времени на всех невырожденных орбитах, поэтому ее удобно использовать в качестве новой независимой угловой переменной. Кроме того, стоит подчеркнуть, что в работах [67, 59] задача оптимизации траектории решалась с использованием прямого подхода. Одной из причин этого является сложность выражения оптимального управления из условия максимума функции Понтрягина при использовании в качестве независимой переменной истинной долготы  $L$ , так как

в этом случае управление входит и в числители, и в знаменатели правых частей ОДУ движения.

В дальнейшей работе сконцентрируемся на рассмотрении задачи перелета между двумя заданными точками с фиксированной угловой дальностью  $\Delta K$  и свободной (оптимальной) длительностью. Следует отметить, что на типичных оптимальных многовитковых траекториях с малой тягой вариация  $L_K$  составляет доли градуса, поэтому изменение вспомогательной долготы  $K$  близко к изменению истинной долготы  $L$ . Начальные условия движения при заданном начальном значении истинной долготы  $L_0$  можно задать, фиксируя начальное значение начальной вспомогательной долготы  $K_0 = L_0$  следующим образом:

$$p(K_0) = p_0, e_x(K_0) = e_{x0}, e_y(K_0) = e_{y0}, i_x(K_0) = i_{x0}, i_y(K_0) = i_{y0}, L_K(K_0) = 0, \quad (1.5.8)$$

а конечные условия – устанавливая значение конечной вспомогательной долготы ( $K_f = K_0 + \Delta K$ ) – следующим образом:

$$p(K_f) = p_f, e_x(K_f) = e_{xf}, e_y(K_f) = e_{yf}, i_x(K_f) = i_{xf}, i_y(K_f) = i_{yf}. \quad (1.5.9)$$

В рамках модели ИРД, величины тяги ( $P$ ) и скорости истечения ( $w$ ) могут меняться произвольно, при условии, что соблюдается единственное ограничение – постоянство реактивной мощности, где  $N_b = Pw/2$  (согласно [40]). Легко показать, что зависимость массы КА от времени  $t$  при известной зависимости  $a(t) = \sqrt{a_r^2(t) + a_i^2(t) + a_n^2(t)}$  вычисляется с помощью следующей формулы:

$$m(t) = \frac{m_0 N_b}{N_b + m_0 J(t)}, \quad (1.5.10)$$

где  $m_0 = m(t_0)$  – масса КА в начальный момент времени  $t_0$ ,  $J(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t a^2(t) dt$ .

Поэтому задача максимизации массы КА в конечный момент времени  $t_f$  (или минимизации массы топлива) эквивалентна задаче минимизации функционала

$J(t_f) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a^2(t) dt$ . В случае, если в качестве независимой переменной используется

$K$  вместо  $t$ , необходимо заменить переменную в последнем интеграле, таким образом минимизируемый функционал примет вид:

$$J_1 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a^2 dt = \frac{1}{2} \int_{K_0}^{K_f} \frac{a^2}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK \quad (1.5.11)$$

Рассмотрим задачу оптимизации траектории КА с ИРД ограниченной мощности, то есть задачу минимизации функционала (1.5.11) для динамической системы (1.5.6), (1.5.8), (1.5.9). Функция Понтрягина соответствующей ЗОУ примет вид

$$H = -\frac{1}{2} \frac{a^2}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} + \frac{p^2}{q^3 \mu} \mathbf{A}^T \mathbf{a}. \quad (1.5.12)$$

Здесь  $\mathbf{a}^T = (a_t, a_r, a_n)$ ,  $a = |\mathbf{a}|$ ,  $\mathbf{A}^T = (A_t, A_r, A_n)$ ,

$$\begin{aligned} A_t &= 2p \cdot p_p + [(q+1)\cos L + e_x] p_{ex} + [(q+1)\sin L + e_y] p_{ey}, \\ A_r &= q \cdot (\sin L \cdot p_{ex} - \cos L \cdot p_{ey}), \\ A_n &= \xi \cdot (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey} + p_{LK}) + \frac{s^2}{2} (\cos L \cdot p_{ix} + \sin L \cdot p_{iy}), \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

$p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK}$  – переменные, сопряженные к переменным  $p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K$  соответственно. Необходимо сделать следующее замечание об оптимальности времени перелета в предложенной постановке. Система (1.5.6) не зависит в явном виде от  $t$ . Данную систему возможно дополнить дифференциальным уравнением для времени (1.5.7). При этом следует отметить, что его правая часть также не имеет явной зависимости от времени. Функция Понтрягина в этом случае имеет вид

$$H_t = H + \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left( \frac{p}{q} \right)^2 p_t. \text{ Здесь } p_t \text{ – переменная, сопряженная к } t. \text{ В общем случае}$$

можно принять  $t(K_0) = 0$ . Необходимым условием оптимальности времени перелета будет условие трансверсальности  $p_t(K_f) = 0$ . Так как  $H$  не является явной функцией времени, то  $dp_t/dt \equiv 0$ . Отсюда следует, что  $p_t(K) \equiv 0$  и  $H_t \equiv H$ . Следовательно, на

решении ЗОУ (1.5.6), (1.5.8), (1.5.9), (1.5.11) автоматически выполняются необходимые условия оптимальности времени перелета.

Из условия максимума функции Понтрягина (1.5.12) по управлению  $\mathbf{a}$  следует следующее выражение для оптимального управления:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{p}{\mu}} \mathbf{A}. \quad (1.5.14)$$

Подставив его в (1.5.12), получаем выражение для гамильтониана приведенной ЗОУ:

$$H = k \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \quad (1.5.15)$$

где  $k = \frac{1}{2q^4} \sqrt{\frac{p^5}{\mu^3}}$ . ОДУ оптимального движения КА будут иметь следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dK} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \quad \frac{d\mathbf{p}}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \quad (1.5.16)$$

где  $\mathbf{x}^T = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K)$  – фазовый вектор,  $\mathbf{p}^T = (p_p, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{i_x}, p_{i_y}, p_{L_K})$  – вектор сопряженных переменных. В результате получается, что ЗОУ (1.5.6), (1.5.8), (1.5.9),

(1.5.11) сводится к КЗ для системы ОДУ (1.5.16) с краевыми условиями (1.5.8) и (1.5.9), дополненных условием трансверсальности

$$p_{L_K}(K_f) = 0. \quad (1.5.17)$$

Чтобы решить эту КЗ потребуется удовлетворить шесть конечных условий (1.5.9), (1.5.17) с помощью подбора шести начальных значений вектора сопряженных переменных  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(K_0)$ .

## 1.6 Математическая модель движения космического аппарата с двигателем ограниченной тяги с применением угловой независимой переменной

Рассмотрим задачу оптимизации многовитковой траектории КА с ДОТ в центральном Ньютоновском гравитационном поле с использованием уравнений

движения, записанных в модифицированных равноденственных орбитальных элементах со вспомогательной долготой в качестве независимой переменной. Система ОДУ движения КА в рассматриваемой постановке задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
 \frac{dp}{dK} &= \frac{2p^3}{\mu q^3} a_t, \\
 \frac{de_x}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \left[ \sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\
 \frac{de_y}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \left[ -\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \\
 \frac{di_x}{dK} &= \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \cos L \cdot a_n, \quad \frac{di_y}{dK} = \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \sin L \cdot a_n, \quad \frac{dL_K}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^3} \xi \cdot a_n, \\
 \frac{dm}{dK} &= -\frac{\delta}{\sqrt{\mu p}} \left( \frac{p}{q} \right)^2 \frac{P}{w}, \quad \frac{dt}{dK} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left( \frac{p}{q} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{1.6.1}$$

Здесь

$$a_t = \delta \frac{P}{m} \cos \vartheta \cos \psi, \quad a_r = \delta \frac{P}{m} \sin \vartheta \cos \psi, \quad a_n = \delta \frac{P}{m} \sin \psi \quad (1.6.2)$$

проекции вектора реактивного ускорения на оси орбитальной системы координат,  $\vartheta$ ,  $\psi$  - углы тангажа и рысканья.

Рассмотрим задачу минимизации массы топлива, которой соответствует минимизация следующего функционала:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \delta \frac{P}{w} dt = \int_{K_0}^{K_f} \delta \frac{P}{q^2 w} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK. \tag{1.6.3}$$

Функция Понтрягина рассматриваемой задачи имеет вид:

$$H = \delta P k_1 \cdot \left[ \frac{k_2}{m} \cdot (A_r \sin \mathcal{G} \cos \psi + A_t \cos \mathcal{G} \cos \psi + A_n \sin \psi) - \frac{p_m + 1}{w} \right], \quad (1.6.4)$$

где  $k_1 = \frac{1}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}}$ .

Максимум функции Понтрягина (1.6.4) по  $\delta$ ,  $\mathcal{G}$ ,  $\psi$  определяет оптимальное управление в следующем виде:

$$\sin \mathcal{G} = A_r / A_n, \cos \mathcal{G} = A_t / A_n, \sin \psi = A_n / A, \cos \psi = A_n / A, \quad (1.6.5)$$

$$\delta = (1 + \text{sign } S) / 2, S \neq 0; \delta \in [0; 1], S = 0, \quad (1.6.6)$$

где  $A_n = \sqrt{A_r^2 + A_t^2}$ ,  $A = \sqrt{A_r^2 + A_t^2 + A_n^2}$ . Подставляя выражения для оптимального управления (1.6.5), (1.6.6) в (1.6.4), получим следующее выражение для  $H$ :

$$H = \delta P k_1 \cdot \left[ \frac{k_2 A}{m} - \frac{p_m + 1}{w} \right], \quad (1.6.7)$$

где  $k_2 = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{p}{\mu}}$ .

ОДУ оптимального движения примут следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dK} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_{x1}}, \frac{d\mathbf{p}_{x1}}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1} \quad (1.6.8)$$

где  $\mathbf{x}_1^T = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K, m)$  – фазовый вектор,  $\mathbf{p}_{x1}^T = (p_p, p_{e_x}, p_{e_y}, p_{i_x}, p_{i_y}, p_{L_K}, p_m)$  – вектор сопряженных переменных.

После применения ПМП задача оптимизации многовитковых межорбитальных перелетов КА с ДОТ сводится к двухточечной КЗ для системы (1.6.8). В этой задаче граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
K = K_0 = L_0 : p(K_0) = p_0, e_x(K_0) = e_{x_0}, e_y(K_0) = e_{y_0}, i_x(K_0) = i_{x_0}, i_y(K_0) = i_{y_0}, \\
L_K(K_0) = 0, m(K_0) = m_0, t(K_0) = t_0,
\end{aligned} \tag{1.6.9}$$

$$\begin{aligned}
K = K_f : p(K_f) = p_f, e_x(K_f) = e_{xf}, e_y(K_f) = e_{yf}, i_x(K_f) = i_{xf}, i_y(K_f) = i_{yf}, \\
p_{LK}(K_f) = 0, p_m(K_f) = 0, p_t(K_f) = 0.
\end{aligned} \tag{1.6.10}$$

Здесь, как и в разделе 1.5,  $K_0 = L_0$ ,  $K_f = K_0 + \Delta K$ . Уравнения для  $p_{LK}(K_f), p_m(K_f), p_t(K_f)$  из (1.6.10) представляют собой условия трансверсальности.

### 1.7 Заключение по разделу

В разделе представлены уравнения движения КА с ЭРДУ в декартовых координатах и в модифицированных равноденственных элементах. Представлены математические постановки задач оптимизации траекторий КА с ЭРДУ между заданными точками заданных начальной и конечных орбит за фиксированное время и с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета, с использованием угловой НП.

Представлены математические модели движения КА с ИРД, ДОУ и ДОТ. Сформулированы задачи минимизации затрат топлива для перечисленных математических моделей движения КА, которые сведены к краевым задачам с помощью ПМП. Приведены уравнения оптимального движения и краевые условия для типичных задач оптимизации траекторий КА с ЭРДУ.

## 2 МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

### 2.1 Метод продолжения по параметру

В данной работе для решения КЗ ПМП и систем нелинейных уравнений используется метод ПП. Метод ПП относится к классу гомотопических методов. В работе используется один из простейших вариантов метода, в котором применяется

погружение исходной задачи в однопараметрическое семейство, и решение задачи продолжается по параметру этого семейства [38-42]. Рассматриваемые КЗ можно формально представить в виде нелинейного уравнения для невязок  $\mathbf{f}$ , зависящих от вектора неизвестных параметров  $\mathbf{z}$ :

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0, \quad (2.1.1)$$

Инициализация рассматриваемого варианта метода продолжения производится вычислением вектора невязок для некоторого начального приближения вектора неизвестных параметров  $\mathbf{z}_0$ .

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b}. \quad (2.1.2)$$

Затем рассматривается погружение системы (2.1.2) в однопараметрическое семейство нелинейных уравнений следующего вида:

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}(\tau)) = (1 - \tau)\mathbf{b}, \quad (2.1.3)$$

где  $\tau \in [0;1]$  – параметр продолжения, при этом  $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ . При  $\tau = 0$ , уравнение (2.1.3) совпадает с уравнением (2.1.2), а при  $\tau = 1$  уравнение (2.1.3) совпадает с уравнением (2.1.1). Необходимо, чтобы равенство (2.1.3) выполнялось для любого  $0 \leq \tau \leq 1$ . Для выполнения этого условия продифференцируем уравнение (2.1.3) по  $\tau$  и получим следующее выражение для производной вектора неизвестных параметров КЗ от параметра продолжения по  $\tau$ :

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \mathbf{b}. \quad (2.1.4)$$

Систему ОДУ (2.1.4) будем называть системой ОДУ метода ПП. Важно отметить, что для того, чтобы метод продолжения мог быть применен, необходимо, чтобы матрицы частных производных  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$  существовали и были невырожденными на всем интервале продолжения  $\tau \in [0;1]$ . В части случаев

(например, при использовании метода ПП) разумно внедрение параметра продолжения  $\tau$  в правые части ОДУ движения и в краевые условия. В этом случае система ОДУ метода ПП принимают вид

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \left(\mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau}\right), \quad (2.1.5)$$

Для получения решения необходимо проинтегрировать ОДУ метода ПП (2.1.4) или (2.1.5) относительно параметра  $\tau \in [0;1]$  с начальными условиями  $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ . Значение вектора неизвестных параметров  $\mathbf{z}(1)$  и будет искомым решением исходной задачи (2.1.1).

В частности, для задач оптимизации траекторий КА с ИРД (уравнения оптимального движения (1.2.5)) или с ДООУ (уравнения оптимального движения (1.3.7)) с краевыми условиями (1.2.6), (1.2.7) вектор невязок будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_f \\ \mathbf{v}(t_f) - \mathbf{v}_f \end{pmatrix}, \quad (2.1.6)$$

а вектор неизвестных параметров – вид  $\mathbf{z} = (\mathbf{p}_x^T(t_0), \mathbf{p}_v^T(t_0))^T$ .

В задаче оптимизации траектории КА с ИРД, для вычисления  $\mathbf{f}$  требуется численно проинтегрировать систему уравнений оптимального движения (1.2.5) с текущими значениями  $\mathbf{z}$  и  $\tau$ . Начальным приближением для неизвестных начальных значений сопряженных переменных может рассматриваться нулевой вектор ( $\mathbf{z}_0 = 0$ ). Такому начальному приближению соответствует траектория пассивного движения КА по начальной орбите.

## 2.2 Метод численного дифференцирования

Известны различные методы численного дифференцирования. Все они обладают как положительными, так и отрицательными качествами в части точности,

сложности реализации, быстроты сходимости и т. д. Использование прямых разностей, при оптимальном выборе шага численного дифференцирования, приводит к потере половины значащих цифр в значении производной по сравнению с числом правильных значащих цифр в значении функции. Использование разностных методов более высокого порядка теоретически позволяет достичь высокой точности вычисления производных, но при этом существенно возрастает вычислительная трудоемкость и остается проблема выбора оптимального шага численного дифференцирования (в общем случае, оптимальный шаг зависит не только от параметров машинного представления вещественных чисел, но и от свойств дифференцируемой функции).

В работах [82, 83, 106] для высокоточного вычисления первой производной был предложен МКШ. Полученные с использованием этого метода оценки первых производных могут иметь такое же количество верных значащих цифр, какое имеют значения вычисленных функций при сохранении разумных вычислительных затрат. Этот метод был успешно использован для анализа чувствительности в вычислительной гидродинамике [57] и в междисциплинарной программной среде Newman в 1998 году [94]. Дальнейшие исследования по этому вопросу были проведены в работах [84- 89].

Для вычисления правых частей дифференциальных уравнений (2.1.4) и (2.1.5), требуется вычисление частных производных от вектора невязок  $\mathbf{f}$  по заданным начальным значениями сопряженных переменных  $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ . Для вычисления данных производных в настоящей работе используется МКШ [83, 84, 106]. Приближенное выражение для производной вещественной аналитической функции  $f(x)$  с использованием МКШ имеет следующий вид:

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{\text{Im}[f(x + ih)]}{h} + O(h^2). \quad (2.2.1)$$

Здесь  $h$  – шаг дифференцирования,  $i = \sqrt{-1}$ . Это выражение можно получить из следующего разложения функции  $f$  в ряд Тейлора с приращением аргумента в мнимой части:

$$f(x + ih) = f(x) + ihf'(x) - h^2 \frac{f''(x)}{2!} - ih^3 \frac{f'''(x)}{3!} + \dots \quad (2.2.2)$$

Поскольку аппроксимация с комплексным шагом не требует вычисления разности значений функции при близких величинах аргумента, можно выбрать малые размеры шага без потери точности. Чтобы проиллюстрировать этот момент, рассмотрим следующую аналитическую функцию:

$$f(x) = \frac{e^x}{(\cos x)^3 + (\sin x)^3} \quad (2.2.3)$$

Точная первая производная при  $x = \pi/4$  вычисляется аналитически и затем сравнивается с результатами, полученными с помощью МКШ, прямых и центральных конечных разностей. Результаты сравнения указанных методов по относительной погрешности представлены на рисунке 2.2.1.

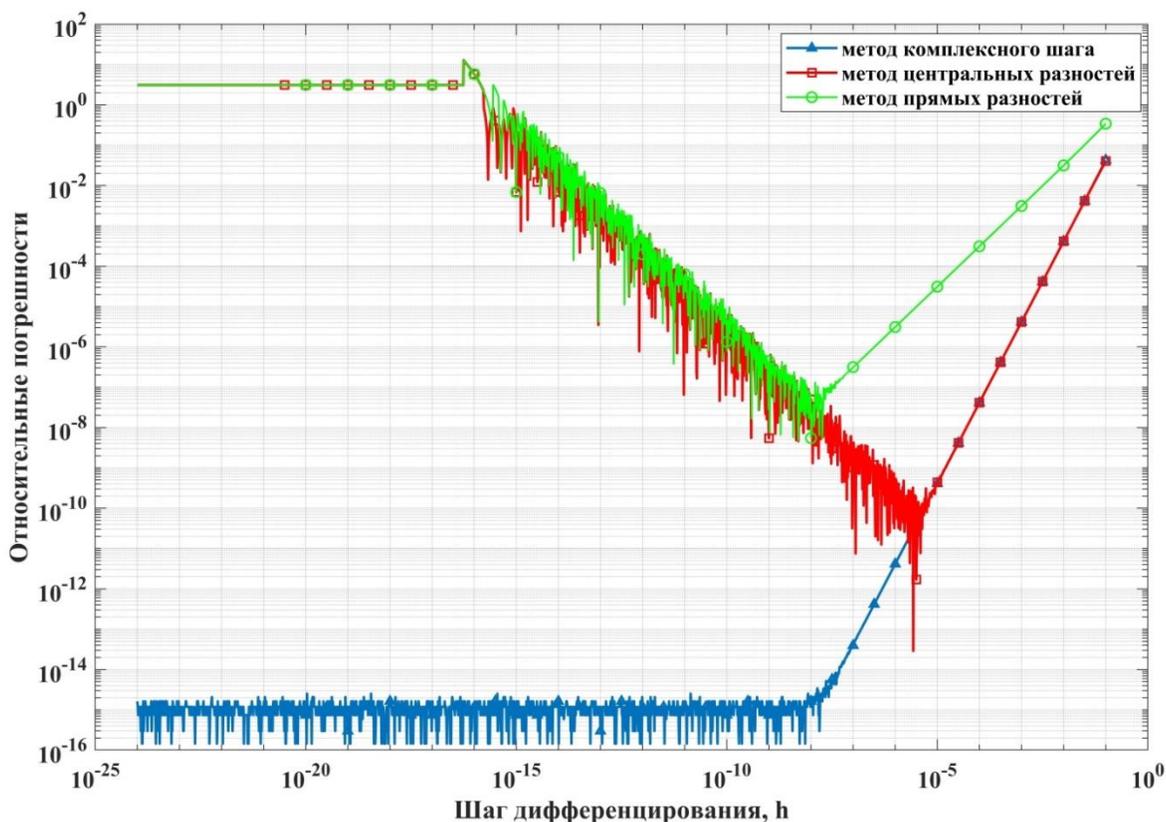


Рисунок 2.2.1 - Относительная погрешность значений первой производной, полученных методами конечных разностей и комплексного шага

### 2.3 Метод продолжения по гравитационному параметру

Одной из проблем при оптимизации траекторий КА с ЭРДУ между заданными точками заданных орбит с фиксированным временем перелета является выбор оптимального числа целых витков на траектории перелета, обеспечивающего минимальное значение рассматриваемого функционала по сравнению со значениями функционала на траекториях с другим числом целых витков. Для решения этой задачи в работах [39, 40, 41] предложен метод ПГП, который является частным случаем метода продолжения в форме (2.1.5). В дальнейшем, чтобы подчеркнуть отличие метода ПГП от других форм метода продолжения в общего вида, методы продолжения в формах (2.1.4), (2.1.5) будем называть базовыми методами ПП.

Идею метода ПГП [39, 40, 41] можно пояснить с помощью схемы краевых условий перелета, представленной на рисунке 2.3.1.

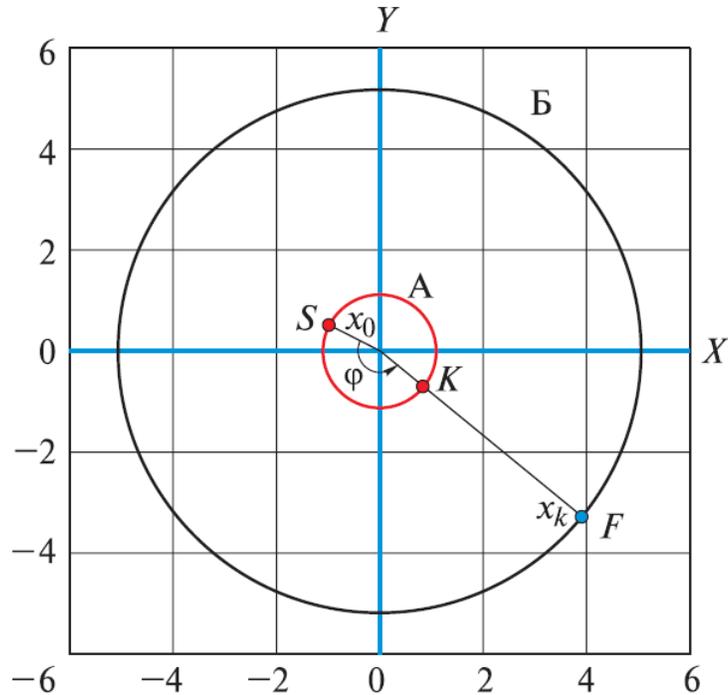


Рисунок 2.3.1 – Схема краевых условий перелета

А – начальная орбита; Б – конечная орбита;  $S$  – начальное положение КА;  $K$  – конечное положение КА при пассивном движении по начальной орбите;  $F$  – заданное конечное положение КА

Пусть  $\mathbf{x}_0$  положение начальной точки на начальной орбите при  $t = t_0$ ,  $\mathbf{x}_k$  – положение конечной точки в конечной орбите-цели при  $t = t_f = t_0 + T$ . Будем считать гравитационный параметр Земли линейной функцией параметра продолжения  $\tau$ . Вид этой зависимости выберем таким образом, чтобы при нулевом значении параметра продолжения значение безразмерного гравитационного параметра  $\mu_0$  обеспечивало перемещение КА на заданный угол при пассивном движении по начальной орбите, а при значении параметра продолжения, равным единице, значение безразмерного гравитационного параметра было равно 1. Пусть  $\nu_0$  – начальное значение истинной аномалии КА (в точке  $S$ ), а  $\nu_k = \nu_0 + \varphi$  – конечное значение истинной аномалии (в точке  $K$ ). Здесь  $\varphi$  – угол между вектором начального

положения КА  $\mathbf{x}_0$  и проекцией вектора конечного положения КА  $\mathbf{x}_K$  на плоскость начальной орбиты. По известным значениям эксцентриситета  $e$  начальной орбиты и истинных аномалий  $\nu_0$  и  $\nu_K$  вычисляются начальное и конечное значения средней аномалии  $M_0$  и  $M_K$  (с использованием уравнения Кеплера  $M = E - e \cdot \sin E$ , где  $E = 2 \cdot \arctg \left\{ \left[ \frac{1-e}{1+e} \right]^{0.5} \operatorname{tg}(\nu/2) \right\}$  - эксцентрическая аномалия). Средняя аномалия линейно зависит от времени на кеплеровской орбите:  $M = M_0 + n(t - t_0)$ , где  $n = (\mu_0 / a^3)^{0.5}$  - среднее движение КА и  $a$  - большая полуось начальной орбиты. Поэтому для того, чтобы КА мог оказаться в точке  $K$  за время  $T$ , должно быть справедливо  $M_K - M_0 + 2\pi N_r = nT$ . Здесь  $N_r$  число целых оборотов КА вокруг Земли, которые сделает КА за заданное время  $T$  до того, как он подлетит к заданной конечной точке  $K$ . Отсюда  $\mu_0$  можно вычислить по следующему выражению:

$$\mu_0 = \left[ (M_K + 2\pi N_r - M_0) / T \right]^2 a^3. \quad (2.3.1)$$

Линейная зависимость гравитационного параметра  $\mu$  от параметра продолжения  $\tau$  для реализации гладкого продолжения по  $\mu$  имеет следующий вид:

$$\mu(\tau) = \mu_0 + (1 - \mu_0) \cdot \tau. \quad (2.3.2)$$

При  $\tau = 1$  гравитационный параметр, в соответствии с зависимостью (2.3.2), равен 1, что при использовании безразмерных переменных равно действительному значению гравитационного параметра. Уравнение (2.3.2) должно использоваться в системе (1.2.5). При этом уравнения оптимального движения КА примут вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\
\frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \mu(\tau)\Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{a}, \\
\frac{d\mathbf{p}_{\mathbf{x}}}{dt} &= -\mu(\tau)\Omega_{\mathbf{xx}} \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \\
\frac{d\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{dt} &= -\mathbf{p}_{\mathbf{x}},
\end{aligned}
\tag{2.3.3}$$

Для обеспечения неизменности орбит отлета и прибытия при изменении  $\mu(\tau)$ , скорость  $\mathbf{v}(t, \tau)$  движения по этим орбитам должна быть откорректирована. С учетом коррекции скорости используются следующие начальные и конечные условия:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{v}(t_0) = \sqrt{\mu(\tau)}\mathbf{v}_0, \tag{2.3.4}$$

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f, \mathbf{v}(t_f) = \sqrt{\mu(\tau)}\mathbf{v}_f. \tag{2.3.5}$$

На рисунке 2.3.2 представлена серия траекторий КА, полученных при интегрировании системы (2.1.5) метода ПГП при увеличении параметра продолжения  $\tau$  от 0 до 1.

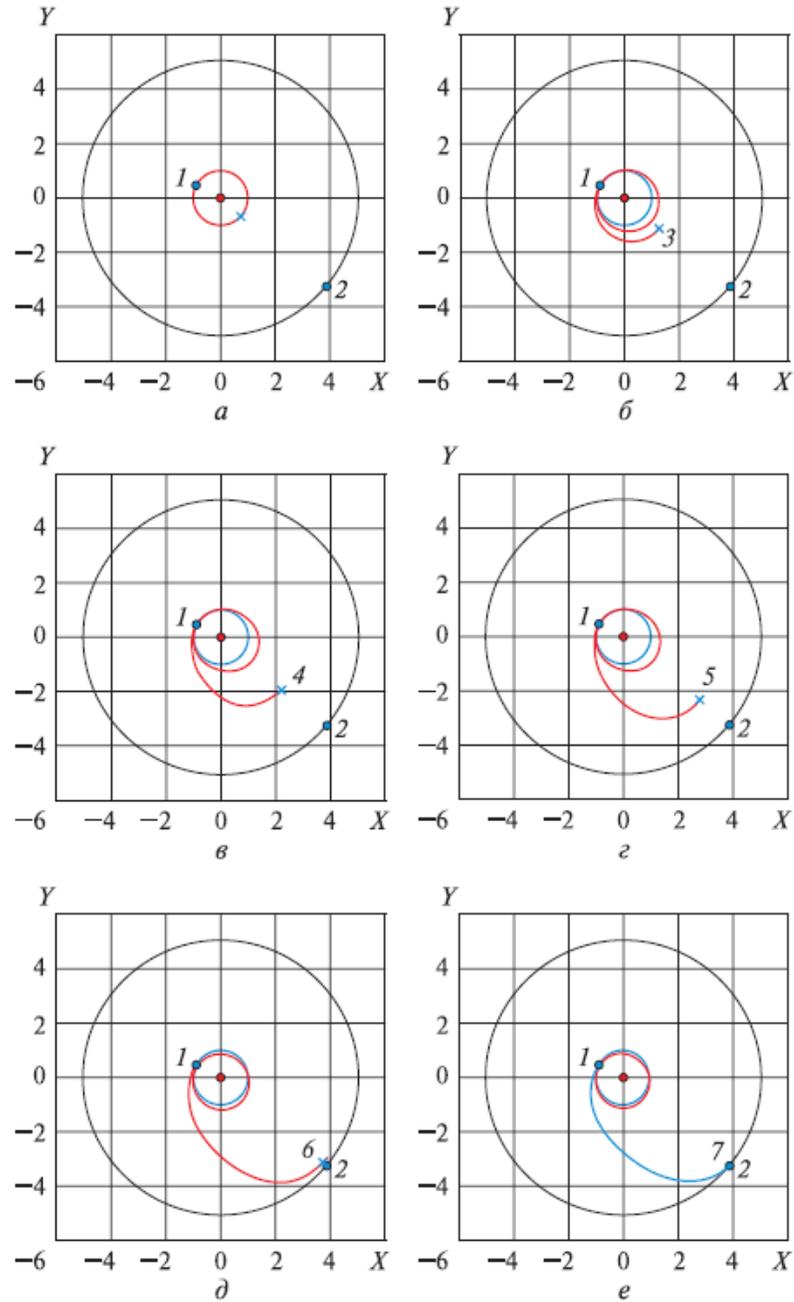


Рисунок 2.3.2 - Использование метода ПГП: ряд траекторий КА при увеличении значения  $\tau$  от 0 до 1.

а –  $\tau=0,0000$ ; б –  $\tau=0,1700$ ; в –  $\tau=0,4661$ ; г –  $\tau=0,6484$ ; д –  $\tau=0,9609$ ; е -  $\tau=1$ ; 1 – точка отправления; 2 – точка назначения; 3–6 – траектории при  $0 < \tau < 1$ ; 7 – точка прибытия.

С использованием метода ППП, становится возможно, благодаря выбору целого числа витков, преодолеть часть недостатков, присущих методу продолжения по параметру. На рисунке 2.3.3 представлена траектория, полученная с помощью базового метода ПП. Она частично проходит под поверхностью Земли, в связи с чем становится практически нереализуемой. При использовании метода ППП, путем выбора времени и угловой дальности перелета, всегда можно найти оптимальную траекторию с минимальной высотой не ниже минимальной высоты граничных орбит.

