

ДИНАМИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ БАЛОК С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Валерий Васильевич ФИРСАНОВ родился в 1943 г. в городе Шадринске Курганской области. Заведующий кафедрой МАИ. Доктор технических наук, профессор. Основные научные интересы — в области динамики, прочности и безопасности авиационных конструкций. Автор более 200 научных работ. E-mail: k906@mai.ru

Valery A. FIRSANOV, D.Sci., was born in 1943, in the Kurgan Region. He is the Head of a Department at the MAI. His major research interests are in dynamics, strength and safety for aircraft structures. He has published over 200 technical papers. E-mail: k906@mai.ru

Чан Нгок Доан родился в 1981 г. в Ха Нам — Ли Ньян; Социалистическая Республика Вьетнам. Аспирант МАИ. Основные научные интересы — в области динамики, прочности и прочности машин, приборов и аппаратуры. Автор трех научных работ. E-mail: trandoan@mail.ru

Tran Ngoc Doan was born in 1981, in the Socialist Republic of Vietnam. He is a Postgraduate Student at the MAI. His research interests are in dynamics, strength for machines, devices and equipment. He has published 3 technical papers. E-mail: trandoan@mail.ru

В работе рассматривается решение важной для практического применения задачи о колебаниях системы двух балок при действии подвижной нагрузки с помощью наиболее полного варианта постановки задачи. При разработке математической модели колебаний системы используется метод разложения по формам собственных колебаний; при этом система упругих колебаний балок должна быть дополнена нулевыми формами движения как абсолютно жесткого тела. Для расчета колебаний системы используются уравнения Лагранжа второго рода. Исследуется влияние различных факторов на динамическое состояние балки с переменными параметрами при действии подвижной нагрузки.

An important applied problem is studied, which consists in oscillation analysis for two beams with variable parameters under moveable load action. A technique basing on decomposition on natural oscillation modes is used to derive mathematical model for the problem. The elastic beam system must be expanded in this case with zero-motion modes as for a perfectly rigid body case. Lagrange second-degree equations are used to calculate oscillations of the system. Effect of various factors to dynamic state of the beam with variable parameters is investigated under moveable load action.

Ключевые слова: динамическое состояние, система балок, подвижная нагрузка, колебания системы, переменные параметры, формы собственных колебаний, уравнения Лагранжа, ускорение, реакция, податливость.

Key words: dynamic state, beam system, moveable load, system oscillation, variable parameters, natural oscillation modes, Lagrange equations, acceleration, reaction, compliance.

Условные обозначения

- НБ — неподвижная балка;
- ПБ — подвижная балка;
- ЭВМ — электронно-вычислительная машина;
- ЦМ — центр масс.

Введение

Одной из классических задач теории колебаний является задача о динамическом действии подвижной нагрузки на балку [1, 2]. Для случая малой скорости подвижной нагрузки решение данной задачи в первом приближении может быть получено в статической постановке с учетом переменности положения подвижной нагрузки, т.е. «кинематичности» нагружения. Более точный вариант решения задачи предполагает, что масса балки несущ-

ественна, но действие подвижной нагрузки отличается от статического. При значительных скоростях перемещения подвижной нагрузки в балке возникают инерционные силы подвижных грузов, а также силы инерции самой балки за счет прогибов балки. Наконец, третий, наиболее полный вариант, учитывает как массу балки, так и массу подвижных грузов. В этом случае колебания системы моделируются уравнением поперечных колебаний балки с переменной жесткостью и подвижными грузами, решение которого удобно находить с помощью интегральных уравнений [1]. Следует отметить, что решение задачи по этому варианту проведено только для некоторых частных случаев, например для балки постоянной жесткости под действием нагрузки, движущейся с постоянной скоростью.

