Вестник Московского авиационного института. 2022. Т. 29. № 1. С. 36-47.
Aerospace MAI Journal, 2022, vol. 29, no. 1, pp. 36-47.

Научная статья
УДК 539.4
DOI: 10.34759/vst-2022-1-36-47

ПРОЕКТИРОВАНИЕ ГЛАДКИХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ОБЕСПЕЧЕНИИ УСТОЙЧИВОСТИ И ПРОЧНОСТИ ПРИ ЗАКРИТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ

Олег Владимирович Митрофанов[1] ✉, Осман Мазен[2]

[1,2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия
[1]MitrofanovOV@mai.ru ✉

Аннотация. Для верхних панелей кессона крыла самолетов малой грузоподъемности допускается потеря устойчивости тонких обшивок при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню. В работе предложена прикладная методика определения оптимальных параметров тонких металлических обшивок с учетом рассмотрения двух уровней нагружения. На первом уровне необходимо обеспечить устойчивость прямоугольной панели с минимальным запасом. На втором уровне нагружения необходимо обеспечить прочность рассматриваемой панели при закритическом поведении также с минимальным запасом. В качестве переменных параметров выбраны толщина и ширина панели. Предложены методики проектирования панелей, основанные на аналитических решениях геометрически нелинейных задач, при рассмотрении различных вариантов нагружения тонкой панели (сжатие, сдвиг и комбинированное нагружение). Полученные аналитические соотношения могут быть рекомендованы для использования на ранних этапах проектирования при выборе конструктивных решений. Примером применения методики может быть многозамкнутый закрылок.

Ключевые слова: закритическое состояние, устойчивость, металлические прямоугольные панели, сжатие, сдвиг

Для цитирования: Митрофанов О.В., Мазен О. Проектирование гладких металлических панелей при обеспечении устойчивости и прочности при закритическом поведении // Вестник Московского авиационного института. 2022. Т. 29. № 1. С. 36-47. DOI: 10.34759/vst-2022-1-36-47

Original article

SMOOTH METALLIC PANELS DESIGNING WHILE STABILITY AND STRENGTH ENSURING AT POSTBUCKLING BEHAVIOR

Oleg V. Mitrofanov[1] ✉ , Osman Mazen[2]

[1,2]Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI, Moscow, Russia
[1]MitrofanovOV@mai.ru ✉

Abstract

Stability loss of the thin skins under loads close to the operating level is allowed for the upper panels of the low-capacity aircraft wing-box. The article proposes an applied technique for determining optimal parameters of thin metal skins with account for the two levels of loading. At the first level, the problem of stability ensuring of a rectangular panel with a minimum margin is being considered. The relations of geometrically nonlinear optimal design problem of the panel under postbuckling behavior are being written for the second level of loading. The article presents also analytical relations explaining the place of the design methodology for the supercritical state in the general theory of optimal design of thin-walled aircraft structures. It considers the design technique, which accounts for the interrelation of the two above-said problems. The panel thickness and width were selected as the variables of the general optimization problem. It is noted, that the optimal design problem proposed in the article differs from the traditional options by the said features. The article presents the panel design techniques based on analytical solutions of geometrically nonlinear problems when considering various options of loading a thin rectangular panel with hinge support. For the cases of compression and shear, compact analytical relations for the optimum parameters determining, which can be recommended for use in the early stages of design when selecting design solutions, are obtained. The longitudinal compressive and shear flows impact at combined loading was considered. In this case, a general option of the optimal design methodology is presented. For the second level of loading, the article regards also various static strength criteria and presents corresponding analytical expressions for computing optimal width of the panel at compression and shear. To illustrate the technique, the article presents numerical examples of determining optimal thickness and width of metal panels in compression. Conclusions and possible variants of the practical use of the technique are presented. As an example, an option of determining optimal parameters of a multi-web flap is given.

Keywords: postbuckling behavior, stability, rectangular metal panels, compression, shear

For citation: Mitrofanov O.V., Osman M. Smooth metallic panels designing while stability and strength ensuring at postbuckling behavior. *Aerospace MAI Journal*, 2022, vol. 29, no. 1, pp. 36-47. DOI: 10.34759/vst-2022-1-36-47

Введение

Для верхних несущих панелей кессона крыла легкого самолета при нагрузках, близких к эксплуатационному уровню, допускается потеря устойчивости тонких обшивок. Объектами исследований данной работы являются тонкие металлические прямоугольные панели толщиной δ и с геометрическими параметрами a и b ($a >> b$). Переменными параметрами в данной работе принимаются толщина и ширина обшивки. Рассматривается задача определения оптимальных параметров обшивки исходя из условий достижения минимальных запасов на двух уровнях нагружения. На первом уровне необходимо обеспечить устойчивость обшивки с запасом, равным единице. На втором уровне при допустимости потери устойчивости необходимо обеспечить минимальный запас по прочности при закритическом поведении. Далее будут рассмотрены прямоугольные тонкие панели при сжатии, сдвиге и комбинированном нагружении. Целью работы является разработка прикладных методик определения оптимальных параметров тонких панелей при рассмотрении двух уровней нагружения при обеспечении минимальных запасов и получении замкнутых аналитических соотношений для использования на ранних этапах проектирования несущих панелей.

В целом задача проектирования оптимальных металлических несущих панелей кессона крыла при различных прочностных ограничениях является актуальной уже несколько десятков лет. Следует отметить классические монографии [1—4] и статьи, в которых приведены решения задач проектирования подкрепленных панелей при ограничениях по прочности и устойчивости [5, 6]. Многочисленные решения задач поверочных расчетов при закритическом поведении металлических панелей представлены в монографии А.С. Вольмира [1].

