УДК 004.657

Обоснование квазиоптимального порядка распределения элементарных запросов в многопроцессорной базе данных

Брехов О.М.[1]*, Тан Хлаинг Мьинт[2]**

[1]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Волоколамское шоссе, 4, Москва, А-80, ГСП-3, 125993, Россия

[2]Академия обороны, Пьи У Лин, Республика Союза Мьянма

**e-mail: obrekhov@mail.ru*

***e-mail: hlaing82@gmail.com*

Аннотация

Возможны планы оптимизации по времени выполнения запросов при обращении к многопроцессорной базе данных на основе естественного и квазиоптимального методов упорядочивания элементарных запросов по процессорам.

В данной статье дается обоснование эффективности квазиоптимального метода распределения элементарных запросов в многопроцессорной базе данных.

Ключевые слова: базы данных, многопроцессорная ВС, запросы, элементарные запросы, оптимизация.

1. Введение

В работе [3] предложены два плана оптимизации по времени выполнения запросов при обращении к многопроцессорной базе данных на основе естественного и квазиоптимального методов упорядочивания элементарных запросов по процессорам.

В статье дается обоснование эффективности квазиоптимального метода распределения элементарных запросов в многопроцессорной базе данных, что является одной из актуальных задач разработки методики оптимизации обработки запросов в многопроцессорных базах данных авиационно-космических систем.

2. Распределение номеров элементарных запросов по процессорам

Критерий распределения элементарных запросов по процессорам естественно определить как получение минимального времени обработки запросов, когда все процессоры завершили бы свою работу одновременно, при этом, конечно, необходимо сохранить порядок обработки элементарных запросов на каждом из процессоров в соответствии с теоремой 1[1] или 2[2].

Можно воспользоваться естественным распределением элементарных запросов по процессорам в соответствии с правилом, показанным в таблице 1, где в i-ой строке таблицы указаны номера элементарных запросов выполняемых i-м процессором в порядке слева направо, при этом мы используем (для простоты изложения) в качестве значения числа элементарных запросов k целое четное число, и число процессоров r отвечает условию $[k/r]r = k$. В этом случае i –ый (i =1,...,r) процессор получает элементарные запросы с номерами i, $r+i$, $2r+i$, $3r+i$, $4r+i$, $5r+i$, $6r+i$, …

Таблица 1. Распределение номеров элементарных запросов по процессорам

Номера процессоров	Номера элементарных запросов					
1	1	r+1	2r+1	3r+1		k-r+1
2	2	r+2	2r+2	3r+2		k+1
3	3	r+3	2r+3	3r+3		
i	i	r+i	2r+ i	3r+ i		k+ i
r	r	2r	3r	4r		k

В работе [3] предложен квазиоптимальный метод оптимизации, когда распределение элементарных запросов по процессорам осуществляется в соответствии с правилом, показанным в таблице 2, где в i-ой строке таблицы указаны номера элементарных запросов выполняемых i-м процессором в порядке слева направо, при этом мы используем (для простоты изложения) в качестве значения числа элементарных запросов k целое четное число, и число процессоров r отвечает условию $[k/r]r = k$. В этом случае i –ый (i =1,...,r) процессор получает элементарные запросы с номерами i, $2r+1-i$, $2r+i$, $4r+1-i$, $4r+i$, $6r+1-i$, $6r+i$, …

Таблица 2. Квазиоптимальное распределение элементарных запросов по процессорам

Номера процессоров	Номера элементарных запросов					
1	1	$2r$	$2r$+1	$4r$		k
2	2	$2r$-1	$2r$+2	$4r$-1		k-1
3	3	$2r$-2	$2r$+3	$4r$-2		k-2
i	i	$2r$- i+1	$2r$+ i	$4r$- i+1		k- i+1
r -1	r-1	r+2	$3r$-1	$3r$+2		k-r+2
r	r	r+1	$3r$	$3r$+1		k-r+1

3. Обоснование квазиоптимального порядка распределения

Для оценки влияния изменения числа процессоров на изменение времени выполнения запроса рассмотрим два закона задания функций изменения параметров времени τ_i (геометрической прогрессии и арифметической прогрессии) при двух базовых методах доступа к столбцам таблицы, когда данные в столбцах неупорядочены и упорядочены.