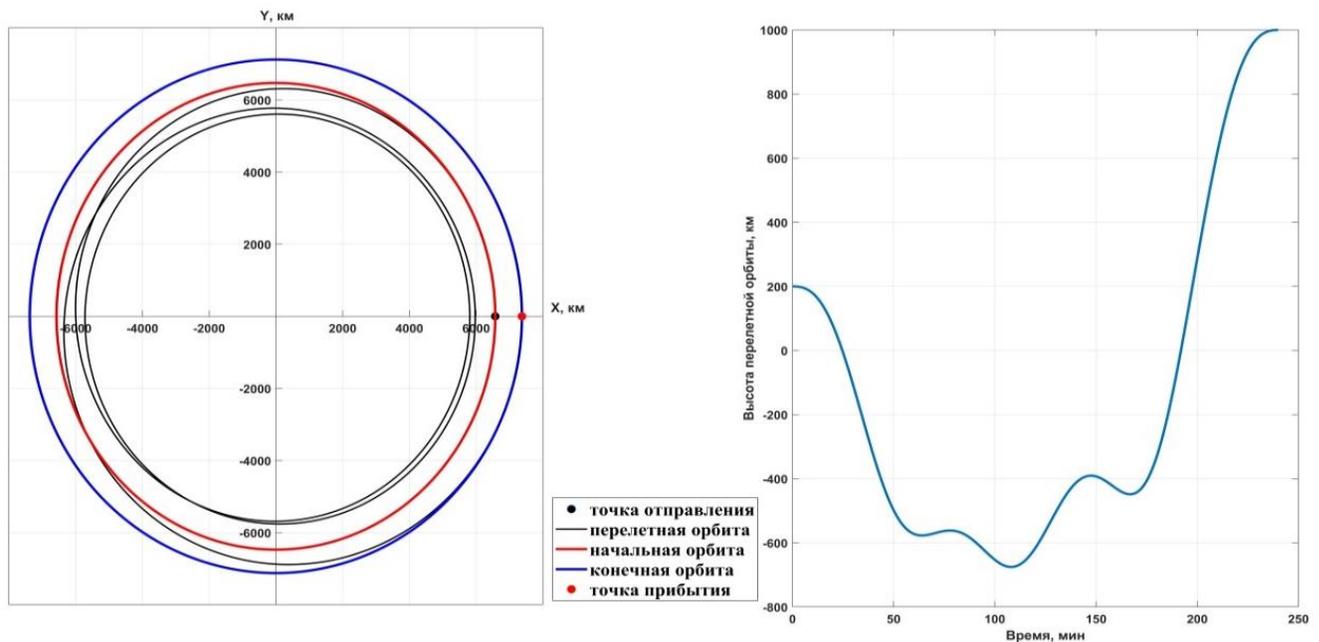


Рисунок 2.3.3 - Траектории КА с ИРД, полученная с помощью базового метода ПП и частично проходящая под поверхностью Земли

## 2.4 Заключение по главе

В этой главе описан метод ППП, который сводит решение КЗ к решению задачи Коши. Описаны две модели метода продолжения: базовый метод ПП и метод ППП. Показано преимущество использования метода ППП для решения задачи оптимизации межорбитальных перелетов КА с ИРД. Базовый метод ПП

целесообразно использовать в процессе продолжения оптимальных траекторий КА с ИРД в траектории КА с ДОУ или ДОТ. В данной диссертации метод ПГП применяется при решении КЗ в главе 3 и базовый метод ПП используется для решения краевых задач в главах 4, 5 и 6. Приведено описание МКШ для высокоточного вычисления частных производных и показана эффективность этого метода по сравнению с разностными методами дифференцирования.

### **3 ОПТИМИЗАЦИЯ МЕЖОРБИТАЛЬНЫХ ПЕРЕЛЕТОВ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТАХ**

#### **3.1 Оптимизация межорбитальных перелетов космического аппарата с идеально регулируемым двигателем**

Рассмотрим задачу оптимизации траектории межорбитального перелета КА с ИРД за заданное время между двумя заданными точками в фазовом пространстве. Целью оптимизации является расчет программы управления вектором тяги двигателя КА, обеспечивающей такой перелет за заданное время с минимальными затратами топлива. Как было показано в разделе 1.5, задача минимизации затрат топлива КА с ИРД эквивалентна задаче минимизации функционала (1.2.2). Для решения задачи оптимизации межорбитальных перелетов КА с ИРД будем использовать математическую постановку задачи, приведенную в разделе 1.2, которая сводится к решению КЗ (1.2.5), (1.2.6), (1.2.7).

Для решения этой задачи будем использовать метод ППП, описанный в разделе 2.3. Неизвестные начальные значения сопряженных переменных в начале решения задачи примем равными нулю. Учитывая (1.2.5), это соответствует равенству нулю тяги на всем перелете, то есть пассивному движению КА с заданными начальными условиями, определяемыми значениями фазовых переменных в начальный момент времени.

Рассматривается перелет КА с начальной орбиты с высотой перигея 400 км, высотой апогея 600 км, наклонением  $52^\circ$ , аргументом перицентра  $30^\circ$ , истинной аномалией  $120^\circ$  и ДВУ  $330^\circ$  на конечную орбиту с высотой перицентра 10000 км, высотой апоцентра 80000 км, наклонением  $63^\circ$ , аргументом перицентра  $270^\circ$ , истинной аномалией  $120^\circ$  и ДВУ  $0^\circ$ . Длительность перелета принята равной 20 часам.

На рисунке 3.1.1 приведены результаты расчета пятивитковой траектории перелета КА с ИРД с начальной орбиты (черная линия) на целевую орбиту (зеленая линия).

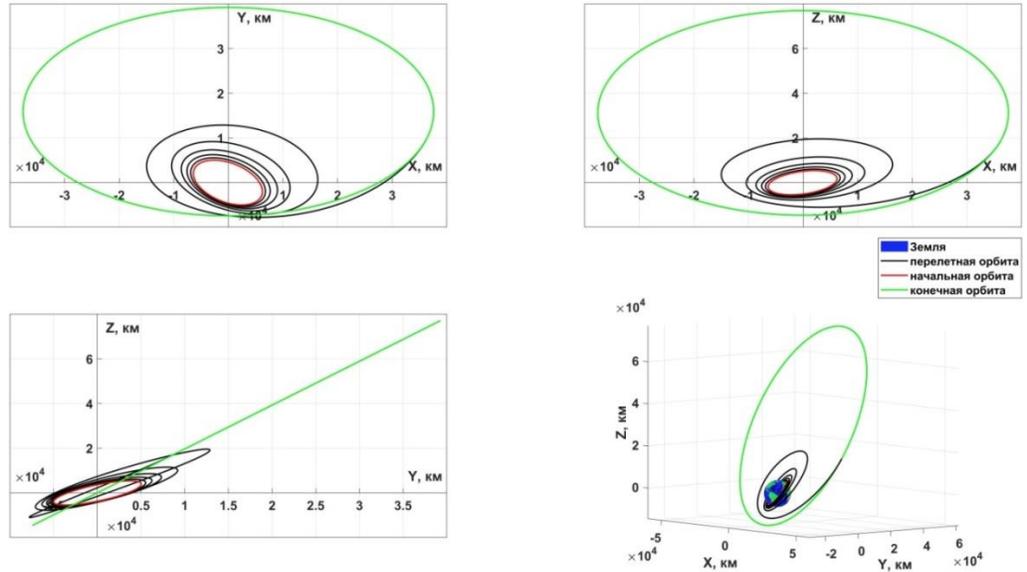


Рисунок 3.1.1 – Проекция оптимальной 5-витковой траектории КА с ИРД на координатные плоскости и пространственный вид траектории

### 3.2 Продолжение оптимальной траектории с идеально-регулируемым двигателем в оптимальную траекторию с двигателем ограниченного ускорения

Предлагается следующая система ОДУ движения КА, реализующая гомотопию между задачей оптимизации траектории КА с ИРД и задачей оптимизации траектории КА с ДОУ:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\
 \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \Omega_x + \frac{(1-\tau) + \tau \cdot a \cdot \delta}{(1-\tau) + \tau \cdot p_v} \mathbf{p}_v, \\
 \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} &= -\Omega_{xx} \cdot \mathbf{p}_v, \\
 \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} &= -\mathbf{p}_x.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1}$$

Основной идеей является гладкое продолжение задачи оптимизации траектории КА с ИРД в задачу оптимизации траектории КА с ДОУ. Гладкое продолжение требует гладкой аппроксимации релейной функции тяги  $\delta$ , при этом необходимо, чтобы сглаженная функция тяги была близка к ступенчатой функции  $\delta(\psi)$  при  $\tau = 1$ . Для гладкой аппроксимации функции тяги в данной работе используется следующее выражение:

$$\delta = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{\psi}{\varepsilon(\tau)} \right) \right), \quad (3.2.2)$$

$$\varepsilon(\tau) = 1 - \tau + 10^{-4} \tau \quad (3.2.3)$$

где  $\varepsilon$  - малый параметр, причем функция переключения  $\psi$  (1.3.6) в процессе продолжения представляется в виде

$$\psi = p_v - (1 - \tau)a + \tau. \quad (3.2.4)$$

Очевидно, что система ОДУ (3.2.1) зависит от параметра  $\tau \in [0; 1]$ . При  $\tau = 0$  система (3.2.1) соответствует системе ОДУ для КА с ИРД (1.2.5), а при  $\tau = 1$  – системе ОДУ для КА с ДОУ (1.3.7). На рисунках 3.2.1 и 3.2.2 показаны результаты расчета оптимальной пятивитковой траекторий КА с ДОУ (величина реактивного ускорения – 130.5638 мм/с<sup>2</sup>), а также зависимости от времени функций тяги, переключения и параметров траектории. Оптимальная траектория КА с ДОУ получена базовым методом продолжения в форме (2.1.5) из оптимальной траектории КА с ИРД, представленной в разделе 3.1.

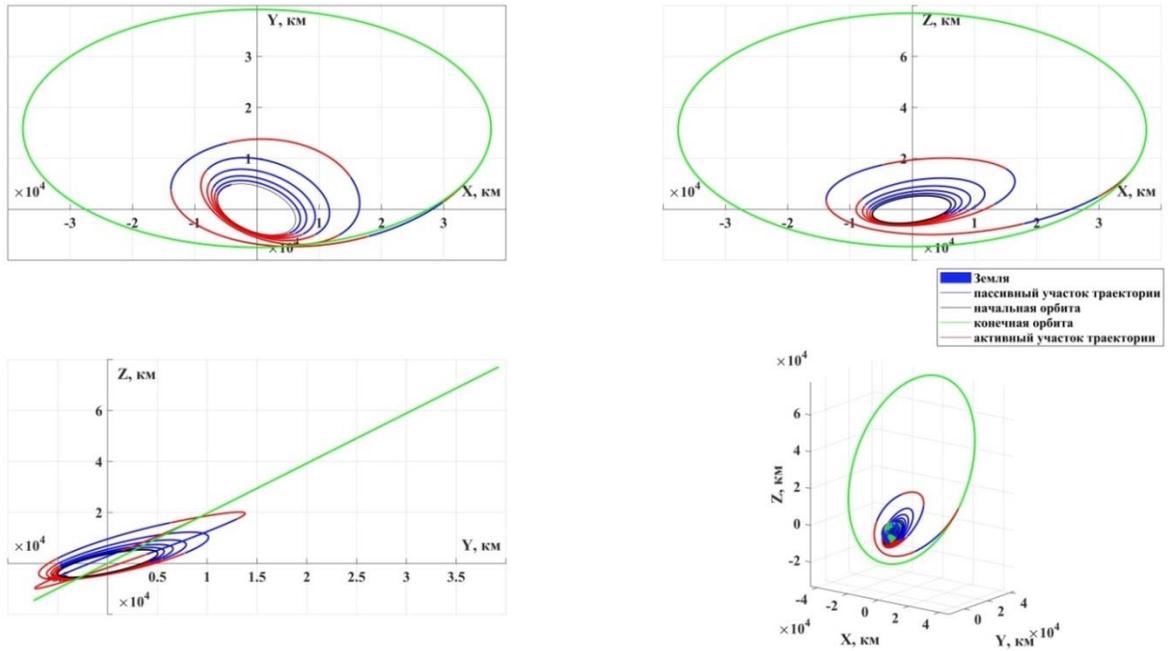


Рисунок 3.2.1 – Проекция оптимальной 5-витковой траектории КА с ДОУ на координатные плоскости и пространственный вид траектории

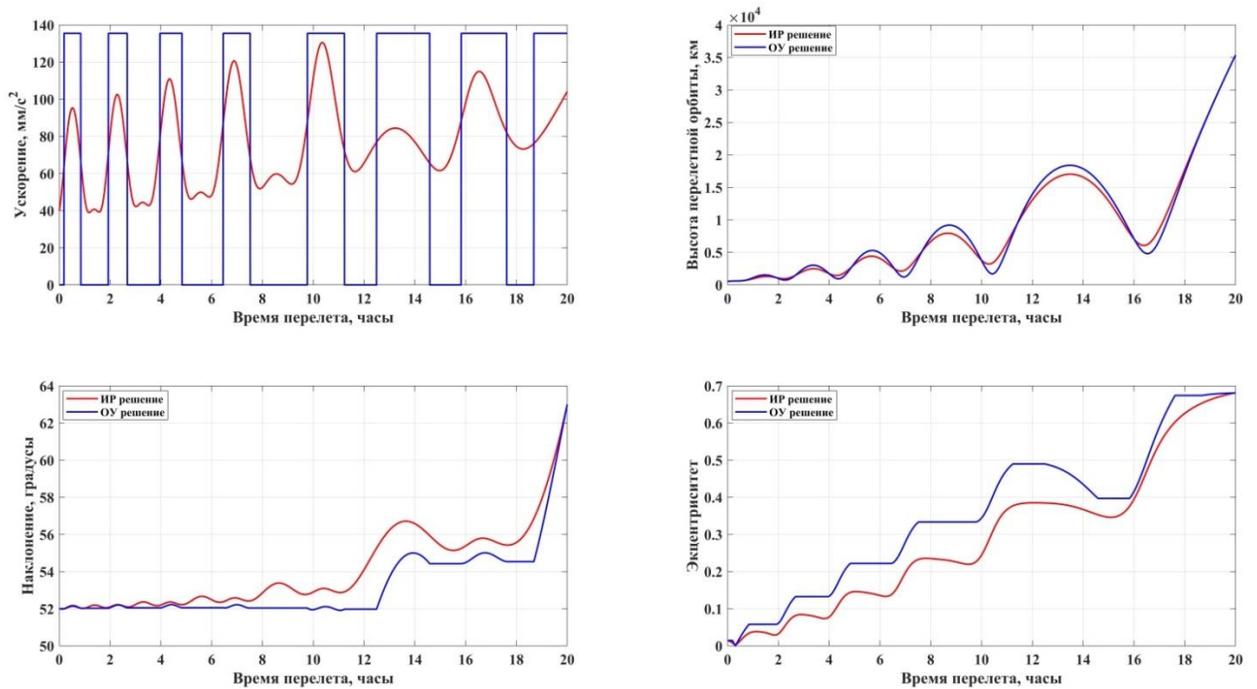


Рисунок 3.2.2 – Зависимости от времени функций тяги, переключения и параметров оптимальной траектории КА с ДОУ

### 3.3 Продолжение оптимальной траектории с идеально-регулируемым двигателем в оптимальную траекторию с двигателем ограниченной тяги

Для продолжения траектории КА с ИРД в траекторию КА с ДОТ используем следующую систему ОДУ движения КА, реализующую гомотопию между уравнениями оптимального движения КА с ИРД и с ДОТ:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \\
 \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \Omega_x + \frac{(1-\tau) + \tau \cdot a \cdot \delta}{(1-\tau) + \tau \cdot p_v} \mathbf{p}_v, \\
 \frac{dm}{dt} &= -\frac{(1-\tau)N_j \cdot m^2 \cdot p_v^2 + \tau \cdot \delta \cdot P}{(1-\tau)2(N_j + m^2 \cdot p_m)^2 + \tau \cdot w} \\
 \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} &= -\Omega_{xx} \cdot \mathbf{p}_v, \\
 \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} &= -\mathbf{p}_x, \\
 \frac{dp_m}{dt} &= \frac{(1-\tau)N_j \cdot m \cdot p_m \cdot p_v^2 + \tau \cdot \delta \cdot P \cdot p_v}{(1-\tau)(N_j + m^2 \cdot p_m)^2 + \tau \cdot m^2},
 \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

где

$$N_j = \frac{P \cdot w}{2} \tag{3.3.2}$$

– реактивная мощность двигательной установки КА. Система ОДУ (3.3.1) при  $\tau=0$  соответствует системе ОДУ для КА с ИРД (1.2.5), а при  $\tau=1$  системе ОДУ для КА с ДОТ (1.4.5).

На рисунке 3.3.1 представлены результаты расчета оптимальной пятивитковой траектории перелета КА с ДОТ (здесь и далее красной сплошной линией обозначены активные участки траектории; синей - пассивные участки траектории), полученной базовым методом продолжения в форме (2.1.5) из оптимальной траектории КА с ИРД, представленной в разделе 3.1. На рисунке 3.3.2 показаны зависимости функций тяги и реактивного ускорения (для перелета с ДОУ из раздела 3.2), а также

траекторных параметров (для перелетов с ИРД, ДОУ и ДОТ) от времени. Величина тяги принята равной 130.5683 Н, удельного импульса тяги - 330 с, начальной массы КА - 1000 кг (таким образом, начальное реактивное ускорение на траектории КА с ДОТ равно реактивному ускорению на рассмотренной в разделе 3.2 траектории КА с ДОУ).

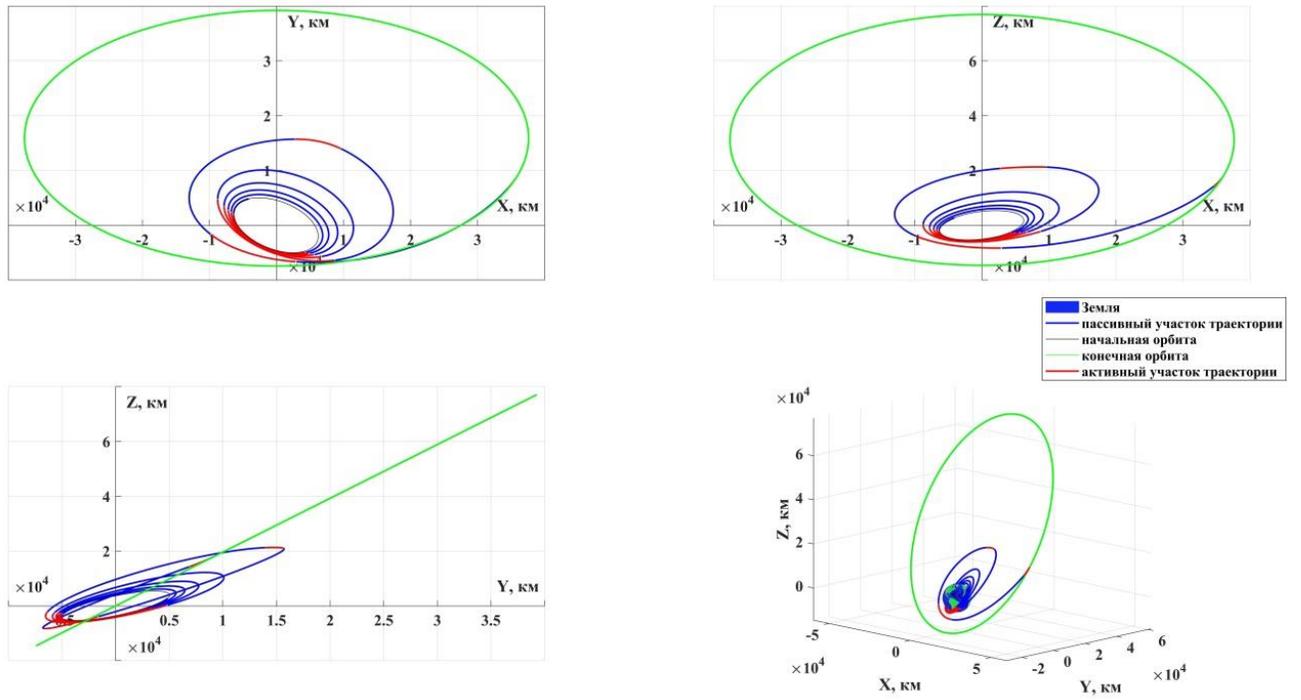


Рисунок 3.3.1 – Оптимальной пятивитковая траектория КА с ДОТ.

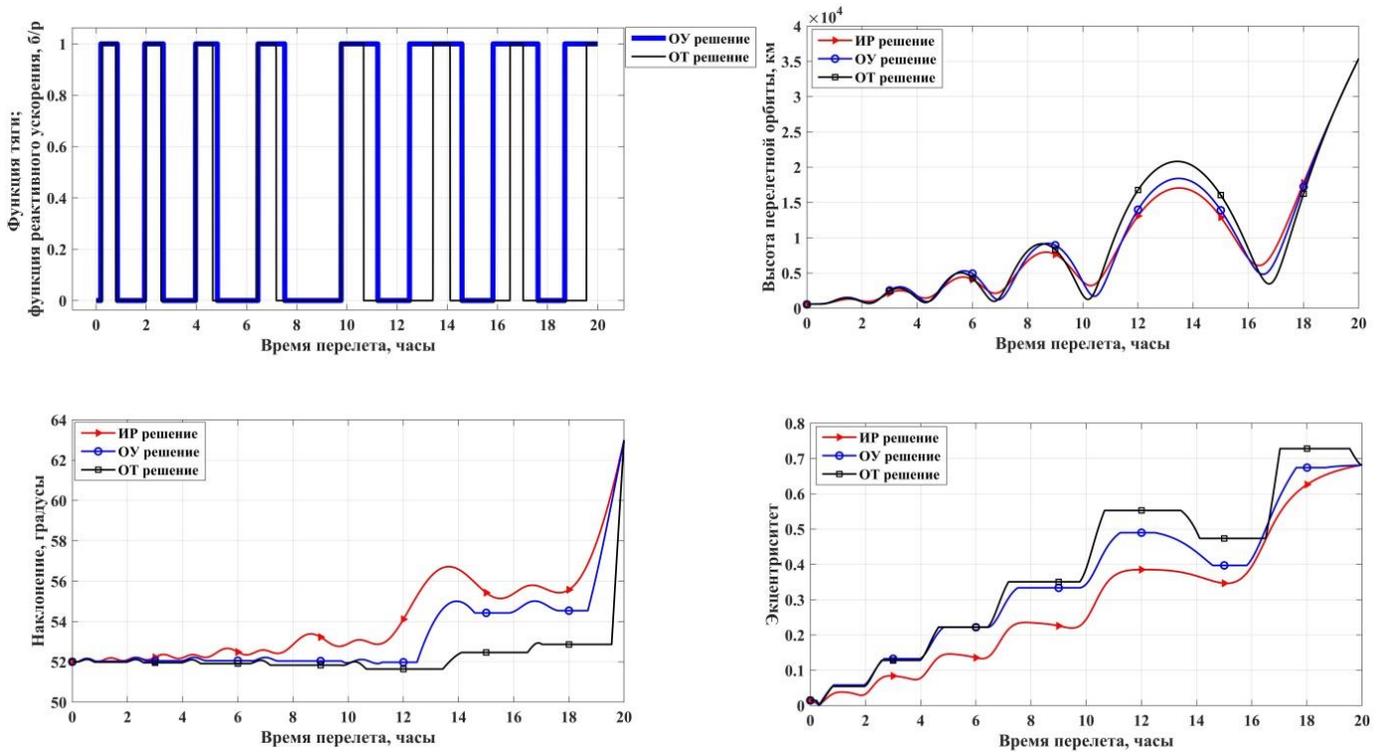


Рисунок 3.3.2 - Зависимости функций тяги, реактивного ускорения (для траектории КА с ДОУ) и параметров оптимальной траектории КА с ИРД, ДОУ и ДОТ от времени.

В таблицах 3.3.1 и 3.3.2 сравниваются основные параметры оптимальных траекторий КА с ДОУ и ДОТ. На рисунке 3.3.3 слева сплошной линией представлена зависимость характеристической скорости на оптимальной траектории перелета с ДОТ от удельного импульса тяги, а пунктирной – характеристическая скорость на оптимальной траектории перелета с ДОУ. Видно, что затраты характеристической скорости на траектории перелета с ДОТ асимптотически приближаются к затратам скорости на траектории перелета с ДОУ с ростом удельного импульса тяги. Таким образом, решение задачи оптимизации траектории КА с ДОУ позволяет получить верхнюю оценку затрат характеристической скорости при использовании ДОТ. Справа на рисунке 3.3.3 представлена зависимость конечной массы КА на оптимальной траектории перелета КА с ДОТ от удельного импульса тяги.

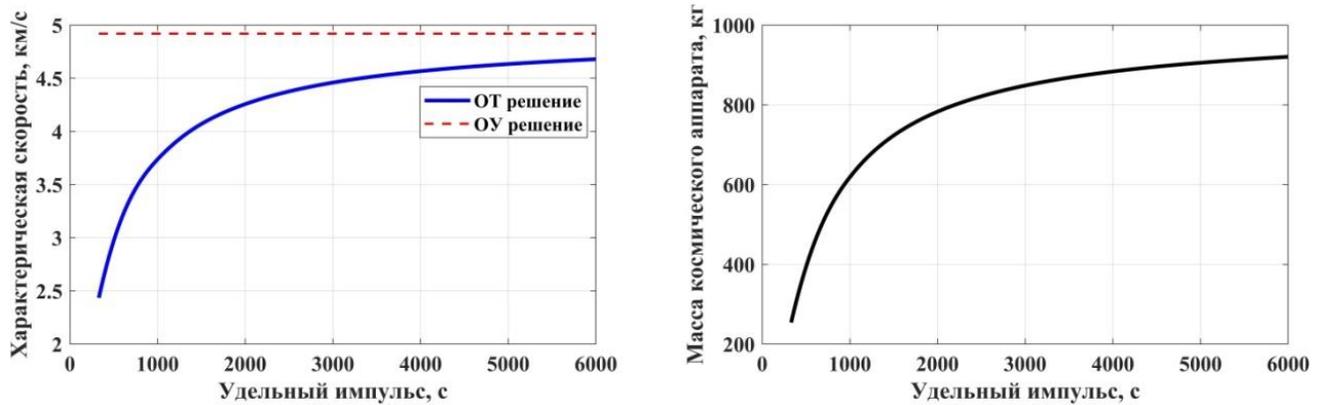


Рисунок 3.3.3 - Зависимость характеристической скорости (слева) и конечной массы КА (справа) от удельного импульса тяги

Таблица 3.3.1- Сравнение основных параметров оптимальных траекторий перелета на конечную орбиту КА с ДОУ и ДОТ при различном числе целых витков и выполнении равенства начального ускорения на траектории с ДОТ реактивному ускорению на траектории с ДОУ

$N_{rev}$	$\Delta t$ , часов	(ОУ решение)		(ОТ решение)			
		$V_x$ , км/с	$a$ , мм/с <sup>2</sup>	$V_x$ , км/с	$m_{КА}$ , кг	Тяга, Н	$I$ , с
5	20	4.9194	130.5683	2.4345	254.0084	130.5683	330
10	35	4.7425	83.9646	2.3942	266.3589	83.9646	330
15	45	4.7280	74.8489	2.3877	268.3425	74.8489	330
20	55	4.6748	67.8671	2.3831	269.7483	67.8671	330
30	70	4.6466	64.2010	2.3952	266.0538	64.2010	330

Таблица 3.3.2 - Сравнение основных параметров пятивитковых оптимальных траекторий перелета на конечную орбиту КА с ДОУ и ДОТ решением при различном удельном импульсе тяги и выполнении равенства начального ускорения на траектории с ДОТ реактивному ускорению на траектории с ДОУ

$N_{rev}$	$\Delta t$ , часов	(ОУ решение)		(ОТ решение)			
		$V_x$ , км/с	$a$ , мм/с <sup>2</sup>	$V_x$ , км/с	$m_{КА}$ , кг	Тяга, Н	$I$ , с
5	20	4.9194	130.5683	2.4345	254.0084	130.5683	330
5	20	4.9194	130.5683	2.9714	393.5970	130.5683	500
5	20	4.9194	130.5683	3.7370	618.6688	130.5683	1000
5	20	4.9194	130.5683	4.0702	723.1143	130.5683	1500
5	20	4.9194	130.5683	4.1155	737.5323	130.5683	1600
5	20	4.9194	130.5683	4.2568	782.8187	130.5683	2000
5	20	4.9194	130.5683	4.3760	821.3860	130.5683	2500
5	20	4.9194	130.5683	4.4589	848.3363	130.5683	3000
5	20	4.9194	130.5683	4.5198	868.2262	130.5683	3500
5	20	4.9194	130.5683	4.5665	883.5071	130.5683	4000
5	20	4.9194	130.5683	4.6334	905.4418	130.5683	5000
5	20	4.9194	130.5683	4.6789	920.4270	130.5683	6000

### 3.4 Метод оптимизации траектории перелета на конечную орбиту с частично заданными элементами

На практике часто требуется вывести КА на конечную орбиту, некоторые параметры которой не заданы и могут выбираться из условий минимизации некоторого функционала, например затрат топлива. Поэтому рассмотрим задачу оптимизации межорбитального перелета КА на фиксированном интервале времени от заданной начальной орбиты до конечной орбиты с частично заданными

элементами в гравитационном поле Земли. Целью оптимизации является расчет программы управления вектором реактивного ускорения КА, обеспечивающей такой перелет с минимальными затратами характеристической скорости. Величина реактивного ускорения предполагается постоянной, оптимизируется программа ориентации вектора реактивного ускорения и программа его включения-выключения. Для оптимизации значений свободных элементов конечной орбиты будем использовать условия трансверсальности.

Рассмотрим задачу оптимизации траектории перелета из заданной точки полностью заданной начальной орбиты на конечную орбиту со свободным значением истинной аномалии, ДВУ и аргумента перицентра.

В этой задаче в качестве граничных условий фиксируются все начальные орбитальные элементы и конечные значения фокального параметра, эксцентриситета и наклона, а конечные значения истинной аномалии, ДВУ и аргумента перигея свободны. Таким образом, краевые условия в рассматриваемой задаче примут следующий вид:

$$p(t_0) = p_0, e(t_0) = e_0, i(t_0) = i_0, v(t_0) = v_0, \omega(t_0) = \omega_0, \Omega(t_0) = \Omega_0, \quad (3.4.1)$$

$$p(t_f) - p_f = 0, e(t_f) - e_f = 0, i(t_f) - i_f = 0, \quad (3.4.2)$$

где  $p$  – фокальный параметр,  $e$  – эксцентриситет,  $i$  – наклонение,  $v$  – истинная аномалия,  $\omega$  – аргумент перигея,  $\Omega$  – ДВУ. Нижний индекс «0» обозначает значение соответствующей переменной в начале перелета (на начальной орбите,) а индекс «f» – обозначает значение соответствующей переменной в конце перелета (на конечной орбите). Начальный и конечный моменты времени фиксированы и обозначены как  $t_0$  и  $t_f$ , соответственно.

Конечные условия (3.4.2) должны быть дополнены условиями трансверсальности, имеющими в рассматриваемом случае следующий вид [69, 96]:

$$\mathbf{v}_f^T \mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x}_f^T \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} = 0, \quad (3.4.3)$$

$$\left( \mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} \times \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} \times \mathbf{v}_f \right)^T \mathbf{1}_z = 0, \quad (3.4.4)$$

$$\left( \mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} \times \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} \times \mathbf{v}_f \right)^T (\mathbf{x}_f \times \mathbf{v}_f) = 0, \quad (3.4.5)$$

$$\mathbf{1}_z = [0, 0, 1]^T.$$

Функция невязок при использовании условий трансверсальности (3.4.3), (3.4.4), (3.4.5) принимает следующий вид:

$$\mathbf{f} = \begin{pmatrix} p(t_f) - p_f \\ e(t_f) - e_f \\ i(t_f) - i_f \\ \mathbf{v}_f^T \mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x}_f^T \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} \\ \left( \mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} \times \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} \times \mathbf{v}_f \right)^T \mathbf{1}_z \\ \left( \mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} \times \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} \times \mathbf{v}_f \right)^T (\mathbf{x}_f \times \mathbf{v}_f) \end{pmatrix}. \quad (3.4.7)$$

Для вычисления невязок (3.4.7) система ОДУ вида (3.2.1) интегрируется с заданными начальными значениям векторов положения и скорости КА, вычисляемых по начальным значениям орбитальных элементов (3.4.1). Значения  $\mathbf{p}_{\mathbf{x}}(t_0)$ ,  $\mathbf{p}_{\mathbf{v}}(t_0)$ , полученные при решении задачи оптимизации перелета КА с ИРД, используются как начальное приближение для элементов вектора неизвестных параметров рассматриваемой задачи. По завершении интегрирования, по полученным значениям координат  $\mathbf{x}_f$  и компонент скорости  $\mathbf{v}_f$  КА вычисляются фактические элементы орбиты  $p(t_f), e(t_f), i(t_f)$  в конечный момент времени и вычисляется вектор невязок (3.4.7), который используется в базовом методе продолжения в форме (2.1.5).

