УДК 629.7.02, 531

Конечный элемент гибкого стержня с раздельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для задач нелинейной динамики конструкций летательных аппаратов

Попов В.В.[1]*, Сорокин Ф.Д.[1], Иванников В.В.[2***]**

[1]*Московский государственный технический университет им. Н.Э.Баумана, ул. 2-ая Бауманская, 5. Москва, 105005, Россия*

[2]*Научно-технический центр по роторной динамике «Альфа-Транзит», ул. Ленинградская, 1, Химки, Московская область, 141400, Россия*

**e-mail: vvpopov.bmstu@gmail.com*

***e-mail: sorokin_fd@mail.ru*

****e-mail: vvivannikov@gmail.com*

Аннотация

Для решения задач динамики элементов конструкций летальных аппаратов, сводимых к расчетной модели гибкого стержня, наиболее подходящим является метод конечных элементов. В настоящей статье для задач нелинейной динамики предлагается конечный элемент гибкого стержня с раздельным хранением накопленных и дополнительных поворотов. Накопленный поворот представлен тензором поворота, а дополнительный – вектором Эйлера. Раздельное хранение поворотов позволяет избежать особых точек. Корректность разработанного конечного элемента подтверждена решением тестовых задач с последующей верификацией полученных результатов другими методами.

Ключевые слова: гибкий стержень, конечные элементы, вектор Эйлера, тензор поворота, тензор П.А.Жилина, большие перемещения, большие повороты, матрица масс, гироскопическая матрица.

Введение

Динамическое поведение различных элементов конструкции летальных аппаратов – лонжеронов консолей крыла, стрингеров фюзеляжей, лопастей винтов и т.д. [1-4] довольно удачно описываются с помощью модели гибкого стержня, так как в процессе работы они приобретают большие перемещения и повороты, но деформации в них остаются малыми. Для исследования динамики гибких стержней существует довольно много методов, однако наиболее подходящим является метод конечных элементов (МКЭ).

В литературе можно найти множество вариантов построения КЭ, предназначенных для решения задачи нелинейной динамики стержней. Статья [5] является одной из первых работ в этом направлении. Автор, рассматривая балку как трехмерный объект, на размеры и кинематику которого наложены определенные ограничения, строит достаточно мощную модель, которая допускает как большие перемещения, так и большие деформации. Данная работа породила целое семейство так называемых *геометрически точных* (*geometrically exact*) подходов к анализу статики и динамики гибких стержней [6, 7].

Альтернативным, в той же степени широко распространенным подходом к построению геометрически нелинейных балочных моделей является применение так называемого *коротационного* (*corotational*) подхода [8]. Так, в работе [9] рассматривается простой коротационный КЭ, в который заложена гипотеза о малости относительный деформаций. Существенным его недостатком является запись углов поворота относительно начального положения элемента, что порождает численные проблемы при приближении их величины к 2π. Модель [10], которая по своей сути совмещает в себе 2 вышеописанных фундаментальных подхода, лишена такого недостатка за счет введение промежуточного референсного положения, но является значительно более сложной за счет применения аппарата нелинейной теории упругости. Инкрементное описание поворотов было также использовано и в элементе, предложенном в [11] применительно к задачам многотельный динамики, однако полученная там тангентная матрица жесткости была несимметричной даже для случая консервативных нагрузок, что ограничивает применение ряда методов для решения порождаемых в процессе анализа систем линейных уравнений.

Еще один способом построения нелинейных балочных элементов является использование метода абсолютных узловых координат [12, 13], основанного на использовании полиномов высокого порядка для описания геометрии и деформированного состояния стержня.

В большинстве существующих подходов (равно как и в настоящей работе) для описания конечных поворотов применяется вектор Эйлера, однако существуют и альтернативные решения, как, например, вектор Родригеса в [14]. В данной статье особое внимание также уделено контролю за сохранением энергии в процессе интегрирования. Вопрос консервации энергии и сил в контексте нелинейной динамики стержней также обстоятельно рассмотрен и в [15].

Текущая работа является продолжением разработки конечного элемента гибкого стержня, начатой авторами в [16]. В настоящей статье возможности предложенного ранее КЭ, основанного на описании больших поворотов с помощью вектора Эйлера [17] и раздельном хранении накопленного и дополнительного поворотов, расширяются под задачи нелинейной динамики. В отличие от уже существующих подходов, построение предлагаемого элемента отталкивается от хорошо знакомых матриц жесткости и масс обычного линейного стержневого КЭ, за счет чего выкладки существенно упрощаются. Такой подход позволяет описывать поведение балок как со сдвигами (модель Тимошенко), так и без (модель Эйлера-Бернулли). Работоспособность разработанного конечного элемента подтверждена решением тестовых задач с последующей верификацией полученных результатов другими методами.

Постановка задачи динамики гибкого стержня

Рассмотрим элемент гибкого стержня (рис.1) в процессе его движения. Исходное положение стержня **(0)** относительно глобальных осей XYZ можно описать с помощью тензора поворота $\mathbf{R}_0$ (так же как в [16]). Каждый торец стержня в текущий момент времени **(t)** характеризуется векторами перемещения $\mathbf{u}$, малого дополнительного поворота $\boldsymbol{\vartheta}$, линейной скорости $\mathbf{v}$, угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и тензором большого накопленного поворота $\mathbf{R}$ (целесообразность разбиения поворотов на большой и малый подробно обсуждалась в предыдущей статье [16]).