Пусть запрос образуют конъюнкции k элементарных запросов:

1. С изменением параметра времени по закону геометрической прогрессии $\tau_i = a^{i-1}$, и с постоянным значением параметра вероятности $p_i = p, i \in 1, k$.

2. С изменением параметра времени по закону арифметической прогрессии τ_i = 1+(i-1)Δ, и с постоянным значением параметра вероятности $p_i = p, i \in 1, k$.

Для простоты формирования подмножеств элементарных запросов для *r* процессоров положим, что число процессоров *r* отвечает условию *[k/r]r = k*.

3.1. Естественный порядок распределения. Арифметическая прогрессия

Пусть число процессоров вычислительной системы равно *r*, время выполнения элементарного запроса подчиняется закону арифметической прогрессии

$$\tau_i = 1 + \Delta(i-1), p_i = p, i = \overline{1,k}.$$

Время выполнения на i-м процессоре *k/r* элементарных запросов из общего числа *k* элементарных запросов при естественном порядке их распределения по процессорам, когда данные в столбцах неупорядочены, равно:

$$T_{r,i,a,e} = \left((1 + (i-1)\Delta)\frac{1-p^{\frac{k}{r}}}{1-p} + rp\Delta\frac{1-\frac{k}{r}p^{\frac{k}{r}-1}+\left(\frac{k}{r}-1\right)p^{\frac{k}{r}}}{(1-p)^2} \right) n, i=\overline{1,r}.$$

В самом деле, в соответствии с теоремой 1 [1] имеем:

$$T_{r,i,a,e} = ((1 + (i-1)\Delta) + p(1 + (r+i-1)\Delta) + p^2(1 + (2r+i-1)\Delta) + \dots + p^{\frac{k}{r}-1}(1 + ((\frac{k}{r}-1)r + i - 1)\Delta))n$$

$=$

=(

$(1+(i-1)\Delta)\left(1+p+p^2+\cdots+p^{\frac{k}{r}-1}\right)+rp\Delta\left(1+2p+3p^2+4p^3+\cdots+\right.$
$\left.\left(\frac{k}{r}-1\right)p^{\frac{k}{r}-2}\right))n$

$$=\left((1+(i-1)\Delta)\frac{1-p^{\frac{k}{r}}}{1-p}+rp\Delta\frac{1-\frac{k}{r}p^{\frac{k}{r}-1}+\left(\frac{k}{r}-1\right)p^{\frac{k}{r}}}{(1-p)^2}\right)n.$$

Другой вид представления выражения для $T_{r,i,a,e}$:

$T_{r,i,a,e}$ =((1+(i-

1)

$\Delta)+p^2\left(1+\left(2r+(i-1)\right)\Delta\right)+p^4\left(1+\left(4r+(i-1)\right)\Delta\right)+\cdots+(p^{\frac{k}{r}-2}\left(1+\right.$
$\left.\left(\left(\frac{k}{r}-2\right)r+i-1\right)\Delta\right)+p(1+(r+i-1)\Delta)+p^3(1+(3r+i-1)\Delta)+\cdots+$
$+p^{\frac{k}{r}-1}\left(1+\left(\left(\frac{k}{r}-1\right)r+i-1\right)\Delta)\right)n,$

или

$T_{r,i,a,e}$= ((1+(i-

1)

$\Delta)+(1+(r+i-1)\Delta)p)*(1+p^2+p^4+\cdots+p^{\frac{k}{r}-2}+2rp^2\Delta(1+p)(1+$
$2p^2+3p^4+4p^6+\cdots+(\frac{k}{2r}-1)p^{\frac{k}{r}-4}$
$)\,n,$

или

$T_{r,i,a,e}$=((1+(i-

1) $\Delta + (1+(r+i-1)\Delta)p)\frac{1-p^{\frac{k}{r}}}{1-p^2} + 2r\Delta p^2(1+p)\left(\frac{1-\frac{k}{2r}p^{\frac{k}{r}-2}+\left(\frac{k}{2r}-1\right)p^{\frac{k}{r}}}{(1-p^2)^2}\right))n$, i=$\overline{1,r}$.