Рассмотрим численные примеры оптимизации, выполненной с использованием описанных выше методов. Пусть требуется оптимизировать траекторию перелета КА с ДОУ с заданной начальной орбиты (высота перигея 400 км, высота апогея - 600 км,  $i(t_0) = 51^\circ$ ,  $\nu(t_0) = 120^\circ$ ,  $\omega(t_0) = 30^\circ$ ,  $\Omega(t_0) = 328^\circ$ ) на ЦО с частично заданными орбитальными элементами (высота перигея 800 км, высота апогея 1500 км,  $i(t_f) = 20^\circ$  и свободными значениями  $\omega(t_f)$ ,  $\nu(t_f)$ ,  $\Omega(t_f)$ ) или с полностью заданными орбитальными элементами ЦО (высота перицентра 800 км, высота апоцентра 1500 км,  $i(t_f) = 20^\circ$ ,  $\omega(t_f) = 35^\circ$ ,  $\nu(t_f) = 200^\circ$ ,  $\Omega(t_f) = 328^\circ$ ). Затраты характеристической скорости оптимальных траекторий с условиями трансверсальности и с полностью заданными орбитальными элементами приведено в таблице 3.4.1.

Таблица 3.4.1 - Сравнение затрат характеристической скорости оптимальных траекторий перелета на ЦО с условиями трансверсальности и с полностью заданными орбитальными элементами

Условия	Число витков	$\Delta t$ , часов	$V_x$ , км/с	Реактивное ускорение, мм/с <sup>2</sup>
Свободные $\nu(t_f)$ , $\omega(t_f)$ , $\Omega(t_f)$	4	7	4.5337	323
Полностью заданные конечные условия	4	7	4.5435	323
Свободные $\nu(t_f)$ , $\omega(t_f)$ , $\Omega(t_f)$	10	20	4.1455	181
Полностью заданные конечные условия	10	20	4.1697	181
Свободные $\nu(t_f)$ , $\omega(t_f)$ , $\Omega(t_f)$	20	39	3.9629	128
Полностью заданные конечные условия	20	39	4.0284	128

На рисунках 3.4.1 и 3.4.3 представлены проекции оптимальных четырехвитковой и двадцативитковой траекторий перелета КА с ДОУ с начальной орбиты (черная линия) на целевую орбиту (зеленая линия) со свободными  $\nu(t_f)$ ,  $\omega(t_f)$ ,  $\Omega(t_f)$ . На рисунках 3.4.2 и 3.4.4 представлены зависимости траекторных параметров, функции переключения, реактивного ускорения и характеристической скорости для

оптимальной траектории выведения на конечную орбиту КА с ДОУ и ИРД от времени.

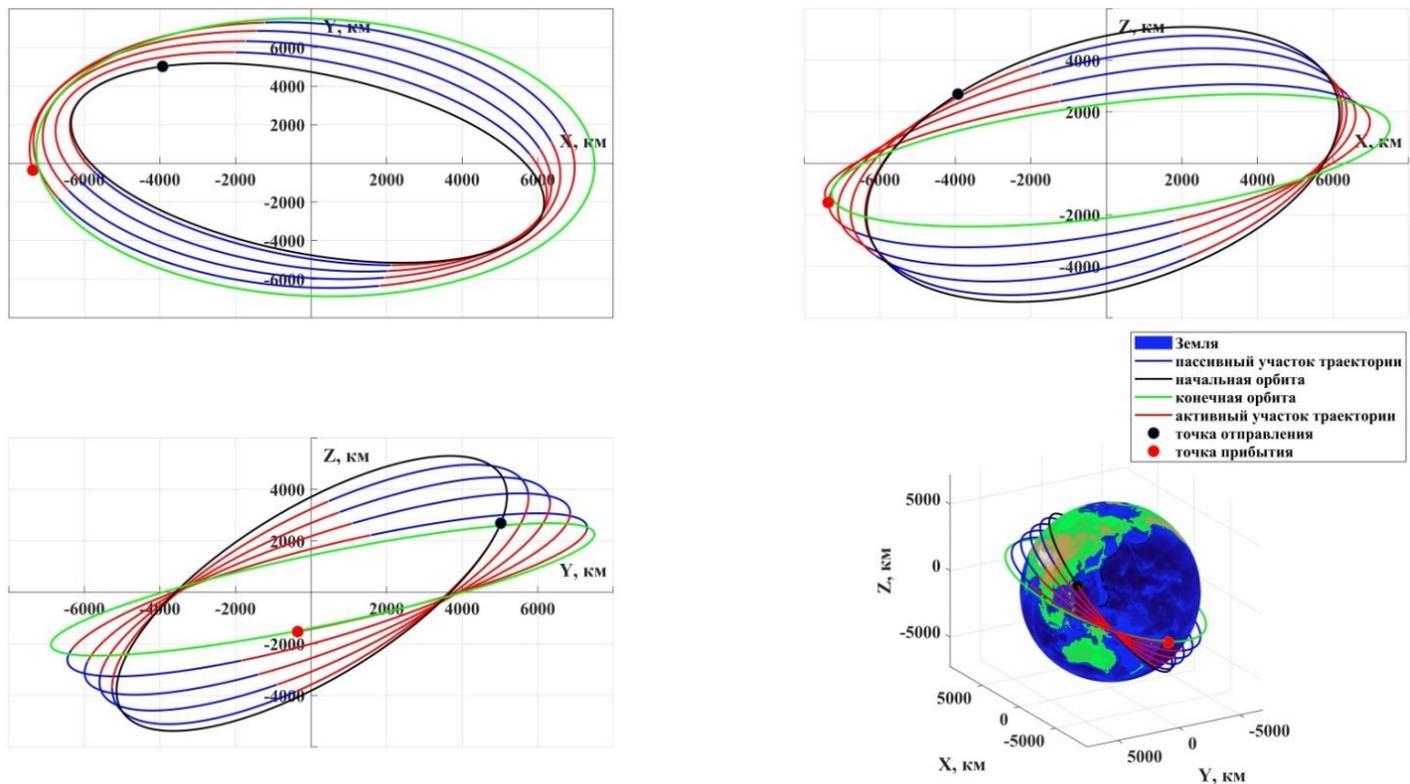


Рисунок 3.4.1 – Оптимальная четырехвитковая траектория КА с ДОУ.

В результате решения задачи оптимизации двадцативитковой траектории с частично заданными краевыми условиями получено значение характеристической скорости, равное 3.9629 км/с, а для перелета на орбиту с фиксированными конечными условиями потребовалась характеристическая скорость, равная 4.0284 км/с. Как и ожидалось, ослабление ограничений на правом конце траектории привело к снижению затрат характеристической скорости.

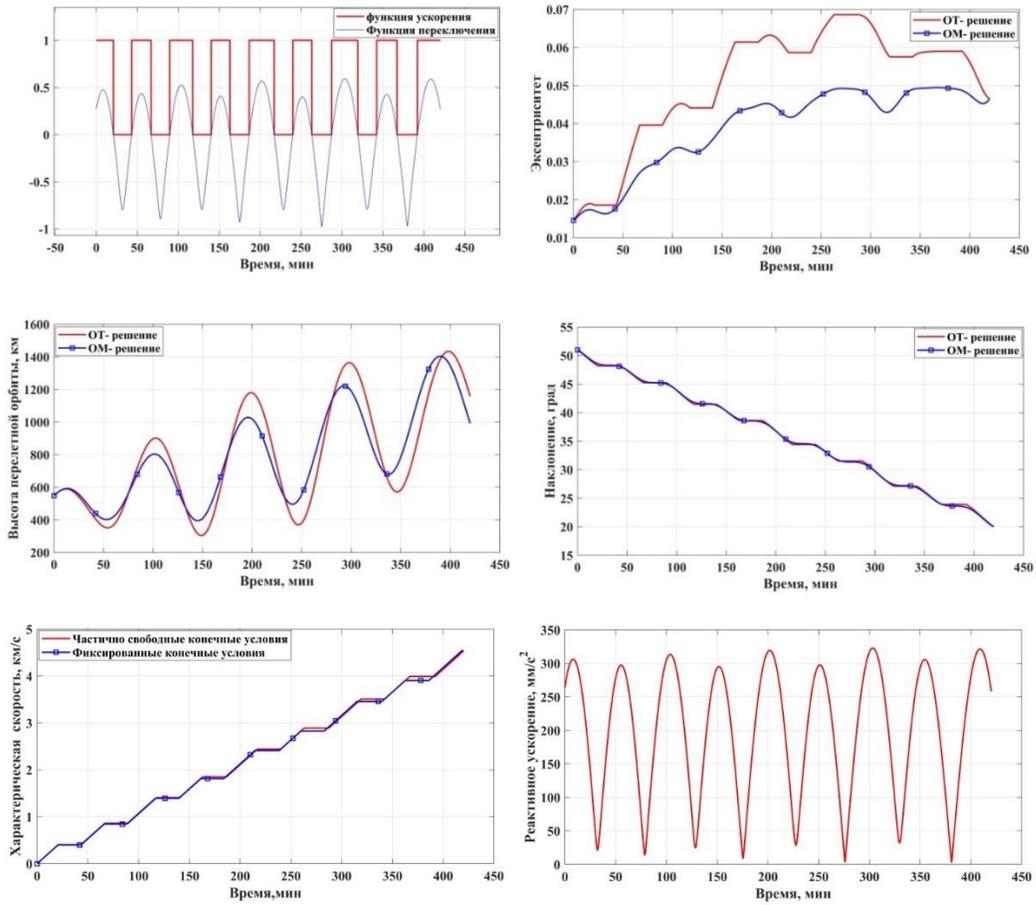


Рисунок 3.4.2 – Зависимости траекторных параметров, реактивного ускорения, функции переключения и характеристической скорости от времени. Оптимальная четырехвитковая траектория с использованием ДОУ (ОТ-решение) и ИРД (ОМ-решение)

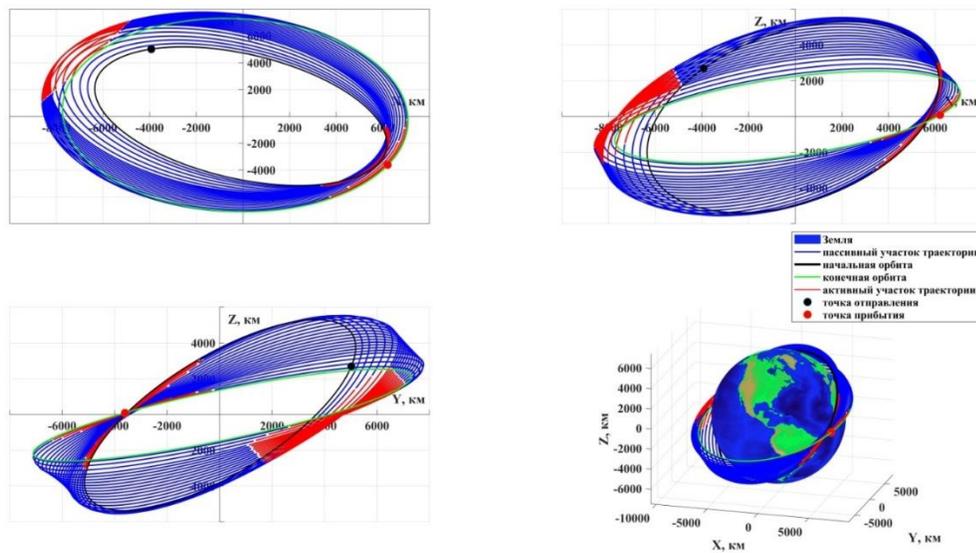


Рисунок 3.4.3 – Оптимальная 20-витковая траектория КА с ДОУ.

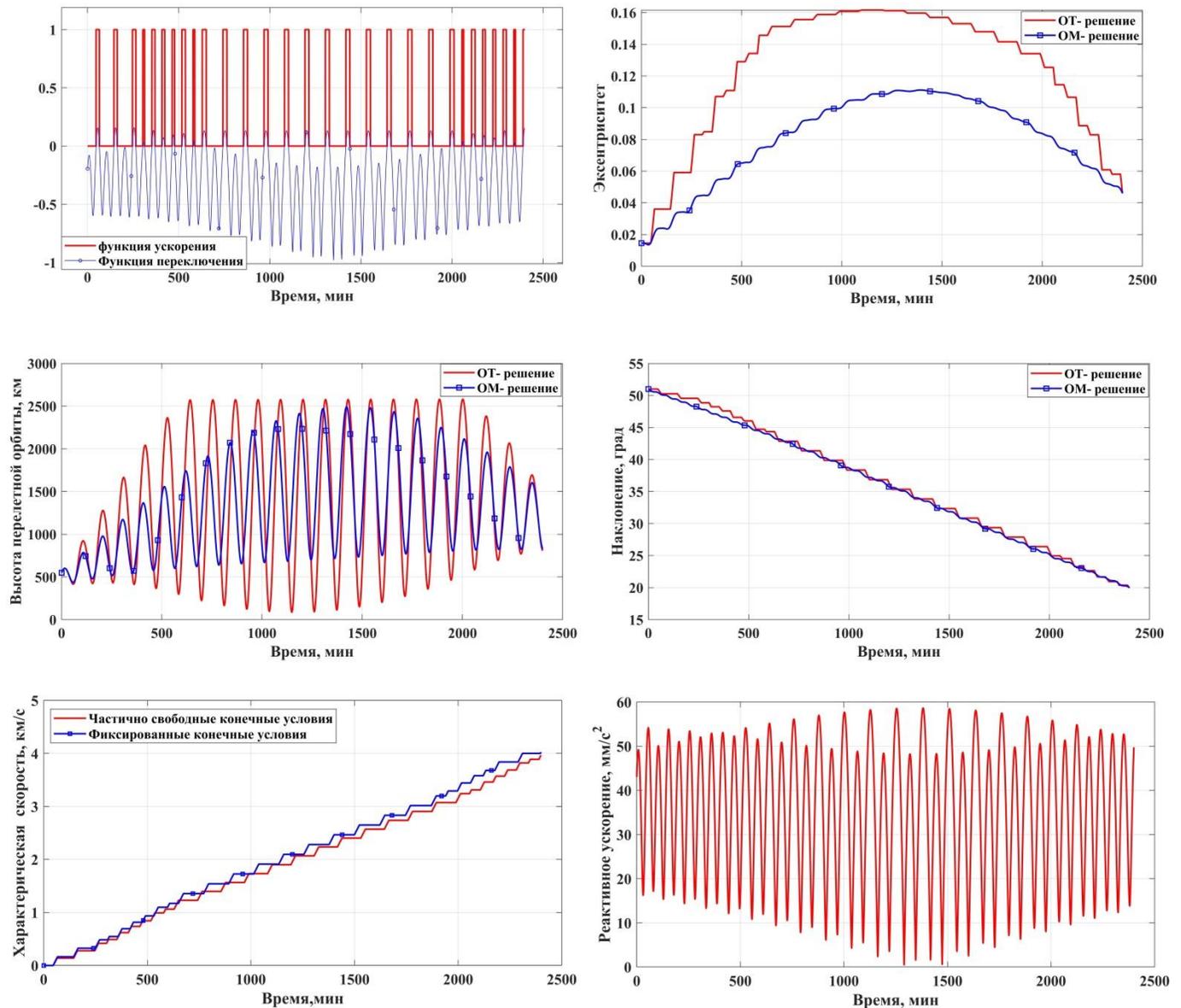


Рисунок 3.4.4 – Зависимости траекторных параметров, реактивного ускорения, функции переключения и характеристической скорости от времени. Оптимальная 20-витковая траектория с использованием ДОУ (ОТ-решение) и ИРД (ОМ-решение)

### 3.5. Заключение по разделу

В разделе представлены результаты разработки методов оптимизации траекторий КА с ИРД, ДОУ и ДОТ. Разработанные методы основаны на формулировке задачи оптимизации траектории как ЗОУ, которая, с применением ПМП, сводится к КЗ для системы ОДУ оптимального движения, а затем, с применением метода ПП, сводится к задаче Коши для вложенных систем ОДУ. Для

вычисления оптимальной траектории КА с ИРД используется метод ППП, а траекторий КА с ДОУ и ДОТ – базовый метод продолжения (в форме (2.1.5)) из оптимальной траектории КА с ИРД.

Разработан метод вычисления оптимальных траекторий КА с ДОУ для случая частично-заданных конечных условий.

Приведены численные примеры использования разработанных методов для оптимизации многовитковых траекторий КА. Показано, что оптимизация траекторий КА с ДОУ может использоваться для вычисления верхней границы затрат характеристической скорости на траекториях перелета КА с ДОТ при условии одинаковой длительности и равенства начального реактивного ускорения на траектории КА с ДОТ реактивному ускорению на траектории КА с ДОУ.

## **4 ОПТИМИЗАЦИЯ МНОГОВИТКОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ МЕЖОРБИТАЛЬНОГО ПЕРЕЛЕТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ В МОДИФИЦИРОВАННЫХ РАВНОДЕНСТВЕННЫХ ЭЛЕМЕНТАХ С ПРИМЕНЕНИЕМ УГЛОВОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

### **4.1 Оптимизация многовитковых траекторий межорбитального перелета с идеально-регулируемым двигателем**

В этом разделе рассматривается задача вычисления оптимальных траекторий КА с ИРД с большим количеством витков. Решение этой задачи будет в дальнейшем использоваться как начальное приближение для задачи оптимизации траекторий КА с ЭРДУ (ДОТ). Используется математическая модель и постановка задачи, приведенная в разделе 1.5.

Методы, использующие уравнения движения КА, записанные в декартовых координатах, описанные в работах [40, 41, 97] и в разделе 3 этой диссертации имеют ограниченные возможности при оптимизации траекторий с большим числом витков. На практике эти методы работоспособны при угловой дальности перелета до нескольких десятков витков. Этого более чем достаточно для гелиоцентрических участков межпланетных траекторий, но часто совершенно недостаточно для проведения оптимизации межорбитальных перелетов. Здесь может потребоваться анализ траекторий перелета, содержащих сотни и тысячи витков.

Существуют множество причин сложности оптимизации многовитковых траекторий с фиксированной длительностью перелета при использовании математической постановки с использованием уравнений движения в декартовых координатах. Остановимся на двух из них. Компоненты фазового и сопряженного векторов в уравнениях движения вида (1.2.5) знакопеременны (содержат периодическую составляющую, изменяющуюся с периодом, равным текущему периоду обращения). При большом числе витков эта знакопеременность снижает

точность численного интегрирования и усложняет решение КЗ ПМП вида (1.2.5), (1.2.6), (1.2.7). Второй, но не менее важной причиной является то, что многовитковая задача является многоэкстремальной: для фиксированной продолжительности перелета может существовать множество решений с различным числом витков. Чтобы определить оптимальное количество витков, которое обеспечивает минимальное значение функционала, при использовании методов из [40, 41, 97] необходимо вычислять последовательность экстремалей с различным числом оборотов с использованием метода ППП. Если соотношение угловой дальности и длительности перелета далеки от оптимального, то возможно прохождение экстремальной траектории вблизи притягивающего центра или, наоборот, удаление от него на большое расстояние. При любом из этих вариантов скорость сходимости и численная устойчивость типичного численного метода ухудшится по сравнению с вариантом оптимизации траектории с оптимальным числом витков. При увеличении рассматриваемого числа витков траектории сложность «ручного» выбора оптимальной угловой дальности с использованием метода ППП многократно возрастает.

В рамках данной работы разработан метод, позволяющий практически снять ограничение на число витков при оптимизации траекторий КА с ИРД. Для его реализации используется постановка задачи, приведенная в разделе 1.5, а для решения КЗ ПМП (1.5.16), (1.5.8), (1.5.9), (1.5.17) используется базовый метод ПП в форме (2.1.4). Для начала продолжения используются нулевые значения неизвестных параметров КЗ ПМП:  $\mathbf{p}(t_0) = 0$  (при этом, в соответствии (1.5.16), реактивное ускорение равно нулю на всей траектории перелета).

Для оценки работоспособности и вычислительной трудоемкости этого метода была рассмотрена задача оптимизация выведения КА с орбиты, имеющей высоту перигея 250.0 км, высоту апогея 1000.0 км, наклонение  $97.60^\circ$ , ДВУ  $0.00^\circ$ , аргумент перигея  $0.00^\circ$  на круговую орбиту, имеющую высоту 1200.0 км, наклонение  $98.00^\circ$ ,

ДВУ  $0.00^\circ$ . Примем  $K_0 = L(K_0) = 150^\circ$ . В этой работе высоты определяются относительно сферической модели Земли со средним радиусом 6371 км. Гравитационный параметр Земли считается равным  $398600.436 \text{ км}^3/\text{с}^2$ . В таблице 4.1.1 приведены результаты расчета оптимальных траекторий КА с ИРД. Угловая дальность рассмотренных примеров изменяется от 1 до 2500 витков. В этой таблице  $N_{rev}$  обозначает число витков,  $J$  – функционал (1.5.11),  $\Delta t$  – длительность перелета,  $V_x$  – характеристическую скорость. Из таблицы 4.1.1 можно видеть, что время вычислений варьируется от 0.16 секунд до 0.06...0.07 секунд на один виток, в зависимости от суммарной угловой дальности.

Из данных, приведенных в таблице 4.1.1 можно установить, что длительность перелета имеет почти линейную зависимость от угловой дальности:  $\Delta t$  [сутки] =  $0.0715 \cdot N_{rev} + 0.0013$ , а длительность перелета, умноженная на значение функционала, стремится к предельному значению около  $0.8902 \text{ сут} \cdot \text{м}^2/\text{с}^3$  при увеличении значения угловой дальности перелета, при этом, начиная уже с угловой дальности 20 витков, первые три значащих цифры в этой величине не изменяются.

Характеристическая скорость стремится к предельному значению около 345.95 м/с с ростом угловой дальности перелета. Но даже на одновитковой траектории характеристическая скорость очень близка к этому пределу (превышает его всего на 0.36%).

На рисунке 4.1.1 слева представлены зависимости от времени полученных траекторных параметров (большой полуоси, эксцентриситета и наклона) для 4-виткового перелета. Справа на этом рисунке представлены зависимости управления (абсолютной величины вектора реактивного ускорения и углов его ориентации) от времени.

Таблица 4.1.1- Результаты оптимизации траектории доыведения низкоорбитального КА на целевую орбиту

$N_{rev}$	Процессорное время, с	$\Delta t$ , сутки	$J$ , $m^2/c^3$	$V_x$ , м/с	$\Delta t \cdot J$ , сут $\cdot m^2/c^3$
1	0.16	0.073	12.40170	347.198	0.90296
4	0.65	0.287	3.10764	346.331	0.89344
20	2.12	1.432	0.62202	346.029	0.89086
100	8.84	7.156	0.12442	345.966	0.89034
500	32.42	35.773	0.02489	345.953	0.89023
1000	63.51	71.545	0.01244	345.951	0.89022
2500	185.04	178.860	0.00498	345.950	0.89021

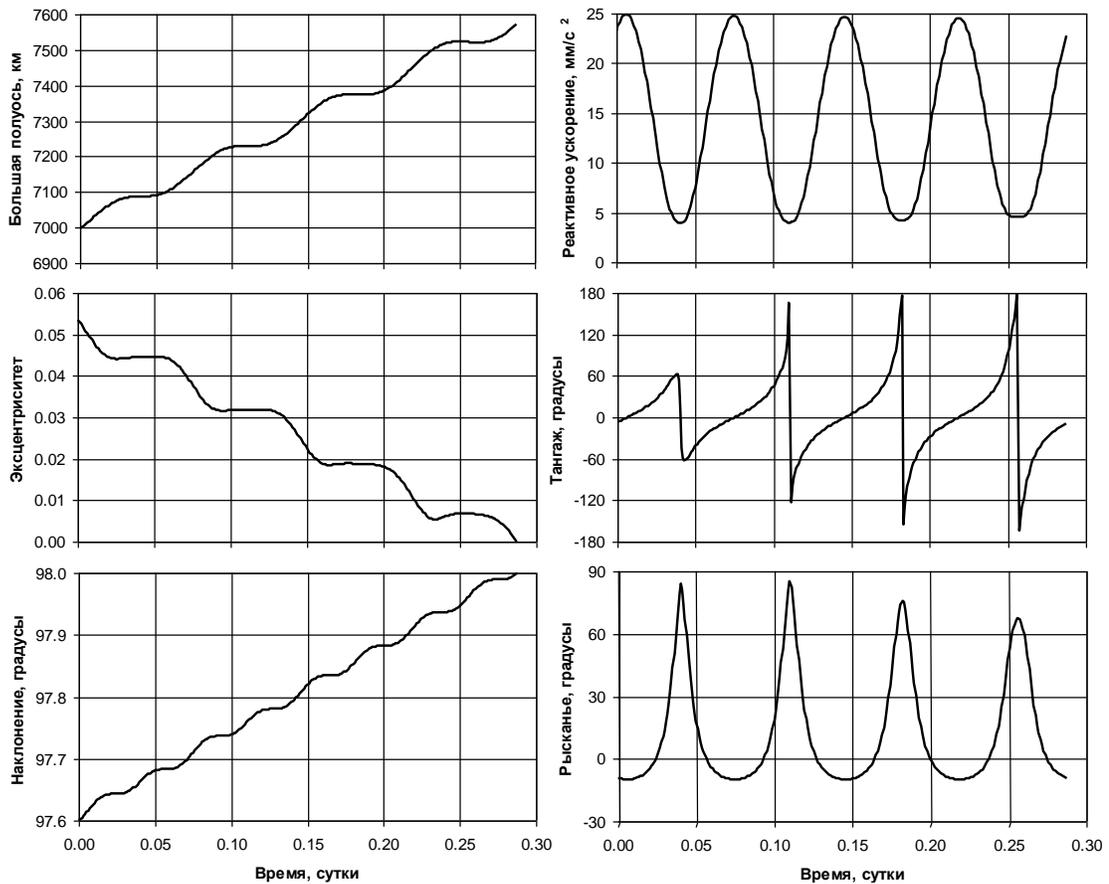


Рисунок 4.1.1 - Зависимости траекторных параметров, реактивного ускорения и углов ориентации реактивного ускорения от времени. Оптимальная четырехвитковая траектория КА с ИРД

Из рисунка 4.1.1 видно, что большая полуось, эксцентриситет и наклонение на оптимальной траектории перелета имеют практически постоянный вековой уход и подвержены короткопериодическим колебаниям с орбитальным периодом. Зависимость реактивного ускорения от времени оказалась почти периодической функцией с минимальным значением около  $4 \text{ мм/с}^2$  и максимальным значением около  $25 \text{ мм/с}^2$  и с периодом колебаний, равным орбитальному периоду. Угол тангажа на первом витке колеблется с амплитудой примерно  $60^\circ$ , тогда как на следующих витках эта амплитуда уже увеличивается до  $180^\circ$ . Угол рысканья достигает максимума ( $67...85^\circ$ ) в области перигея и минимума (около  $-10^\circ$ ) – в области апогея. На рисунке 4.1.1 показаны зависимости тех же траекторных параметров и параметров управления, что и на рисунке 4.1.1, но не от времени, а от истинной долготы. Форма зависимости траекторных параметров от истинной долготы практически идентична на всех витках. Зависимость  $\mathbf{a}(L)$  почти одинакова на всех витках оптимальной траектории перелета. Естественно, данный характер изменения параметров оптимальной траектории связан с небольшими относительными изменениями орбитальных элементов во время перелета в рассматриваемом примере.

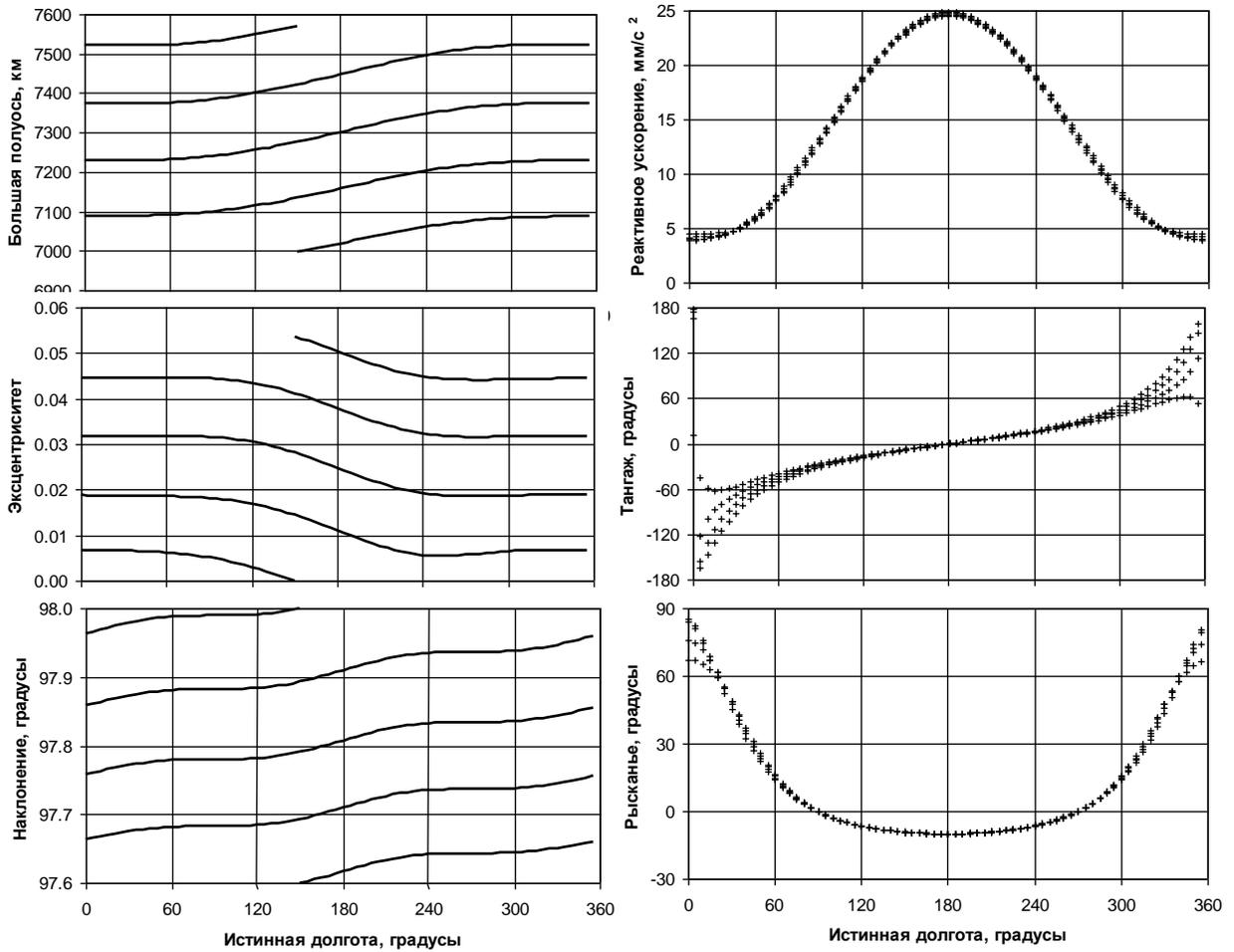


Рисунок 4.1.2 - Зависимости траекторных параметров, реактивного ускорения и углов ориентации реактивного ускорения от истинной долготы для оптимальной четырехвитковой траектории выведения КА с ИРД

Рассмотрим пример перелета на ГСО с высокоэллиптической орбиты, то есть перелет с большим изменением размеров, формы и ориентации плоскости орбиты. Примем следующие параметры орбиты отправления: высоты перигея и апогея – 10 тысяч и 80 тысяч километров соответственно,  $i = 63^\circ$ ,  $\omega = \Omega = 0^\circ$ . Пусть начальное значение истинной и вспомогательной долготы равно  $100^\circ$ . Конечная орбита – ГСО, круговая орбита высотой 35793 км с нулевым наклонением. Зависимости процессорного времени решения задачи оптимизации, оптимальной длительности

перелета, функционала, характеристической скорости и произведения функционала на время перелета от числа витков представлены в таблице 4.1.2

Таблица 4.1.2 Результаты оптимизации траектории доыведения КА с высокой эллиптической орбиты на ГСО

$N_{rev}$	Процессорное время, с	$\Delta t$ , сутки	$J$ , м <sup>2</sup> /с <sup>3</sup>	$V_x$ , м/с	$\Delta t \cdot J$ , сут·м <sup>2</sup> /с <sup>3</sup>
1	0.38	3.190	16.76575	2840.944	53.48479
4	1.06	12.595	5.84182	3214.116	73.57626
20	1.93	52.394	1.25686	3059.728	65.85197
100	8.89	261.804	0.25304	3065.137	66.24557
500	44.42	1310.237	0.05066	3067.256	66.37392
1000	86.95	2620.844	0.02533	3067.544	66.39115

Из данных, представленных в таблице 4.1.2, можно увидеть, что произведение  $\Delta t \cdot J$  сходится к асимптотическому пределу, приближающемуся к значению около 66.4 сут·м<sup>2</sup>/с<sup>3</sup> по мере увеличения угловой длительности перелета. Однако, в отличие от предыдущего примера, эта величина меняется немонотонно. Характеристическая скорость имеет предельное значение около 3067.7 м/с и всегда меньше этого предельного значения. Предельное значение характеристической скорости достигается при бесконечном увеличении угловой дальности перелета.