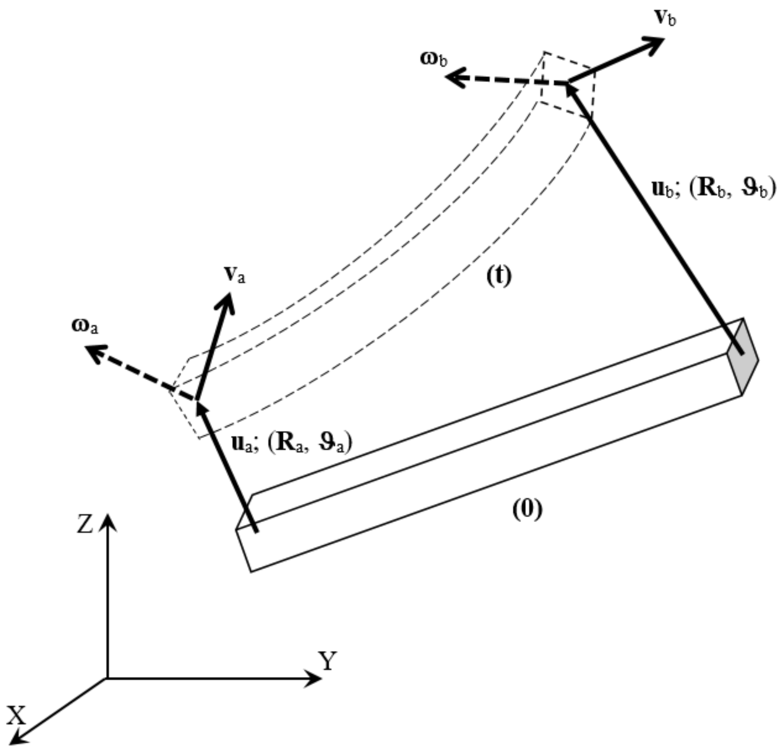

Рис. 1. Гибкий стержень в исходном состоянии **(0)** и в рассматриваемый момент времени ***(t)***

Линеаризованные уравнения динамики произвольной многомассовой нелинейной системы, представленные в векторно–матричной форме и подготовленные для применения метода Ньюмарка, имеют следующий вид [18]

$$\left[\mathbf{M}\right]\Delta\ddot{\mathbf{y}}+\left[\mathbf{G}\right]\Delta\dot{\mathbf{y}}+\left[\mathbf{K}_{tang}\right]\Delta\mathbf{y}=\mathbf{Q}+\mathbf{P}+\mathbf{F} \qquad (1)$$

где $\left[\mathbf{M}\right]$ – матрица обобщенных масс, $\left[\mathbf{G}\right]$ – гироскопическая матрица, $\left[\mathbf{K}_{tang}\right]$ – тангентная (касательная) матрица жесткости, $\mathbf{P}$ – вектор упругих сил, $\mathbf{F}$ – вектор инерционной нагрузки, $\mathbf{Q}$ – вектор внешних сил, $\Delta\ddot{\mathbf{y}},\ \Delta\dot{\mathbf{y}},\ \Delta\mathbf{y}$ – векторы приращений обобщенных ускорений, скоростей и перемещений. Термин «гироскопическая матрица» здесь использован для удобства, встречаются и другие названия.

Уравнения движения разрабатываемого КЭ также должны быть приведены к виду (1). Методика определения $\left[\mathbf{K}_{tang}\right]$ и $\mathbf{P}$ подробно рассмотрена в работе [16].

Так как данная работа является продолжением [16], то в большинстве случаев сохранены те же обозначения, что и в [16]. Рассмотрим вывод остальных матриц и векторов, входящих в (1).

Кинетическая энергия и матрица обобщенных масс

Исходная матрица масс стержневого элемента в локальной системе координат известна и имеет вид:

$$
[\mathbf{M_0}] = \rho AL \begin{bmatrix}
\frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13L}{420} & 0 \\
0 & \frac{13}{35} & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{70} & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\frac{11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & 0 & 0 & -\frac{13L}{420} & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 & 0 \\
\frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_P}{3A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_P}{6A} \\
\frac{9}{70} & 0 & 0 & 0 & \frac{13L}{420} & 0 & \frac{13}{35} & 0 & 0 & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 \\
0 & \frac{9}{70} & 0 & -\frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & \frac{13}{35} & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & 0 \\
0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\
0 & \frac{13L}{420} & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 & 0 & 0 & \frac{11L}{210} & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 & 0 \\
-\frac{13L}{420} & 0 & 0 & 0 & -\frac{L^2}{140} & 0 & -\frac{11L}{210} & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{105} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_P}{6A} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{J_P}{3A}
\end{bmatrix} \quad (2)
$$

где J_p – полярный момент инерции сечения, (м^4); L - длина стержня; A - площадь поперечного сечения; ρ - плотность материала.

Кинетическая энергия T является квадратичной формой линейных и угловых скоростей, при этом роль матрицы квадратичной формы играет матрица масс (2), повернутая до актуального положения КЭ:

$$
T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_a \\ \boldsymbol{\omega}_a \\ \mathbf{v}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} [\mathbf{R}_{all}][\mathbf{M}_0][\mathbf{R}_{all}]^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_a \\ \boldsymbol{\omega}_a \\ \mathbf{v}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{pmatrix}; \quad (3)
$$

$$\left[\mathbf{R}_{all}\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{L}_a & & & \\ & \mathbf{L}_a & & \\ & & \mathbf{L}_b & \\ & & & \mathbf{L}_b\end{bmatrix}\left[\mathbf{R}_I\right];\ \left[\mathbf{R}_I\right]=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_a\mathbf{R}_0 & & & \\ & \mathbf{R}_a\mathbf{R}_0 & & \\ & & \mathbf{R}_b\mathbf{R}_0 & \\ & & & \mathbf{R}_b\mathbf{R}_0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{L}_b=\mathbf{L}\left(\boldsymbol{\vartheta}_b\right);$$
$$\mathbf{L}_b=\mathbf{L}\left(\boldsymbol{\vartheta}_b\right);$$
$$\mathbf{L}\left(\boldsymbol{\vartheta}\right)=\mathbf{E}\cos(|\boldsymbol{\vartheta}|)+\frac{1-\cos(|\boldsymbol{\vartheta}|)}{|\boldsymbol{\vartheta}|^2}\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}+\frac{\sin(|\boldsymbol{\vartheta}|)}{|\boldsymbol{\vartheta}|}\boldsymbol{\vartheta}\times\mathbf{E},$$

где $\boldsymbol{\vartheta}_a$, $\boldsymbol{\vartheta}_b$ – малые дополнительные повороты (векторы Эйлера) узлов a и b (рис. 1); $\mathbf{L}_a$, $\mathbf{L}_b$ – тензоры малых дополнительных поворотов узлов a и b; [$\mathbf{R}_{all}$] – глобальная матрица поворота (12×12); [$\mathbf{R}_I$] – та же матрица, но без учета малых поворотов; $\mathbf{R}_0$ – тензор поворота от декартовых координат к исходному состоянию; $\mathbf{R}_a$, $\mathbf{R}_b$ – тензоры больших накопленных поворотов первого и второго узлов; $\mathbf{v}_a$, $\mathbf{v}_b$ – поступательные скорости центров сечений, $\boldsymbol{\omega}_a$, $\boldsymbol{\omega}_b$ – угловые скорости сечений; $\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta}$ – диадное (тензорное) произведение [17] векторов малых поворотов; $\mathbf{E}$ – единичный тензор; $\mathbf{E}\times\boldsymbol{\vartheta}$ – кососимметричный тензор [17].