Перспективными направлениями с точки зрения оптимального проектирования являются задачи механики разрушения [7] и задачи с переменными жесткостными характеристиками [8]. Следует отметить интересные работы В.В. Чедрика [9, 10], посвященные применению методов геометрического программирования для получения аналитических решений при оптимизации подкрепленных панелей. Отметим также работу [11], где предложено решение задачи оптимизации с учетом особенностей конструктивно-технологических схем сварных несущих панелей. В работах [12, 13] предложен метод проектирования тонкостенных металлических конструкций с учетом физической нелинейности. В работах [14, 15] представлена методология проектирования композитных и металлических панелей по закритическому состоянию с учетом геометрически нелинейных соотношений. Развитию современных методов анализа прочности авиационных конструкций посвящены работы [16, 17].

Рассматриваемая в данной статье задача оптимального проектирования гладких панелей в представленной постановке имеет отличия от традиционных задач. Это связано с тем, что в ее основе лежит методология проектирования по закритическому состоянию [14,15], а кроме того, при решении задачи оптимизации одновременно рассматриваются два уровня нагружения. Причем в общем случае указанные уровни нагружения могут не совпадать с эксплуатационными и расчетными нагрузками, принятыми при проектировании авиационных конструкций. Рассматриваемые при проектировании уровни нагружения могут назначаться разработчиком воздушного судна в специальных расчетных условиях на начальных этапах. Отметим также, что указанная методология проектирования [14,15] основана на использовании аналитических решений геометрически нелинейных задач, в связи с чем ниже будут приведены соответствующие решения.

1. Исходные соотношения и методика проектирования

Запишем исходные соотношения геометрически нелинейных задач по определению напряженно-деформированного состояния тонких металлических панелей. Уравнение совместности деформаций имеет вид

$$L_1(F) - L_2(W) = 0, \qquad (1)$$

где $$L_1(F) = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4}\right);$$

$$L_2(W) = \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}.$$

Нелинейное уравнение типа Кармана представим в виде равенства

$$L_3(F,W) - L_4(W) = 0, \qquad (2)$$

где $$L_3(F,W) = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y};$$

$$L_4(W) = \frac{D}{\delta}\left[\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4}\right];$$

F — функция напряжений; D — изгибная жесткость панели; E — модуль упругости материала панели.

Приведем алгоритм определения оптимальных параметров металлических прямоугольных панелей, который в данном случае с учетом дополнения к работам [14, 15] будет включать следующие пункты:

1. Определение возможной формы прогиба при потере устойчивости панели исходя из геометрических параметров, граничных условий и характера нагружения панели. Отметим, что прогиб, как правило, может быть описан известной тригонометрической функцией с точностью до неизвестной величины амплитуды.

2. Определение коэффициента $\omega = q^p / q^{\text{уст}}$, являющегося отношением расчетной (разрушающей) нагрузки и нагрузки, при которой потеря устойчивости не допускается.

3. Определение параметров волнообразования (чисел полуволн) исходя из соотношений геометрических параметров панели.

4. Проведение аналитического решения геометрически нелинейной задачи методом Бубнова—Галеркина или Ритца, которые позволяют получить замкнутые аналитические соотношения, связывающие толщину, ширину панели и амплитуду прогиба.

5. Запись аналитических выражений для мембранных напряжений исходя из определения функции напряжений.

6. Определение координат потенциально критических точек, в которых напряжения могут достигать максимальных по модулю напряжений.

7. Выбор критерия прочности. Запись выражения для напряжений (см. п.5) при условии достижения предельных по прочности значений. Выражение амплитуды прогиба из полученного выражения и подстановка в геометрически нелинейное уравнение (см. п.4). Запись нелинейного уравнения относительно толщины и ширины панели.

8. Решение линейной задачи устойчивости (см. п.4), запись выражения для критических напряжений и определение выражения относительно ширины панели.

9. Подстановка полученного в п.8 соотношения для ширины панели в выражение, являющееся решением геометрически нелинейной задачи в п.7, и запись нелинейного уравнения относительно толщины панели.

10. Проведение численного решения уравнения и определение оптимальной толщины прямоугольной панели. Определение ширины панели (см. п.8). Исходя из конструктивных и технологических ограничений уточнение значений толщины и ширины панели.

Далее рассмотрим простые случаи, в которых возможно получить аналитические соотношения, позволяющие давать рекомендации на ранних этапах проектирования несущих панелей.

2. Определение оптимальных параметров гладких металлических панелей при сжатии

Сначала рассмотрим соотношения, приведенные в табл. 1, поясняющие место методологии проектирования по закритическому состоянию в общей теории оптимального проектирования тонкостенных металлических конструкций. Представленные соотношения иллюстрируют возможность определения толщин металлических панелей при ограничениях по статической прочности, устойчивости, а также прочности при закритическом состоянии.

В табл.1 обозначено: $\bar{\sigma}$ — допускаемые по условиям прочности нормальные напряжения; $\bar{\sigma}_{\text{уст}}$ — допускаемые по условиям устойчивости нормальные напряжения, которые определяются разработчиком воздушного судна на начальных этапах проектирования; $q_x^p = p_x\delta$ — действующий на панель сжимающий поток при расчетном уровне нагружения.

Приведенные в табл. 1 соотношения для определения минимальных толщин панелей при закритическом состоянии соответствуют указанной выше методологии проектирования по закритическому состоянию [14, 15]. Приведем пояснения для представленных соотношений.

Для случая шарнирного опирания представим прогиб прямоугольной панели в виде

$$W = f\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right), \tag{3}$$

где f — амплитуда прогиба; m — число полуволн в продольном направлении.