Вид оптимальной 100-витковой траектории перелета на ГСО представлен на рисунке 4.1.3.

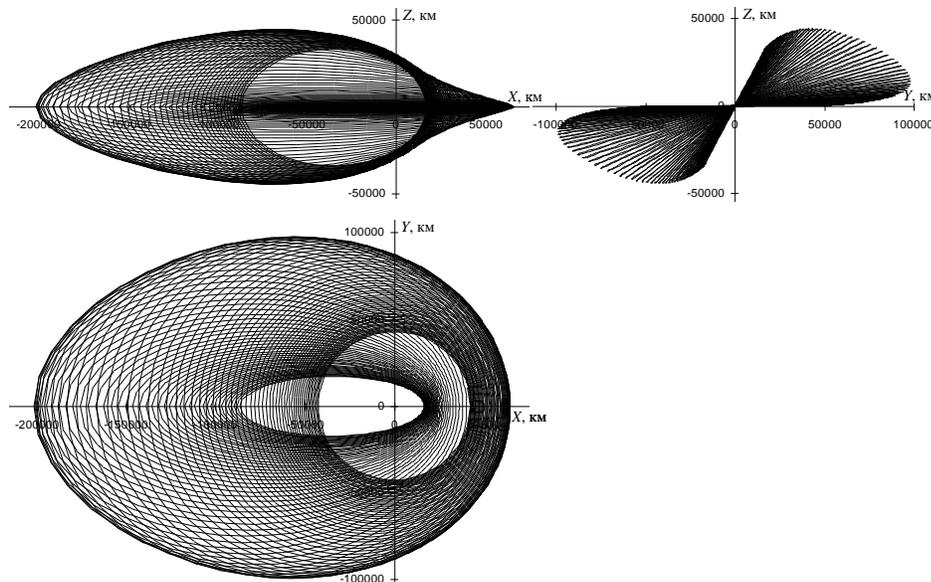


Рисунок 4.1.3- Оптимальная траектория перелета КА с ИРД на ГСО с угловой дальностью сто витков

На рисунке 4.1.4 приведены графики, отображающие изменение траекторных параметров во времени, а также оптимальную программу управления для 100-витковой траектории выведения КА с ИРД на ГСО. У зависимости  $e(t)$  есть максимум. Это означает, что вычисленная траектория, относится к типу  $E$ -траекторий [42]. Большая полуось достигает максимума более 120 тысяч километров. Наклонение монотонно снижается. Программа управления имеет достаточно сложный вид. На первом участке значение реактивного ускорения колеблется в диапазоне  $0.15 \dots 0.5 \text{ мм/с}^2$ . На втором – в диапазоне  $0 \dots 0.15 \text{ мм/с}^2$ . На третьем – в диапазоне  $0.05 \dots 0.3 \text{ мм/с}^2$ . В начале перелета зависимость угла тангажа от времени имеет колебательный характер (среднее значение –  $0^\circ$ , амплитуда не более  $60^\circ$ ), а на втором этапе перелета угол тангажа обеспечивает ориентацию проекции вектора тяги на орбитальную плоскость, близкую к направлению вектора скорости КА в районе апогея и к направлению, противоположному вектору скорости в районе перигея. В результате обеспечивается увеличение высоты перигея и уменьшение высоты апогея. Наконец, на третьем, заключительном этапе, угол

тангажа колеблется в окрестности  $180^\circ$ , обеспечивая уменьшение большой полуоси оскулирующей орбиты КА. Угол рысканья почти на всей траектории имеет малое абсолютное значение в области перигея и значение  $50\dots90$  градусов в области апогея. В момент смены режима управления по тангажу максимальная абсолютная величина угла рысканья в области перигея кратковременно возрастает почти до  $90$  градусов. Ближе к окончанию перелета угол рысканья в апогее уменьшается до  $12$  градусов.

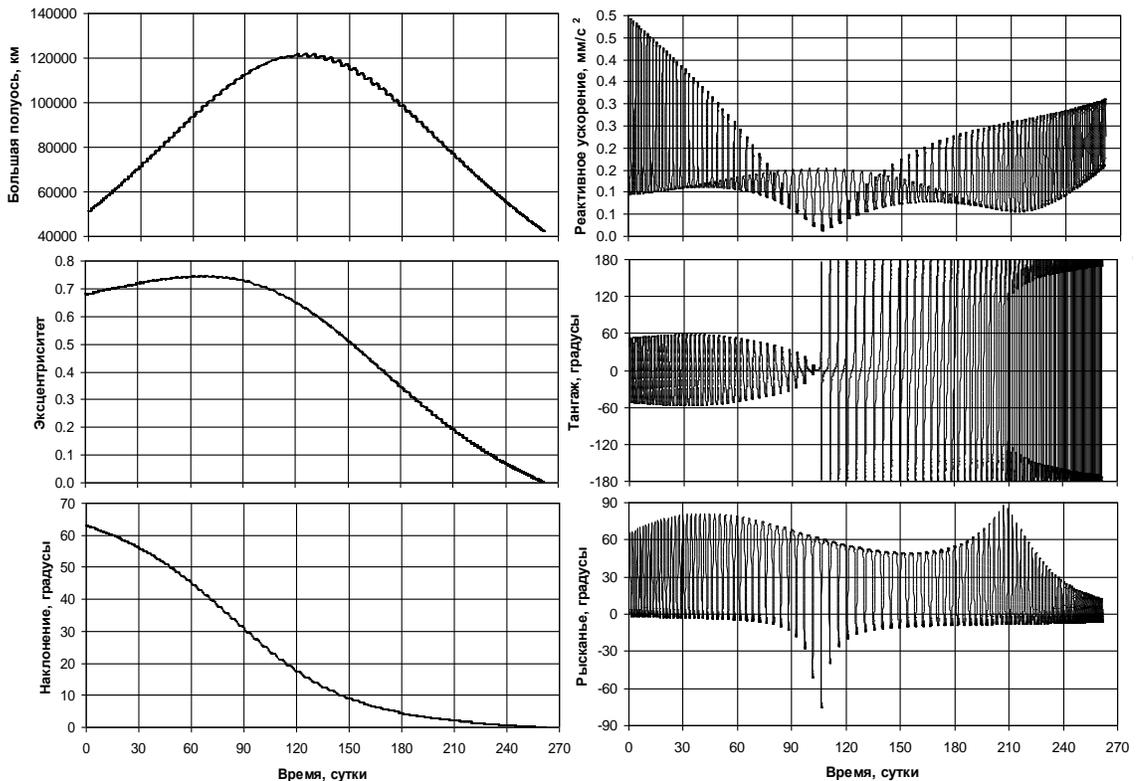


Рисунок 4.1.4 - Зависимости траекторных параметров, реактивного ускорения и углов ориентации реактивного ускорения от времени. Оптимальная траектория перелета КА с ИРД на ГСО с угловой дальностью 100 витков

В качестве другого примера, для демонстрации работоспособности разработанного метода в случае оптимизации межорбитального перелета между двумя эллиптическими орбитами, рассмотрим расчет оптимальной 100-витковой траектории между начальной орбитой с высотой перигея 10000 км, высотой апогея

80000 км, аргументом перигея  $80^\circ$ , наклонением  $50^\circ$ , ДВУ  $100^\circ$  с начальными значениями истинной и вспомогательной долгот  $100^\circ$  на конечную орбиту с высотой перигея 30000 км, высотой апогея 50000 км, аргументом перигея  $150^\circ$ , наклонением  $63.4^\circ$  и ДВУ  $90^\circ$ . Траектория представлена на рисунке 4.1.5. Оптимальная программа управления представлена на рисунке 4.1.6. Программа угла тангажа несимметрична, а на конечном этапе перелета угол тангажа близок к  $180^\circ$ . Программа управления имеет достаточно сложный вид. В начале перелета реактивное ускорение может превышать  $0.4 \text{ м/с}^2$ , а ближе к середине траектории – доходить до околонулевого значения.

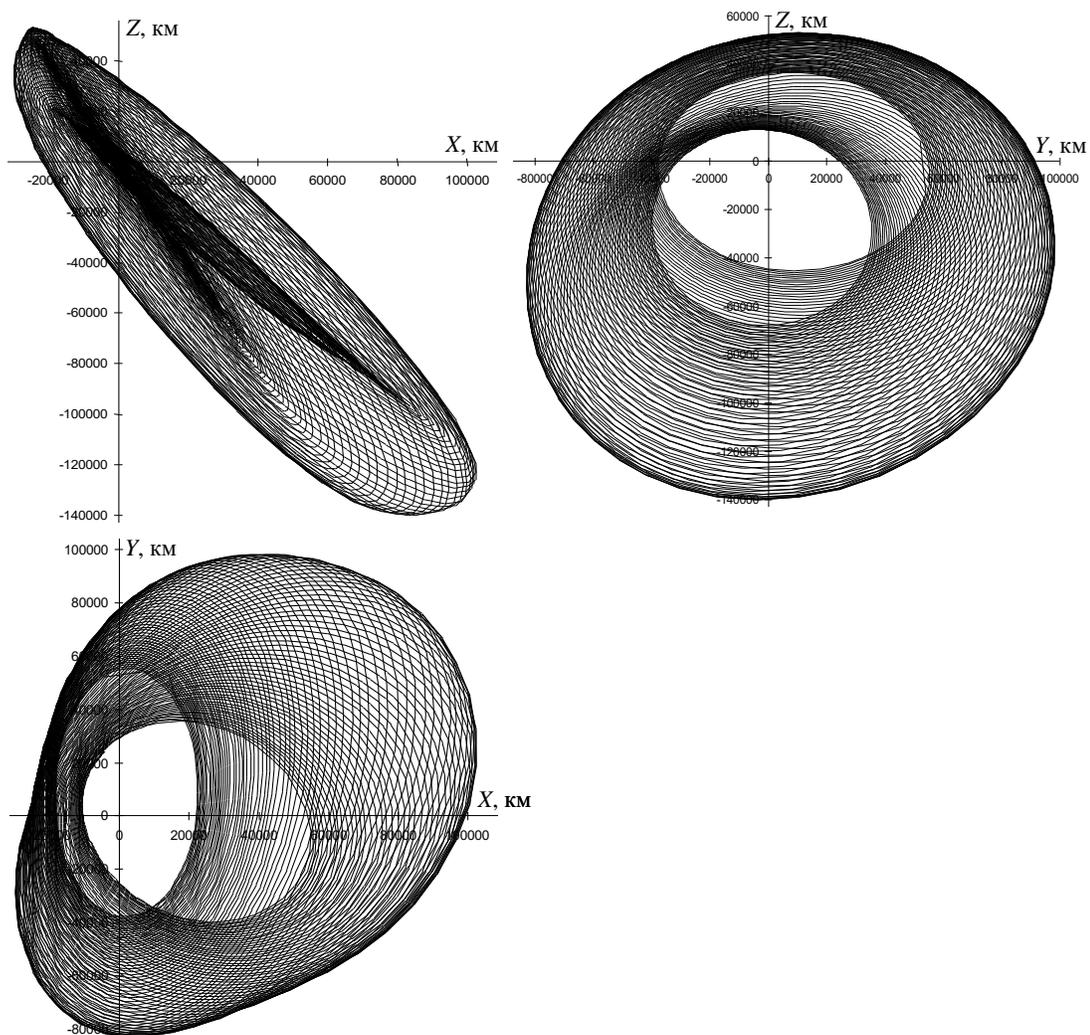


Рисунок 4.1.5 - Оптимальная 100-витковая траектория перелета между эллиптическими орбитами

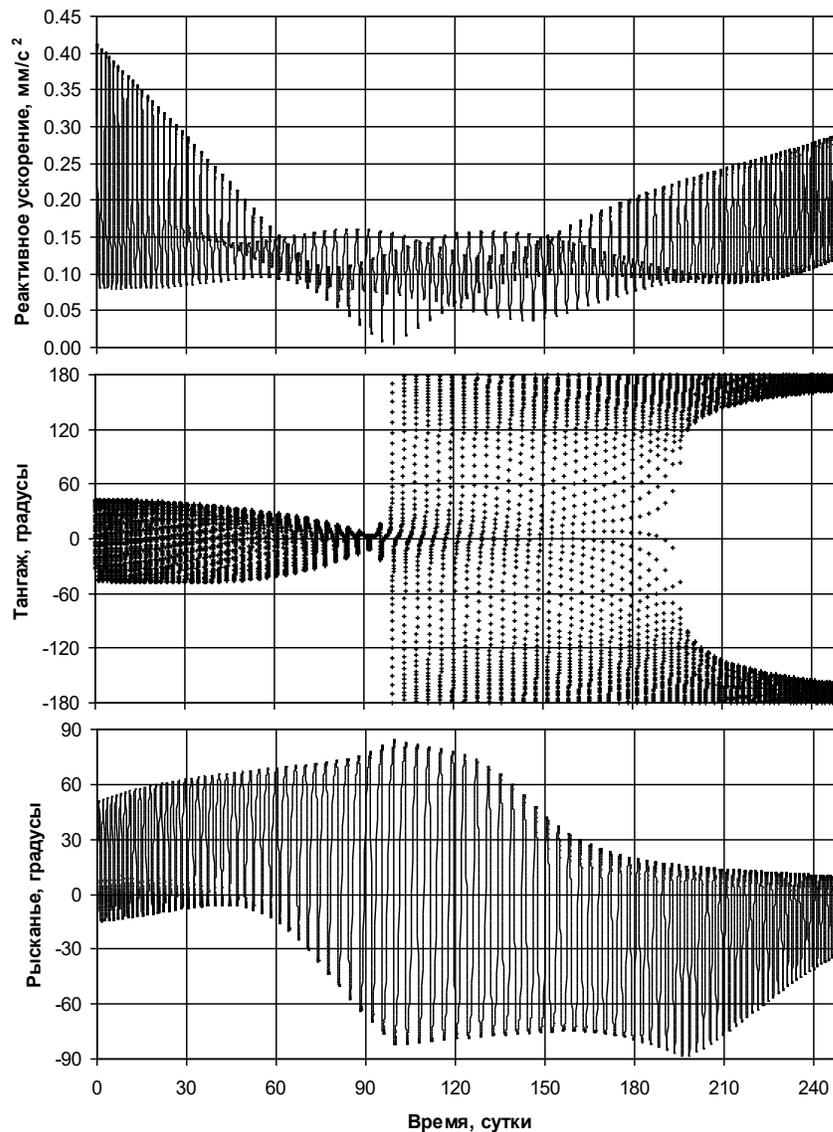


Рисунок 4.1.6 - Оптимальная программа управления на 100-витковом перелете между эллиптическими орбитами

Представленный метод был опробован на различных задачах оптимизации межорбитальных перелетов КА с ИРД, включая задачу перелета между низкими околоземными орбитами, задачу перелета между эллиптической орбитой и ГСО и задачу перелета между высокими эллиптическими орбитами. Метод показал хорошую вычислительную устойчивость и высокое быстродействия при решении

данных задач. Например, для вычисления оптимальной 100-витковой траектории быстроедействие представленного в этом разделе метода оказалось на три порядка лучше по сравнению с быстроедействием метода, использующего ОДУ движения КА в декартовых координатах. Представленный в этом разделе метод позволяет практически снять ограничение на максимальную угловую дальность рассматриваемых траекторий, которая для математической модели, представленной в разделе 1.2 ограничена 50...100 витками.

#### 4.2 Оптимизация многовитковых траекторий межорбитального перелета космического аппарата с двигателем ограниченной тяги

Рассмотрим задачу вычисления оптимальной траектории КА с ДОТ. Будем использовать математическую модель из раздела 1.6. Для решения этой задачи используется базовый метод продолжения в форме (2.1.5). В качестве начального приближения используется оптимальная траектория КА с ИРД, рассчитанная с помощью метода, представленного в разделе 4.1.

Для обеспечения гладкого продолжения траектории КА с ИРД в траекторию КА с ДОТ используется следующая система ОДУ:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{x}}{dK} &= \frac{(1-\tau)k + \tau\delta P k_1 k_2}{1-\tau + \tau A} \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{A}, \quad \frac{dL_K}{dK} = \frac{(1-\tau)k + \tau\delta P k_1 k_2}{1-\tau + \tau A} \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial p_{LK}} \mathbf{A}, \quad \frac{dm}{dK} = -\tau\delta k_1 \frac{P}{w}, \\
 \frac{d\mathbf{p}}{dK} &= -\frac{(1-\tau) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}} A^2 + k \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \right) + \tau\delta P \cdot \left[ \frac{\partial k_1}{\partial \mathbf{x}} SA + k_1 \cdot \left( \frac{\partial k_2}{\partial \mathbf{x}} A^2 + k_2 \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{A} \right) \right]}{1-\tau + \tau A}, \\
 \frac{dp_{LK}}{dK} &= -\frac{(1-\tau) \left( \frac{1}{2} \frac{\partial k}{\partial \mathbf{x}} A^2 + k \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial L_K} \mathbf{A} \right) + \tau\delta P \cdot \left[ \frac{\partial k_1}{\partial L_K} SA + k_1 \cdot \left( \frac{\partial k_2}{\partial L_K} A^2 + k_2 \frac{\partial \mathbf{A}^T}{\partial L_K} \mathbf{A} \right) \right]}{1-\tau + \tau A}, \\
 \frac{dp_m}{dK} &= \tau P k_1 k_2 \frac{A}{m^2}, \quad \frac{dt}{dK} = k_1.
 \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

Система (4.3.1) при  $\tau = 0$  совпадает с системой ОДУ (1.5.16) а при  $\tau = 1$  – с системой (1.6.8).

Рассмотрим пример оптимизации 100-витковой траектории перелета КА с ДОТ. Пусть начальная орбита имеет высоту перигея 10000 км, высоту апогея 80000 км, наклонение  $31^\circ$ , нулевые значения аргумента перигея и ДВУ. В качестве конечной орбиты рассмотрим ГСО (круговую орбиту с высотой 35793 км и с нулевым наклонением). Начальную массу КА примем равной 1000 кг, тягу ЭРДУ будем рассматривать в различных вариантах равной от 0.145 Н до 1 Н, а удельный импульс ЭРДУ будем считать равным 2500 с.

На рисунках 4.2.1– 4.2.5 приведены примеры оптимальных 100-витковых траекторий КА с ДОТ между рассматриваемыми орбитами с различными значениями тяги ЭРДУ в виде их проекций на плоскости XY, XZ и YZ инерциальной геоцентрической системы координат J2000.

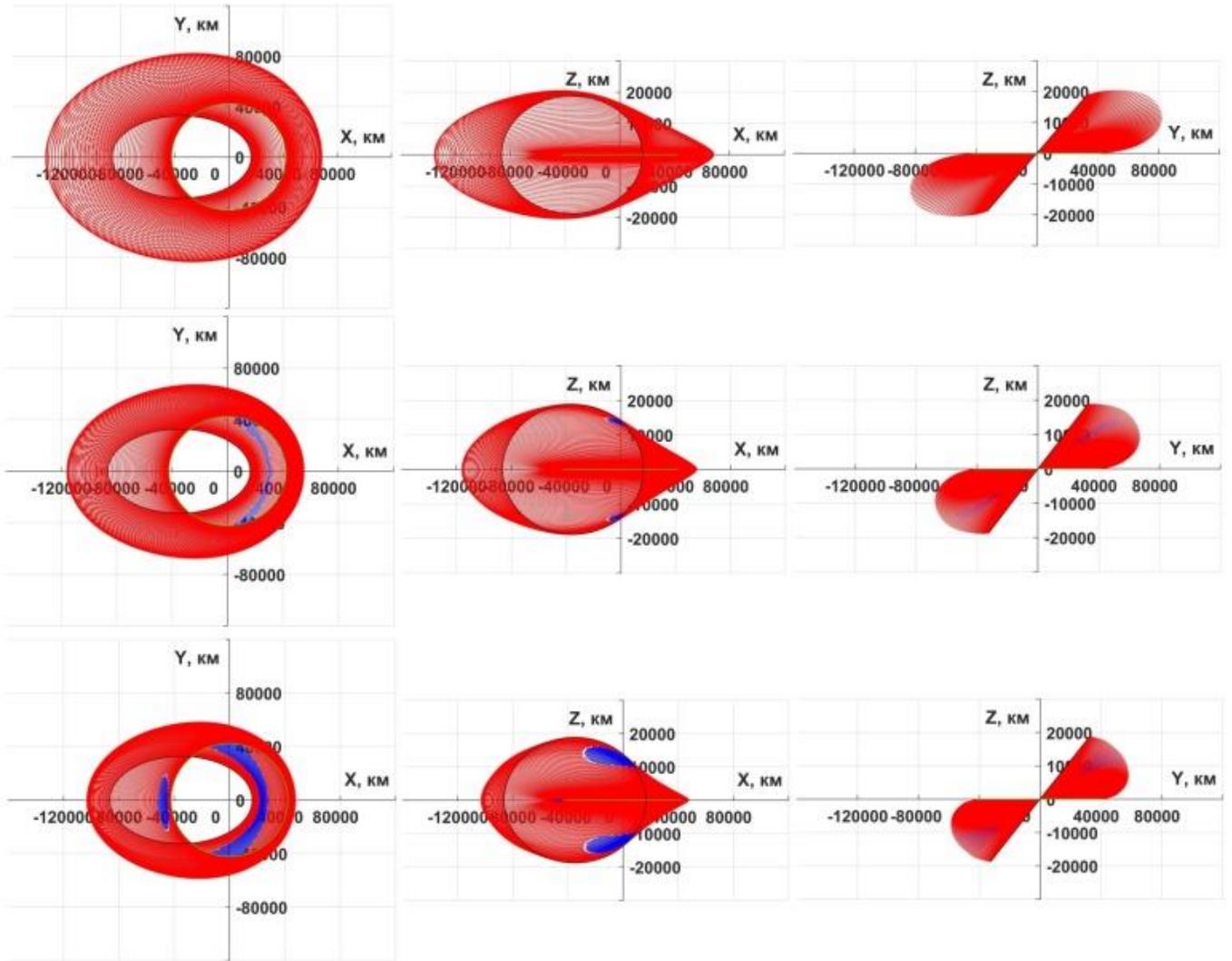


Рисунок 4.2.1 - Эволюция структуры 100 витковых оптимальных траектории перелета с эллиптической орбиты на геостационарную орбиту с ростом тяги.

Верхний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 145 мН,  
 средний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 150 мН,  
 нижний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 160 мН.

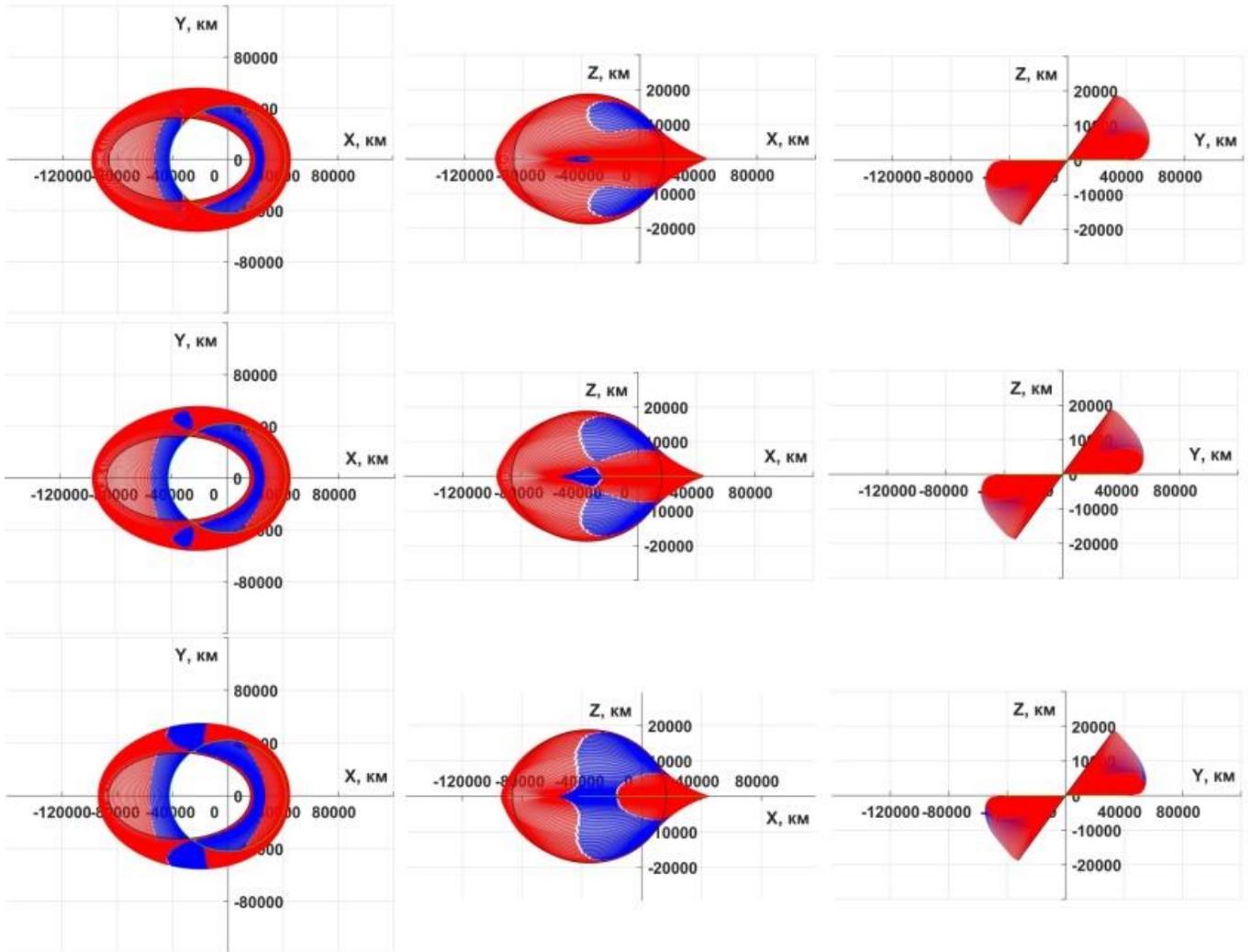


Рисунок 4.2.2 - Эволюция структуры 100 витковых оптимальных траектории перелета с эллиптической орбиты на геостационарную орбиту с ростом тяги.

Верхний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 170 мН,  
 средний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 180 мН,  
 нижний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 195 мН.

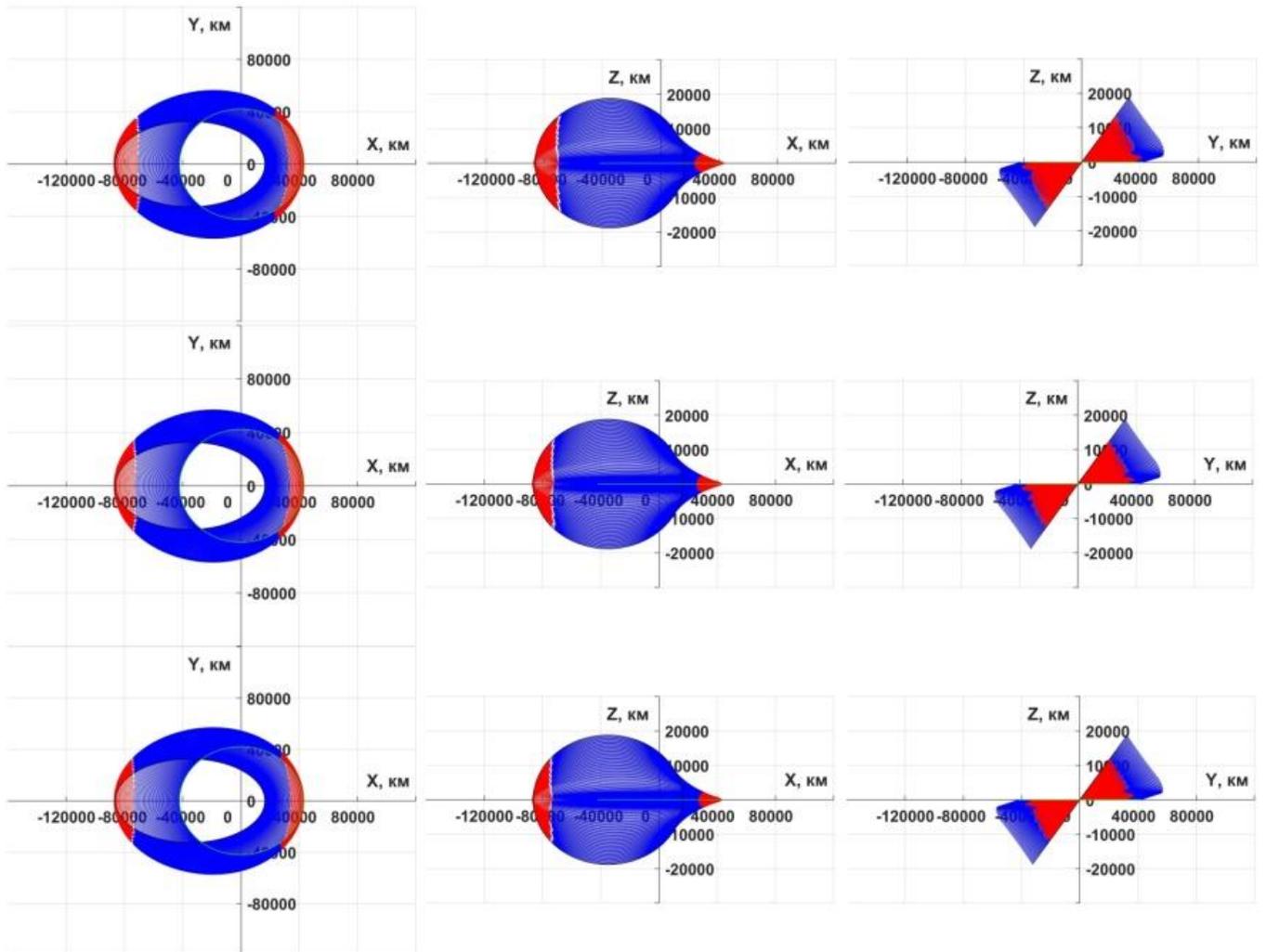


Рисунок 4.2.3 - Эволюция структуры 100 витковых оптимальных траектории перелета с эллиптической орбиты на геостационарную орбиту с ростом тяги.

Верхний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 350 мН,  
 средний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 380 мН,  
 нижний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 400 мН.