В формуле (3) и ниже используется комбинация тензорной и матричной символики, при этом тензорам всегда соответствуют матрицы 3×3 и для перехода от тензоров к матрицам используется глобальная система координат XYZ. Матрицы размером 12×12 выделены квадратными скобками.

Поступательные и угловые скорости связаны с производными обобщенных перемещений следующим образом

$$
\begin{pmatrix} \mathbf{v}_a \\ \boldsymbol{\omega}_a \\ \mathbf{v}_b \\ \boldsymbol{\omega}_b \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & & & \\ & \mathbf{B}_a & & \\ & & \mathbf{E} & \\ & & & \mathbf{B}_b \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \\ \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \end{pmatrix}
$$

$$
\mathbf{B}_a = \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}_a)
$$

$$
\mathbf{B}_b = \mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}_b) \tag{4}
$$

$$
\mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta}) = \mathbf{E}\frac{\sin(|\boldsymbol{\vartheta}|)}{|\boldsymbol{\vartheta}|} + \frac{|\boldsymbol{\vartheta}| - \sin(|\boldsymbol{\vartheta}|)}{|\boldsymbol{\vartheta}|^3}\boldsymbol{\vartheta}\boldsymbol{\vartheta} + \frac{1-\cos(|\boldsymbol{\vartheta}|)}{|\boldsymbol{\vartheta}|^2}\boldsymbol{\vartheta}\times\mathbf{E}
$$

где $\mathbf{u}_a$, $\mathbf{u}_b$ – поступательные перемещения центров сечений; $\mathbf{B}(\boldsymbol{\vartheta})$ – тензор П.А. Жилина (в [18] тензор $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, точнее матрицу компонентов этого тензора, называют «tangent operator»).

Подстановка (4) в (3) с учетом легко проверяемого тождества $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{L} = \mathbf{L}\cdot\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}$ приводит к соотношению для кинетической энергии

$$
T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \\ \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} [\mathbf{N}][\mathbf{M}_{stat}][\mathbf{N}]^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \\ \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \end{pmatrix};
$$

$$
[\mathbf{M}_{stat}] = [\mathbf{R}_I][\mathbf{M}_0][\mathbf{R}_I]^{\mathrm{T}};\ [\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_a & & & \\ & \mathbf{B}_a & & \\ & & \mathbf{L}_b & \\ & & & \mathbf{B}_b \end{bmatrix}, \tag{5}
$$

где матрица $[\mathbf{M}_{stat}]$ не зависит от поворотов на данном инкрементном шаге (stationary); $[\mathbf{N}]$ – матрица, аккумулирующая функции, зависящие от малых поворотов $\boldsymbol{\vartheta}_a$, $\boldsymbol{\vartheta}_b$.

Здесь и далее под инкрементным шагом понимается этап расчета, на котором тензоры накопленных поворотов $\mathbf{R}_a$, $\mathbf{R}_b$ не изменяются, а изменения поворотов учитывается векторами $\boldsymbol{\vartheta}_a$, $\boldsymbol{\vartheta}_b$. В зависимости от реализации инкрементным может быть не только шаг интегрирования, но и шаг итерационного процесса в методе Ньюмарка. Последний вариант организации численного решения является даже более предпочтительным, т.к. обеспечивает лучшую сходимость итераций.

Согласно соотношению (5) и обычным положениям аналитической механики искомой матрицей обобщенных масс текущего положения стержня является следующее произведение матриц

$$[\mathbf{M}] = [\mathbf{N}][\mathbf{M}_{stat}][\mathbf{N}]^{\mathrm{T}} \tag{6}$$

Вектор инерционной нагрузки и гироскопическая матрица

Последующие выкладки <u>первоначально</u> целесообразно производить в индексной форме, так как дифференцирование матрицы по вектору приводит к объектам более сложным, чем матрица (трехиндексные матрицы). В индексной форме уравнения Лагранжа 2-го рода для рассматриваемого КЭ имеют вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial y_i} = Q_i + P_i \tag{7}$$

где y_i – обобщенные координаты КЭ, т.е. элементы вектора $\mathbf{y} = (u_{aX},\ u_{aY},\ u_{aZ},\ \vartheta_{aX},\ \vartheta_{aY},\ \vartheta_{aZ},\ u_{bX},\ u_{bY},\ u_{bZ},\ \vartheta_{bX},\ \vartheta_{bY},\ \vartheta_{bZ})^{\mathrm{T}}$; Q_i, P_i – элементы векторов внешних и упругих сил соответственно.

Кинетическая энергия, представленная через обобщенные скорости, имеет вид:

$$T = \frac{1}{2}\dot{y}_i M_{ij} \dot{y}_j \tag{8}$$

где M_{ij} – элементы матрицы $[\mathbf{M}]$; индексы i и j пробегают значения от 1 до 12 (суммирование по повторяющемся индексам).

Подстановка (8) в (7) дает

$$M_{ij}\ddot{y}_j+\dot{y}_k\frac{\partial M_{ij}}{\partial y_k}\dot{y}_j-\frac{1}{2}\dot{y}_k\frac{\partial M_{kj}}{\partial y_i}\dot{y}_j=Q_i+P_i \tag{9}$$

Второе и третье слагаемое в левой части (9) после их переноса в правую часть можно трактовать как компоненты вектора динамических нагрузок **F**

$$F_i=\frac{1}{2}\dot{y}_k\frac{\partial M_{kj}}{\partial y_i}\dot{y}_j-\dot{y}_k\frac{\partial M_{ij}}{\partial y_k}\dot{y}_j \tag{10}$$

С учетом (10) уравнения движения КЭ принимают следующий вид:

$$M_{ij}\frac{d^2y_j}{dt^2}=Q_i+P_i+F_i. \tag{11}$$

При использовании неявных методов интегрирования [18] требуется линеаризация нелинейных уравнений движения. Рассматривая (11) в 2 момента времени t и $t+\Delta t$ и отбрасывая малые слагаемые второго и последующих порядков приходим к линеаризованным уравнениям движения

$$M_{ij}\Delta\ddot{y}_j+G_{ij}\Delta\dot{y}_j+K_{ij}\Delta y_j=-M_{ij}\ddot{y}_j+Q_i+P_i+F_i, \tag{12}$$

где величины без Δ соответствуют моменту времени t.