В результате подстановки прогиба (3) в геометрически нелинейное уравнение совместности деформаций (1) может быть получена функция напряжений [1]

$$F = \frac{Ea^2 f^2}{32b^2 m^2}\cos\left(\frac{2\pi n x}{a}\right) + \frac{Eb^2 f^2 m^2}{32a^2}\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) + \frac{p_x y^2}{2}. \tag{4}$$

Таблица 1

Расчетные соотношения для определения толщины металлической шарнирно опертой прямоугольной панели при одноосном сжатии [14]

Условия для проектирования панелей	Соотношения для определения напряжений	Соотношения для определения минимальных толщин панелей
Статическая прочность	$\sigma = \dfrac{P}{\delta b}$	$\delta = \dfrac{P}{\bar{\sigma} b}$
Устойчивость	$\sigma_{\text{кр}} = 3{,}6E\left(\dfrac{\delta}{b}\right)^2$	$\delta^2 = b^2\dfrac{\bar{\sigma}_{уст}}{3{,}6}$
Закритическое состояние	$\sigma_x = -\dfrac{f^2 E}{8}\dfrac{\pi^2}{b^2} - p_x$, $\delta^3\dfrac{\pi^2 E}{3\left(1-\mu^2\right)b^2} + \delta\dfrac{f^2\pi^2 E}{8b^2} = q_x$	$\delta^3 + \delta\bar{\sigma}_x\zeta b^2 - 2q_x^p\zeta b^2 = 0$, где $\zeta = \dfrac{3\left(1-\mu^2\right)}{\pi^2 E}$

Мембранные продольные напряжения потерявшей устойчивость панели в данном случае определяются по формуле

$$\sigma_x = -\frac{Ef^2m^2\pi^2}{8a^2}\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right) - p_x. \quad (5)$$

Решение геометрически нелинейной задачи методом Бубнова—Галеркина сводится к решению уравнения

$$\delta^2\overline{D}_{mn} + f^2E_{mn} = \left(\frac{m}{a}\right)^2 p_x, \quad (6)$$

где

$$E_{mm} = E\left(\frac{m^4}{a^4} + \frac{1}{b^4}\right)\frac{\pi^2}{16};$$

$$\overline{D}_{mn} = \pi^2\frac{E}{12\left(1-\mu^2\right)}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2\right]^2. \quad (7)$$

Будем считать, что продольные нормальные напряжения (5) могут достигать предельных по прочности значений $\overline{\sigma}_x$ в потенциально критических точках при условии выполнения равенства $\cos(2\pi y/b) = 1$. Выражая из уравнения (5) амплитуду прогиба, получим следующее соотношение:

$$f^2 = \left(\overline{\sigma}_x - p_x\right)\frac{8a^2}{E\pi^2m^2}. \quad (8)$$

Подставляя прогиб (8) в уравнение (6), получим необходимое нелинейное уравнение, указанное в табл. 1, относительно толщины прямоугольной панели

$$\delta^3 + \delta\frac{\overline{\sigma}_x}{b^2}\frac{3\left(1-\mu^2\right)}{\pi^2E} - 2b^2q_x^p\frac{3\left(1-\mu^2\right)}{\pi^2E} = 0, \quad (9)$$

где q_x^p — сжимающий поток при расчетном уровне нагружения.

Далее воспользуемся предложенной выше идеологией, рассматривая два уровня нагружения и две переменные величины — толщину и ширину прямоугольной панели. Из известного выражения для критических напряжений при рассмотрении первого уровня нагружения, на котором надо обеспечить устойчивость, запишем

$$b^2 = \frac{3{,}6E}{q_x^{\text{уст}}}\delta^3. \quad (10)$$

Также далее следует учесть, что используемое соотношение получено при определении числа полуволн m в продольном направлении [1]:

$$m = \frac{a}{b}. \quad (11)$$

Для получения выражения для определения оптимальной толщины панели необходимо в (9) подставить обозначения (7) и (8), затем — соотношение (11) для чисел полуволн m и далее исключить ширину панели b с помощью выражения (10). Результирующее выражение относительно толщины панели после проведенных преобразований содержит сжимающие потоки, действующие на двух уровнях нагружения и предельные по прочности напряжения

$$\delta = \frac{2q_x^p - q_x^{\text{уст}}}{\overline{\sigma}_x}. \quad (12)$$

В инженерных расчетах авиационных конструкций при условии учета эксплуатационных потоков $q_x^{\text{уст}} = q_x^{\text{эксп}}$ следует рассматривать величину коэффициента безопасности $f_{\text{безоп}} = 1{,}5$. В этом случае для определения оптимальной толщины прямоугольной панели получим простое равенство

$$\delta = \frac{2q_x^{\text{эксп}}}{\overline{\sigma}_x} = \frac{1{,}333q_x^p}{\overline{\sigma}_x}, \quad (13)$$

которое вместе с выражением (10) определяет оптимальные параметры прямоугольной металлической панели.

Отметим также, что в данном случае сжатых панелей можно переписать известное выражение [1] для редукционного коэффициента через действующие на двух уровнях потоки:

$$\varphi = \frac{1+(a/b)^4}{3+(a/b)^4} + \frac{2}{3+(a/b)^4}\frac{q^{\text{уст}}}{q^p}. \quad (14)$$

Таким образом, представленные соотношения (10), (12) и (14) позволяют проводить оценку разрабатываемых конструктивных решений на ранних этапах проектирования несущих панелей.

Рассмотрим здесь вариант методики проектирования сжатых панелей при использовании более сложного критерия прочности

$$\sigma_{\text{экв}} \geq \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2}. \quad (15)$$

В этом случае для поперечных мембранных напряжений воспользуемся равенством

$$\sigma_y = -\frac{Ef^2\pi^2}{8b^2}\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right). \quad (16)$$

При использовании равенства $\cos(2\pi mx/a) = 1$, а также соотношений (5) и (16) из выражения (15) можно получить квадратное уравнение относительно амплитуды прогиба f^2. Подставляя результат указанного преобразования в уравнение (6) после некоторых преобразований можно получить выражение для определения оптимальной толщины панели в виде

$$\delta = \frac{\sqrt{3\left(q_x^p\right)^2 - 3q_x^p q_x^{\text{уст}} + \left(q_x^{\text{уст}}\right)^2}}{\sigma_{\text{экв}}}. \qquad (17)$$

Приравнивая эквивалентные напряжения к предельным по условиям прочности напряжениям $\bar{\sigma}$, получим оптимальную толщину панели. Отметим, что здесь и далее при выборе величины $\bar{\sigma}$ напряжений для металлических конструкций целесообразно исходить из условия $\bar{\sigma} = \sigma_T$, где σ_T – предел текучести. Также при выборе допускаемых напряжений следует учитывать условие $\sigma^{\text{уст}} \geq \sigma_{\text{пц}}$.