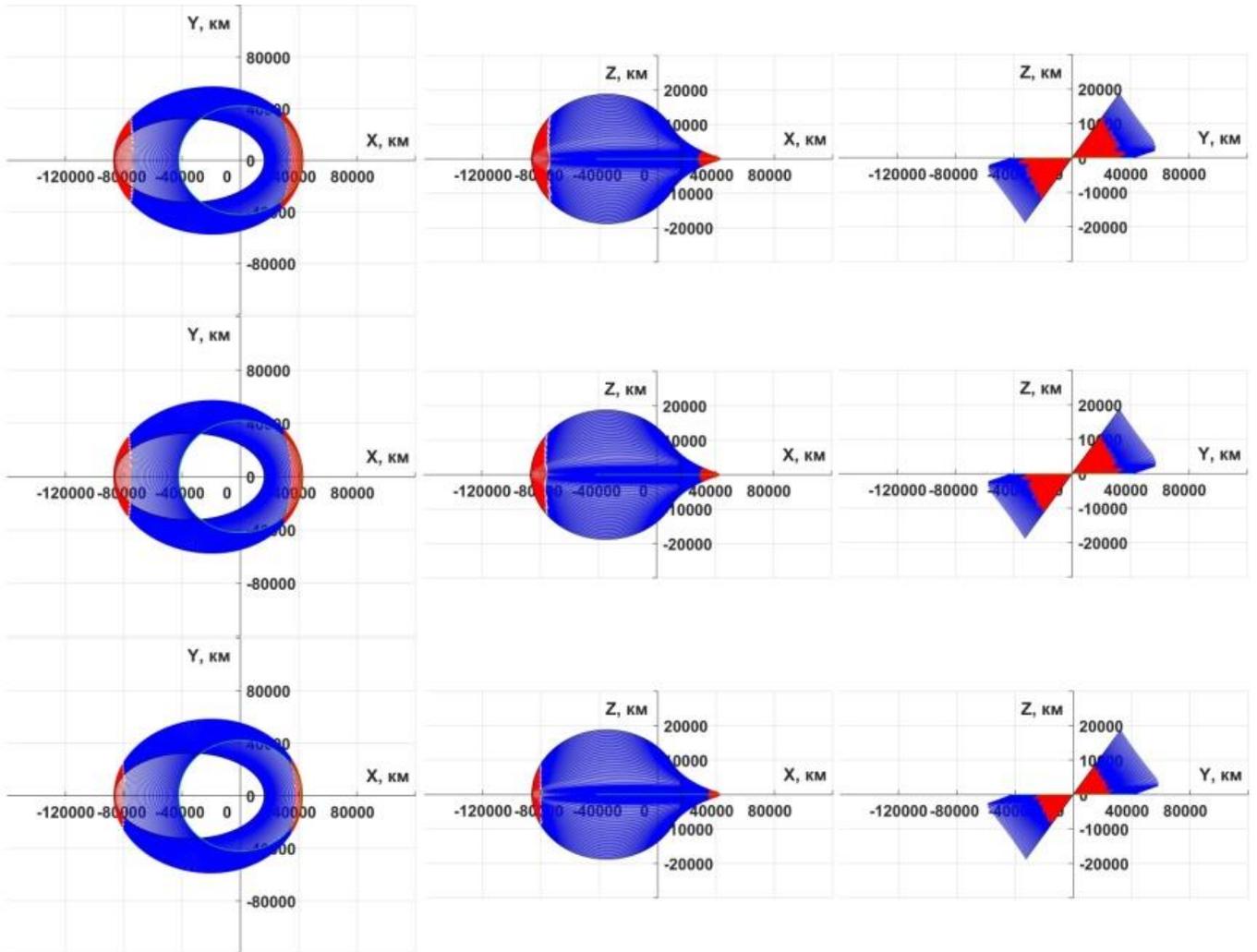


Рисунок 4.2.4 - Эволюция структуры 100 витковых оптимальных траектории перелета с эллиптической орбиты на геостационарную орбиту с ростом тяги.

Верхний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 407 мН,  
 средний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 435 мН,  
 нижний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 580 мН.

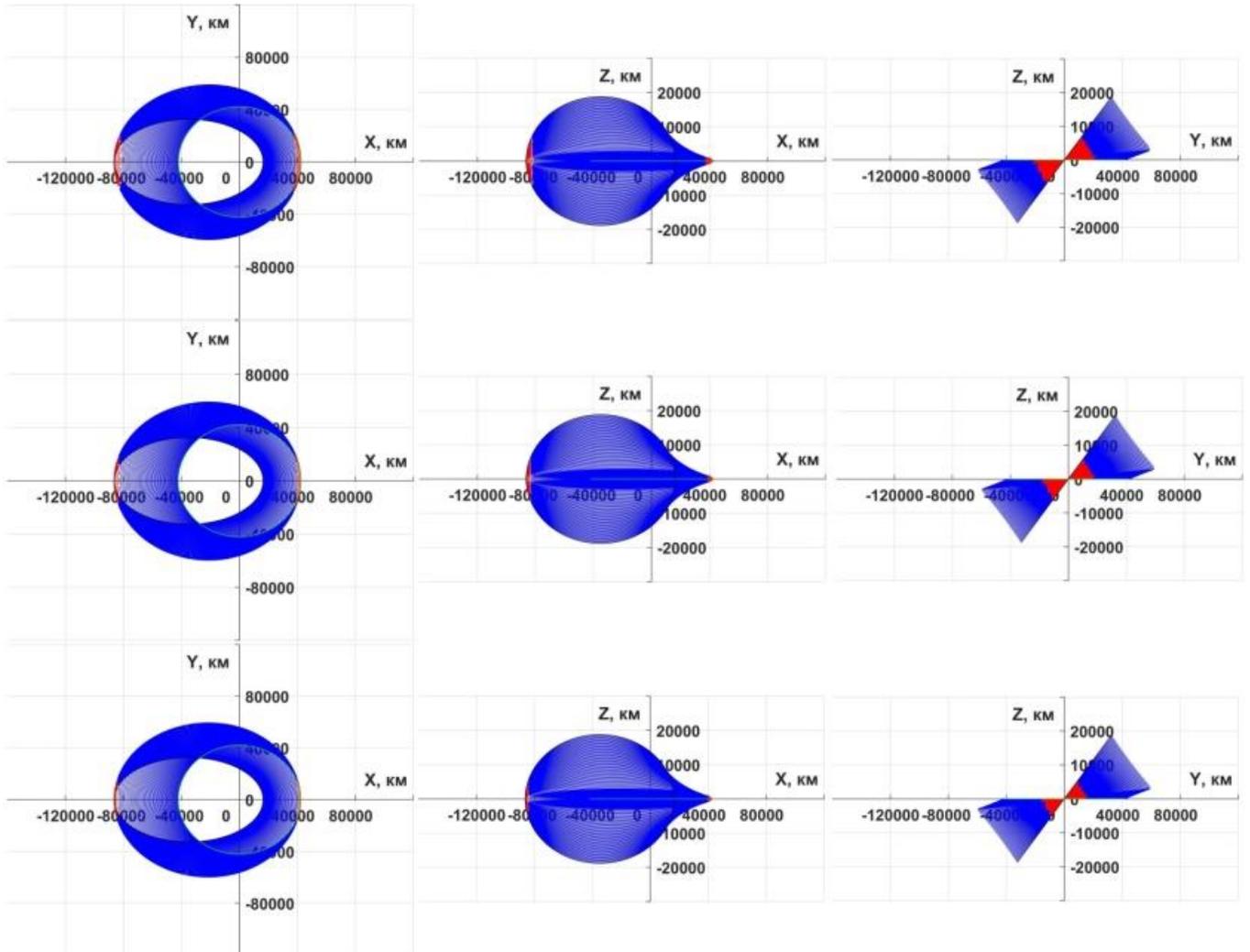


Рисунок 4.2.5 - Эволюция структуры 100 витковых оптимальных траектории перелета с эллиптической орбиты на геостационарную орбиту с ростом тяги.

Верхний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 725 мН,  
 средний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 870 мН,  
 нижний ряд – 100 витковые ОТ траектории с тягой 1000 мН.

Зависимости длительности перелета и конечной массы КА от тяги ЭРДУ для оптимальных траекторий приведены в таблице 4.2.1 и на рисунке 4.2.6. Обнаружено, что с увеличением величины тяги конечная масса КА растет, приближаясь к некоторому предельному значению. Оптимальное время перелета с ростом тяги сначала уменьшается, а затем начинает расти, также приближаясь к некоторому предельному значению при дальнейшем росте тяги.

Зависимости траекторных параметров и программы управления от времени для траектории КА с ДОТ с тягой 1000 мН приведены на рисунке 4.2.7. В графиках, отображающих зависимости траекторных параметров от времени для сравнения добавлены такие же зависимости для траектории КА с ИРД.

Таблица 4.2.1 - Время перелета и конечная масса КА в зависимости от величины тяги

Время перелета, сутки	Конечная масса КА, кг	Тяга ЭРДУ, мН
197.3788	899.0716	145
174.8354	908.7377	150
157.4820	916.6145	160
151.7737	921.1777	170
149.5409	924.5030	180
147.0558	928.3828	195
142.2031	940.9579	350
142.4038	941.6419	380
142.4992	942.0040	400
142.6673	942.5217	435
143.1185	943.7477	580
143.2449	944.1007	725
143.4324	944.5735	870
143.6759	944.9338	1000

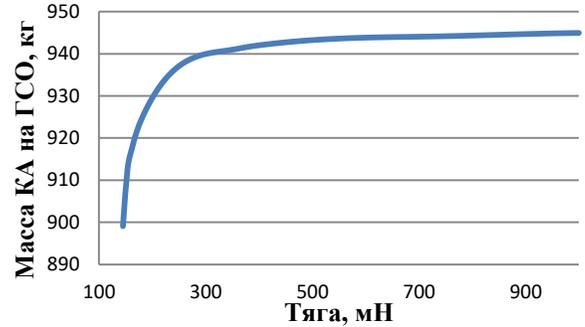
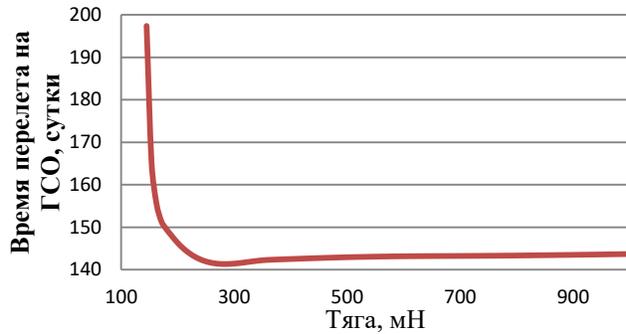


Рисунок 4.2.6 - Зависимость оптимального времени перелета (слева) и конечной массы космического аппарата на геостационарной орбите (справа) от величины тяги

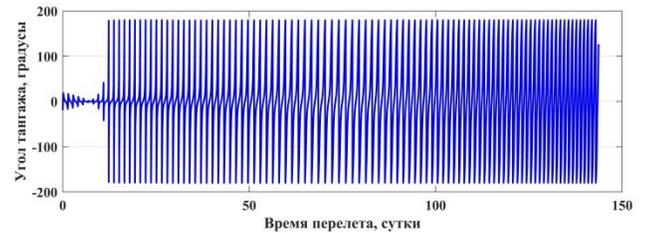
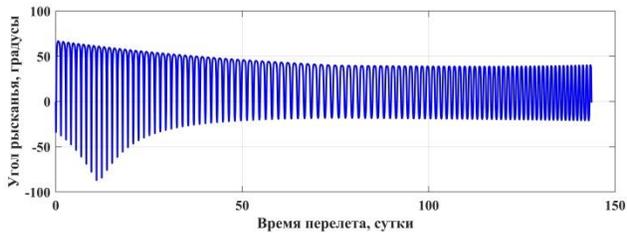
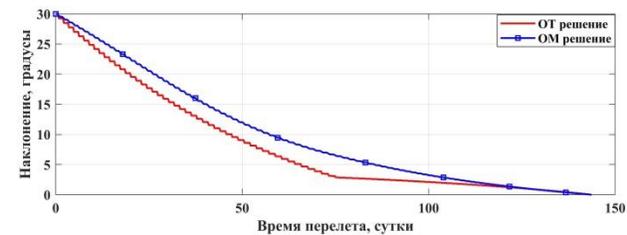
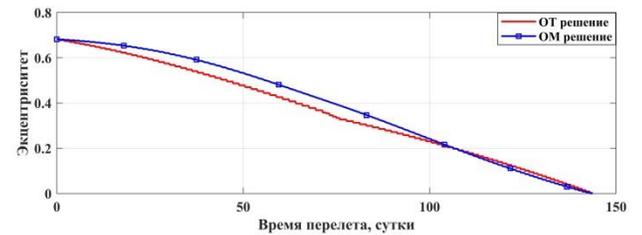
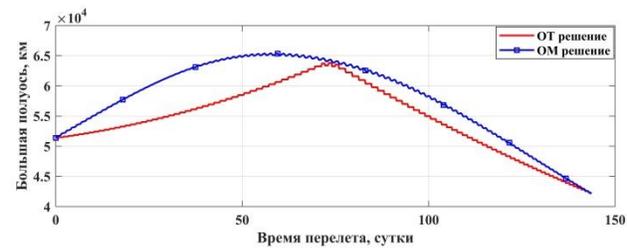


Рисунок 4.2.7 - Зависимости от времени траекторных параметров, функция тяги и углов ориентации вектор тяги для оптимальной 100-витковой траектории с тягой 1000 мН

### 4.3 Заключение по разделу

В разделе приведены результаты разработки методов оптимизации многовитковых траекторий межорбитальных перелетов КА с ИРД и ДОТ с

использованием уравнений движения, записанных в модифицированных равноденственных переменных и вспомогательной долготы в качестве независимой переменной. идеально-регулируемыми двигателем, основанных на математических моделях, представленных в разделах 1.5 и 1.6. После применения ПМП рассматриваемые задачи оптимизации сводятся к КЗ для систем ОДУ. Эти КЗ решаются базовым методом продолжения, представленным в разделе 2.1 с использованием МКШ (раздел 2.2) для высокоточного вычисления необходимых производных.

Особенностью разработанных методов является использование тривиального (нулевого) начального приближения для начальных значений сопряженных переменных при оптимизации траектории КА с ИРД и использование начальных значений сопряженных переменных оптимальной траектории КА с ИРД в качестве начального приближения при оптимизации КА с ДОТ. Таким образом решена проблема выбора начального приближения, представляющая значительную трудность при использовании большинства других методов оптимизации траекторий КА с ЭРДУ, использующих непрямой подход к решению задачи.

Другой особенностью представленных методов является автоматическое вычисление оптимального времени перелета для траектории с заданной угловой дальностью. Это позволило решить проблему выбора оптимального соотношения длительности и угловой дальности перелета, которая возникает при решении задач с фиксированным временем перелета.

Рассмотрены численные примеры оптимизации некомпланарных многовитковых перелетов между эллиптической орбитой и ГСО с использованием разработанных методов, подтвердившие их вычислительную устойчивость и эффективность. Обнаружена немонотонность в зависимости оптимального времени перелета КА с ДОТ от тяги при фиксированной угловой дальности перелета.

## **5 АНАЛИЗ ВЫВЕДЕНИЯ КОСМИЧЕСКИХ АППАРАТОВ НА ГЕОСТАЦИОНАРНУЮ ОРБИТУ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМБИНАЦИИ БОЛЬШОЙ И МАЛОЙ ТЯГИ**

### **5.1 Описание схемы выведения и методики решения**

Рассматривается комбинированная схема выведения КА с ЭРДУ на ГСО, в которой в состав средств выведения не входит долгоживущий РБ. В этом случае последняя ступень РН может вывести КА на некоторую ПО с низкой высотой перигея и с наклоном, близким к наклонению, определяемому широтой космодрома и ограничениями на азимут пуска РН. На практике, высота перигея и наклонение ПО могут быть незначительно изменены, но ценой значительного уменьшения массы выводимого на ПО КА. Поэтому в рассматриваемой схеме выведения высоту перигея и наклонение ПО будем считать фиксированными, а высоту апогея ПО – оптимизируемым параметром. Типичной РН, в составе которой не используется долгоживущий РБ, является РН Falcon-9. Рассмотрим задачу оптимизации комбинированной схемы выведения КА с ЭРДУ на ГСО при запуске КА с помощью этой РН.

Таким образом, рассматриваемая комбинированная схема перелета состоит из двух этапов:

- 1) РН Falcon-9 выводит КА с ЭРДУ на ПО с заданными высотой перигея и наклоном и с некоторой выбираемой высотой апогея. После достижения ПО КА отделяется от последней ступени РН.
- 2) КА осуществляет многовитковый перелет с ПО на ГСО с помощью собственной ЭРДУ.

Ставится задача вычисления зависимости максимальной массы КА после его прибытия на ГСО от длительности довыведения с ПО на ГСО.

Для пуска РН Falcon-9 с космодрома на мысе Канаверал, минимальное наклонение опорной орбиты совпадает с широтой космодрома и равно  $28.5^\circ$ . Типичная высота перигея при выведении с помощью этой РН на высокие эллиптические орбиты с аргументом перигея около  $180^\circ$  равна 185 км [66]. В руководстве пользователя РН Falcon-9 [66] приведена представленная в таблице 5.1.1 зависимость массы полезного груза выводимого на эллиптические орбиты с указанными ограничениями от высоты апогея.

Таблица. 5.1.1 – Зависимость массы КА, выводимого РН Falcon-9 на эллиптическую орбиту с высотой перигея 185 км, наклонением  $28.5^\circ$  и аргументом перигея  $180^\circ$  в зависимости от апогея этой орбиты.

Высота апогея, км	Начальная масса КА, кг
50000	4044
60000	3869
70000	3741
80000	3642
90000	3564
100000	3501

Участок перелета КА с ЭРДУ с ПО на ГСО оптимизируется с использованием метода, представленного в разделе 4.2.

Предполагается, что ЭРДУ КА имеет тягу 1.12 Н и удельный импульс 1780 с. Требуется определить для заданной длительности перелета с ПО на ГСО оптимальную высоту апогея ПО и оптимальное число витков этой траектории перелета. Для этого, для каждой высоты апогея ПО из таблицы 5.1.1, вычисляются

оптимальные траектории с различным числом витков. Таким образом, вычисляются семейства зависимостей доставляемой на ГСО массы КА и оптимального времени перелета от числа витков для различных высот апогея ПО. По результатам оптимизации строятся зависимости массы КА на ГСО от времени перелета при заданной высоте апогея ПО и различном числе витков траектории перелета. Огибающая этих зависимостей для различных высот апогея ПО и представляет собой искомую зависимость максимальной массы КА на ГСО от времени перелета. Далее вычисляется аппроксимация этой зависимости, а также зависимостей оптимальной высоты апогея ПО и оптимального числа витков перелета от длительности перелета. Полученные аппроксимационные зависимости можно использовать в проектно-баллистическом анализе для быстрой оценки энергетических возможностей рассматриваемой комбинированной схемы выведения.

## 5.2 Численные результаты

На рисунке 5.2.1 представлена зависимость конечной массы КА на ГСО и оптимальное время перелета на ГСО с угловой дальностью от 90 до 100 витков для заданной высоты апогея 50000 км, вычисленная с использованием метода из раздела 4.2.

При фиксированной высоте апогея промежуточной орбиты 50000 км и угловой дальности перелета 94 витка достигается минимальная длительность перелета (100,3332 суток), при этом на ГСО доставляется КА массой 3507,3098 кг. Для остальных высот апогея ПО из таблицы 5.1.1 были получены аналогичные зависимости конечной массы КА на ГСО от длительности выведения. Эти зависимости представлены на рисунке 5.2.2.

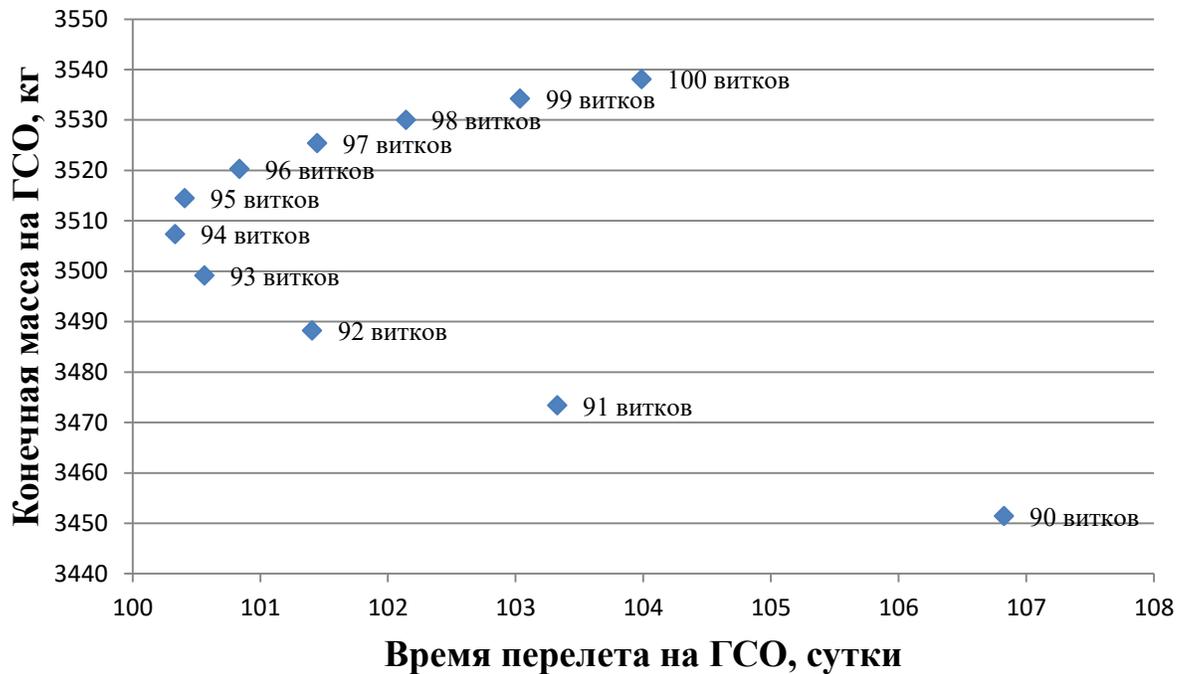


Рисунок 5.2.1 - Зависимость доставляемой массы космического аппарата на геостационарной орбите от длительности выведения при различной угловой дальности перелета

Очевидно, что огибающая представленных на рисунке 5.2.2 будет представлять собой Парето-фронт задачи максимизации доставляемой на ГСО массы КА и минимизации длительности перелета. Эта огибающая позволяет определить оптимальные значения высоты апогея промежуточной орбиты и оптимальное число витков, которые для каждой длительности перелета обеспечивают доставку на ГСО КА максимальной массы. Зависимость оптимального времени перелета, конечной массы КА и числа витков от высоты апогея промежуточной орбиты, определяющая Парето-фронт, представлена в таблице 5.2.1.

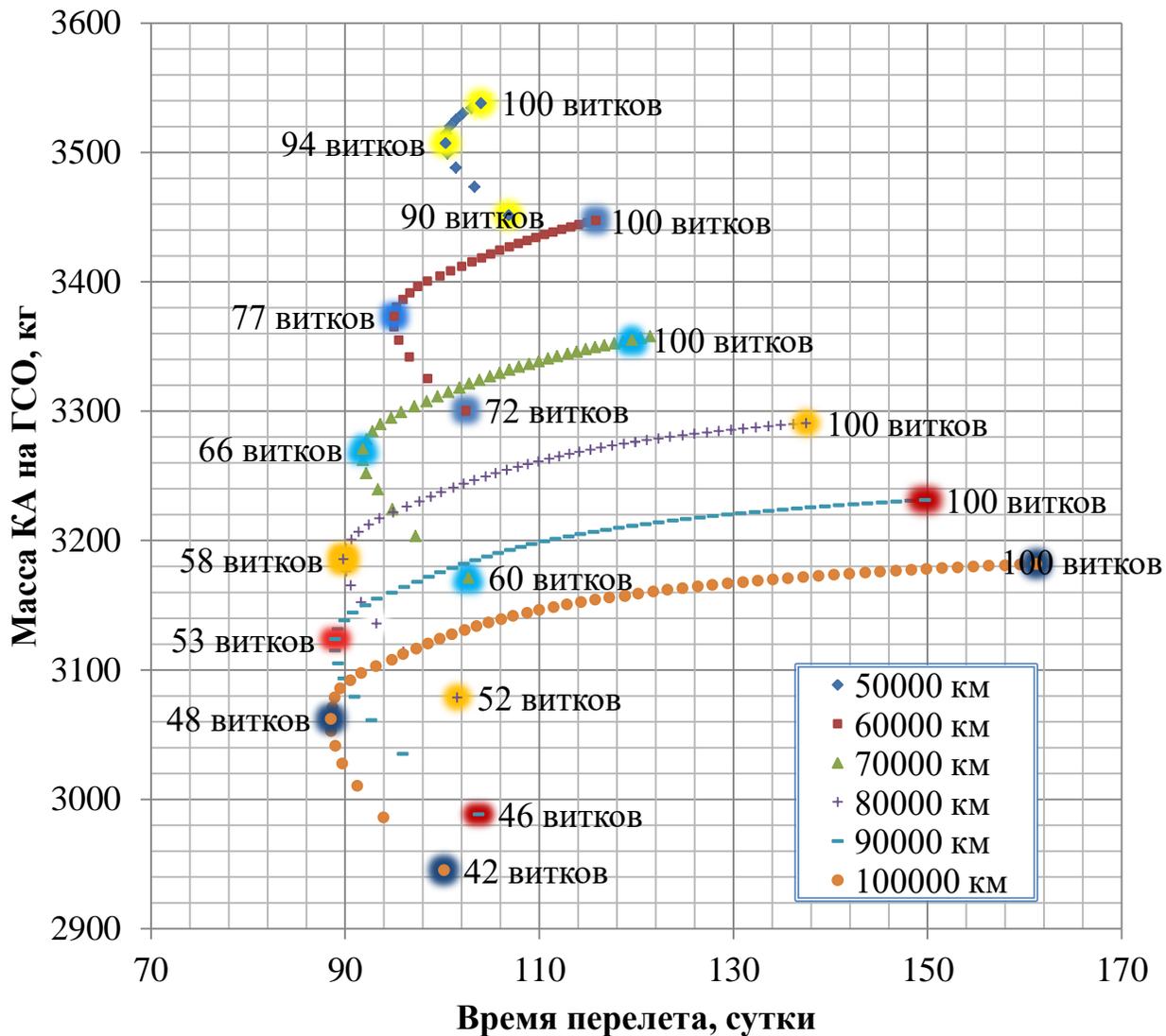


Рисунок 5.2.2 - Зависимости доставляемой на ГСО массы космического аппарата на геостационарной орбите от длительности выведения с различными высотами апогея

Таблица 5.2.1 - Зависимость оптимального времени перелета, конечной массы КА и числа витков от высоты апогея промежуточной орбиты

Высота апогея, км	Время перелета, сутки	Конечная масса, кг	Число витков
50000	100.3332	3507.3098	94
60000	95.0464	3373.4300	77
70000	91.8015	3270.9573	66
80000	89.8080	3185.7008	58
90000	88.9604	3123.8915	53
100000	88.5158	3062.3202	48

Для оценки оптимальных значений высоты апогея, оптимальных значений числа витков и значений конечной массы КА в промежутках между вычисленными длительностями перелета используется интерполяция данных из таблицы 5.2.1. Для этого вводятся функции Гаусса высшего порядка:

$$r_{\alpha}(\Delta t) = \sum_{i=1}^7 a_i \exp\left(-\frac{(\Delta t - b_i)^2}{2c_i^2}\right), \quad (5.2.1)$$

$$N_{rev}(\Delta t) = \sum_{i=1}^6 a_i \exp\left(-\frac{(\Delta t - b_i)^2}{2c_i^2}\right), \quad (5.2.2)$$

$$m(\Delta t) = \sum_{i=1}^5 a_i \exp\left(-\frac{(\Delta t - b_i)^2}{2c_i^2}\right). \quad (5.2.3)$$

Значения входящих в интерполяционные формулы (5.2.1) -(5.2.3) коэффициентов  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  представлены в таблицах 5.2.2–5.2.4 соответственно.

Таблица. 5.2.2 - Значения коэффициентов для интерполяции оптимального радиуса апогея

коэффициент	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$
$a_i$	1.52e+05	848.5	-175.7	6.095e+04	2256	176.4	4.43e+04
$b_i$	85.34	89.78	89.66	80.31	106.1	94.95	106.5
$c_i$	2.186	0.8258	0.887	13.07	4.009	4.196	60.08

Таблица. 5.2.3 - Значения коэффициентов для интерполяции оптимального числа витков

коэффициент	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
$a_i$	83.42	94.23	-21.81	25.14	0.01428	7.028
$b_i$	103.1	95.26	95.24	89.33	93.34	88.55
$c_i$	4.645	5.259	3.292	2.869	0.01916	1.318

Таблица. 5.2.4 - Значения коэффициентов для интерполяции конечной массы КА

коэффициент	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
$a_i$	3579	533.3	165.9	37.32	158.1
$b_i$	105.1	89.62	88.24	88.6	95.27
$c_i$	25.37	4.879	2.539	1.076	4.61

Зависимости оптимальных значений высоты апогея, оптимальных значений число витков и значений конечной массы КА от продолжительности перелета на интервале от 88,516 сутки до 100,333 суток, вычисленные по формулам (5.2.1) - (5.2.3), представлены на рисунках 5.2.3–5.2.5. Маркерами на этих рисунках представлены расчетные данные, с использованием которых вычислялись интерполянты.