При завершении итерационного процесса метода Ньюмарка левая часть (12) становится пренебрежимо малой и решение системы (12) на одном шаге сходится к решению исходных уравнений (11) (подробнее см. в [18]).

В случае отсутствия движения (12) превращаются в линеаризованные уравнения равновесия, поэтому K_{ij} соответствует матрице $\left[\mathbf{K}_{tang}\right]$, полученной в [16] (зависимость $\left[\mathbf{K}_{tang}\right]$ от обобщенных скоростей и ускорений здесь не учитывается, так как итерации метода Ньюмарка хорошо сходятся и без этого!). Элементы матрицы масс M_{ij} полностью определены формулами (6). Таким образом для формирования левой часть уравнений (12) остается найти только элементы гироскопической матрицы G_{ij}. Проще всего это достигается формальной линеаризацией, слагаемых, содержащих скорости в (10)

$$G_{ij} = -\frac{\partial F_i}{\partial \dot{y}_j} = \dot{y}_k \frac{\partial M_{ij}}{\partial y_k} + \frac{\partial M_{in}}{\partial y_j}\dot{y}_n - \frac{1}{2}\left(\dot{y}_k \frac{\partial M_{kj}}{\partial y_i} + \frac{\partial M_{jn}}{\partial y_i}\dot{y}_n\right) \qquad (13)$$

С учетом симметрии матрицы обобщенных масс окончательное выражение для элементов гироскопической матрицы принимает вид

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \frac{\partial M_{ij}}{\partial y_k}\dot{y}_k + \left(W_{ji} - W_{ij}\right); \\ W_{ij} &= \frac{\partial M_{jk}}{\partial y_i}\dot{y}_k. \end{aligned} \qquad (14)$$

С гироскопическими эффектами обычно связывают кососимметричную часть этого выражения, т.е. $\left(W_{ji} - W_{ij}\right)$. При формальной линеаризации получается еще симметричная часть (первое слагаемое в (14)). Как показывают численные эксперименты все слагаемые в (14) существенны и их следует сохранить.

Заметим, что во многих случаях при вычислении промежуточных величин, входящих в (14), могут оказаться удобными следующие формулы

$$W_{ij} = \frac{\partial}{\partial \dot{y}_j}\left(\frac{\partial T}{\partial y_i}\right); \qquad \frac{\partial M_{ij}}{\partial y_k}\dot{y}_k = \frac{dM_{ij}}{dt}. \qquad (15)$$

Инвариантная форма представления вектора F и матрицы [G]

Индексная форма записи удобна при рассмотрении теоретических вопросов, но при численной реализации полученные формулы для F_i и G_{ij} оказываются весьма неэффективными (аналитическое дифференцирование приводит к нечитаемому коду, а численное дифференцирование существенно замедляет вычисления). В связи с этим были разработаны инвариантные (в прямом тензорном представлении) аналоги формул (10) и (14). С этой целью были введены дополнительные обозначения

$$\mathbf{y}=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_a\\ \boldsymbol{\vartheta}_a\\ \mathbf{u}_b\\ \boldsymbol{\vartheta}_b\end{pmatrix};\quad \dot{\mathbf{y}}=\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{u}}_a\\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a\\ \dot{\mathbf{u}}_b\\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}\mathbf{v}_a{}^*\\ \boldsymbol{\omega}_a{}^*\\ \mathbf{v}_b{}^*\\ \boldsymbol{\omega}_b{}^*\end{pmatrix}=\left[\mathbf{N}\right]^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{u}}_a\\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a\\ \dot{\mathbf{u}}_b\\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b\end{pmatrix};\quad \begin{pmatrix}\mathbf{f}_a\\ \mathbf{m}_a\\ \mathbf{f}_b\\ \mathbf{m}_b\end{pmatrix}=\left[\mathbf{M}_{stat}\right]\begin{pmatrix}\mathbf{v}_a{}^*\\ \boldsymbol{\omega}_a{}^*\\ \mathbf{v}_b{}^*\\ \boldsymbol{\omega}_b{}^*\end{pmatrix};\qquad (16)$$

где $\mathbf{f}_\mathrm{a}$, $\mathbf{m}_\mathrm{a}$, $\mathbf{f}_\mathrm{b}$, $\mathbf{m}_\mathrm{b}$ – промежуточные величины, аналогичные обобщенным импульсам (квазиимпульсы); звездочки добавлены, чтобы отличить векторы в (16) от обычных линейной и угловой скоростей.

С учетом (16) кинетическую энергию КЭ удается представить сравнительно компактно

$$T=\frac{1}{2}\left(\mathbf{v}_a{}^*\cdot\mathbf{f}_a+\boldsymbol{\omega}_a{}^*\cdot\mathbf{m}_a+\mathbf{v}_b{}^*\cdot\mathbf{f}_b+\boldsymbol{\omega}_b{}^*\cdot\mathbf{m}_b\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{v}_a{}^*\\ \boldsymbol{\omega}_a{}^*\\ \mathbf{v}_b{}^*\\ \boldsymbol{\omega}_b{}^*\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{M}_{stat}\right]\begin{pmatrix}\mathbf{v}_a{}^*\\ \boldsymbol{\omega}_a{}^*\\ \mathbf{v}_b{}^*\\ \boldsymbol{\omega}_b{}^*\end{pmatrix};\qquad (17)$$

При дифференцировании кинетической энергии по векторам $\boldsymbol{\vartheta}_a$, $\boldsymbol{\vartheta}_b$ под знак производной будут попадать тензоры $\mathbf{L}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$. Такие операции приводят к тензорам 3-го ранга, представленным ниже

$$\mathbf{Z}=\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\boldsymbol{\vartheta}};\;\; \mathbf{J}=\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial\boldsymbol{\vartheta}};\;\; \mathbf{Z}^*=\frac{\partial\mathbf{L}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{\vartheta}};\;\; \mathbf{J}^*=\frac{\partial\mathbf{B}^{\mathrm{T}}}{\partial\boldsymbol{\vartheta}}.\qquad (18)$$