3. Определение оптимальных параметров гладких металлических панелей при сдвиге

Проведем аналогичные рассуждения для задачи оптимального проектирования гладких металлических панелей при действии касательных потоков. Рассмотрев соотношения, приведенные в табл. 2, можно убедиться в правомерности представленных выше рассуждений для случая сдвига.

В табл. 2 используются обозначения: Q – действующая перерезывающая сила; $\bar{\tau}_{\text{в}}$ — допускаемые по условиям статической прочности касательные напряжения; $\bar{\tau}_{\text{уст}}$ — допускаемые по условиям устойчивости касательные напряжения, которые определяются разработчиком воздушного судна; $q_{xy}^p = p_{xy}\delta$ — действующий на панель сдвиговой поток при расчетном уровне нагружения.

Рассмотрим случай воздействия на металлическую прямоугольную панель сдвиговых потоков и представим прогиб в виде [18]

$$W = f \cdot \sin\frac{\pi y}{b}\sin\frac{\pi(x - \alpha y)}{s}, \qquad (18)$$

где α – тангенс угла наклона волн при выпучивании; s — расстояние между узловыми линиями.

Тогда из уравнения совместности деформаций (1) получим функцию напряжений

$$F = E\frac{f^2}{32}\left\{\frac{E}{G_\alpha}\left(\frac{s}{b}\right)^2\cos\frac{2\pi(x-\alpha y)}{s} + \left(\frac{b}{s}\right)^2\cos\frac{2\pi y}{b}\right\} - -\frac{p_x y^2}{2} - \frac{p_y x^2}{2} + p_{xy}xy, \qquad (19)$$

где $G_\alpha = \left(1+\alpha^2\right)^2 \big/ E$.

Далее будем считать, что разрушение по условиям прочности в данном случае реализуется при достижении предельных касательных напряжений $\bar{\tau}_{xy}$. Запишем равенство для касательных напряжений в виде [1]

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2\Delta_{xy} - p_{xy}, \qquad (20)$$

где $\Delta_{xy} = \dfrac{\pi^2}{8}\dfrac{\alpha}{G_\alpha b^2}\cos\dfrac{2\pi(x-\alpha y)}{s}$; для определения оптимальной толщины будем считать, что

Таблица 2

Расчетные соотношения для определения толщины металлической прямоугольной панели при сдвиге

Условия для проектирования панелей	Соотношения для вычисления напряжений	Соотношения для определения минимальных толщин панелей
Статическая прочность	$\tau = \dfrac{Q}{\delta b}$	$\delta = \dfrac{Q}{\bar{\tau}_{\text{в}} b}$
Устойчивость	$\tau_{\text{кр}} = 5{,}1\left(\dfrac{\delta}{b}\right)^2$	$\delta^2 = b^2\dfrac{\bar{\tau}_{\text{уст}}}{5{,}1}$
Закритическое состояние	$\tau_{xy} = -f^2\dfrac{\pi^2 E}{8b^2}0{,}3143 - p_{xy}$ $\delta^3\dfrac{5{,}1E}{b^2} + f^2\delta\dfrac{E\pi^2}{b^2}0{,}0589 = q_{xy}^p$	$\delta^3\dfrac{5{,}1E}{b^2} + 1{,}5\bar{\tau}_{xy}\delta = 2{,}5q_{xy}^p$

$\cos\frac{2\pi(x-\alpha y)}{s} \to 1$ при воздействии максимальных напряжений в критических точках. Из уравнения (16) с учетом достижения предельных касательных напряжений получим

$$f^2 = \frac{\left(\overline{\tau}_{xy}\delta - q_{xy}\right)8b^2}{E\pi^2\delta \cdot 0,3143}. \quad (21)$$

Используя далее метод Бубнова—Галеркина с учетом геометрически нелинейного уравнения (2) в общем виде при $f \neq 0$ получим

$$\frac{\pi^4}{64}\left[\frac{1}{G_\alpha b^4} + \frac{E}{s^4}\right]f^2 +$$

$$+\frac{E\delta^2}{12\left(1-\mu^2\right)}\frac{\pi^4}{4b^3s^3}\left[\frac{b^2}{s^2}\left(1+\alpha^2\right)^2 + \frac{s^2}{b^2} + 2 + 6\alpha^2\right] -$$

$$-p_x\frac{\pi^2}{4s^2} - p_y\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{b^2} + \frac{\alpha^2}{s^2}\right) - p_{xy}\frac{\alpha\pi^2}{2s^2} = 0. \quad (22)$$

При малых прогибах выражение (18) перепишем в виде

$$q_{xy} = p_{xy}\delta =$$

$$= \frac{E\delta^2}{12\left(1-\mu^2\right)}\frac{\pi^2}{2b^2 s}\left[\frac{b^2}{s^2}\left(1+\alpha^2\right)^2 + \frac{s^2}{b^2} + 2 + 6\alpha^2\right], \quad (23)$$

который совпадает с равенством из работы [18].