3.2. Квазиоптимальный порядок распределения. Арифметическая прогрессия

3.2.1. Время выполнения

Время выполнения на i-м процессоре k/r элементарных запросов из общего числа k элементарных запросов при квазиоптимальном порядке их распределения по процессорам, когда данные в столбцах неупорядочены, равно (для простоты записей будем считать, что k/r есть целое четное число):

$$T_{r,i,a,o} = \left((1+(i-1)\Delta) + (1+(2r-i)\Delta)p\frac{1-p^{\frac{k}{r}}}{1-p^2} + 2r\Delta p^2(1+p)\frac{1-\frac{k}{2r}p^{\frac{k}{r}-2}+\left(\frac{k}{2r}-1\right)p^{\frac{k}{r}}}{(1-p^r)^2}\right)n,$$

$i=\overline{1,r}$.

В самом деле, в соответствии с теоремой 1 [1] имеем:

$T_{r,i,a,o} = \left((1 + (i-1)\Delta) + (1 + (2r - i)\Delta)p^1\right) + p^2(1 + (2r + i - 1)\Delta) + p^3(1 + (4r - i)\Delta) + p^4(1 + (4r + (i-1))\Delta) + p^5(1 + (6r - i)\Delta) + \cdots + p^{\frac{k}{2}-1}\left(1 + \left(\left(\frac{k}{r}\right)r - i\right)\right) n$

.

или

$T_{r,i,a,o}=$

$$\left(((1 + (i-1)\,\Delta)\left(1 + p + p^2 + \cdots + p^{\frac{k}{r}-1}\right) + 2r\Delta p^2\left(1 + 2p^2 + 3p^4 + 4p^6 + \cdots + p^{\frac{k}{r}-4}\right) + p(1 + (2r - i)\Delta)\left(1 + p + p^2 + \cdots + p^{\frac{k}{r}-1}\right) + 2r\Delta p^3\left(1 + 2p^2 + 3p^4 + 4p^6 + \cdots + (\frac{k}{2r} - 1)p^{\frac{k}{r}-4}\right)\right)n$$

или

$T_{r,i,a,o}=$

$$\left((1 + (i-1)\,\Delta) + (1 + (2r - i)\Delta p)\frac{1 - p^{\frac{k}{r}}}{1 - p^2} + 2r\Delta p^2(1 + p)\frac{1 - \frac{k}{2r}p^{\frac{k}{r}-2} + (\frac{k}{2r} - 1)p^{\frac{k}{r}}}{(1 - p^2)^2}\right) n,$$

$i = \overline{1,r}.$

3.2.2. Соотношения времени выполнения на *i*-м и *j* -м процессорах

Для **естественного** порядка распределения элементарных запросов непосредственно из первого выражения для $T_{r,i,e}$ имеем неравенства:

$T_{r,1,a,e} < T_{r,2,a,e} < \cdots < T_{r,r,a,e}$.

Для **квазиоптимального** порядка распределения элементарных запросов так же выполняются аналогичные неравенства:

$T_{r,1,a,0} < T_{r,2,a,0} < \cdots < T_{r,i,a,0} < \cdots T_{r,j,a,0} < T_{r,r,a,0} < ,1 \leq i < j$.