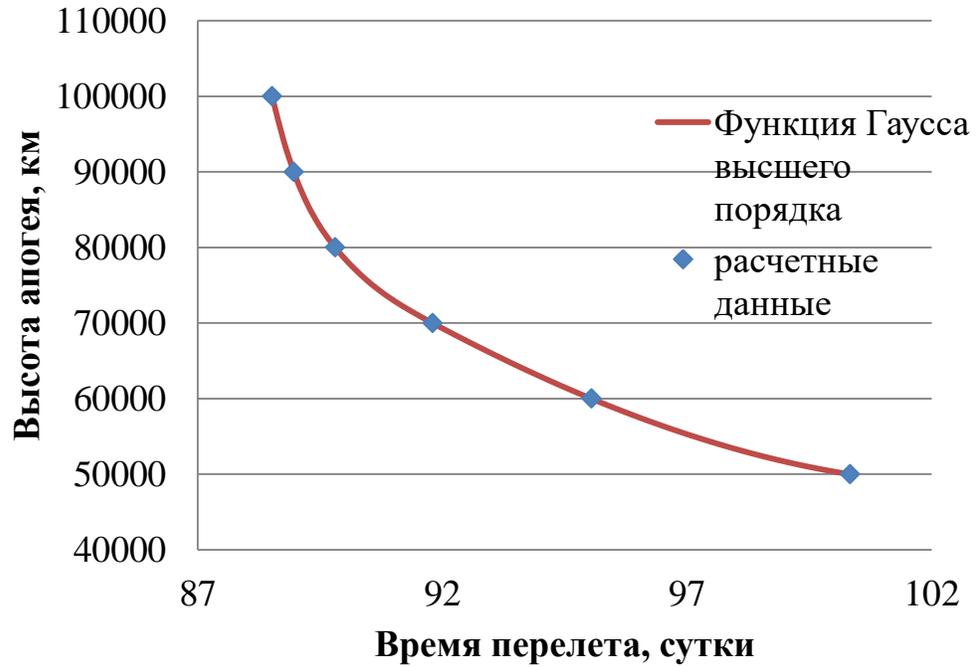


Рисунок 5.2.3 - Зависимость оптимального значения высоты апогея ПО от длительности выведения на ГСО

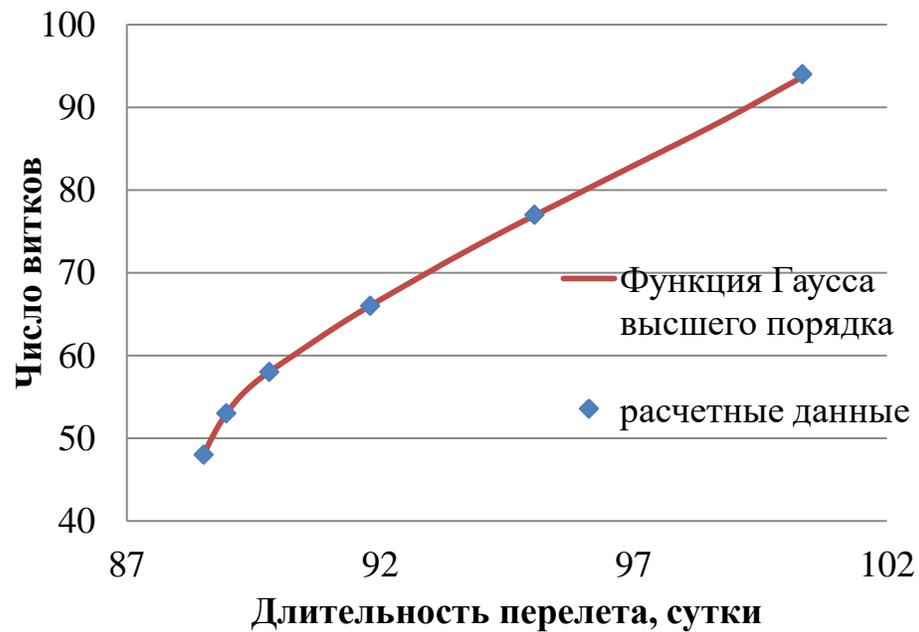


Рисунок 5.2.4 - Зависимость оптимального числа витков от длительности выведения на ГСО

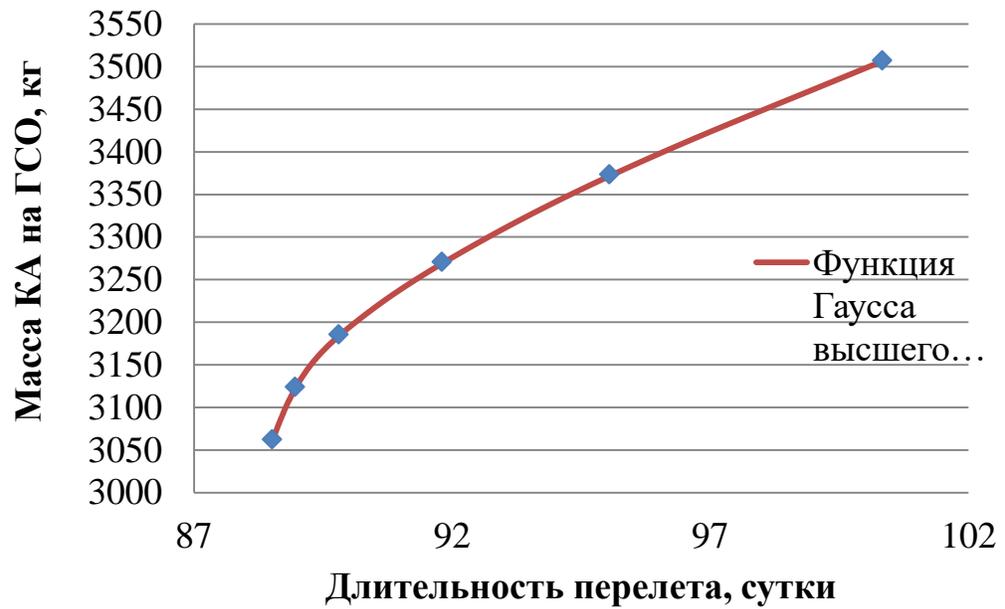


Рисунок 5.2.5 - Зависимость доставляемой массы космического аппарата на геостационарной орбите от длительности перелета

На рисунках 5.2.6 и 5.2.7 представлены проекции на координатные плоскости системы координат J2000 оптимальных траекторий перелета с ПО на ГСО для высоты апогея ПО в диапазоне 50000–100000 км с оптимальным числом витков.

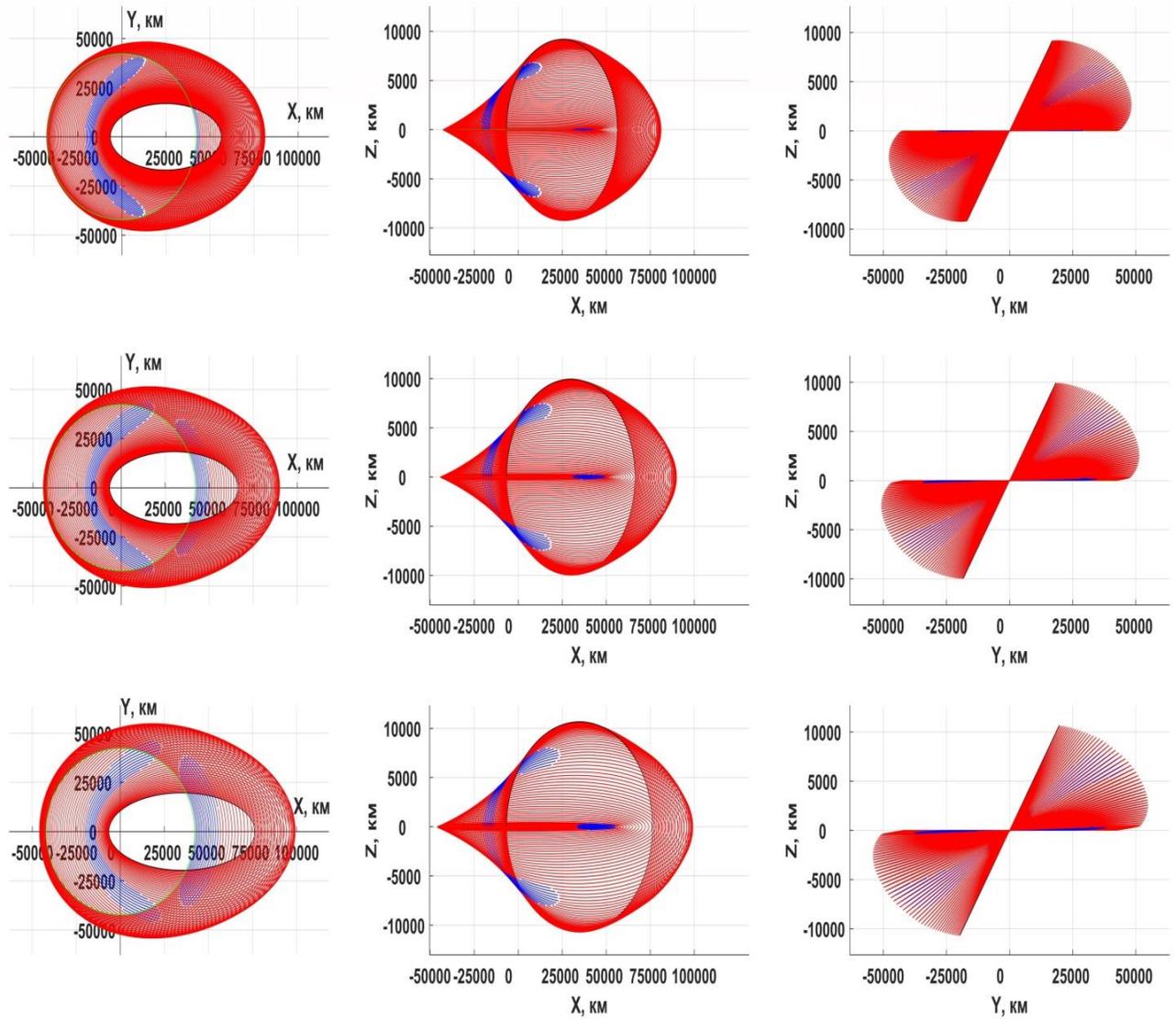


Рисунок 5.2.6 - Оптимальные траектории.

Верхний ряд – 94 витковая траектории с начальной высотой апогея 50000 км,  
 средний ряд – 77 витковая траектории с начальной высотой апогея 60000 км,  
 нижний ряд – 66 витковая траекторий с начальной высотой апогея 70000 км.

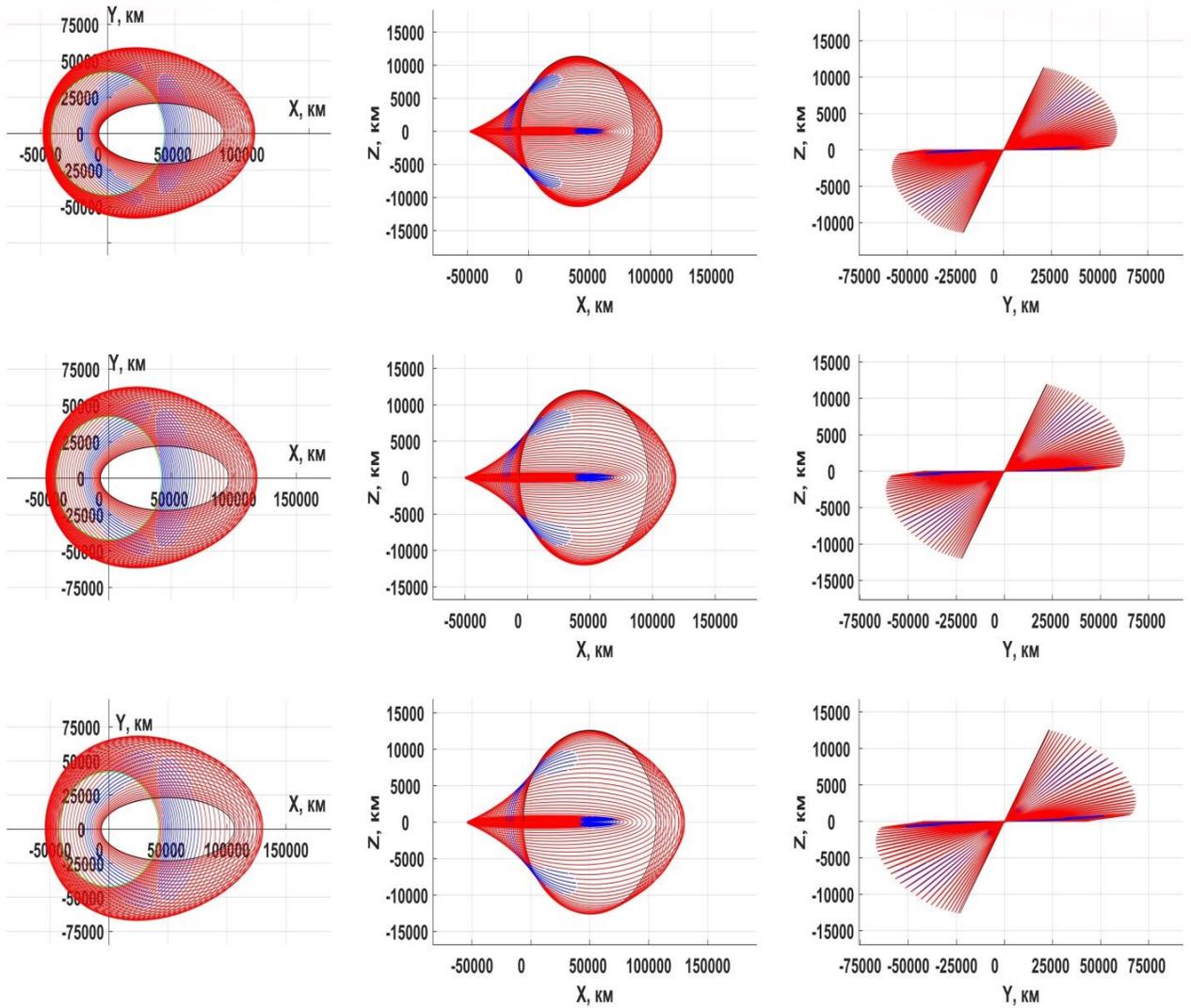


Рисунок 5.2.7 - Оптимальные траектории.

Верхний ряд – 58 витковая траектории с начальной высотой апогея 80000 км,  
 средний ряд – 53 витковая траектории с начальной высотой апогея 90000 км,  
 нижний ряд – 48 витковая траектории с начальной высотой апогея 100000 км.

### 5.3 Заключение по разделу

В разделе рассмотрена задача оптимизации комбинированной схемы выведения КА с ЭРДУ на ГСО при использовании ПО (орбиты отделения КА, с которой начинается участок перелета на ГСО с помощью ЭРДУ) с фиксированными

значениями высоты перигея и наклона. Решена задача вычисления оптимальной высоты апогея ПО и оптимальной угловой дальности перелета КА с ЭРДУ, при которых на ГСО за заданное время доставляется КА максимальной массы. Получены аппроксимационные зависимости, позволяющие проводить быструю оценку основных параметров комбинированной схемы КА с ЭРДУ на ГСО при использовании РН Falcon-9 для выведения КА на ПО.

## **6 ОПТИМИЗАЦИЯ СХЕМЫ ВЫВЕДЕНИЯ ГЕОСТАЦИОНАРНОГО КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ЭЛЕКТРОРАКЕТНОЙ ДВИГАТЕЛЬНОЙ УСТАНОВКОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РАКЕТЫ-НОСИТЕЛЯ СРЕДНЕГО КЛАССА**

Рассматривается схема выведения КА на ГСО, использующая комбинацию большой и малой тяги. В рамках этой схемы РН среднего класса выводит орбитальный блок, состоящий из РБ и КА на опорную орбиту с высотой 200 км и, после отделения от последней ступени РН, РБ выводит КА на эллиптическую ПО. После отделения от РБ КА осуществляет перелет на ГСО с использованием ЭРДУ. Основной задачей оптимизации рассматриваемой комбинированной схемы выведения является вычисление оптимальных параметров промежуточной орбиты, обеспечивающих за заданное время  $\Delta t^*$  доставку максимальной массы космического аппарата на ГСО. Основное отличие рассматриваемой схемы выведения от схемы выведения, рассмотренной в предыдущей главе, является отсутствие ограничений на параметры ПО. Однако, из известных свойств перелетов в центральном ньютоновском гравитационном поле, следует, что линия апсид, для минимизации затрат характеристической скорости, должна в течение всего перелета с ЭРДУ оставаться вблизи плоскости конечной орбиты (ГСО), то есть вблизи плоскости экватора [42]. Поэтому, при возможности выбора, целесообразно использовать значение аргумента перигея ПО равным 0 или 180°. Из соображений симметрии траекторий в центральном ньютоновском гравитационном поле, очевидно, что значение ДВУ не влияет на затраты характеристической скорости перелета, поэтому можно использовать произвольное его значение (далее в работе принимается, что ДВУ ПО равна 0). На многовитковых перелетах начальное значение истинной долготы слабо влияет на затраты характеристической скорости, причем это влияние быстро уменьшается с увеличением числа витков. Поэтому начальное значение истинной долготы также можно установить произвольным (например, 180°). Таким

образом, остаются три существенных параметра ПО, которые сильно влияют на характеристическую скорость перелета. Это радиусы перигея и апогея, а также наклонение ПО.

При заданных параметрах ПО и заданных средствах выведения (РН и РБ), можно вычислить максимальную массу КА, который доставляется на эту ПО. Принимая эту массу за начальную массу КА, при известных параметрах ЭРДУ, в результате оптимизации перелета с ПО на ГСО, можно вычислить конечную (доставляемую на ГСО) массу КА, массу топлива ЭРДУ и минимальную длительность перелета. Все эти параметры, как и начальная масса КА на ПО, оказываются функциями радиусов перигея и апогея и наклонения ПО. Таким образом, ставится задача вычисления оптимальных радиусов перигея и апогея и наклонения ПО, которые обеспечивают доставку на ГСО за заданное время КА максимальной массы.

Такая задача рассматривалась во многих работах, в частности в [19, 39, 47, 49, 52, 73, 93, 105]. В настоящей диссертации для решения задачи используется подход, близкий к подходу, использованному в работе [39, 73], однако, в отличие от этой работы, здесь задача оптимизации комбинированной схемы выведения сводится к задаче условной минимизации, которая решается методом неопределенных множителей Лагранжа, а для интерполяции значений начальной массы КА и затрат характеристической скорости КА с ЭРДУ на трехмерной сетке значений оптимизируемых параметров ПО используется гладкая интерполяция трехмерными B-сплайнами. Такой подход позволил снизить методические погрешности, связанные с использованием метода перебора и трехмерной линейной интерполяции в работах [39, 73].

В работе [49] показано, что для максимизации массы КА на ГСО при использовании рассматриваемой комбинированной схемы выведения нецелесообразно использовать траектории перелета между ПО и ГСО с пассивными

участками, так как оптимизация параметров ПО при заданной длительности выведения приводит к большему приращению конечной массы КА, чем минимизация затрат топлива ЭРДУ за счет роста длительности пассивных участков. Поэтому в рассматриваемой задаче целесообразно вместо задачи минимизации затрат топлива рассматривать задачу минимизации времени перелета с ПО на ГСО.

В данной работе, как и в [39, 73], используются асимптотические решения задачи минимизации времени перелета между ПО и ГСО, то есть решения осредненной задачи минимизации времени перелета. В рассматриваемой задаче, при достаточно большом (10 и более) числе витков, характеристическая скорость межорбитального перелета почти не зависит от величин начального реактивного ускорения и удельного импульса ЭРДУ. Это позволяет использовать полученные асимптотические оценки характеристической скорости для расчета конечной массы КА и затрат топлива ЭРДУ для различных значений начальной массы КА, тяги и удельного импульса ЭРДУ. Для решения задачи использовались таблицы асимптотической характеристической скорости перелета с ПО на ГСО на трехмерной сетке параметров ПО из работ [39, 73].

Рассматриваемая комбинированная схема выведения КА с ЭРДУ на ГСО представлена на рисунке 6.1

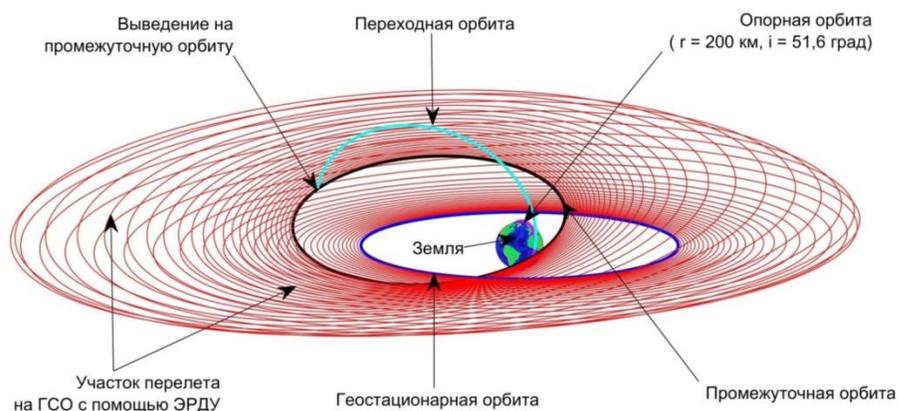


Рисунок 6.1- Типичная схема выведения КА на ГСО с использованием комбинации большой и малой тяги

Для оптимизации комбинированной схемы выведения КА с ЭРДУ на ГСО использованы следующие исходные данные:

- 1) в качестве опорной орбиты используется круговая орбита высотой 200 км с наклоном  $51.6^\circ$ ;
- 2) масса орбитального блока в составе РБ и КА на опорной орбите равна 8200 кг;
- 3) конечная масса РБ равна 930 кг;
- 4) масса адаптера КА равна 20 кг;
- 5) максимальная масса рабочего топлива в РБ равна 7250 кг;
- 6) тяга маршевой двигательной установки равна 2000 кгс, удельный импульс равен 332 с;
- 7) ЭРДУ КА имеет тягу 0.29 Н и удельный импульс 1750 с.

### **6.1 Выведение космического аппарата разгонным блоком на эллиптическую промежуточную орбиту**

На этапе выведения КА с помощью РБ на эллиптическую ПО используется двухимпульсная схема перелета. Параметры опорной орбиты фиксированы, а основными выбираемыми параметрами, определяющими промежуточную орбиту, являются радиус перигея  $r_p$ , радиус апогея  $r_a$  и наклонение  $i$ . Расчет траектории перелета между опорной и ПО, при заданных параметрах ПО, производится в импульсном приближении с учетом потерь скорости. В процессе вычисления двухимпульсной траектории перелета оптимизируется изменение наклона в первом импульсе. После вычисления суммарных затрат характеристической скорости РБ, по формуле Циолковского вычисляется конечная масса орбитального блока (РБ и КА). Начальная масса КА после отделения от РБ на ПО вычисляется как разность конечной массы орбитального блока и конечной массы РБ. На рисунке 6.1.1

показана схема выведения КА с помощью РБ с опорной орбиты на эллиптическую ПО.

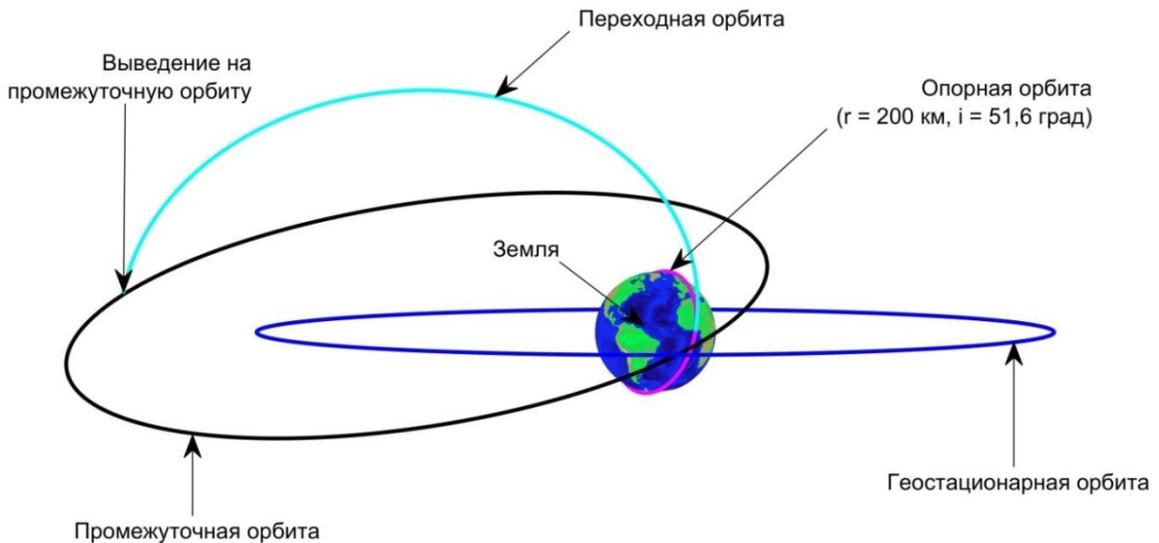


Рисунок 6.1.1 - Схема выведения КА с помощью РБ с опорной орбиты на эллиптическую ПО

Рассматривается трехмерная сетка  $40 \times 40 \times 19$  значений радиуса перигея, радиуса апогея и наклона промежуточной орбиты [39], причем во всех узлах этой сетки вычисляется масса КА после его отделения от РБ на промежуточной орбите. Для оценки начальной массы КА в промежутках между узлами рассматриваемой сетки используется трехмерная интерполяция В-сплайнами. В виде начальных значений для радиусов перигея и апогея применяется значение  $r_0 = 6571 \text{ км}$ ,  $j$ -й узел

сетки имеет значение  $r_j = \exp \left[ \ln r_0 + \frac{j}{20} \ln \frac{r_{ГСО}}{r_0} \right]$ , где  $j$  изменяется от 0 до 39,

$r_{ГСО} = 42164 \text{ км}$ . Рассматривается диапазон начального наклона – от 0 до 90 градусов с шагом 5 градусов. При этом, для каждого значения наклона определена сетка значений радиусов перигея и апогея размерностью  $40 \times 40$  с минимальным значением радиусов перигея и апогея 6571 км до максимального

значения 246539,565 км. На рисунке 6.1.2 приведены начальные массы КА на ПО, которые вычислены во всех узлах сетки размерностью  $40 \times 40 \times 19$ . Для каждой пары значений радиусов перигея и апогея на рисунке 6.1.2 представлено 19 точек, соответствующих различным значениям наклона промежуточной орбиты.

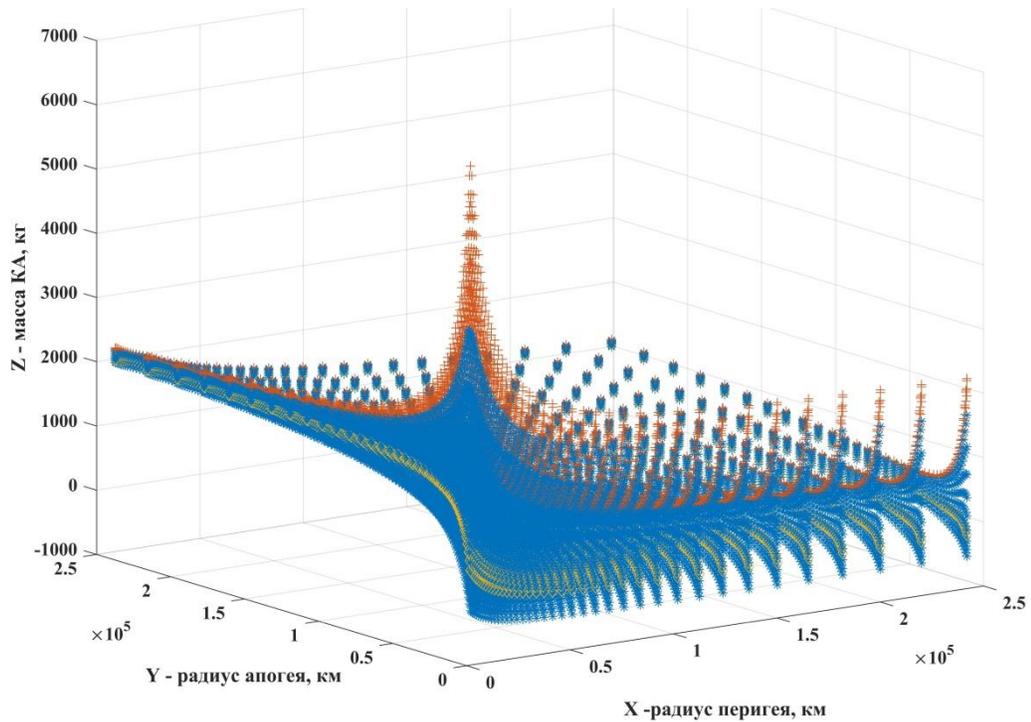


Рисунок 6.1.2 - Начальные массы КА на промежуточных орбитах

\* – при наклоне  $0-40$  град; + – при наклоне  $41-60$  град;  $\diamond$  – при наклоне  $61-90$  град

## 6.2 Выведение КА с промежуточной орбиты на ГСО с использованием ЭРДУ

На этапе выведения КА с промежуточной орбиты на ГСО с использованием ЭРДУ рассматривается осредненная задача минимизации времени многовиткового межорбитального перелета и используются асимптотические значения характеристической скорости перелета с малой тягой, полученные в работах [39, 73]. В работе [73] были приведены 30400 значений асимптотической характеристической скорости перелет КА с ЭРДУ с ПО на ГСО  $V_x$ , которые определены в узлах той же

трехмерной сетки параметров ПО, что и в предыдущем разделе. для перелета с промежуточных орбит на ГСО. Типичная траектория перелета КА с ЭРДУ с ПО на ГСО за минимальное время представлена на рисунке 6.2.1.

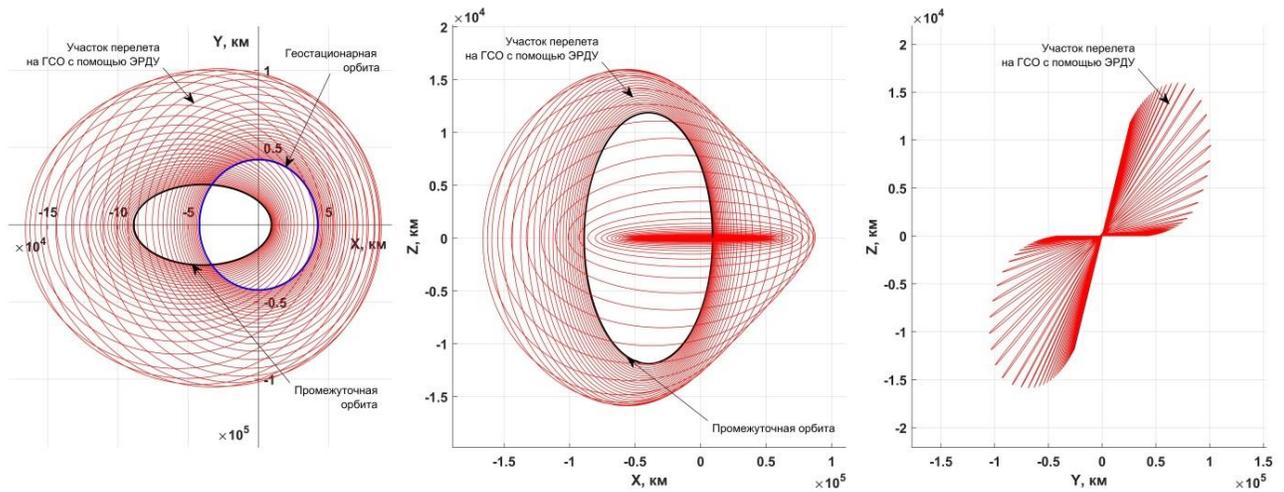


Рисунок 6.2.1 Проекция на координатные плоскости типичной траектории перелета КА с ЭРДУ с ПО на ГСО за минимальное время

Как и для начальной массы КА, используется трехмерная интерполяция В-сплайнами для аппроксимации значений характеристической скорости между узлами сетки. На рисунке 6.2.2 показаны асимптотические значения характеристической скорости перелета с малой тягой за минимальное время с ПО на ГСО, вычисленные на данной сетке.

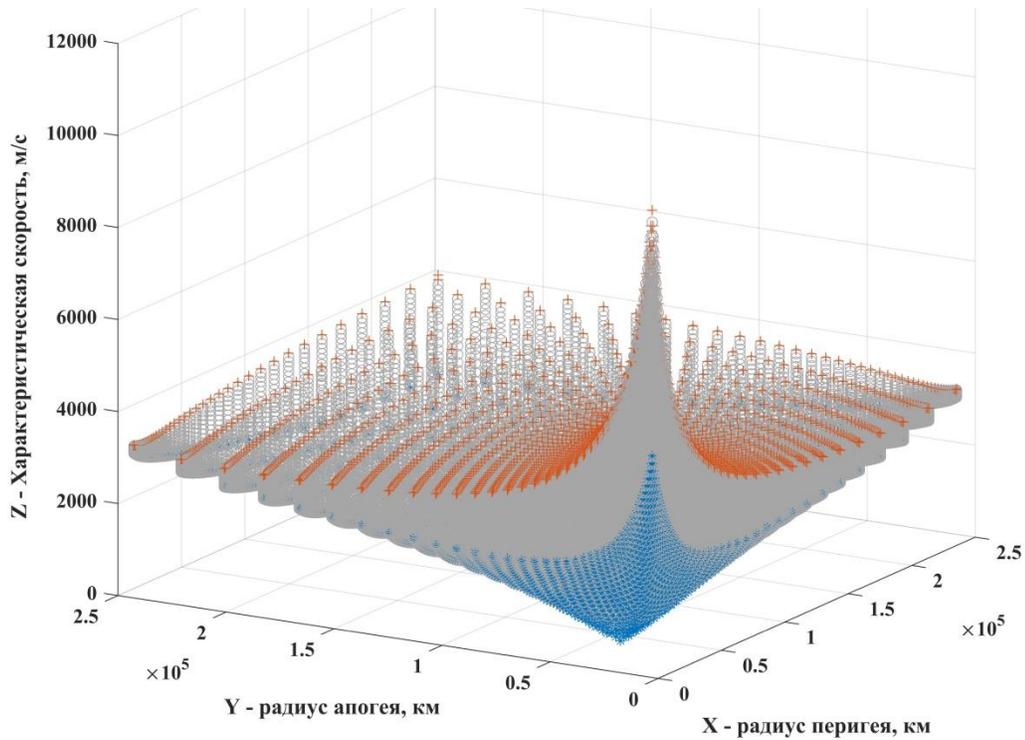


Рисунок 6.2.2 - Асимптотические значения характеристической скорости для перелета с малой тягой с промежуточных орбит на ГСО

\*, +, ○ – соответственно при наклонении 0; 90 и ○ – при 1–89 град

При известном значении массы КА на промежуточной орбите  $m_{КА}^{ПО}$  и значении характеристической скорости ЭРДУ, необходимой для перелета с промежуточной орбиты на ГСО, вычисляется конечная масса КА на ГСО  $m_{КА}^{ГСО}$  и время перелета на ГСО  $\Delta t$ :

$$m_{КА}^{ГСО}(r_{\pi}, r_{\alpha}, i) = m_{КА}^{ПО}(r_{\pi}, r_{\alpha}, i) \exp[-V_x(r_{\pi}, r_{\alpha}, i) / (I \cdot g_0)], \quad (6.2.1)$$

$$\Delta t(r_{\pi}, r_{\alpha}, i) = [m_{КА}^{ПО}(r_{\pi}, r_{\alpha}, i) - m_{КА}^{ГСО}(r_{\pi}, r_{\alpha}, i)] / (P / (I \cdot g_0)), \quad (6.2.2)$$

где  $I = 1750 \text{ с}$  – удельный импульс ЭРДУ;  $P = 290 \text{ мН}$  – тяга ЭРДУ и  $g_0 = 9,80665 \text{ м/с}^2$ .