В работе рассматривается наиболее полный вариант решения важной для практического применения задачи о колебаниях системы под действием подвижной нагрузки, который обладает рядом особенностей, усовершенствующих решение этой задачи, а именно:

- груз представляет собой протяженное тело типа балки, прикрепленное рядом узлов к неподвижной балке (НБ), а НБ жестко крепится к массивной среде несколькими узлами;

- в начальный момент времени груз (подвижная балка (ПБ)) начинает двигаться в продольном направлении, при этом узлы его крепления сходят с НБ, вызывая дополнительное динамическое нагружение системы;

- груз движется равноускоренно со значительной скоростью;

- НБ и ПБ представляются в виде статически неопределимых балок со ступенчато изменяющимися жесткостными и массовыми характеристиками.

При разработке расчетной модели колебаний этой системы для упрощения решения приняты следующие допущения:

- время движения ПБ по НБ равно времени движения по абсолютной жесткой балке;

- расчет вынужденных колебаний системы производится с помощью модели упругой балки переменной массы и жесткости, работающей на изгиб и нерастяжимой в продольном направлении;

- при определении собственных форм изгибных колебаний ПБ удобно рассматривать ее как свободную балку, освобожденную от промежуточных опор, при этом наличие контакта обеих балок учитывается как действие поперечных сил в узлах крепления в соответствующих уравнениях движения;

— движение ПБ по НБ происходит без отрыва и заклинивания.

В расчетной модели колебаний системы ПБ, имеющая ряд узлов крепления, приводится к балке, по которой перемещается ряд подвижных грузов. Сила веса каждого груза определяется из расчета статически неопределимой балки с учетом изменения взаимного расположения балок при движении грузов.

Мысленно расчленим нашу систему на две подсистемы ПБ и НБ для определения усилий взаимодействия между ними. Полагаем, что для k -го сечения площадь поперечного сечения F_k , момент инерции сечения на изгиб J_k , плотность ρ_k , модуль Юнга E_k материала имеют постоянное значение по длине этого участка балки (рис. 1). Количество участков выбирается в зависимости от переменности упругомассовых характеристик конкретной балки.

Модель подвижной балки

Положение ПБ характеризуется координатами ее центра масс $x_{uП}$, $y_{uП}$ в системе координат Oxy и углом отклонения α , а ее изгибные деформации — функцией прогиба $w(\xi, t)$ в системе координат $O_1\xi w$, связанной с ПБ (рис. 1).

Функцию прогиба представляем в виде разложения

$$w(\xi, t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) W_i(\xi), \quad (1)$$

где $W_i(\xi)$ — собственные формы колебаний, предварительно определяемые на ЭВМ методом конеч-