При минимизации выражения (19) по α и по s можно получить критические параметры волнообразования $\alpha^2 = 1/2$ и $(s/b)^2 = 3/2$ [1]. При решении линейной задачи устойчивости можно определить критический сдвиговый поток изотропной панели по известной формуле [1]

$$q_{xy}^{\text{уст}} = \frac{5,1E\delta^3}{b^2}, \quad (24)$$

откуда имеем

$$b^2 = \frac{5,1E\delta^3}{q_{xy}^{\text{уст}}}. \quad (25)$$

Далее при действии касательных потоков на расчетном уровне с учетом указанных параметров волнообразования из уравнения (18) и прогиба (17) имеем

$$\delta^3\frac{5,1E}{b^2} + 1,5\overline{\tau}_{xy}\delta = 2,5q_{xy}^{p}. \quad (26)$$

Подставляя амплитуду прогиба из (17) в выражение (24), получим уравнение для определения оптимальной толщины

$$\delta = \frac{2,5q_{xy}^{p} - q_{xy}^{\text{уст}}}{1,5\overline{\tau}_{xy}}, \quad (27)$$

и для авиационных конструкций при коэффициенте $f_{\text{безоп}} = 1,5$ имеем

$$\delta = \frac{3,167q_{xy}^{\text{уст}}}{\overline{\tau}_{xy}} = \frac{2,1q_{xy}^{p}}{\overline{\tau}_{xy}}. \quad (28)$$

Рассмотрим также другой вариант методики проектирования панелей при действии касательных потоков при использовании критерия

$$\sigma_{\text{экв}} \geq \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2}. \quad (29)$$

Для определения мембранных напряжений, возникающих при потере устойчивости, с учетом определенных критических параметров волнообразования воспользуемся равенствами

$$\sigma_x = -\frac{Ef^2\pi^2}{8b^2}\frac{8}{9};$$

$$\sigma_y = -\frac{Ef^2\pi^2}{8b^2}\frac{4}{9}; \quad (30)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{Ef^2\pi^2}{8b^2}\frac{4}{25\sqrt{2}} - p_{xy}.$$

Подставляя равенства (28) в критерий (27), можно получить квадратное уравнение относительно амплитуды f^2. Подставляя далее результат указанного преобразования в уравнение (18), после преобразований можно получить выражение для определения оптимальной толщины панели в виде

$$\delta = \frac{\sqrt{7,3\left(q_{xy}^{p}\right)^2 - 7,1q_{xy}^{p}q_{xy}^{\text{уст}} + 2,8\left(q_{xy}^{\text{уст}}\right)^2}}{\sigma_{\text{экв}}}. \quad (31)$$

Приравнивая эквивалентные напряжения к предельным по условиям прочности напряжениям, можно получить оптимальную толщину панели.

4. Определение оптимальных параметров металлических панелей при комбинированном нагружении

Теперь рассмотрим общий случай комбинированного нагружения панели продольными сжимающими и касательными потоками, когда получение аналитического решения затруднительно. Пусть компоненты нагружения изменяются пропорционально одному параметру: $q_x = \xi\overline{q}_x$, $q_{xy} = \xi\overline{q}_{xy}$. Здесь при рассмотрении задач устойчивости и закритического поведения также будем использовать вид прогиба, который указан в соотношении (15) и является достаточно корректным при описании процесса потери устойчивости при комбинированном нагружении. Тогда функция напряжения F и решение геометрически нелинейной задачи сохраняют вид соотношений (16) и (18).

При действии комбинации потоков при малых прогибах выражение (18) перепишем в виде

$$q_x^{\text{уст}} + 2q_{xy}^{\text{уст}}\alpha =$$

$$= \frac{E\delta^2}{12\left(1-\mu^2\right)} \frac{\pi^2}{2b^2 s}\left[\frac{b^2}{s^2}\left(1+\alpha^2\right)^2 + \frac{s^2}{b^2} + 2 + 6\alpha^2\right], \quad (32)$$

где $q_x^{\text{уст}} = p_x^{\text{уст}}\delta$, $q_{xy}^{\text{уст}} = p_{xy}^{\text{уст}}\delta$ — действующие потоки, соответствующие уровню нагружения, при котором необходимо обеспечить устойчивость.

Далее при использовании параметра $\gamma = b^2/s^2$ и системы уравнений

$$\partial\xi/\partial\alpha = 0, \ \partial\xi/\partial\gamma = 0 \quad (33)$$

можно по аналогии со случаем сдвига и работы [18] численным образом определить критические параметры волнообразования при потере устойчивости $(\alpha_{\text{крит}}, \gamma_{\text{крит}})$. Отметим, что угол наклона волн при потере устойчивости будет зависеть от соотношений сжимающего и сдвигового потока.

Далее в соответствии с предложенным выше приемом сведения задачи оптимизации к одному уравнению потребуются выражения относительно ширины панели. В данном случае можно воспользоваться более простыми соображениями. В работе Л.И. Балабуха [18] получены аналитические решения задач устойчивости для ортотропных панелей и получена известная формула для определения критических касательных напряжений (20). Также в работе [18] было получено аналитическое решение задачи устойчивости для ортотропных панелей при одновременном действии сжимающих и касательных напряжений. Запишем это выражение с учетом обозначений данной работы:

$$\sigma_x^{\text{эксп}}\delta + \frac{\left(\tau_{xy}^{\text{эксп}}\delta\right)^2}{\frac{2\pi^2}{b^2}\left(2D_y + D_3\sqrt{\frac{D_y}{D_x}}\right)} =$$

$$= \frac{2\pi^2}{b^2}\left(D_3 + \sqrt{D_x D_y}\right). \quad (34)$$

Переписывая это уравнение для металлических панелей через действующие потоки для первого уровня нагружения, при которых необходимо обеспечить устойчивость, имеем

$$q_x^{\text{уст}} b^2 + \frac{2\left(q_{xy}^{\text{уст}}\right)^2 b^4\left(1-\mu^2\right)}{\pi^2 E\delta^3} - \frac{\pi^2\delta^3 E}{3\left(1-\mu^2\right)} = 0 \quad (35)$$

и получаем квадратное уравнение относительно ширины панели b^2 при известной толщине.