В самом деле, непосредственно из выражения для $T_{r,i,a,0}$ и $T_{r,j,a,0}$ имеем

$$1 + (i-1)\Delta + (1 + (2r - i))p < 1 + (j-1)\Delta + (1 + (2r - j)\Delta)p,$$

или $\quad p < 1,$

что справедливо всегда при любых *i*<*j*.

Максимальный разброс времени выполнения обработки запросов на *r* процессорах составляет:

- при **естественном** порядке

$$T_{r,r,a,e} - T_{r,1,a,e} = (r-1)(1+p)\Delta\left(\frac{1-p^{\frac{k}{r}}}{1-p^2}\right)n,$$

- при **квазиоптимальном** порядке

$$T_{r,r,a,0} - T_{r,1,a,0} = (1 + (r-1)\Delta + (1 + r\Delta)p) - (1 + (1 + (2r-1)\Delta)p)\frac{1-p^{\frac{k}{r}}}{1-p^2}n$$
$$=\left((r-1)\Delta(1-p)\frac{1-p^{\frac{k}{r}}}{1-p^2}\right)n.$$

Имея в виду, что

$T_{r,1,a,e} < T_{r,1,a,0}$,

так как выполняется неравенство

$$1 + p(1 + r\Delta) < 1 + p(1 + 2r - 1),$$

и так же

$T_{r,r,a,0} < T_{r,1,a,e}$,

так как выполняется неравенство

$$1 + (r-1)\Delta + (1 + r\Delta)p < 1 + (r-1) + (1 + (2r-1)\Delta)p,$$

находим, что минимальная и максимальная границы времени выполнения при квазиоптимальном распределении лежат внутри минимальной и максимальной границ при естественном распределении.

Абсолютное уменьшение границ времени выполнения запросов при использовании оптимального распределения вместо естественного распределения равно:

$$\delta_{\text{абс}} = (r-1)\Delta\frac{1 - p^{\frac{k}{r}}}{1 - p^2}\big(1 + p - (1 - p)\big)n = \left((r-1)\Delta\frac{1 - p^{\frac{k}{r}}}{1 - p^2}\right)2pn.$$

Относительное уменьшение границ времени выполнения запросов при использовании квазиоптимального распределения вместо естественного распределения равно:

$$\delta_{\text{отн}} = \frac{\delta_{\text{абс}}}{\left((r-1)\Delta(1+p)\left(\frac{1-p^{\frac{k}{r}}}{1-p^2}\right)n\right)} 100\% = \left(\frac{2p}{1+p}\right) 100\%,$$

что при $p \geq 0{,}25$ составляет больше или равно 40 % и при $p \geq 0{,}5$ составляет $\geq 67\%$.

3.2.3. Эффективность квазиоптимального распределения

Полученные результаты характеризуют эффективность квазиоптимального распределения элементарных запросов по процессорам, т.к. это распределение обеспечивает минимальное время выполнения запроса на *r* процессорах.

Время выполнения на i-м процессоре *k/r* элементарных запросов из общего числа *k* элементарных запросов при квазиоптимальном порядке их распределения по процессорам, когда данные в столбцах неупорядочены, равно (здесь, как и ранее, *k/r* есть целое четное число)

$$T_{r,i,g,o} = \left(a^{i-1} + pa^{2r-i}\right)\left(\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2}\right) n, i = \overline{1,r}.$$

Максимальное время завершения обработки *k/r* элементарных запросов на всех процессорах в частных случаях равно:

- для $r = 1$

$$T_{r=1,1a,0} = T_{r=1,1a,e} = n\left(\frac{1-p^k}{1-p} + p\Delta\frac{1-kp^{k-1}+(k-1)p^k}{(1-p)^2}\right),$$

- для $r = \frac{k}{4}$

$$T_{r=\frac{k}{4},\frac{k}{4},a,0} = n\left(1+\left(\frac{k}{4}-1\right)\Delta + p\left(1+\frac{k}{4}\Delta\right)\right)\ (1+p^2)+\frac{k}{2}\Delta p^2(1+p)$$