Производная тензора по вектору в данной работе определяется таким образом, чтобы формулам (18) соответствовали следующие индексные аналоги

$$Z_{kij} = \frac{\partial L_{ij}}{\partial \vartheta_k}; \quad J_{kij} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial \vartheta_k}; \quad Z^*{}_{kij} = \frac{\partial L_{ji}}{\partial \vartheta_k}; \quad J^*{}_{kij} = \frac{\partial B_{ji}}{\partial \vartheta_k}. \tag{19}$$

Тензоры $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{Z}^*$ несложно представляются в виде векторных произведений тензоров второго ранга

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \times \mathbf{L}; \quad \mathbf{Z}^* = -\mathbf{B} \times \mathbf{L}^{\mathrm{T}} \tag{20}$$

Выражения для $\mathbf{J}$ и $\mathbf{J}^*$ более громоздки и при их вычислении требуется больше тензорных операций:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{|\boldsymbol{\vartheta}|^2}\left(\mathbf{e}_n \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{e}_n + \mathbf{E}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta}\mathbf{B} - \mathbf{Z} \times \boldsymbol{\vartheta}\right); \qquad \mathbf{J}\Big|_{|\boldsymbol{\vartheta}|=0} = \frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{E};$$

$$\mathbf{J}^* = \frac{1}{|\boldsymbol{\vartheta}|^2}\left(\mathbf{e}_n \boldsymbol{\vartheta} \mathbf{e}_n + \mathbf{E}\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{B}\boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\vartheta}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} + \mathbf{Z}^* \times \boldsymbol{\vartheta}\right); \quad \mathbf{J}^*\Big|_{|\boldsymbol{\vartheta}|=0} = -\frac{1}{2}\mathbf{E} \times \mathbf{E},$$

где $\mathbf{e}_n$ – орт координатной оси с номером n (n=1, 2, 3).

Отметим, что для экономии вычислительных ресурсов из четырех тензоров третьего ранга, представленных соотношениями (18), достаточно вычислить только два тензора $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{J}$, тогда тензоры $\mathbf{Z}^*$ и $\mathbf{J}^*$ получаются из $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{J}$ перестановкой двух последних индексов, что легко реализуется при программировании.

С учетом обозначений (18) производные кинетической энергии (17) по обобщенным перемещениям равны

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_a} = \mathbf{0};\\
&\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_a} = \frac{\partial \mathbf{v}_a{}^*}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_a} \cdot \mathbf{f}_a + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_a{}^*}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_a} \cdot \mathbf{m}_a = \left(\mathbf{Z}_a^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_a\right) \cdot \mathbf{f}_a + \left(\mathbf{J}_a^* \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a\right) \cdot \mathbf{m}_a;\\
&\frac{\partial T}{\partial \mathbf{u}_b} = \mathbf{0};\\
&\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_b} = \frac{\partial \mathbf{v}_b{}^*}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_b} \cdot \mathbf{f}_b + \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_b{}^*}{\partial \boldsymbol{\vartheta}_b} \cdot \mathbf{m}_b = \left(\mathbf{Z}_b^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_b\right) \cdot \mathbf{f}_b + \left(\mathbf{J}_b^* \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b\right) \cdot \mathbf{m}_b,
\end{aligned} \tag{21}$$

где двойки сократились из-за симметрии матрицы [$\mathbf{M}_{stat}$].

Подстановка выражений для квазиимпульсов из (16) в (21) дает полный вектор производных кинетической энергии по обобщенным перемещениям

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_a^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_a & \mathbf{J}_a^* \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_b^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_b & \mathbf{J}_b^* \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \end{pmatrix} \left[\mathbf{M}_{stat}\right]\left[\mathbf{N}\right]^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{u}}_a \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \\ \dot{\mathbf{u}}_b \\ \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \end{pmatrix}; \tag{22}$$

Производная матрицы обобщенных масс из (6) имеет вид

$$\frac{d\left[\mathbf{M}\right]}{dt} = \frac{d\left[\mathbf{N}\right]}{dt}\left[\mathbf{M}_{stat}\right]\left[\mathbf{N}\right]^{\mathrm{T}} + \left[\mathbf{N}\right]\left[\mathbf{M}_{stat}\right]\left(\frac{d\left[\mathbf{N}\right]}{dt}\right)^{\mathrm{T}};$$

$$\frac{d\left[\mathbf{N}\right]}{dt} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \cdot \mathbf{Z}_a & & & \\ & \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a \cdot \mathbf{J}_a & & \\ & & \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \cdot \mathbf{Z}_b & \\ & & & \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \cdot \mathbf{J}_b \end{bmatrix}. \tag{23}$$

При линеаризации слагаемого $\dfrac{\partial T}{\partial \mathbf{y}}$ из (22) по скоростям получаем аналог W_{ij} из (14)

$$\left[\mathbf{W}\right] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_a^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_a & \mathbf{J}_a^* \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_b^* \cdot \dot{\mathbf{u}}_b & \mathbf{J}_b^* \cdot \dot{\boldsymbol{\vartheta}}_b \end{pmatrix} \left[\mathbf{M}_{stat}\right]\left[\mathbf{N}\right]^{\mathrm{T}} + \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Z}_a \cdot \mathbf{f}_a & \mathbf{J}_a \cdot \mathbf{m}_a & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Z}_b \cdot \mathbf{f}_b & \mathbf{J}_b \cdot \mathbf{m}_b \end{pmatrix}. \tag{24}$$

При выводе соотношения (24) учитывались следующие свойства тензоров 3-го ранга, которые следуют из (19):

$$\left(\mathbf{Z}^* \cdot \mathbf{a}\right) \cdot \mathbf{b} = \left(\mathbf{Z} \cdot \mathbf{b}\right) \cdot \mathbf{a}; \quad \left(\mathbf{J}^* \cdot \mathbf{a}\right) \cdot \mathbf{b} = \left(\mathbf{J} \cdot \mathbf{b}\right) \cdot \mathbf{a},$$

где **a**, **b** – произвольные векторы.

По результатам вычислений (21) - (24) и в соответствие с индексным представлением (10), (14) формируется вектор инерционных нагрузок и гироскопическая матрица

$$\mathbf{F} = \frac{\partial T}{\partial \mathbf{y}} - \frac{d[\mathbf{M}]}{dt}\dot{\mathbf{y}};$$
$$[\mathbf{G}] = \frac{d[\mathbf{M}]}{dt} + [\mathbf{W}]^{\mathrm{T}} - [\mathbf{W}].$$

Отметим, что первое слагаемое в векторе **F** удобнее вычислять по (21), так как там меньше матричных операций, чем в (22).