Далее в рассматриваемой задаче определения оптимальной толщины металлической панели для второго уровня нагружения при комбинированном нагружении необходимо воспользоваться комплексным критерием прочности. Считая, что на панель действует комбинированные нагрузки, воспользуемся следующим выражением для критерия прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau^2}. \quad (36)$$

Мембранные напряжения в срединной поверхности потерявшей устойчивость прямоугольной металлической панели могут определяются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -f^2\Delta_x - p_x, \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -f^2\Delta_y, \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f^2\Delta_{xy} - p_{xy}, \end{aligned} \quad (37)$$

где $\Delta_x = -\frac{\pi^2}{8}\left\{\frac{\alpha^2}{G_\alpha b^2}\cos\frac{2\pi(x-\alpha y)}{s} + \frac{E}{s^2}\cos\frac{2\pi y}{b}\right\};$

$$\Delta_y = -\frac{\pi^2}{8}\left\{\frac{1}{G_\alpha b^2}\cos\frac{2\pi(x-\alpha y)}{s}\right\};$$

$$\Delta_{xy} = \frac{\pi^2}{8}\frac{\alpha}{G_\alpha b^2}\cos\frac{2\pi(x-\alpha y)}{s}.$$

Перепишем полученные выражения для случая совместного действия продольными сжимающими $q_x^p = p_x\delta$ и касательными $q_{xy}^p = p_{xy}\delta$ потоками. Перепишем выражения (31) с учетом действия потоков в виде

$$\begin{aligned} \sigma_x\delta &= -\delta\Delta_{xy} f^2 - q_x^p, \\ \sigma_y\delta &= -\delta\Delta_y f^2, \\ \tau_{xy}\delta &= -\delta\Delta_{xy} f^2 - q_{xy}^p. \end{aligned} \quad (38)$$

Далее нелинейное уравнение (18) перепишем в виде

$$\frac{\pi^4}{64}\left[\frac{1}{G_\alpha b^4}+\frac{E}{s^4}\right]f^2+$$

$$+\frac{E\delta^2}{12\left(1-\mu^2\right)}\frac{\pi^4}{4b^3s^3}\left[\frac{b^2}{s^2}\left(1+\alpha^2\right)^2+\frac{s^2}{b^2}+2+6\alpha^2\right]-$$

$$-p_x\frac{\pi^2}{4s^2}-p_y\frac{\pi^2}{4}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{\alpha^2}{s^2}\right)-p_{xy}\frac{\alpha\pi^2}{2s^2}=0. \qquad (39)$$

Преобразуем равенства (36), (38) и (39). Сначала подставим потоки из (38) в критерий прочности (36), который также следует умножить на толщину. Далее, выражая амплитуду прогиба из (39) в полученное на предыдущем шаге рассуждений соотношение, можно получить искомое нелинейное уравнение для определения толщины.

5. Пример определения параметров металлической панели при сжатии

Рассмотрим панели из металлического материала со следующими характеристиками: E = 7000 кгс/мм^2; μ = 0,3; $\bar{\sigma}$ = 42 кгс/мм^2.

В табл. 3 и 4 приведены результаты расчетов при варьировании величинами нагрузок при различных уровнях нагружения. Приведенный параметр $\Delta\,\% = 100/\,\omega$ показывает процент нагрузки, при которой принята возможность потери устойчивости. В указанных таблицах представлены результаты определения оптимальных параметров по двум формулам (12) и (17), которые соответствуют двум критериям прочности.

Таблица 3

Оптимальные параметры металлической панели при изменении уровня нагрузки, при которой допустима потеря устойчивости

$q_x^{\text{уст}}$, кгс/мм		30	25	20	15	10
q_x^p, кгс/мм		45	45	45	45	45
ω		1.5	1.8	2.25	3.0	4.5
$\Delta\%$		67	55.5	44.4	33.3	22.2
Формулы (12) и (10)	δ, мм	1.43	1.55	1.67	1.79	1.9
	b, мм	49.6	61.3	76.6	98.0	132.3
Формулы (17) и (10)	δ, мм	1.28	1.37	1.47	1.56	1.65
	b, мм	42.5	51.2	62.95	79.8	107.1

Таблица 4

Оптимальные параметры металлической панели при изменении уровня разрушающей нагрузки

$q_x^{\text{уст}}$, кгс/мм		30	30	30	30	30
q_x^p, кгс/мм		45	55	65	75	90
ω		1.5	1.83	2.167	2.5	3.0
$\Delta\%$		67	54.5	46.2	40.0	33.3
Формулы (12) и (10)	δ, мм	1.43	1.9	2.38	2.86	3.57
	b, мм	49,6	76.4	106.7	140.3	196.1
Формулы (17) и (10)	δ, мм	1.28	1.69	2.09	2.5	3.11
	b, мм	42.5	63.7	87.9	114.8	159.6

Из результатов, приведенных в табл. 3 и 4, видно, что уровень допустимости потери устойчивости может приводить к различным рекомендациям при разработке конструкций. В данном случае для шарнирно опертой панели при сжатии оптимальные параметры определяются по формулам (10) и (12), а также по соотношениям (10) и (17).

Для качественной оценки проектируемых панелей целесообразно ввести безразмерный параметр $\zeta = \delta / b$. Из полученных выше уравнений можно получить

$$\zeta = \frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{q_x^{\text{уст}}}{3{,}6E} \frac{\bar{\sigma}_x}{\left(2q_x^p - q_x^{\text{уст}}\right)}}$$

и для панелей авиационных конструкций с учетом коэффициента безопасности $f_{\text{безоп}} = 1{,}5$

$$\zeta = \frac{\delta}{b} = \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_x}{3{,}6E \cdot 2q_x^{\text{уст}}}}.$$

Отметим, что при выводе записанных соотношений не учитывались конструктивные и технологические ограничения. Все рассуждения были нацелены на удовлетворение прочностных ограничений и получение минимальных запасов по устойчивости и по прочности.

Предложенная методика оптимального проектирования, основанная на аналитических решениях задач устойчивости и методологии проектирования по закритическому состоянию [14, 15, 19, 20], позволяет определять оптимальные параметры панелей на ранних этапах разработки конструктивно-силовых схем. Для случая шарнирно опертой панели при сжатии и при сдвиге задача сведена к простым аналитическим формулам. Следует отметить, что аналогичные (с точностью до коэффициентов) соотношения можно получить и при жестких граничных условиях. Продолжение работ в данном направлении оптимального проектирования может быть связано с одновременным учетом физической и геометрической нелинейности, но получение замкнутых аналитических соотношений в этом случае маловероятно.