- для $r = \frac{k}{2}$

$$T_{r=\frac{k}{2},\frac{k}{2},a,0} = \left(1+\left(\frac{k}{2}-1\right)\Delta + p\left(1+\frac{k}{2}\Delta\right)\right)n,$$

- для $r = k$

$$T_{r=k,k,a,0} = T_{r=k,k,a,e} = (1+(k-1)\Delta)n\,.$$

Приведем ряд численных результатов для этих формул, см. таблицу 3:

Таблица 3 Численные результаты

N-Процессора	K=8					
	$\Delta = 0.4$			$\Delta = 0.5$		
	P=0.5	P=0.6	P=0.7	P=0.5	P=0.65	P=0.7
r=1	2.7641 n	3.7984 n	5.4580 n	2.9570 n	4.9705 n	6.0372 n
r =2	3.4750 n	4.2944 n	5.2962 n	3.8750 n	5.3773 n	5.9870 n
r =4	3.5000 n	3.7600 n	4.0200 n	4 n	4.4500 n	4.6000 n
r =8	3.8000 n			4.5000 n		

3.3. Естественный порядок распределения. Геометрическая прогрессия

Пусть время выполнения элементарного запроса подчиняется закону геометрической прогрессии

$$\tau_i = a^{i-1}, a > 1, p_i = p, \overline{i = 1, k};$$

Время выполнения на i-м процессоре k/r элементарных запросов из общего числа k элементарных запросов при естественном порядке их распределения по процессорам, когда данные в столбцах неупорядочены, равно:

$$T_{r,i,g,e} = (a^{i-1}) \left(\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-pa^r} \right) n, \ i = \overline{1, r}.$$

В самом деле, в соответствии с теоремой 1[1] имеем:

$$T_{r,i,g,e} = (a^{i-1} + pa^{r+i-1} + p^2 a^{2r+i-1} + p^3 a^{3r+i-1} + p^4 a^{4r+i-1} + p^5 a^{5r+i-1} + \ldots + p^{\frac{k}{r}-2} a^{k-2r+i-1} + p^{\frac{k}{r}-1} a^{k-r+i-1})\, n = a^{i-1} \left(\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-pa^r} \right) n, i = \overline{1, r}.$$

Можно представить $T_{r,i,g,e}$ в другом виде

$$T_{r,i,g,e} = (a^{i-1} + pa^{r+i-1}) \left(\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2} \right) n,$$

так как

$T_{r,i,g,в}$=$(a^{i-1}(1+p^2a^{2r}+p^4a^{4r}+\ldots+a^{k-2r})+$

$pa^{r+i-1}(1+p^2a^{2r}+p^4a^{4r}+\ldots+a^{k-2r}))n.$

или

$$T_{r,i,g,в}=(a^{i-1}+pa^{r+i-1})\left(\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2}\right)n, i=\overline{1,r}.$$

Очевидно, что эти два выражения для $T_{r,i,g,в}$ идентичны, так как

$$a^{i-1}+pa^{r+i-1}=\left(a^{i-1}\right)(1+pa^r).$$

Однако, последнее выражение для $T_{r,i,g,в}$ дает возможность показать, что квазиоптимальный алгоритм обеспечивает меньшее время вычисления запроса *r* процессорами.

3.4. Квазиоптимальный порядок распределения. Геометрическая прогрессия

3.4.1. Время выполнения

Время выполнения на *i*-м процессоре *k/r* элементарных запросов из общего числа *k* элементарных запросов при квазиоптимальном порядке их распределения по процессорам, когда данные в столбцах неупорядочены, равно (для простоты записей будем считать, что *k/r* есть целое четное число):

$$T_{r,i,g,o}=\left(a^{i-1}+pa^{2r-i}\right)\left(\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2}\right)n, i=\overline{1,r}.$$