Таким образом все матрицы и векторы, вошедшие в (1), удалось представить **в замкнутом аналитическом виде**.

Тестовые примеры и контроль результатов

В качестве первого тестового примера рассматривалась задача из работы [19] (стр. 140), которая стала достаточно популярным бенчмарком при разработке методик анализа динамики больших движений нелинейных балочных конечных элементов [20,21]. Прямолинейный упругий стержень шарнирно закреплен на одном из концов (рис. 2) и раскручивается вокруг оси X кинематической нагрузкой по следующему закону:

$$\psi(t) = \begin{cases} \frac{6}{15}\left[\frac{t^2}{2} + \left(\frac{2\pi}{15}\right)^2\left(\cos\left(\frac{2\pi t}{15}\right) - 1\right)\right] \textit{рад, если } t <= 15c \\ 6t - 45\ \textit{рад, если } t > 15c \end{cases} \tag{25}$$

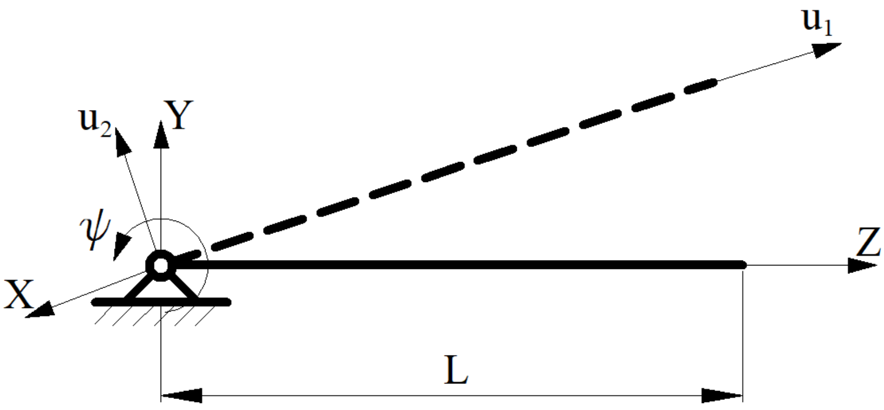

Рис. 2 Постановка задачи в первом тестовом примере

Механические и массовые характеристики стержня: $L = 10$, $EA = 2{,}8 \cdot 10^7$, $EI = 1{,}4 \cdot 10^4$, $A\rho = 1{,}2$, $I\rho = 6 \cdot 10^{-4}$ (все величины заданы в безразмерном виде). Стержень разбивался на 8 конечных элементов, шаг интегрирования 0,005с. В качестве основного результата в работе [19] были получены графики перемещений конца стержня в локальной подвижной системе координат $u_1 u_2$, вращающейся вокруг оси X по закону (25). Эти результаты вместе с результатами, полученными с помощью разработанного конечного элемента, представлены на рис. 3 и 4.

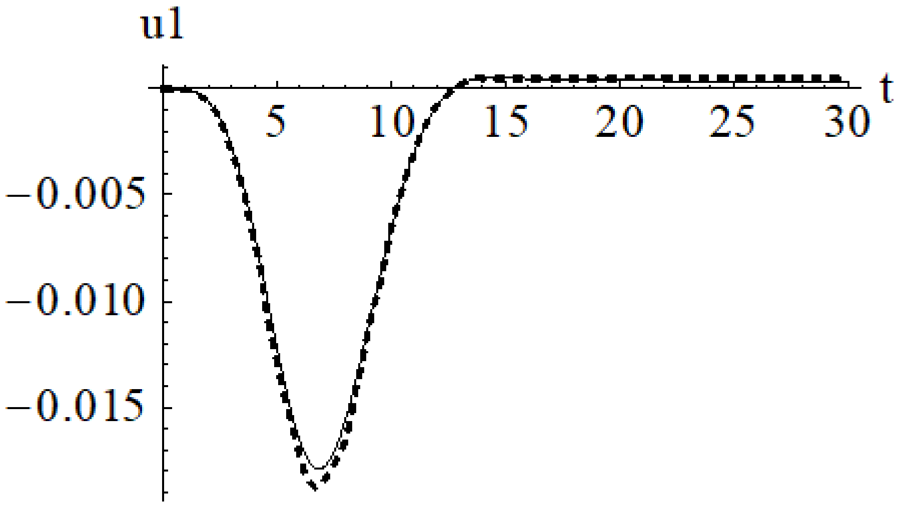

Рис. 3 Перемещение конца стержня в локальной вращающейся системе координат вдоль оси u_1: сплошная черная линия – решение с помощью предложенного конечного элемента, пунктирная линия – решение из [19]

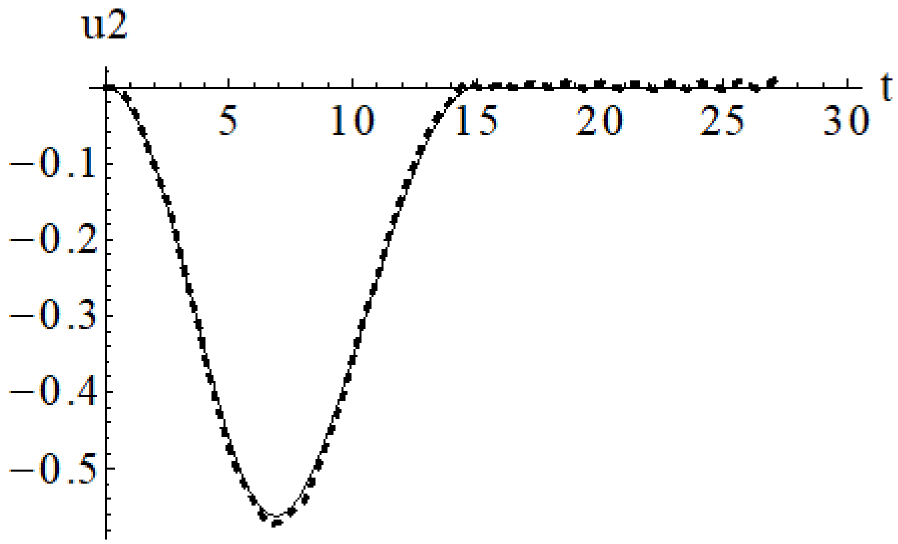

Рис. 4 Перемещение конца стержня в локальной вращающейся системе координат вдоль оси u_2: сплошная черная линия – решение с помощью предложенного конечного элемента, пунктирная линия – решение из [19]

Из рис. 3 и 4 наглядно видно, что результаты между собой совпадают с большой точностью, что говорит о корректной работе конечного элемента в данном примере.