Выводы

1. Предложена прикладная методика определения оптимальных параметров гладких металлических панелей в новой постановке задачи при ограничениях по устойчивости и прочности при закритическом состоянии. Предложено учитывать два уровня нагружения, при которых возможно обеспечение устойчивости и прочности при закритическом поведении панели с минимальными запасами, равными единице.

2. Получены замкнутые аналитические соотношения при реализации методики для случаев сжатия, сдвига и при комбинированном нагружении. Даны пояснения особенностей реализации методики для каждого вида нагружения. Для случаев сжатия и сдвига шарнирно опертой панели получены инженерные аналитические соотношения для получения рекомендаций при выборе оптимальных конструктивных параметров. Рассмотрены различные варианты критериев прочности.

3. Практическая значимость работы заключается в возможности экспертной оценки оптимальных параметров гладких металлических панелей на ранних этапах проектирования, когда переменными параметрами могут быть толщина и ширина панели (шаг стрингеров) при заданных погонных нагрузках. Применение методики возможно при оптимальном проектировании, например, многостеночного закрылка.

Список источников

1. *Вольмир А.С.* Гибкие пластины и оболочки. — М.: Гостехиздат, 1956. – 419 с.
2. *Авдонин А.С., Фигуровский В.И.* Расчет на прочность летательных аппаратов: Учеб. пособие. – М.: Машиностроение, 1985. — 440 с.
3. *Баничук Н.В., Бирюк В.И., Сейранян А.П.* Методы оптимизации авиационных конструкций. – М.: Машиностроение, 1989. – 296 с.
4. *Лизин В.Т., Пяткин В.А.* Проектирование тонкостенных конструкций: Учеб. пособие. — 4. изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1994. – 447 с.
5. *Белоус А.А., Поспелов И.И.* Метод расчета на устойчивость панели крыла малого удлинения // Труды ЦАГИ. Вып. 1783. — М.: Издательский отдел ЦАГИ, 1976. – 36 с.
6. *Андриенко В.М., Поспелов И.И.* Оптимальное проектирование панелей кессона крыла по условиям прочности и устойчивости // Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций: Сб. статей, посвящ. памяти А.А. Белоуса. Вып. 2623. — М.: Издательский отдел ЦАГИ, 1996. С. 68-75.
7. *Иерусалимский К.М., Корнеев А.Н., Фомин В.П.* Методика расчета напряженно-деформированного состояния тонкостенных цилиндрических конструкций при неравномерных нагрузках // Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций: Сб. статей. Вып. 2628. — М.: Издательский отдел ЦАГИ, 1997. С. 21-28.

8. *Дзюба А.С., Елеонский С.И., Матвиенко Ю.Г., Писарев В.С.* Эволюция параметров механики разрушения для трещин, распространяющихся от исходного и упрочнённого отверстий // Прочность конструкций летательных аппаратов: Сб. тезисов научно-технической конференции (31 мая—1 июня 2018; Жуковский / Под ред. М.Ч. Зиченкова. Т. 2782. — М.: Издательский отдел ЦАГИ, 2018. С. 7-9.
9. *Чедрик В.В.* Оптимизация конструкций с использованием двойственности в нелинейном программировании // Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций: Сб. статей. Вып. 2632. — М.: Издательский отдел ЦАГИ, 1998. С. 62-66.
10. *Никифоров А.К., Чедрик В.В.* Применение метода нелинейного программирования в задаче оптимизации подкрепленных панелей по условиям прочности и устойчивости // Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций: Сб. статей. Вып. 2628. — М.: Издательский отдел ЦАГИ, 1997. С. 47-53.
11. *Меркулов И.Е., Ендогур А.И.* Оптимизация сварных конструкций сверхзвуковых самолетов с учетом конструктивно-технологических схем // Сб. тезисов XVI Международной конференции: Авиация и космонавтика-2017 (20—24 ноября 2017; Москва). – М.: Люксор, 2017. С. 48-49.
12. *Селюгин С.В., Чехов В.В.* Расчет рациональных параметров физически нелинейных конструкций // Проектирование и расчет на прочность авиационных конструкций: Сб. статей. Вып. 2632. — М.: Издательский отдел ЦАГИ, 1998. С. 85-95.
13. *Чехов В.В.* Теоретическая оценка влияния пластичности и больших деформаций на свойства оптимального проекта на примере нагружения трёхстержневой фермы // Прочность конструкций летательных аппаратов: Сб. тезисов научно-технической конференции (31 мая — 1 июня 2018; Жуковский / Под ред. М.Ч. Зиченкова. Т. 2782. — М.: Издательский отдел ЦАГИ, 2018. С. 212-213.
14. *Митрофанов О.В.* Проектирование панелей крыла минимальной массы из композитных материалов с учетом закритического поведения обшивки // Вестник Московского авиационного института. 2002. Т. 9. № 1. С. 35-42.
15. *Митрофанов О.В.* Проектирование несущих панелей авиационных конструкций по закритическому состоянию: Монография. — М.: Изд-во МАИ, 2020. — 160 с.
16. *Дзюба А.С., Дударьков Ю.И., Левченко Е.А., Лимонин М.В., Цой С.В., Яшутин А.Г.* Методология применения современных расчетных методов к отработке статической прочности авиаконструкций // Прочность конструкций летательных аппаратов: Сб. тезисов научно-технической конференции (31 мая — 1 июня 2018; Жуковский). Под ред. М.Ч. Зиченкова. Т. 2782. — М.: Издательский отдел ЦАГИ, 2018. С. 7.
17. *Зиченков М.Ч., Дзюба А.С., Дубинский С.В., Лимонин М.В., Парышев С.Э., Панков А.В.* Развитие методов анализа и исследования прочности авиационных конструкций // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2018. № 11. С. 87-105.
18. *Балабух Л.И.* Устойчивость фанерных пластинок // Техника воздушного флота. 1937. № 9. С. 19-38.
19. *Mitrofanov O.* Definition of preferable thickness of metal cylindrical panels with mild camber based on post-buckling behavior due to compression // III International Conference of Young Scientists on Contemporary Problems of Materials and Constructions (24—28 August 2019, Ulan-Ude, Russian Federation). DOI: 10.1088/1757-899X/684/1/012017
20. *Mitrofanov* O. Design of rectangular sandwich panels with metal skins based on post-buckling state in compression and shear // III International Conference of Young Scientists on Contemporary Problems of Materials and Constructions (24—28 August 2019, Ulan-Ude, Russian Federation). DOI: 10.1088/1757-899X/684/1/012020