В самом деле, в соответствии с теоремой 1 имеем:

$$T_{r,i,g,o} = \left(a^{i-1} + pa^{2r-i} + p^2a^{2r+i-1} + p^3a^{4r-i} + p^4a^{4r+i-1} + p^5a^{6r-i} + \cdots \right.$$
$$\left. + p^{\frac{k}{r}-2}a^{k-2r+i-1} + p^{\frac{k}{r}-1}a^{k-i} \right) n$$

или

$$T_{r,i,g,o} =$$
$$\left(a^{i-1}\left(1 + p^2a^{2r} + p^4a^{4r} + p^6a^{6r} + \cdots + p^{\frac{k}{r}-2}a^{k-2r}\right) + pa^{2r-i}\left(1 + p^2a^{2r} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + p^4a^{4r} + \cdots + p^{\frac{k}{r}-2}a^{k-2r}\right)\right) n$$

или

$$T_{r,i,g,o} =$$
$$\left(a^{i-1} + pa^{2r-i}\right)\left(1 + (p^2a^{2r})^1 + (p^2a^{2r})^2 + (p^2a^{2r})^3 + \cdots + +(p^2a^{2r})^{\frac{k}{2r}-1}\right) n$$

или

$$T_{r,i,g,o} = \left(a^{i-1} + pa^{2r-i}\right)\left(\frac{1-p^{\frac{k}{r}}a^k}{1-(pa^r)^2}\right) n = \left(a^{i-1} + pa^{2r-i}\right)\left(\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2}\right) n,\ i = \overline{1,r}.$$

3.4.2. Соотношения времени выполнения на *i*-м и *j* -м процессорах

Для **естественного** порядка распределения элементарных запросов непосредственно из выражения для $T_{r,i,g,e}$, $i = \overline{1,r}$, $r > 1$, имеем неравенства:

$$T_{r,1,g,e} < T_{r,2,g,e} < \cdots < T_{r,r,g,e}.$$

Для **квазиоптимального** порядка распределения элементарных запросов на основании выражений для $T_{r,i,g,o}$, $i = \overline{1,r}$, r >1,

при $\boldsymbol{pa^2} > 1$ имеем неравенства:

$T_{r,1,g,o} > T_{r,2,g,o} > \cdots > T_{r,r-1,g,o} > T_{r,r,g,o}$

В самом деле, неравенство $T_{r,r-1,g,o} > T_{r,r,g,o}$выполняется тогда и только тогда, когда

$a^{r-2} + pa^{r+1} > a^{r-1} + pa^r$

или когда

$pa^r(a-1) > a^{r-2}(a-1)$

или когда

$pa^2 > 1.$

Неравенство $T_{r,r-2,g,o} > T_{r,r-1,g,o}$выполняется, когда

$pa^{r+1}(a-1) > a^{r-3}(a-1)$

или когда

$pa^4 > 1,$

что выполняется при $pa^2 > 1$

и так далее.

Наконец, неравенство $T_{r,1,g,o} > T_{r,2,g,o}$ выполняется, когда

$$pa^{2r-2}(a-1) > a-1$$

или когда

$$pa^{2(r-1)} > 1,$$

что естественно выполняется при

$$pa^2 > 1.$$

Обобщая, находим, что все исходные неравенства выполняются при $pa^2 > 1$, что и т.д.

Максимальный разброс времени выполнения запросов здесь составляет:

$$T_{r,1,g,o} - T_{r,r,g,o} = (a^{r-1}-1)(pa^r-1)\left(\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2}\right)\text{n}.$$

При $\boldsymbol{pa^2} < 1$, но при $\boldsymbol{pa^4} > 1$, выполняется следующая цепочка неравенств:

$$T_{r,1,g,o} > T_{r,2,g,o} > \cdots > T_{r,r-1,g,o} < T_{r,r,g,o},$$

при этом неравенство $T_{r,1,g,o} > T_{r,r,g,o}$ выполняется, если

$$1 + pa^{2r-1} > a^{r-1} + pa^r$$

или если $pa^r > 1$ (r$\geq$ 4).