### 6.3 Задача условной минимизации

Для определения условного экстремума функции при наличии ограничений используется метод неопределенных множителей Лагранжа. В данной работе для оценки начальной массы КА и значений характеристической скорости ЭРДУ в промежутках между узлами рассматриваемой сетки, необходимой для расчета перелета с промежуточной орбиты на ГСО, используется трехмерная интерполяция В-сплайнами. С применением В-сплайнов реализуется гладкая аппроксимация зависимости  $\Delta t$  от параметров промежуточной орбиты и вычисляются необходимые первые и вторые производные от  $\Delta t$  по этим параметрам. Для оптимизации рассматриваемой комбинированной схемы выведения необходимо вычисление оптимальных параметров промежуточной орбиты, обеспечивающих за заданное время  $\Delta t^*$  доставку на ГСО КА максимальной массы. Рассматриваемая задача приводится к задаче условной минимизации:

$$\begin{aligned} J^* &= -m_f = -m_0 e^{-V_x/I \cdot g_0} \rightarrow \min, \\ m_0 - m_f - m^* \Delta t &= 0, \\ m^* &= P / (I \cdot g_0). \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

При использовании метода множителей Лагранжа, расширенный функционал этой задачи имеет вид:

$$J = -m_f + \lambda (m_0 - m_f - m^* \Delta t), \tag{6.3.2}$$

где  $\lambda$  - неопределённый множитель Лагранжа. Рассматриваемая задача сводится к решению следующей системы нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial m_f}{\partial r_\pi} + \lambda \left( \frac{\partial m_0}{\partial r_\pi} - \frac{\partial m_f}{\partial r_\pi} \right) &= 0, \\
-\frac{\partial m_f}{\partial r_\alpha} + \lambda \left( \frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial m_f}{\partial r_\alpha} \right) &= 0, \\
-\frac{\partial m_f}{\partial i} + \lambda \left( \frac{\partial m_0}{\partial i} - \frac{\partial m_f}{\partial i} \right) &= 0, \\
m_0 - m_f - m \cdot \Delta t &= 0.
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

Значение  $\lambda$  можно получить из любого из первых трех уравнений (6.3.3), например:

$$\lambda = \frac{\frac{\partial m_f}{\partial r_\alpha}}{\left( \frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial m_f}{\partial r_\alpha} \right)} \tag{6.3.4}$$

и подставить его в оставшиеся уравнения:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial m_f}{\partial r_\pi} + \lambda \left( \frac{\partial m_0}{\partial r_\pi} - \frac{\partial m_f}{\partial r_\pi} \right) &= 0, \\
-\frac{\partial m_f}{\partial i} + \lambda \left( \frac{\partial m_0}{\partial i} - \frac{\partial m_f}{\partial i} \right) &= 0, \\
m_0 - m_f - m \cdot \Delta t &= 0.
\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

Подставляя выражение (6.3.4) в (6.3.5), получаем следующую систему из трех нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial m_f}{\partial r_\pi} + \frac{\frac{\partial m_f}{\partial r_\alpha}}{\left(\frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial m_f}{\partial r_\alpha}\right)} \left(\frac{\partial m_0}{\partial r_\pi} - \frac{\partial m_f}{\partial r_\pi}\right) &= 0, \\
-\frac{\partial m_f}{\partial i} + \frac{\frac{\partial m_f}{\partial r_\alpha}}{\left(\frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial m_f}{\partial r_\alpha}\right)} \left(\frac{\partial m_0}{\partial i} - \frac{\partial m_f}{\partial i}\right) &= 0, \\
m_0 - m_f - m^* \Delta t &= 0.
\end{aligned} \tag{6.3.6}$$

Из системы (6.3.6), после несложных преобразований, можно получить следующую систему из трех нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} \frac{\partial V_x}{\partial r_\pi} - \frac{\partial m_0}{\partial r_\pi} \frac{\partial V_x}{\partial r_\alpha} &= 0 \\
\frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} \frac{\partial V_x}{\partial i} - \frac{\partial m_0}{\partial i} \frac{\partial V_x}{\partial r_\alpha} &= 0 \\
m_0 - m_f - m^* \Delta t &= 0
\end{aligned} \tag{6.3.7}$$

Полученную систему из трех нелинейных уравнений можно решить методом ПП. Необходимые первые и вторые производные от  $m_0$  и  $V_x$  по параметрам промежуточной орбиты легко вычисляются ввиду использования В-сплайнов для их аппроксимации.

#### 6.4 Решение системы нелинейных уравнений методом продолжения по параметру

В данной работе для получения решения системы нелинейных уравнений используется метод ПП и в результате решения получают значения радиуса перигея  $r_\pi$ , радиуса апогея  $r_\alpha$ , наклона  $i$ .

В работах [24,26-33,36-42] для вычисления частных производных используется МКШ. В данной работе, в отличие от [24,26-33,36-42], используются следующие аналитические частные производные от вектора невязок  $\mathbf{f}$  по заданным начальным значениями  $\mathbf{z} = (r_\pi, r_\alpha, i)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial z_1} &= -\frac{\partial^2 V_x}{\partial r_\pi^2} \frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial V_x}{\partial r_\pi} \frac{\partial^2 m_0}{\partial r_\alpha \partial r_\pi} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial r_\alpha \partial r_\pi} \frac{\partial m_0}{\partial r_\pi} + \frac{\partial V_x}{\partial r_\alpha} \frac{\partial^2 m_0}{\partial r_\pi^2}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_2} &= -\frac{\partial^2 V_x}{\partial r_\alpha \partial r_\pi} \frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial V_x}{\partial r_\pi} \frac{\partial^2 m_0}{\partial r_\alpha^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial r_\alpha^2} \frac{\partial m_0}{\partial r_\pi} + \frac{\partial V_x}{\partial r_\alpha} \frac{\partial^2 m_0}{\partial r_\alpha \partial r_\pi}, \\ \frac{\partial f_1}{\partial z_3} &= -\frac{\partial^2 V_x}{\partial r_\pi \partial i} \frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial V_x}{\partial r_\pi} \frac{\partial^2 m_0}{\partial r_\alpha \partial i} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial r_\alpha \partial i} \frac{\partial m_0}{\partial r_\pi} + \frac{\partial V_x}{\partial r_\alpha} \frac{\partial^2 m_0}{\partial r_\pi \partial i},\end{aligned}\tag{6.4.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_2}{\partial z_1} &= -\frac{\partial^2 V_x}{\partial r_\pi \partial i} \frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial i} \frac{\partial^2 m_0}{\partial r_\alpha \partial r_\pi} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial r_\alpha \partial r_\pi} \frac{\partial m_0}{\partial i} + \frac{\partial V}{\partial r_\alpha} \frac{\partial^2 m_0}{\partial r_\pi \partial i}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_2} &= -\frac{\partial^2 V_x}{\partial r_\alpha \partial i} \frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial i} \frac{\partial^2 m_0}{\partial r_\alpha^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial r_\alpha^2} \frac{\partial m_0}{\partial i} + \frac{\partial V}{\partial r_\alpha} \frac{\partial^2 m_0}{\partial r_\alpha \partial i}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial z_3} &= -\frac{\partial^2 V_x}{\partial i^2} \frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial V}{\partial i} \frac{\partial^2 m_0}{\partial r_\alpha \partial i} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial r_\alpha \partial i} \frac{\partial m_0}{\partial i} + \frac{\partial V}{\partial r_\alpha} \frac{\partial^2 m_0}{\partial i^2},\end{aligned}\tag{6.4.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial z_1} &= \frac{\partial m_0}{\partial r_\pi} - \frac{\partial m_f}{\partial r_\pi}, \\ \frac{\partial f_3}{\partial z_2} &= \frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial m_f}{\partial r_\alpha}, \\ \frac{\partial f_3}{\partial z_3} &= \frac{\partial m_0}{\partial i} - \frac{\partial m_f}{\partial i}.\end{aligned}\tag{6.4.3}$$

## 6.5 Численные результаты

На рисунках 6.5.1 и 6.5.2 показаны зависимости оптимальных параметров промежуточной орбиты от длительности выведения КА с ПО на ГСО для рассматриваемой комбинированной схемы выведения.

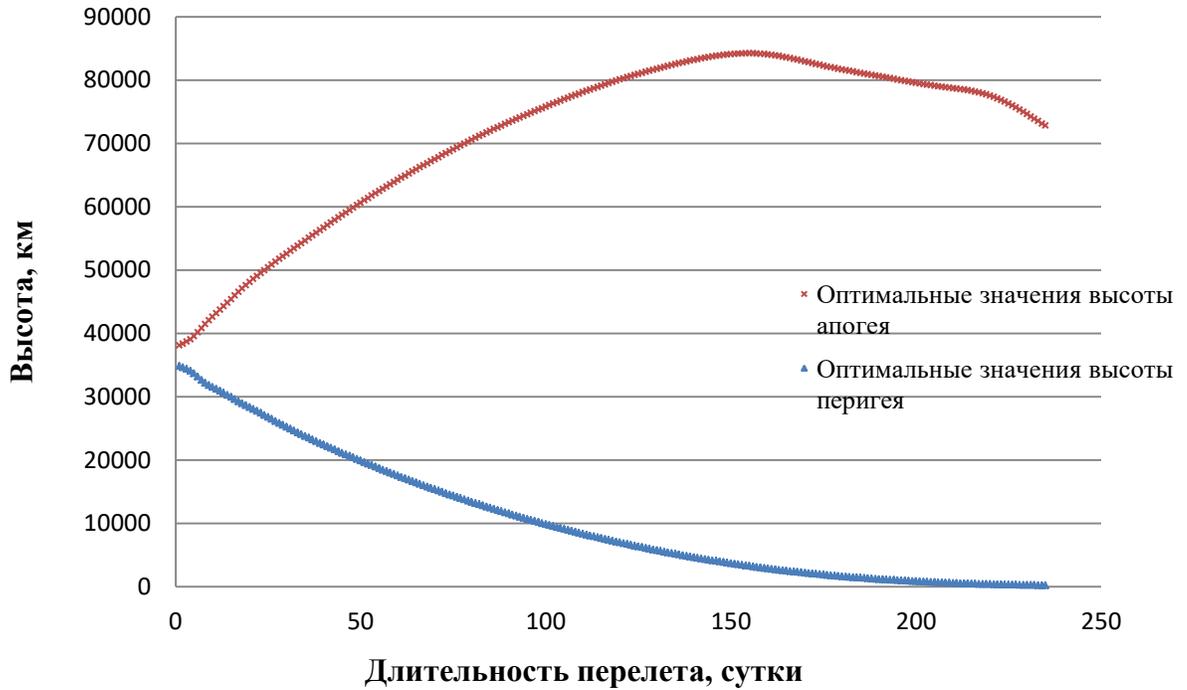


Рисунок 6.5.1 - Зависимость оптимальных значений высоты перигея и апогея промежуточной орбиты от длительности выведения КА на ГСО

С увеличением длительности перелета наклонение промежуточной орбиты монотонно увеличивается, высота перигея уменьшается, а зависимость оптимальной высоты апогея от длительности перелета имеет максимум.

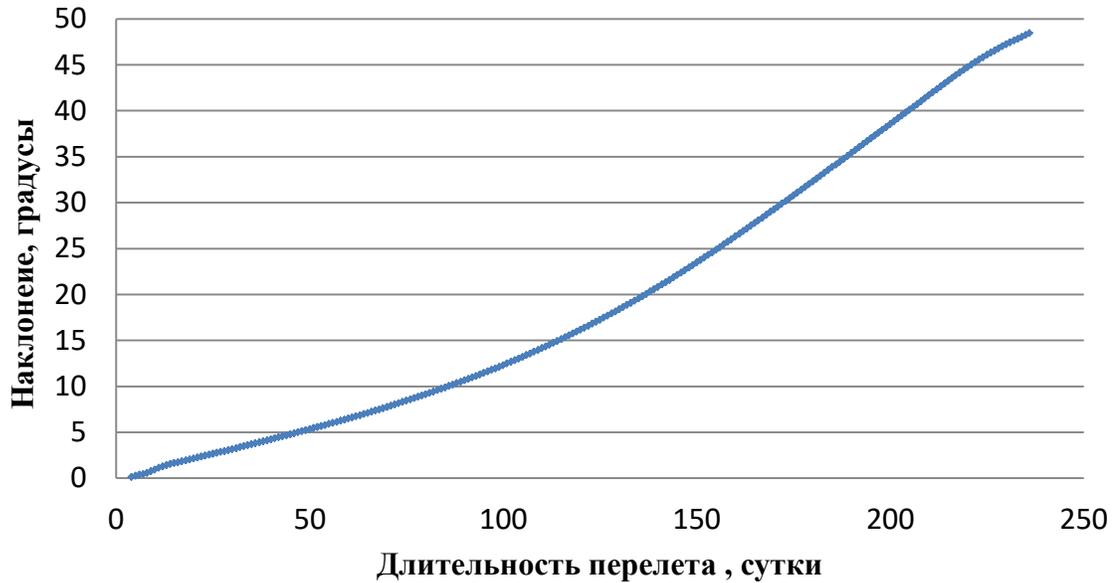


Рисунок 6.5.2 - Зависимость оптимального наклонения промежуточной орбиты от длительности выведения КА на ГСО

На рисунке 6.5.3 показана зависимость массы КА на ГСО от длительности выведения КА с промежуточной орбиты на ГСО. Видно, что увеличение доставляемой на ГСО массы КА происходит монотонно с увеличением длительности выведения. Конечная масса КА на ГСО при короткой продолжительности полета составляет 872.0112 кг, а при продолжительности полета 235 дней – 2045.733 кг. На рисунке 6.5.4 показана зависимость необходимого значения характеристической скорости ЭРДУ на ГСО от длительности выведения. Из этого рисунка следует, что значение характеристической скорости растет при увеличении длительности довыведения КА на ГСО. В таблице 6.5.1 – приведена зависимость от длительности выведения КА на ГСО оптимальных значений радиусов перигея, апогея, наклонения промежуточной орбиты, значений характеристической скорости ЭРДУ и массы КА, доставляемой на целевую орбиту (ГСО).

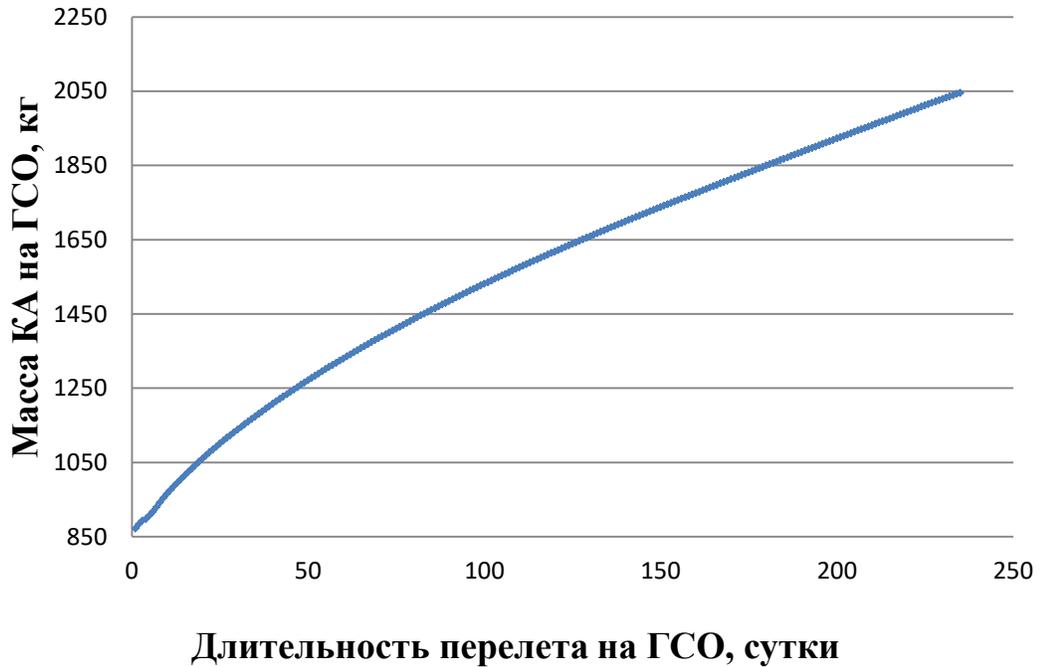


Рисунок 6.5.3 - Зависимость массы КА на ГСО от длительности выведения по оптимальной комбинированной схеме

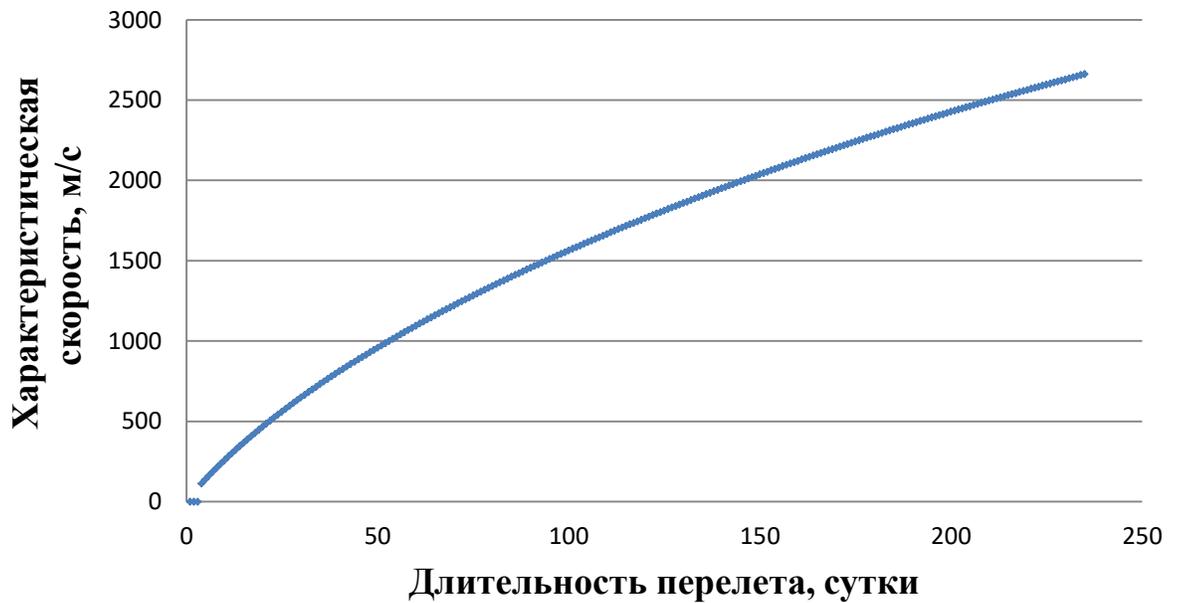


Рисунок 6.5.4 - Зависимость необходимого значения характеристической скорости ЭРДУ на ГСО от длительности выведения по оптимальной комбинированной схеме

Таблица 6.5.1 – Зависимость от длительности выведения КА на ГСО оптимальных значений радиусов перигея, апогея, наклона промежуточной орбиты, значения характеристической скорости ЭРДУ, и массы КА на ГСО.

$\Delta t$ , сутки	$r_{\pi}$ , км	$r_{\alpha}$ , км	$i$ , градус	$V_x$ , м/с	$m_{КА}^{ПО}$ , кг	$m_{КА}^{ГСО}$ , кг
4	40429.75	45056.12	0.131046	111.3116	903.3145	897.4745
5	40026.81	45447	0.27165	137.6179	914.0014	906.7014
6	39534.05	45946.57	0.363883	163.0958	926.152	917.392
7	39008.92	46557.72	0.44383	187.6553	939.7691	929.5491
8	38555.24	47211.19	0.573534	211.4393	953.8689	942.1889
9	38194.81	47838.86	0.751155	234.7128	967.3505	954.2105
10	37887.39	48429.29	0.941808	257.6073	979.9617	965.3616
11	37596.7	48993.44	1.123475	280.1448	991.8858	975.8258
12	37300.68	49543.54	1.286064	302.3133	1003.357	985.8367
13	36988.36	50089.77	1.425611	324.0949	1014.559	995.5787
14	36658.36	50640.25	1.542528	345.4779	1025.613	1005.173
15	36317.75	51199.86	1.641819	366.4635	1036.575	1014.675
16	35978.4	51768.14	1.732427	387.071	1047.441	1024.081
17	35650.28	52338.58	1.823834	407.3351	1058.163	1033.343
18	35336.03	52901.41	1.921771	427.2946	1068.691	1042.411
19	35031.36	53448.02	2.026847	446.9813	1078.995	1051.255
20	34729.49	53973.82	2.136389	466.415	1089.074	1059.874
21	34425	54478.56	2.246891	485.6053	1098.949	1068.289
22	34115.29	54965.07	2.355549	504.5556	1108.649	1076.529
23	33800.35	55437.44	2.460854	523.2676	1118.201	1084.621
24	33481.84	55899.58	2.562617	541.7435	1127.628	1092.588
25	33162.19	56354.33	2.661701	559.9878	1136.945	1100.445
26	32843.82	56803.24	2.759552	578.0072	1146.159	1108.199
27	32528.63	57246.79	2.857674	595.8097	1155.274	1115.854
28	32217.73	57684.87	2.957197	613.4037	1164.291	1123.411
29	31911.5	58117.33	3.058676	630.7973	1173.213	1130.873
30	31609.85	58544.26	3.162119	647.9974	1182.043	1138.242
31	31312.44	58966.16	3.267184	665.0096	1190.783	1145.523
32	31018.95	59383.8	3.373391	681.839	1199.44	1152.72
33	30729.14	59798.07	3.480299	698.4897	1208.019	1159.839
34	30442.89	60209.84	3.587591	714.9658	1216.523	1166.883
35	30160.16	60619.79	3.695095	731.2716	1224.958	1173.858
36	29880.93	61028.41	3.802765	747.411	1233.325	1180.765

37	29605.19	61435.99	3.910633	763.3884	1241.627	1187.607
38	29332.9	61842.63	4.018763	779.208	1249.868	1194.388
39	29063.95	62248.36	4.127219	794.8741	1258.047	1201.107
40	28798.23	62653.11	4.236042	810.3908	1266.166	1207.766
41	28535.57	63056.79	4.345248	825.7623	1274.228	1214.368
42	28275.8	63459.28	4.454832	840.9923	1282.232	1220.912
43	28018.74	63860.44	4.564777	856.0846	1290.181	1227.401
44	27764.19	64260.11	4.675059	871.0429	1298.075	1233.834
45	27511.96	64658.08	4.785661	885.8706	1305.914	1240.214
46	27261.87	65054.11	4.896569	900.5713	1313.701	1246.541
47	27013.75	65447.92	5.00778	915.1481	1321.436	1252.816
48	26767.41	65839.23	5.119298	929.6042	1329.12	1259.04
49	26522.7	66227.69	5.23114	943.9428	1336.753	1265.213
50	26279.5	66613.02	5.343328	958.1668	1344.336	1271.336
51	26037.71	66994.91	5.455899	972.2792	1351.871	1277.411
52	25797.24	67373.1	5.568897	986.2826	1359.357	1283.437
53	25558.07	67747.4	5.682378	1000.18	1366.795	1289.415
54	25320.2	68117.66	5.796407	1013.973	1374.187	1295.347
55	25083.65	68483.79	5.911058	1027.665	1381.532	1301.232
56	24848.5	68845.78	6.02641	1041.259	1388.832	1307.072
57	24614.82	69203.66	6.142546	1054.755	1396.087	1312.867
58	24382.7	69557.55	6.25955	1068.156	1403.299	1318.619
59	24152.25	69907.58	6.377504	1081.465	1410.468	1324.328
60	23923.56	70253.93	6.496485	1094.683	1417.595	1329.995
61	23696.72	70596.79	6.616565	1107.811	1424.681	1335.621
62	23471.82	70936.39	6.737807	1120.851	1431.728	1341.208
63	23248.93	71272.93	6.860265	1133.805	1438.735	1346.755
64	23028.1	71606.61	6.983984	1146.674	1445.705	1352.265
65	22809.37	71937.63	7.108997	1159.46	1452.638	1357.738
66	22592.74	72266.16	7.235327	1172.163	1459.535	1363.175
67	22378.23	72592.36	7.362987	1184.786	1466.397	1368.577
68	22165.82	72916.34	7.491979	1197.328	1473.225	1373.945
69	21955.48	73238.2	7.6223	1209.792	1480.02	1379.28
70	21747.17	73558.02	7.753938	1222.179	1486.783	1384.583
71	21540.84	73875.83	7.886876	1234.489	1493.514	1389.854
72	21336.44	74191.64	8.021093	1246.725	1500.213	1395.093
73	21133.89	74505.42	8.156571	1258.886	1506.883	1400.303
74	20933.13	74817.14	8.293288	1270.975	1513.523	1405.483
75	20734.1	75126.71	8.431225	1282.992	1520.134	1410.634

76	20536.73	75434.03	8.57037	1294.938	1526.716	1415.756
77	20340.95	75738.97	8.71071	1306.815	1533.271	1420.851
78	20146.71	76041.39	8.85224	1318.623	1539.797	1425.917
79	19953.96	76341.15	8.994959	1330.364	1546.296	1430.956
80	19762.65	76638.09	9.138872	1342.039	1552.769	1435.969
81	19572.74	76932.05	9.283986	1353.649	1559.214	1440.954
82	19384.22	77222.91	9.430315	1365.195	1565.634	1445.914
83	19197.06	77510.54	9.577876	1376.679	1572.027	1450.847
84	19011.25	77794.84	9.72669	1388.1	1578.394	1455.754
85	18826.79	78075.73	9.876784	1399.461	1584.736	1460.636
86	18643.71	78353.17	10.02819	1410.762	1591.053	1465.493
87	18462	78627.17	10.18093	1422.004	1597.344	1470.324
88	18281.71	78897.74	10.33505	1433.189	1603.611	1475.131
89	18102.87	79164.96	10.49059	1444.316	1609.854	1479.914
90	17925.51	79428.93	10.64758	1455.387	1616.072	1484.672
91	17749.68	79689.78	10.80608	1466.402	1622.267	1489.407
92	17575.42	79947.67	10.96613	1477.363	1628.439	1494.119
93	17402.78	80202.8	11.12777	1488.27	1634.588	1498.807
94	17231.8	80455.35	11.29105	1499.123	1640.714	1503.474
95	17062.54	80705.55	11.45603	1509.923	1646.818	1508.118
96	16895.01	80953.58	11.62275	1520.671	1652.901	1512.741
97	16729.26	81199.64	11.79124	1531.367	1658.962	1517.342
98	16565.3	81443.88	11.96156	1542.013	1665.003	1521.923
99	16403.14	81686.45	12.13372	1552.608	1671.023	1526.483
100	16242.78	81927.41	12.30776	1563.152	1677.023	1531.023
101	16084.2	82166.82	12.4837	1573.648	1683.003	1535.543
102	15927.37	82404.68	12.66152	1584.094	1688.964	1540.044
103	15772.26	82640.92	12.84124	1594.492	1694.906	1544.526
104	15618.81	82875.47	13.02284	1604.842	1700.83	1548.99
105	15466.98	83108.18	13.2063	1615.144	1706.735	1553.435
106	15316.71	83338.89	13.39161	1625.4	1712.621	1557.861
107	15167.93	83567.43	13.57872	1635.609	1718.49	1562.27
108	15020.6	83793.59	13.76763	1645.772	1724.342	1566.662
109	14874.66	84017.18	13.95831	1655.89	1730.176	1571.036
110	14730.07	84238.01	14.15074	1665.963	1735.993	1575.393
111	14586.8	84455.9	14.34491	1675.992	1741.793	1579.733
112	14444.83	84670.72	14.54083	1685.977	1747.577	1584.057
113	14304.14	84882.34	14.7385	1695.918	1753.344	1588.364
114	14164.73	85090.67	14.93794	1705.817	1759.095	1592.654

115	14026.6	85295.64	15.13916	1715.673	1764.829	1596.929
116	13889.76	85497.24	15.34219	1725.488	1770.547	1601.187
117	13754.24	85695.45	15.54707	1735.261	1776.25	1605.43
118	13620.04	85890.3	15.75381	1744.994	1781.937	1609.657
119	13487.18	86081.82	15.96245	1754.686	1787.608	1613.868
120	13355.68	86270.06	16.17302	1764.338	1793.264	1618.064
121	13225.56	86455.08	16.38552	1773.951	1798.904	1622.244
122	13096.82	86636.94	16.59999	1783.525	1804.529	1626.409
123	12969.48	86815.7	16.81643	1793.061	1810.139	1630.559
124	12843.54	86991.45	17.03487	1802.558	1815.735	1634.695
125	12719.01	87164.25	17.2553	1812.018	1821.315	1638.815
126	12595.89	87334.17	17.47776	1821.44	1826.882	1642.922
127	12474.18	87501.27	17.70225	1830.825	1832.434	1647.014
128	12353.9	87665.61	17.92878	1840.173	1837.972	1651.092
129	12235.03	87827.25	18.15739	1849.485	1843.496	1655.156
130	12117.6	87986.23	18.38809	1858.76	1849.007	1659.207
131	12001.59	88142.56	18.62091	1867.999	1854.504	1663.244
132	11887.03	88296.24	18.85588	1877.203	1859.989	1667.269
133	11773.91	88447.26	19.09305	1886.371	1865.46	1671.28
134	11662.24	88595.54	19.33243	1895.504	1870.919	1675.279
135	11552.01	88740.98	19.57405	1904.602	1876.365	1679.265
136	11443.24	88883.46	19.81794	1913.666	1881.8	1683.239
137	11335.91	89022.78	20.06413	1922.694	1887.222	1687.202
138	11230.02	89158.72	20.31261	1931.689	1892.632	1691.152
139	11125.56	89291	20.5634	1940.65	1898.03	1695.09
140	11022.51	89419.32	20.81649	1949.577	1903.417	1699.017
141	10920.86	89543.31	21.07186	1958.47	1908.793	1702.933
142	10820.59	89662.61	21.32949	1967.331	1914.158	1706.838
143	10721.68	89776.8	21.58936	1976.158	1919.511	1710.731
144	10624.13	89885.43	21.85144	1984.952	1924.854	1714.614
145	10527.91	89988.08	22.11569	1993.714	1930.186	1718.486
146	10433.01	90084.26	22.38208	2002.444	1935.508	1722.348
147	10339.42	90173.49	22.65057	2011.141	1940.819	1726.199
148	10247.15	90255.3	22.92112	2019.806	1946.121	1730.041
149	10156.19	90329.19	23.19369	2028.439	1951.413	1733.873
150	10066.54	90394.65	23.46825	2037.041	1956.695	1737.695
151	9978.218	90451.17	23.74476	2045.61	1961.968	1741.508
152	9891.226	90498.23	24.02317	2054.147	1967.233	1745.313
153	9805.577	90535.33	24.30344	2062.653	1972.489	1749.108