References

1. Vol'mir A.S. *Gibkie plastiny i obolochki* (Flexible plates and shells), Moscow, Gostekhizdat, 1956, 419 p.
2. Avdonin A.S., Figurovskii V.I. *Raschet na prochnost' letatel'nykh apparatov* (Calculation of the strength of aircraft), Moscow, Mashinostroenie, 1985, 440 p.
3. Banichuk N.V., Biryuk V.I., Seiranyan A.P. *Metody optimizatsii aviatsionnykh konstruktsii* (Methods of optimization of aircraft structures), Moscow, Mashinostroenie, 1989, 296 p.
4. Lizin V.T., Pyatkin V.A. *Proektirovanie tonkostennykh konstruktsii* (Designing thin-walled structures), Moscow, Mashinostroenie, 1994, 447 p.
5. Belous A.A., Pospelov I.I. *Trudy TsAGI*. Issue 1783, Moscow, Izdatel'skii otdel TsAGI, 1976, 36 p.
6. Andrienko V.M., Pospelov I.I. *Proektirovanie i raschet na prochnost' aviatsionnykh konstruktsii. Sbornik statei*. Issue 2623, Moscow, Izdatel'skii otdel TsAGI, 1996, pp. 68-75.
7. Ierusalimskii K.M., Korneev A.N., Fomin V.P. *Proektirovanie i raschet na prochnost' aviatsionnykh konstruktsii. Sbornik statei*. Issue 2628, Moscow, Izdatel'skii otdel TsAGI, 1997, pp. 21-28.
8. Dzyuba A.S., Eleonskii S.I., Matvienko Yu.G., Pisarev V.S. *Prochnost' konstruktsii letatel'nykh apparatov. Sbornik statei*. Vol. 2782, Moscow, Izdatel'skii otdel TsAGI, 2018, pp. 7-9.
9. Chedrik V.V. *Proektirovanie i raschet na prochnost' aviatsionnykh konstruktsii. Sbornik statei*. Issue 2632, Moscow, Izdatel'skii otdel TsAGI, 1998, pp. 62-66.

10. Nikiforov A.K., Chedrik V.V. *Proektirovanie i raschet na prochnost' aviatsionnykh konstruktsii. Sbornik statei.* Issue 2628, Moscow, Izdatel'skii otdel TsAGI, 1997, pp. 47-53.
11. Merkulov I.E., Endogur A.I. *Aviatsiya i kosmonavtika – 2017. Sbornik tezisov XVI Mezhdunarodnaya konferentsiya (20–24 November 2017; Moskva).* Moscow, Lyuksor, 2017, pp. 48-49.
12. Selyugin S.V., Chekhov V.V. *Proektirovanie i raschet na prochnost' aviatsionnykh konstruktsii. Sbornik statei.* Issue 2632. Moscow, Izdatel'skii otdel TsAGI, 1998, pp. 85-95.
13. Chekhov V.V. *Prochnost' konstruktsii letatel'nykh apparatov: sbornik tezisov nauchno-tekhnicheskoi konferentsii (31 May - 1 June 2018; Zhukovskii).* Issue 2782, Moscow, Izdatel'skii otdel TsAGI, 2018, pp. 212-213.
14. Mitrofanov O.V. Composite material wing panel of minimal mass design considering supercritical skin response. *Aerospace MAI Journal,* 2002, vol. 9, no. 1, pp. 35-42.
15. Mitrofanov O.V. *Proektirovanie nesushchikh panelei aviatsionnykh konstruktsii po zakriticheskomu sostoyaniyu* (Design of load-bearing panels of aircraft structures according to the critical state), Moscow, MAI, 2020, 160 p.
16. Dzyuba A.S., Dudar'kov Yu.I., Levchenko E.A., Limonin M.V., Tsoi S.V., Yashutin A.G. *Prochnost' konstruktsii letatel'nykh apparatov: sbornik tezisov nauchno-tekhnicheskoi konferentsii (31 May — 1 June 2018; Zhukovskii).* Issue 2782, Moscow, Izdatel'skii otdel TsAGI, 2018, p. 7.
17. Zichenkov M.Ch., Dzyuba A.S., Dubinskii S.V., Limonin M.V., Paryshev S.E., Pankov A.V. *Polet. Obshcherossiiskii nauchno-tekhnicheskii zhurnal,* 2018, no. 11, pp. 87-105.
18. Balabukh L.I. *Tekhnika vozdushnogo flota*, 1937, no. 9, pp. 19-38.
19. Mitrofanov O. Definition of preferable thickness of metal cylindrical panels with mild camber based on post-buckling behavior due to compression. *III International Conference of Young Scientists on Contemporary Problems of Materials and Constructions (24–28 August 2019, Ulan-Ude, Russian Federation).* DOI: 10.1088/1757-899X/684/1/012017
20. Mitrofanov O. Design of rectangular sandwich panels with metal skins based on post-buckling state in compression and shear. *III International Conference of Young Scientists on Contemporary Problems of Materials and Constructions (24–28 August 2019, Ulan-Ude, Russian Federation).* DOI: 10.1088/1757-899X/684/1/012020

Статья поступила в редакцию 22.11.2021; одобрена после рецензирования 01.12.2021; принята к публикации 01.12.2021.

The article was submitted on 22.11.2021; approved after reviewing on 01.12.2021; accepted for publication on 01.12.2021.