Напротив, неравенство

$T_{r,1,g,o} < T_{r,r,g,o}$ выполняется, если $pa^r < 1$, (r≤ 3).

Аналогично, при $\boldsymbol{pa^4} < 1, \boldsymbol{pa^6} > 1$ имеем неравенства:

$T_{r,1,g,o} > T_{r,2,g,o} > \cdots > T_{r,r-2,g,o} < T_{r,r-1,g,o} < T_{r,r,g,o}$,

и вообще, при $\boldsymbol{pa^{2i}} < 1, \boldsymbol{pa^{2(i+1)}} > 1, \overline{i = 1, r-2},$ имеем:

$T_{r,1,g,o} > T_{r,2,g,o} < \cdots < T_{r,r-i,g,o} < T_{r,r-i+1,g,o} < \cdots < T_{r,r,g,o}$.

Наконец, при $\boldsymbol{pa^{2(r-1)}} < 1$ имеем:

$T_{r,1,g,o} < T_{r,2,g,o} < \cdots < T_{r,r-2,g,o} < T_{r,r-1,g,o} < \cdots < T_{r,r,g,o}$.

Максимальный разброс времени выполнения обработки запросов при $\boldsymbol{pa^{2(r-1)}} < 1$

составляет:

$$T_{r,r,g,o} - T_{r,1,g,o} = (a^{r-1} - 1)(1 - pa^r)\left(\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2}\right)n.$$

Минимальная и максимальная границы времени выполнения

Имея в виду, что выполняется $T_{r,1,g,e} < T_{r,1,g,o}$,

так как (1+pa^r)<(1+pa^{2r-1}) или $1 < a^{r-1}$, при $r > 1$ и $a > 1$,

и также выполняется $T_{r,r,g,o} < T_{r,r,g,e}$, так как $a^{r-1} + pa^r < a^r(1 + pa^r)$ или $pa(a^r - 1) + (a - 1) > 0$,

находим, что минимальная и максимальная границы времени выполнения при оптимальном распределении лежат внутри минимальной и максимальной границы при естественном распределении.

Максимальный разброс времени выполнения обработки запросов на *r* процессорах составляет:

- при **естественном** порядке

$$T_{r,r,g,e'} - T_{r,1,g,e'} = \left((a^{r-1} - 1) - (1 + pa^r) \frac{1 - (pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1 - (pa^r)^2} \right) n$$

- при **квазиоптимальном** порядке

$$T_{r,1,g,o} - T_{r,r,g,o} = (a^{r-1} - 1)(pa^r - 1) \frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2} n \text{, при } pa^2 > 1 \text{,}$$

$$T_{r,r,g,o} - T_{r,1,g,o} = (a^{r-1} - 1)(1 - pa^r) \frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2} n \text{,при } pa^r < 1.$$

Абсолютное уменьшение границ времени выполнения запросов при использовании оптимального распределения вместо естественного распределения равно:

$$\delta_{\text{абс}0} = \left(\left((a^{r-1} - 1)(1 + pa^r) - (a^{r-1} - 1)(1 - pa^r) \right) \frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2} \right) n$$

$$=(a^{r-1}-1)2pa^r\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2}n.$$

Относительное уменьшение границ времени выполнения запросов при квазиоптимальном распределении

$$\delta_{\text{отно}}=\frac{\delta_{\text{абсо}}}{\left((a^{r-1}-1)(1+pa^r)\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2}\right)}=\frac{2pa^r}{(1+pa^r)}.$$

3.4.3. Эффективность квазиоптимального распределения

Время выполнения на i-м процессоре *k/r* элементарных запросов из общего числа *k* элементарных запросов при квазиоптимальном порядке их распределения по процессорам, когда данные в столбцах неупорядочены, равно (здесь, как и ранее, *k/r* есть целое четное число)

$$T_{r,i,g,o}=\left(a^{i-1}+pa^{2r-i}\right)\left(\frac{1-(pa^r)^{\frac{k}{r}}}{1-(pa^r)^2}\right)n,\ i=\overline{1,r}.$$