Второй тестовый пример проводился на задаче о вынужденных пространственных колебаниях балки (рис. 5). Балка длиной $L = 1000\ мм$, закреплена на одном конце по всем степеням свободы, кроме вращения вокруг оси Z, а также в центре по перемещениям вдоль осей X и Y. На балку действуют крутящий момент $M = 4\ Н \cdot мм$ на одном конце и постоянная сила $F = 40\ Н$ вдоль оси X на другом.

Механические и массовые характеристики балки: $A = 100\ мм^2$, $J_x = J_y = 833{,}3\ мм^4$, $J_к = 1407{,}2\ мм^4$, $E = 2 \cdot 10^5\ МПа$, $\mu = 0{,}3$, $\rho = 4 \cdot 10^{-6}\ \dfrac{кг}{мм^3}$.

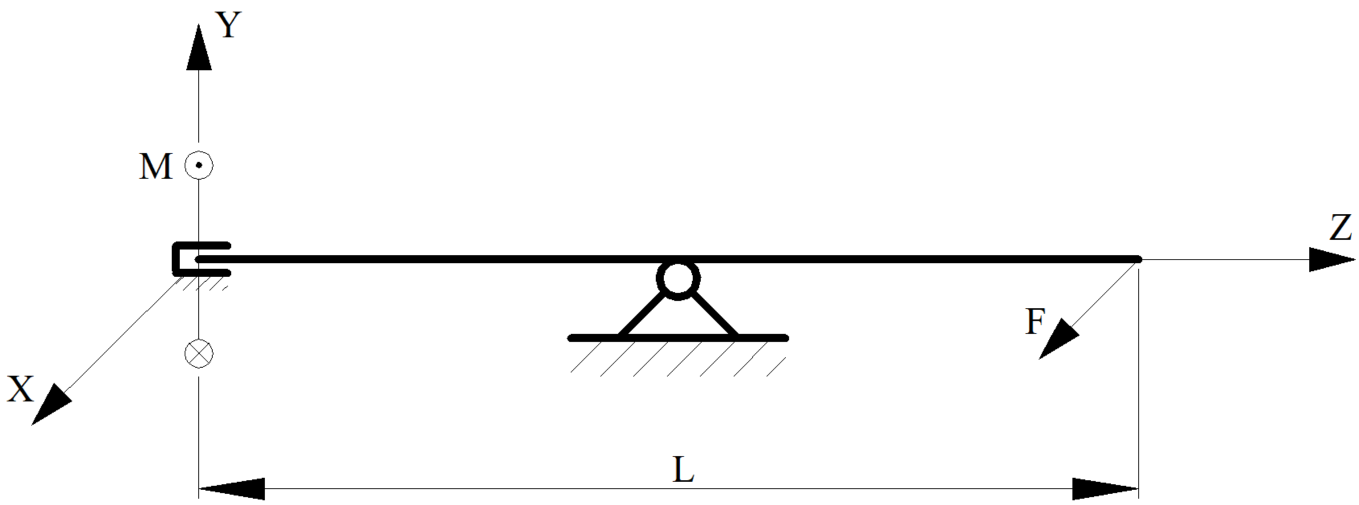

Рис. 5 Постановка задачи во втором тестовом примере

Балка разбивалась на 10 конечных элементов, шаг интегрирования 0,008 с. Для сопоставления результатов данная задача также решалась в программном комплексе Abaqus. На рис. 6 и 7 представлены графики перемещения точки приложения силы F по осям X и Y соответственно.

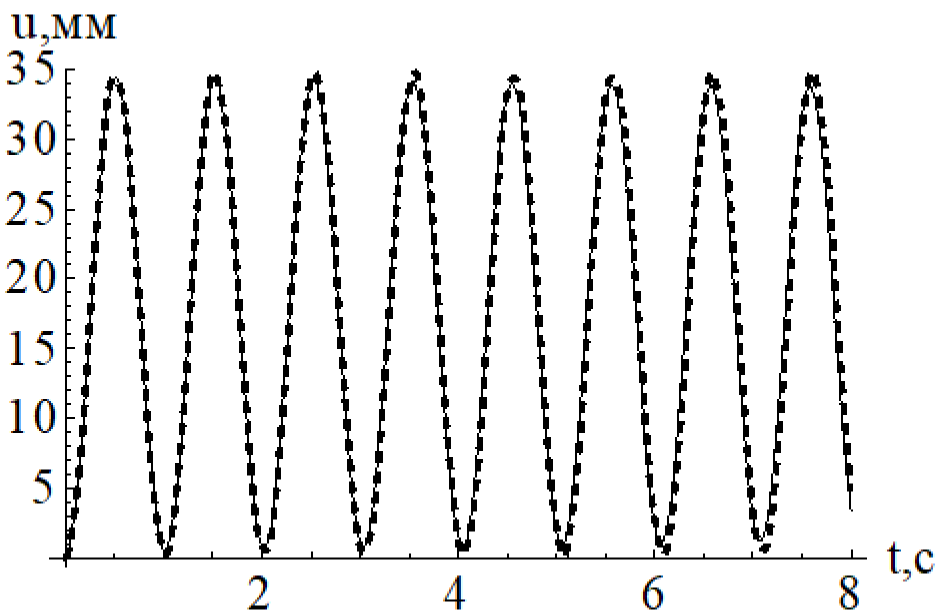

Рис. 6 Перемещение точки приложения силы *F* по осям X: сплошная черная линия – решение с помощью предложенного конечного элемента, пунктирная линия – решение в Abaqus