154	9721.285	90561.93	24.5855	2071.127	1977.736	1752.896
155	9638.364	90577.54	24.8693	2079.569	1982.976	1756.676
156	9556.826	90581.66	25.15477	2087.979	1988.208	1760.448
157	9476.685	90573.86	25.44182	2096.356	1993.433	1764.213
158	9397.949	90553.77	25.73035	2104.702	1998.651	1767.971
159	9320.63	90521.12	26.02029	2113.015	2003.863	1771.723
160	9244.732	90475.76	26.3115	2121.296	2009.069	1775.469
161	9170.262	90417.72	26.60389	2129.544	2014.27	1779.21
162	9097.219	90347.23	26.89734	2137.759	2019.466	1782.946
163	9025.604	90264.77	27.19174	2145.941	2024.657	1786.677
164	8955.413	90171.05	27.487	2154.09	2029.844	1790.403
165	8886.638	90067.03	27.78304	2162.205	2035.026	1794.126
166	8819.269	89953.93	28.07979	2170.288	2040.206	1797.846
167	8753.292	89833.13	28.3772	2178.336	2045.382	1801.562
168	8688.689	89706.15	28.67525	2186.352	2050.555	1805.275
169	8625.44	89574.58	28.97394	2194.334	2055.725	1808.985
170	8563.521	89439.97	29.27326	2202.283	2060.892	1812.692
171	8502.909	89303.76	29.57325	2210.199	2066.056	1816.396
172	8443.575	89167.26	29.87393	2218.082	2071.218	1820.098
173	8385.493	89031.56	30.17534	2225.933	2076.377	1823.797
174	8328.634	88897.55	30.47749	2233.752	2081.533	1827.493
175	8272.973	88765.88	30.78041	2241.539	2086.686	1831.186
176	8218.481	88636.99	31.08412	2249.295	2091.837	1834.876
177	8165.133	88511.13	31.38861	2257.019	2096.984	1838.564
178	8112.907	88388.39	31.69389	2264.713	2102.128	1842.248
179	8061.78	88268.74	31.99993	2272.376	2107.269	1845.929
180	8011.733	88152.03	32.30671	2280.009	2112.406	1849.606
181	7962.748	88038.01	32.6142	2287.612	2117.54	1853.28
182	7914.811	87926.42	32.92237	2295.186	2122.671	1856.951
183	7867.912	87816.93	33.23116	2302.731	2127.798	1860.618
184	7822.041	87709.2	33.54055	2310.247	2132.922	1864.282
185	7777.194	87602.88	33.85048	2317.734	2138.042	1867.942
186	7733.367	87497.62	34.16091	2325.193	2143.159	1871.599
187	7690.558	87393.1	34.47178	2332.624	2148.272	1875.252
188	7648.768	87289	34.78306	2340.027	2153.381	1878.901
189	7607.996	87185.05	35.09469	2347.402	2158.486	1882.546
190	7568.241	87081.03	35.40663	2354.751	2163.588	1886.188
191	7529.501	86976.75	35.71884	2362.072	2168.686	1889.826
192	7491.769	86872.11	36.03125	2369.366	2173.78	1893.46

193	7455.036	86767.06	36.34385	2376.634	2178.87	1897.09
194	7419.287	86661.63	36.65659	2383.876	2183.957	1900.716
195	7384.502	86555.93	36.96943	2391.092	2189.039	1904.339
196	7350.657	86450.15	37.28237	2398.282	2194.117	1907.957
197	7317.723	86344.58	37.59539	2405.447	2199.192	1911.571
198	7285.665	86239.55	37.90848	2412.585	2204.262	1915.182
199	7254.446	86135.47	38.22167	2419.699	2209.329	1918.789
200	7224.028	86032.78	38.53498	2426.787	2214.393	1922.392
201	7194.372	85931.98	38.84843	2433.849	2219.452	1925.992
202	7165.438	85833.52	39.16209	2440.886	2224.509	1929.589
203	7137.193	85737.85	39.47599	2447.898	2229.563	1933.183
204	7109.608	85645.34	39.79019	2454.884	2234.614	1936.774
205	7082.661	85556.26	40.10472	2461.843	2239.663	1940.363
206	7056.339	85470.72	40.41961	2468.777	2244.71	1943.95
207	7030.64	85388.64	40.73485	2475.685	2249.755	1947.535
208	7005.575	85309.7	41.05038	2482.566	2254.798	1951.118
209	6981.164	85233.31	41.36611	2489.421	2259.84	1954.7
210	6957.438	85158.56	41.68185	2496.25	2264.881	1958.281
211	6934.438	85084.21	41.99736	2503.053	2269.92	1961.86
212	6912.208	85008.69	42.3123	2509.829	2274.959	1965.438
213	6890.794	84930.14	42.62621	2516.58	2279.995	1969.015
214	6870.237	84846.43	42.93858	2523.306	2285.03	1972.59
215	6850.569	84755.22	43.2488	2530.008	2290.063	1976.163
216	6831.808	84654.09	43.55618	2536.687	2295.093	1979.732
217	6813.955	84540.57	43.85998	2543.343	2300.119	1983.299
218	6796.993	84412.31	44.15946	2549.978	2305.14	1986.86
219	6780.887	84267.14	44.45386	2556.594	2310.156	1990.416
220	6765.59	84103.21	44.74247	2563.191	2315.166	1993.966
221	6751.038	83919.03	45.02464	2569.771	2320.168	1997.508
222	6737.163	83713.57	45.2998	2576.336	2325.161	2001.041
223	6723.89	83486.29	45.56753	2582.888	2330.144	2004.564
224	6711.144	83237.19	45.82751	2589.427	2335.115	2008.075
225	6698.851	82966.81	46.07958	2595.956	2340.075	2011.575
226	6686.937	82676.18	46.32374	2602.475	2345.021	2015.061
227	6675.332	82366.8	46.56012	2608.986	2349.954	2018.534
228	6663.966	82040.55	46.78902	2615.491	2354.871	2021.991
229	6652.768	81699.71	47.01086	2621.989	2359.773	2025.433
230	6641.665	81346.82	47.22619	2628.483	2364.658	2028.858
231	6630.574	80984.75	47.43573	2634.972	2369.527	2032.267

232	6619.401	80616.72	47.64034	2641.458	2374.379	2035.658
233	6608.027	80246.44	47.84112	2647.94	2379.213	2039.033
234	6596.302	79878.43	48.03949	2654.419	2384.031	2042.391
235	6583.635	79518.3	48.23734	2660.897	2388.834	2045.733

## 6.6 Заключение по разделу

В данной главе рассмотрена задача оптимизации комбинированной схемы выведения КА с ЭРДУ на ГСО за заданное время. Рассматриваемая задача сводится к задаче условной минимизации. Для ее решения используется метод неопределенных множителей Лагранжа и метод ПП, причем значения начальной массы космического аппарата и характеристической скорости перелета с малой тягой с ПО на ГСО предварительно вычисляются на трехмерной сетке значимых параметров ПО (радиусы перигея, высота апогея и наклонение) и интерполируются трехмерными В-сплайнами.

Разработаны методика и программное обеспечение, с помощью которых решена задача вычисления максимальной массы КА, доставляемой на ГСО за заданное время, и оптимальных параметров промежуточной орбиты. С использованием представленной методики можно анализировать комбинированные схемы выведения космического аппарата на геостационарную или другую круговую целевую орбиту с использованием любых средств выведения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача минимизации затрат топлива на перелет КА с конечной тягой между двумя заданными точками за фиксированное время. Для ее решения используется математическая модель движения КА, записанная в декартовых координатах. Соответствующая КЗ решается с помощью двухэтапного метода. Во-первых, решается задача оптимизации траектории КА с ИРД. В рамках рассматриваемой задачи оптимизации траекторий с ИРД выбирается программа изменения вектора реактивного ускорения, и результаты оптимизации траекторий с ИРД используются в качестве начального приближения на втором этапе, когда реализуется численное продолжение оптимальных траекторий с ИРД в оптимальную траекторию с ДОУ или ДОТ.

Рассмотрена задача оптимизации межорбитального перелета КА с фиксированной длительностью от заданной начальной орбиты до конечной орбиты с частично заданными элементами в гравитационном поле Земли. Для оптимизации свободных элементов конечной орбиты используются условия трансверсальности и обеспечивается выполнение этих условий при решении краевой задачи. Разработан метод вычисления оптимальных траекторий на орбиты со свободной ориентацией линии апсид и линии узлов и свободным положением КА на конечной орбите в конечный момент времени.

Разработана математическая модель движения КА с ДОТ в равноденственных переменных, использующая вспомогательную долготу в качестве НП, и поставлена задача оптимизации многовиткового межорбитального перелета КА с ДОТ с использованием ПМП. В рамках рассматриваемой математической модели величина тяги принимается постоянной. Данная математическая модель может применяться для проектирования траекторий КА с ЭРДУ.

Рассмотрена задача выбора оптимального управления, обеспечивающего минимальный расход топлива при перелете с заданной угловой дальностью между

двумя орбитами в центральном гравитационном поле. С помощью ПМП, соответствующая ЗОУ была сведена к краевой задаче для системы ОДУ, которая была решена с применением метода ПП.

Рассмотрена задача оптимизации схемы выведения геостационарного космического аппарата с ЭРДУ с использованием РН Falcon-9 и РН среднего класса с РБ.

Разработана методика для быстрого анализа комбинированных схем выведения КА с ЭРДУ на ГСО. Получены зависимости оптимальных параметров промежуточной орбиты и массы КА на ГСО от длительности выведения. С использованием представленной методики можно анализировать комбинированные схемы выведения космического аппарата на геостационарную или другую круговую целевую орбиту с использованием любых средств выведения.

Разработанные в диссертации математические модели и методы, а также полученные численные результаты могут использоваться в проектно-баллистическом анализе перспективных космических миссий.

**СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ**

ДВУ	– долгота восходящего узла;
ДОУ	– двигатель ограниченного ускорения;
ГСО	– геостационарная орбита;
ИРД	– идеально-регулируемый двигатель;
КА	– космический аппарат;
МКШ	– метод комплексного шага
НП	– независимая переменная;
ОМ	– ограниченная мощность;
ОТ	– ограниченная тяга;
ОУ	– ограниченное ускорение;
ОДУ	– обыкновенные дифференциальные уравнения;
ПО	– промежуточная орбита;
ПМП	– принципа максимума Понтрягина;
ПП	– продолжение по параметру;
ППП	– продолжение по гравитационному параметру;
РБ	– разгонный блок;
РН	– ракета-носитель;
ЭРД	– электроракетный двигатель
ЭРДУ	– электроракетная двигательная установка;
ЦО	– целевая орбита
<b>P</b>	– вектор тяги ( $P$ – модуль вектора тяги);
<b>K</b>	– вспомогательная долгота;

$L$	– истинная долгота;
$L_K$	– отклонение истинной долготы;
$N_j$	– реактивная мощность двигательной установки;
$g_0$	– стандартное ускорение свободного падения ( $9.80665 \text{ м/с}^2$ );
$\mathbf{x}, \mathbf{v}$	– векторы положения и скорости;
$\phi$	– угловая дальность;
$\delta, \mathbf{e}$	– функция тяги и единичный вектор направления (управление);
$\mathbf{p}$	– вектор сопряженных переменных;
$\omega$	– аргумент перицентра;
$\mu$	– гравитационный параметр притягивающего центра;
$\Omega$	– долгота восходящего узла;
$\nu$	– истинная аномалия;
$\tau$	– параметр продолжения;
$\Omega$	– силовая функция гравитационного поля;
$\psi$	– угол рысканья;
$\Psi$	– функция переключения;
$\vartheta$	– угол тангажа;
$\delta$	– функция включения двигателя ( $\delta=1$ или $0$ );
$a$	– большая полуось;
$\mathbf{a}$	– вектор реактивного ускорения;
$a$	$P/m$ – величина реактивного ускорения;
$a_t, a_r, a_n$	– трансверсальная, радиальная и бинормальная проекции реактивного ускорения;
$A^*$	– масштаб ускорения;

- b** – начальный вектор невязок краевой задачи;
- e** – единичный вектор, направленный вдоль вектора тяги;
- e* – эксцентриситет;
- E* – эксцентрическая аномалия;
- f** – вектор невязок краевой задачи;
- H* – гамильтониан;
- p, ex, ey, ix, iy, L* – равноденственные элементы;
- i* – наклонение;
- I* – удельный импульс;
- J* – функционал задачи оптимального управления;
- L\** – масштаб длины;
- m* – масса КА;
- M* – средняя аномалия;
- M\** – масштаб массы;
- n* – среднее движение;
- N<sub>rev</sub>* – число целых витков вокруг центрального тела;
- P* – величина реактивной тяги;
- P* – фокальный параметр;
- P<sub>m</sub>, P<sub>x</sub>, P<sub>v</sub>* – сопряженные переменные к *m, x* и *v* соответственно;
- r** – вектор положения КА;
- r<sub>π</sub>** – радиус перигея орбиты;
- r<sub>α</sub>** – радиус апогея орбиты;
- λ* – неопределенный множитель Лагранжа;

- $t$  – время;
- $T$  – длительность перелета;
- $T^*$  – масштаб времени;
- $v$  – величина орбитальной скорости КА;
- $V_{хар}, V_x$  – характеристическая скорость;
- $w$  – скорость истечения ЭРДУ;
- $\mathbf{x}$  – вектор, определяющий оскулирующую орбиту КА;
- $\mathbf{z}$  – вектор неизвестных параметров краевой задачи;

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Аксенов Е.П. Специальные функции в небесной механике. М.: Наука, 1986.
2. Аксенов Е.П. Теория движения искусственных спутников Земли. М.:Наука, 1977.
3. Акуленко Л.Д. Асимптотические методы оптимального управления.М: Наука, 1987.
4. Ахметшин Р.З.. Плоская задача оптимального перелета космического аппарата с малой тягой с высокоэллиптической орбиты на геостационар. Космические исследования, т. 42, № 3, с. 248–259, 2004.
5. Б.Банди, Методы оптимизации, вводный курс, Москва радио и связи, 1988.
6. Белецкий В.В., Егоров В.А. Межпланетные полеты с двигателями постоянной мощности. Космич. исслед., т. 2, № 3, 1964.
7. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. М.: Мир, 1972.
8. Болтянский В. Г., Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969, 408 с.
9. Брайсон А., Хо Ю Ши. Прикладная теория оптимального управления. Оптимизация, оценка и управление. М.: Мир, 1972.
- 10.Гамильтон У. Р. Избранные труды: Оптика. Динамика. Кватернионы. М.: Наука, 1994, 560 с.
- 11.Гришин С.Д., Захаров Ю.А., Оделевский В.К.. Проектирование космических аппаратов с двигателями малой тяги. М.: Машиностроение, 1990.
- 12.Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета с малой тягой. М.: Наука, 1966.
- 13.Гродзовский Г.Л., Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М., Наука, 1975.
- 14.Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.:Наука, 1975.
- 15.Захаров Ю.А. Проектирование межорбитальных космических аппаратов. Выбор траекторий и проектных параметров. М.:Машиностроение, 1984.
- 16.Ильин В.А., Кузмак Г.Е. Оптимальные перелеты космических аппаратов с двигателями большой тяги. М.: Наука, 1976.
- 17.Иванюхин А.В., Петухов В.Г. Задача минимизации тяги и ее приложения // Космич. исслед. Т. 53. № 4. 2015. С. 320–321. (Cosmic Research. P. 300).

18. Константинов М. С., Мин Тейн, Оптимизация траектории выведения космического аппарата на рабочую гелиоцентрическую орбиту. Электронный журнал «Труды МАИ». Выпуск № 67.
19. Константинов М. С., Петухов В. Г., Попов Г. А. Применение СПД при выведении спутников на геостационарную орбиту с использованием ракет-носителей легкого класса// Вестник двигателестроения, 2003, №2, с.124-128.
20. Лебедев В.Н. Расчет движения космического аппарата с малой тягой. М., Изд.-во ВЦ АН СССР, 1968.
21. Лоуден Д.Ф. Оптимальные траектории для космической навигации. М.: Мир, 1966.
22. Милютин А. А. Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. М.: Физматлит, 2001, 302 с.
23. Милютин А. А., Дмитрук А. В., Осмоловский Н. П. Принцип максимума в оптимальном управлении. М.: Издательство центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2004, 168 с.
24. Паинг Сое Ту У. Метод оптимизации траектории перелета на конечную орбиту с частично заданными элементами. Инженерный журнал: Наука и инновации. 2020, вып . 9, с. 1–21, <http://engjournal.ru/catalog/arise/adb/2017.html> .
25. Паинг Сое Ту У. Анализ выведения космических аппаратов на геостационарную орбиту с использованием комбинации большой и малой тяги. Космонавтика и ракетостроение, 2023, № 1, том. 130, с. 69–78.
26. Паинг Сое Ту У. Оптимизация схемы выведения геостационарного космического аппарата с электроракетной двигательной установкой с использованием ракеты-носителя falcon-9. Космические аппараты и технологии, 2023, № 1, том. 7, с. 35–43.
27. Паинг Сое Ту У. Методы оптимизации межорбитальных перелетов с идеально регулируемым двигателем, Сборник тезисов докладов XLIV Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» 2018, том. 3, с.13-14, МАИ, г. Москва, Россия.
28. Паинг Сое Ту У. Оптимальный межорбитальный перелет космического аппарата с двигателем ограниченного ускорения с учетом возмущений от второй зональной гармоники, Сборник тезисов докладов 18-я Международная конференция, Авиация и космонавтика 2019, с.149-150, МАИ, г. Москва, Россия.

29. Паинг Сое Ту У. Метод оптимизации траектории перелета на конечную орбиту с частично заданными элементами, Сборник тезисов докладов XLIV Академические чтения по космонавтике 2020, том.1, с.722-723, МГТУ, г.Москва, Россия.
30. Паинг Сое Ту У, Вай Ян Аунг.. Оптимальный межорбитальный перелет космического аппарата на высокоэллиптическую орбиту, Сборник тезисов докладов XLVI Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» 2020, с.698, МАИ, г. Москва, Россия.
31. Паинг Сое Ту У. Оптимальный многовитковый межорбитальный перелет космического аппарата с идеально регулируемым двигателем, Сборник тезисов докладов 19-я Международная конференция, Авиация и космонавтика 2020, с.395-396, МАИ, г.Москва, Россия.
32. Паинг Сое Ту У. Оптимальный многовитковый межорбитальный перелет космического аппарата с двигателем ограниченной тяги, Сборник тезисов докладов XLV Академические чтения по космонавтике 2021, том.3, с.111-112, МГТУ, г. Москва, Россия.
33. Паинг Сое Ту У, Петухов В.Г, Анализ возможностей комбинированной схемы выведения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой на геостационарную орбиту, Сборник тезисов докладов XXV Международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация», 2021, с.154-155, г. Евпатория, Крым, Россия.
34. Паинг Сое Ту У, Анализ возможностей комбинированной схемы выведения космического аппарата на геостационарную орбиту Сборник тезисов докладов XLVI Академические чтения по космонавтике 2022, том .3, с.110-111, МГТУ, г. Москва, Россия.
35. Паинг Сое Ту У, Анализ выведения космических аппаратов на геостационарную орбиту с использованием комбинации большой и малой тяги, Сборник тезисов докладов XIV Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли, с.252-254, г. Алушта, Россия.
36. Паинг Сое Ту У, Анализ выведения космических аппаратов на геостационарную орбиту с использованием комбинации большой и малой тяги, Сборник аннотаций конкурсных работ XIV Всероссийский межотраслевой молодежный конкурс научно-технических работ и проектов. Молодешь и будущее авиации и космонавтики, 2022, с.119, МАИ, г. Москва, Россия.

37. Петухов В.Г., Паинг Сое Ту У. Оптимизация многовитковых траекторий межорбитального перелета с идеально-регулируемым двигателем малой тяги. Известия Российской академии наук. Энергетика, 2019, № 3, с. 140–154.
38. Петухов В.Г., Применение угловой независимой переменной и ее регуляризирующего преобразования в задачах оптимизации траекторий с малой тягой. Космические исследования, том. 57, № 3. 2019, с. 373–385.
39. Петухов В.Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками методом продолжения // Дисс. на соискание ученой степени д.т.н., М., МАИ, 2013.
40. Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения. Космические исследования, том. 46. № 3. 2008. С. 224–237.
41. Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой // Космич. исслед. Т. 50. № 3. 2012. С. 258–270.
42. Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами. Космические исследования, том. 42, № 3. С. 260–279.
43. Поляк Б. Т. Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983, 384 с.
44. Понтрягин Л. С. Дифференциальные уравнения и их приложения. М.: Едиториал УРСС, 2011, 208 с.
45. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
46. Рыжов С.Ю. Проблемы оптимизации многовитковых траекторий перелетов космического аппарата с реактивным двигателем ограниченной тяги. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.02.01 «Теоретическая механика», М., МГУ, 2007, 97 с.
47. Салмин В.В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой. М.: Машиностроение, 1987.
48. Сихарулидзе Ю.Г. Баллистика и наведение летательных аппаратов, Бином лаборатория знаний, 2013, Москва.
49. Синицин А.А. Исследование эффективности использования маршевой электроракетной двигательной установки для выведения космического аппарата на геостационарную орбиту // Космонавтика и ракетостроение. – 2009. – № 4(57). – С. 95–108.

50. Суханов А.А. Астродинамика. ИКИ РАН, Серия «Механика, управление, информатика», 2010, 103 с.
51. Суханов А.А., Прадо А.Ф.Б. де А. Межорбитальные перелеты с малой тягой в произвольном поле сил. Космические исследования, т. 51, № 2, 2013, с. 159–170.
52. Тейн М. Оптимизация схем выведения космического аппарата на высокие рабочие орбиты. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 05.07.09 «Динамика, баллистика»
53. Улыбышев Ю.П. Оптимизация межорбитальных перелетов с малой тягой при ограничениях. Космические исследования, т. 50, № 5, 2012, с. 403–318.
54. Федотов Г.Г. Оптимизация перелетов между орбитами искусственных спутников двух планет при использовании комбинации большой и малой тяги. Космические исследования, том 40, № 6, 2002.
55. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
56. Aeronautics, N.; Administration, S. NASA Systems Engineering Handbook; U.S. Government Printing Office: Washington, DC, USA, 2008.
57. Anderson, W. K., Newman, J. C., Whitfield, D. L., And Nielsen, E. J. 1999. Sensitivity analysis for the Navier–Stokes equations on unstructured meshes using complex variables. AIAA Paper 99–3294.
58. Betts, J.T. Survey of Numerical Methods for Trajectory Optimization. J. Guid. Control Dyn. 1998, 21, 193–207, doi:10.2514/2.4231.
59. Betts J.T. Optimal low-thrust orbit transfers with eclipsing // Optimal Control Applications and Methods. Vol. 36 (2015), No. 2, P. 218-240.
60. Binfeng Pan, Zheng Chen, Ping Lu, Bo Gao. Reduced Transversality Conditions in Optimal Space Trajectories. Journal of Guidance, Control, and Dynamics, Vol. 36, No. 5, 2013, pp. 1289-1300. DOI: 10.2514/1.60181.
61. Bryson, A.E.; Ho, Y.C.; Siouris, G.M. Applied Optimal Control: Optimization, Estimation, and Control. Syst. Man Cybern. IEEE Trans. 1979, 9, 366–367, doi:10.1109/TSMC.1979.4310229.
62. Brouke R.A., Cefola P.J. On the Equinoctial Orbital Elements, Celestial Mechanics, v. 5, 1972, pp. 303-310.
63. David Morante, David Morante, Manuel Soler, A Survey on Low-Thrust Trajectory Optimization Approaches, Journal of Aerospace, volume 8, issue 3. 19 March 2021.

64. Edelbaum, T.N. Optimum power-limited orbit transfer in strong gravity fields./ AIAA J. 1965. V. 3. № 5. P. 921–925.
65. Ehsan Taheri, John Junkins, How Many Impulses Redux, Dec 2019, Journal of the Astronautical Sciences 67(5). DOI: [10.1007/s40295-019-00203-1](https://doi.org/10.1007/s40295-019-00203-1)
66. Falcon 9 Launch Vehicle Payload User's Guide, Rev 1, Space X, Space Exploration Technologies Corporation, 2008.
67. Graham K.F., Rao A.V. Minimum-Time Trajectory Optimization of Low-Thrust Earth-Orbit Transfers with Eclipsing // Journal of Spacecraft and Rockets. Vol. 53 (2016). No. 2. P. 289-303.
68. Irving J.H. Low thrust flight: variable exhaust velocity in gravitational fields. (In Seifert H.S. (eds.)): Space Technology, John Wiley and Sons Inc., New York, 1959.
69. Izzo D., Sprague C.I., Taylor D.V. (2019) Machine Learning and Evolutionary Techniques in Interplanetary Trajectory Design. In: Fasano G., Pintér J. (eds) Modeling and Optimization in Space Engineering. Springer Optimization and Its Applications, vol 144. pp.191-210 Springer, Cham.
70. Kéchichian, J.A. Optimal Low-Earth-Orbit-Geostationary-Earth-Orbit Intermediate Acceleration Orbit Transfer. J. Guid. Control Dyn. 1997, 20, 803–811, doi:10.2514/2.4116
71. Kiforenko B.N., Vasil'ev I.Yu. On Optimization of Many-Revolution Low-Thrust Orbit Transfers: Part I. International Applied Mechanics, Vol. 44, No. 7, 2008. pp. 810-817.
72. Kiforenko B.N., Vasil'ev I.Yu. On Optimization of Many-Revolution Low-Thrust Orbit Transfers: Part I. International Applied Mechanics, Vol. 44, No. 9, 2008. pp. 1050-1055.
73. Konstantinov M.S., Petukhov V.G. Easy Engineering Technique of Optimal Electric Propulsion Trajectory Estimation. IAC-06-C4.4.06, 2006.
74. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. The Mathematical Theory of Optimal Processes, Moscow: Science, 1976.
75. Lawden D. F. Optimal trajectories for space navigation, Butterworths, London, 1963.
76. Lawden D. F. Interplanetary Rocket Trajectories. Advances in Space Science, Vol 1, Chapter 1, Academic Press, New York, 1959.
77. Lawden D. F. Mathematical Problems of Astronautics. Mathematical Gazette, Vol 41, pp 168–179, 1957.
78. Lawden D. F. Necessary Conditions for Optimal Rocket Trajectories. J. Mech Appl Math, Vol 12, pp 476–487, 1959.

79. Lawden D. F. Transfer Between Circular Orbits. *Jet Propulsion*, Vol 26, Part I, pp 555–558, July 1956.
80. Lee, S.; Von Allmen, P.; Fink, W.E.; Petropoulos, A.J.; Terrile, R. Design and optimization of low-thrust orbit transfers. In *Proceedings of the 2005 IEEE Aerospace Conference*, Big Sky, MT, USA, 5–12 March 2005.
81. Lee, E. B. and Markus, L., *Foundations of optimal control theory*, Robert E. Krieger Publishing Co., Inc., Melbourne, FL, 2nd ed., 1986.
82. Lyness, J.N. 1967. Numerical algorithms based on the theory of complex variable. In *Proceedings of the ACM National Meeting (Washington, D.C.)*. ACM New York, pp. 125–133.
83. Lyness J.N., Moller C.B. Numerical differentiation of analytic functions // *SIAM J. Numer. Anal.* 1967. № 4. P. 202-210.
84. Martins J.R.R.A., Sturdza P., Alonso J.J. The complex-step derivative approximation // *ACM Transaction on Mathematical Software*. Vol. 29.No. 3 (2003). P. 245-262.
85. Martins, J. R. R. A. 2002. A Coupled-Adjoint Method for High-Fidelity Aero-Structural Optimization. Ph.D. dissertation. Stanford University, Stanford, CA 94305.
86. Martins, J. R. R. A. 2003. A Guide to the Complex-Step Derivative Approximation. <http://mdolab.utias.utoronto.ca>.
87. Martins, J. R. R. A., Alonso, J. J., And Reuther, J. J. 2002. Complete configuration aerostuctural optimization using a coupled sensitivity analysis method. *AIAA Paper 2002-5402 (Sept.)*.
88. Martins, J. R. R. A., Kroo, I. M., AND Alonso, J. J. 2000. An automated method for sensitivity analysis using complex variables. *AIAA Paper 2000-0689 (Jan.)*.
89. MARTINS, J. R. R. A., STURDZA, P., AND ALONSO, J. J. 2001. The connection between the complex-step derivative approximation and algorithmic differentiation. *AIAA Paper 2001-0921 (Jan.)*.
90. Mazzini, L.; Cerreto, M. Theory and Applications of Optimal Finite Thrust Orbital Transfers. In *Modeling and Optimization in Space Engineering*; Springer: Cham, Switzerland, 2019; pp. 233–269, doi:10.1007/978-3-030-10501-3–10.
91. McClain, W.; Vallado, D. *Fundamentals of Astrodynamics and Applications*; Space Technology Library; Springer: Dordrecht, The Netherlands, 2001.
92. McConaghy T. T., Debban T. J., Petropoulos A. E., and Longuski J. M. Design and Optimization of Low-Thrust Trajectories with Gravity Assists. *Journal of Spacecraft and Rockets*, May, Vol. 40, No. 3 : pp. 380-387, 2003.

93. Medvedev A., Khatulev V., Yuriev V., Petukhov V. et al. Combined flight profile to insert telecommunication satellite into geostationary orbit using “Rockot” light-weight class launch vehicle. 51st International Astronautical Congress. IAF-00-V.2.09, Brasilia, Rio de Janeiro, 2000.
94. Newman, J. C., Anderson, W. K., and Whitfield, L., D. 1998. Multidisciplinary sensitivity derivatives using complex variables. Tech. Rep. MSSU-COE-ERC-98-08 (July), Computational Fluid Dynamics Laboratory.
95. Paing Soe Thu Oo, Low-Thrust multi-revolutionary trajectories to geostationary orbit using angular independent variable, Low-Thrust multi-revolutionary trajectories to geostationary orbit using angular independent variable, AIP Conference Proceedings 2549, 120007 (2023), <https://doi.org/10.1063/5.0107755>.
96. Pan B., Chen Z., Lu P., Gao B. Reduced transversality conditions in optimal space trajectories. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2013, vol. 36, no. 5, pp. 1289–1300. DOI: 10.2514/1.60181
97. Petukhov V.G. One Numerical Method to Calculate Optimal Power Limited Trajectories. IEPC95221. Moscow. 1995.
98. Petukhov V.G. Application of the angular independent variable and its regularizing transformation in the problems of optimizing low-thrust trajectories. *Cosmic research*, Vol. 57, No. 5, pp. 351–363.
99. Petukhov Viacheslav, Alexey Ivanyukhin, Garri Popov, Nikolay Testoyedov, Sung WookYoon, Optimization of finite-thrust trajectories with fixed angular distance. *Acta Astronautica*. <https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2021.03.012> .
100. Petropoulos, A.E.; Sims, J.A. A Review of Some Exact Solutions to the Planar Equations of Motion of a Thrusting Spacecraft. In *Proceedings of the 2nd International Symposium Low-Thrust Trajectories*, Toulouse, France, 18–20 June 2002.
101. Pontryagin, L. *Mathematical Theory of Optimization Processes*; CRC Press: FL, USA, 1962.
102. Senent, J., Ocampo, C., and Capella, A., “Low-Thrust Variable-Specific-Impulse Transfers and Guidance to Unstable Periodic Orbits,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 2, 2005, pp. 280–290, doi:10.2514/1.6398.
103. Schäff, S. *Low-Thrust Multi-Revolution Orbit Transfers*; Springer: Berlin/Heidelberg, Germany, 2016; pp. 337–367, doi:10.1007/978-3-319-41508-6-13.

104. Shirazi A., Ceberio J., Lozano J. Spacecraft trajectory optimization: a review of models, objectives, approaches, and solutions. *Progress in Aerospace Sciences*. 2018. Vol. 102. P. 76-98.
105. Shihai Yang, Bo Xu, Xin Li, Optimization of Geostationary Orbit Transfers via Combined Chemical–Electric Propulsion, *Journal of Aerospace*, Volume 9, issue 4, 7 April 2022.
106. Squire, William, and Trapp, George, Using complex variables to estimate derivatives of real functions, *SIAM Review* 40, 1998, pp. 110 112. [epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S003614459631241X](https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/S003614459631241X)
107. Warren L Hare, Kashvi Srivastava, Applying Complex-step Derivative Approximations in Model-based Derivative-Free Optimization. ResearchGate, October 2020, DOI: [10.13140/RG.2.2.10185.36967](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.10185.36967)
108. Walker M.J.H., Ireland B., Owens J. A Set of Modified Equinoctial Elements, *Celestial Mechanics*. Vol. 36 (1985). P. 409-419; Vol. 38 (1986). P. 391.