Максимальное время завершения обработки *k/r* элементарных запросов на всех процессорах в частных случаях равно:

- для $r=1$

$$T_{1,1,g,o}=\left(\frac{1-(pa)^k}{1-pa}\right)n,$$

- для $r=\frac{k}{4}$

при $pa^2 > 1$

$$T_{r=\frac{k}{4},1,g,o} = \left(\left(1 + pa^{k/2-1}\right)\left(1 + \left(pa^{k/4}\right)^2\right)n,\right.$$

при $pa^{2r-2} < 1$

$$T_{r=\frac{k}{4},\frac{k}{4},g,o} = \left(\left(a^{\frac{k}{4}-1} + pa^{\frac{k}{4}}\right)\left(1 + \left(pa^{\frac{k}{4}}\right)^2\right)\right)n,$$

- для $r = \frac{k}{2}$

при $pa^2 > 1$

$$T_{r=\frac{k}{2},1,g,o} = \left(1 + pa^{k-1}\right)n,$$

при $pa^{2r-2} < 1$

$$T_{r=\frac{k}{2},\frac{k}{2},g,o} = a^{\frac{k}{2}-1}(1 + pa)n,$$

- для $r = k$

$$T_{r=k,k,g,e} = n\left(a^{k-1}\right).$$

Приведем ряд численных результатов для этих формул при k=8; a=1.15, 1.2,1.25,1.3; p=0.6,0.7, см. таблицу 4:

Таблица 4 Численные результаты

N-Процессора	k=8			
	a =1.15		a =1.2	
	P=0.6	P=0.7	P=0.6	P=0.7
r=1	3.0601 n	4.2239 n	3.3135 n	4.7008 n
r =2	3.1167 n	3.8340 n	3.5573 n	4.4547 n
r =4	2.5960 n	2.8620 n	3.1499 n	3.5082 n
r =k	2.6600 n		3.5832 n	
N-Процессора	k=8			
	a =1.25		a =1.3	
	P=0.6	P=0.7	P=0.6	P=0.7
r=1	3.5995 n	5.2511 n	3.9227 n	5.8861 n
r =2	4.0807 n	5.1990 n	4.7018 n	6.0897 n
r =4	3.8610 n	4.3379 n	4.7649 n	5.3924 n
r =k	4.7684 n		6.2749 n	

4. Замечание

Эффективность квазиоптимального распределения на основании Теорем 1и 2[1,2] имеет место, как для неупорядоченных, так и для упорядоченных таблиц.

5. Выводы

5.1 Определены соотношения времени выполнения запроса в многопроцессорной базе данных для естественного и квазиоптимального порядка их распределения.

5.2. Определены минимальная и максимальная границы времени выполнения групп элементарных запросов в отдельных процессорах для естественного и квазиоптимального порядка распределения элементарных запросов.

5.3. Доказана эффективность квазиоптимального распределения на основе абсолютного и относительного уменьшения границ времени выполнения запросов при использовании квазиоптимального распределения вместо естественного распределения, что является важным решением для оптимизации обработки запросов в многопроцессорных базах данных авиационно-космических систем.

Список литературы:

1. Amol Deshpande, Zacchary Ives, Vijayshankar Raman – Adaptive Query Processing // Foundations and Trends in Databases. -2007. –Vol.1, No.1, p.1-140.

2. Брехов О.М. Аналитическая оценка оптимальной обработки запросов // Успехи современной радиоэлектроники. 2012. Т.12. №7. С. 37-45.

3. Брехов О.М., Мьо Тант. Оптимизация обработки запросов в многопроцессорной базе данных // Вестник Московского авиационного института. 2012. Т.19. № 5. С.138-146.