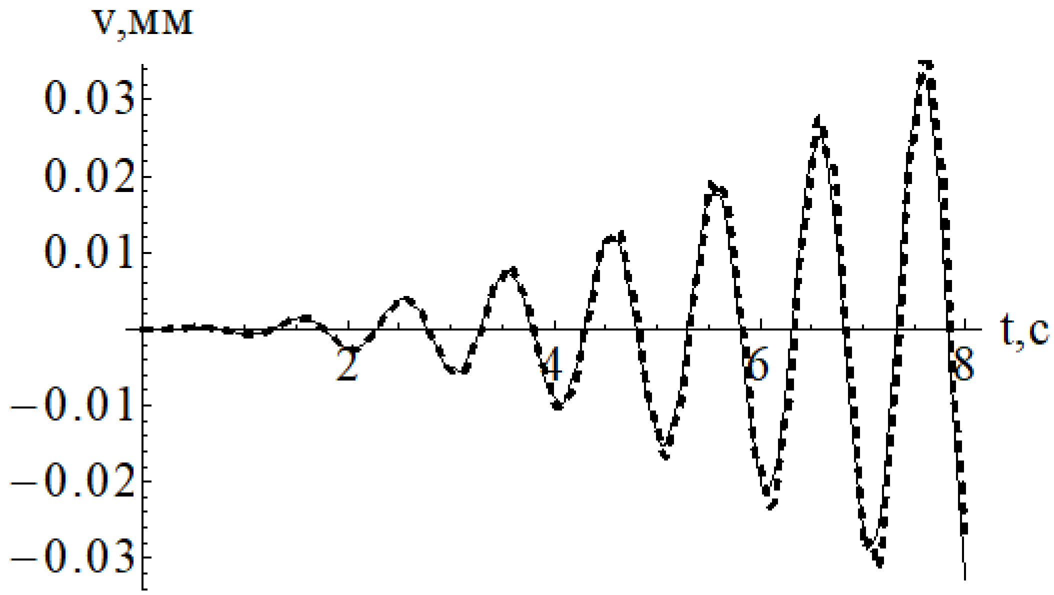

Рис. 7 Перемещение точки приложения силы *F* по осям Y: сплошная черная линия – решение с помощью предложенного конечного элемента, пунктирная линия – решение в Abaqus

Как и первом примере, результаты на рис. 6 и 7 между двумя решениями сходятся с очень большой точностью. Отметим при этом, что интегрирование разрешающих уравнений в комплексе Abaqus происходит по явной схеме.

Заключение

В статье приведен вывод **замкнутых аналитических выражений** обобщенной матрицы масс, вектора инерционных нагрузок и гироскопической матрицы для конечного элемента гибкого стержня с раздельным хранением большой и малой части поворотов. За счет такого решения элемент не испытывает численных проблем при сколь угодно больших величинах поворотов конструкции в процессе деформации. При этом благодаря обновлению значения накопленного поворота после каждой итерации удается достичь сходимости метода Ньютона-Рафсона близкой к квадратичной.

С целью проверки выведенных выражений были проведены два тестовых расчета, которые показали хорошую сходимость получаемых результатов с результатами, полученными другими методами. На основании вышесказанного, данный конечный элемент может быть рекомендован для решения задач динамики элементов конструкций летательных аппаратов.

Библиографический список

1. Братухина А.И. Об усталостной прочности лопасти несущего винта вертолета при действии ветровых нагрузок // Труды МАИ. 2001. № 4. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34669
2. Братухина А.И. Некоторые особенности исследования динамической прочности лопастей несущего винта с бесшарнирным креплением при полете в неспокойной атмосфере // Труды МАИ. 2001. № 4. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=34668
3. Загордан А.А. Исследование работоспособности упругого отклоняемого носка крыла под действием внешних нагрузок // Труды МАИ. 2010. № 38. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=14145
4. Комаров В.А., Кузнецов А.С., Лаптева М.Ю. Оценка эффекта учета деформаций крыла на ранних стадиях проектирования // Труды МАИ. 2011. № 43. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=24759

5. Simo J.C. A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem. Part I // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1985, vol. 49, no. 1, pp. 55 – 70.
6. Ibrahimbegović A. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three–dimensional curved beam elements // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995, vol. 122, no. 1-2, pp. 11 – 26.
7. Ignacio R. The interpolation of rotations and its application to finite element models of geometrically exact rods // Computational Mechanics, 2004, vol. 34, no. 2. pp. 121 – 133.
8. Felippa C.A., Haugen B. A unified formulation of small-strain corotational finite elements: I. Theory // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1994, vol. 194, no. 21, pp. 2285 – 2335.
9. Crisfield M.A., Galvanetto U., Jelenić G. Dynamics of 3-D co-rotational beams // Computational Mechanics, 1997, vol. 20, no. 6, pp. 507 – 519.
10. Jelenić G., Crisfield M.A. Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1999, vol. 171, no. 1, pp. 141 – 171.
11. Cardona A., Geradin M. A beam finite element non-linear theory with finite rotations // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1988, vol. 26, no. 11, pp. 2403 – 2438.
12. Shabana A.A., Yakoub R.Y. Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Formulation for Beam Elements: Theory // Journal of Mechanical Design, 2001, vol. 123, no. 4, pp. 606 – 613.

13. Yakoub R.Y., Shabana A.A. Three Dimensional Absolute Nodal Coordinate Formulation for Beam Elements: Implementation and Applications // Journal of Mechanical Design, 2001, vol. 123, no. 4, pp. 614 – 623.

14. Pimenta P.M., Campello E.M.B., Wriggers P. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational DOFs and general hyperelasticity. Part 1: Rods // Computational Mechanics, 2008, vol. 42, no. 5, pp. 715 – 732.

15. Simo J.C., Tarnow N., Doblare M. Non-linear dynamics of three-dimensional rods: Exact energy and momentum conserving algorithms // International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1995, vol. 38, no. 9, pp. 1431 – 1473.

16. Попов В.В., Сорокин Ф.Д., Иванников В.В. Разработка конечного элемента гибкого стержня с раздельным хранением накопленных и дополнительных поворотов для моделирования больших перемещений элементов конструкций летательных аппаратов // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=76832

17. Жилин П.А. Векторы и тензоры второго ранга в трехмерном пространстве. - СПб.: Нестор, 2001. - 276 с.

18. Geradin M., Cardona A. Flexible Multibody Dynamics – A Finite Element Approach. Wiley, New York, 2000, 327 p.

19. Simo J. C., Vu-Quoc L. On the dynamics in space of rods undergoing large motions — a geometrically exact approach // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1988, vol. 66, no.2, pp. 125 – 161.

20. Greco M., Coda H.B. Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis // Journal of Sound and Vibration, 2006, vol. 290, no.3-5, pp. 1141 – 1174.

21. Fotouhi R. Dynamic analysis of very flexible beams // Journal of Sound and Vibration, 2007, vol. 305, no. 3, pp. 521 – 533.