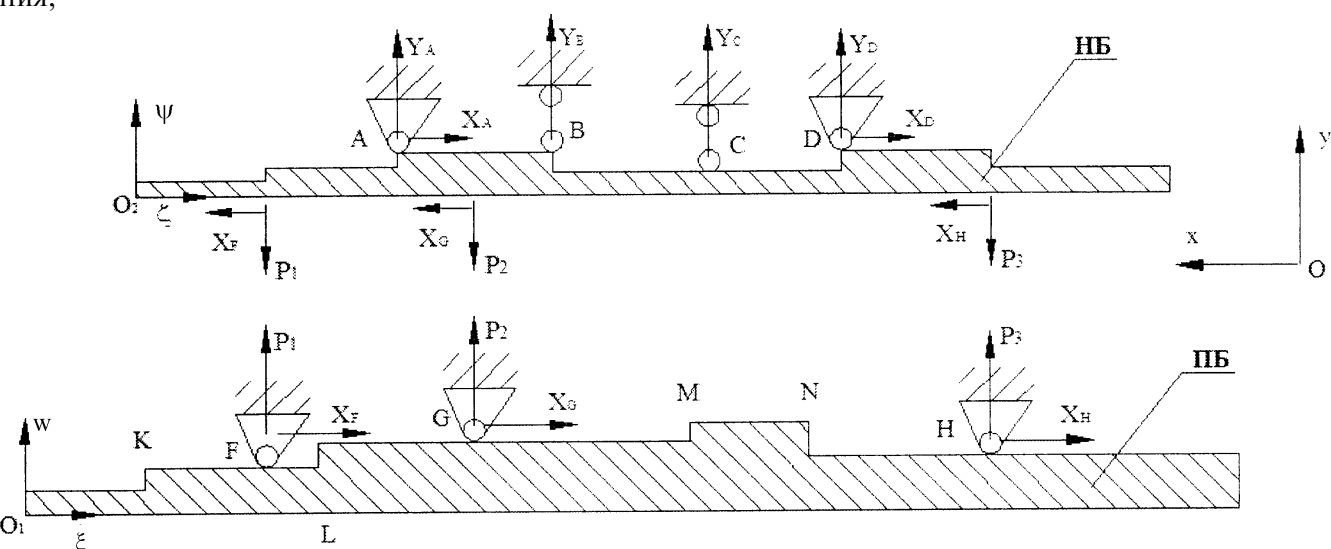


Рис. 1. Расчетная схема системы балок

ных элементов или аналитически методом граничных элементов; n — число собственных форм колебаний ПБ, учитываемых при расчете.

Кинетическая энергия ПБ может быть представлена в виде

$$T_{II} = \frac{1}{2} M_{II} (\dot{x}_{uII}^2 + \dot{y}_{uII}^2) + \frac{1}{2} J_{uII} \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|W_i\|^2 \dot{f}_i^2, \quad (2)$$

а ее потенциальная энергия запишется как

$$U_{II} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \|W_i\|^2 \Omega_i^2 f_i^2, \quad (3)$$

где M_{II} и J_{uII} — масса и момент инерции ПБ относительно ее ЦМ; \dot{x}_{uII} и \dot{y}_{uII} — компоненты линейной скорости ЦМ ПБ; $\dot{\alpha}$ — угловая скорость ПБ в общей системе координат Oxy ; Ω_i — собственные частоты колебаний ПБ. Через $\|W_i\|^2$ обозначены квадраты норм следующего вида:

$$\|W_i\|^2 = \int_0^{l_{II0}} W_i^2(\xi) \rho F(\xi) d\xi,$$

где l_{II0} — длина ПБ.

В качестве внешних сил, действующих на ПБ, в выражение для элементарной работы δA_{II} будут входить реакции P_i ($i = 1, 2, 3$) в узлах крепления ПБ к НБ, силы трения F_{mj} ($j = 1, 2, 3$), распределенная активная нагрузка $p_a^II(\xi, t)$, распределенная сила инерции $p_u^II(\xi, t) = \rho_k F_k \chi_y^II$, где χ_y^II — задаваемый коэффициент. Элементарная работа действующих на ПБ сил определяется следующим выражением:

$$\delta A_{II} = \delta A_p + \delta A_a + \delta A_m + \delta A_u, \quad (4)$$

где индексы « p », « a », « m » и « u » относятся к реактивному, активным силам, а также силам трения и инерции соответственно.

Элементарная работа реакций в узлах крепления ПБ выражается как $P_1 \delta w_1 + P_2 \delta w_2 + P_3 \delta w_3$. Запишем выражение для элементарной работы сил трения в виде $F_{mp1} \delta \xi_1 + F_{mp2} \delta \xi_2 + F_{mp3} \delta \xi_3$. Элементарная работа распределенных активной нагрузки и сил инерции выражается в виде интегральных характеристик $F_{II}^x, F_{II}^y, M_{II}^z$ (силы и момент),

$$a_{Pi}(t) = \int_0^{l_{II0}} p_a^II(\xi, t) W_i(\xi) d\xi, \quad -\chi_y^0 M_{II} g,$$

$$b_{Pi}(t) = \int_0^{l_{II0}} p_u^II(\xi, t) W_i(\xi) d\xi \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Здесь M_{II} — масса ПБ; χ_y^0 — задаваемый постоянный коэффициент.

Силы трения определяются по следующей формуле:

$$F_{mi} = k_m |P_i| = k_m \text{sign}(P_i) P_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где k_m — коэффициент трения при движении ПБ по НБ.

Модель неподвижной балки

Функцию прогиба НБ в системе координат $O_2 \zeta \psi$, связанной с НБ, выражаем в виде разложения по собственным формам

$$\psi(\zeta, t) = \sum_{s=1}^m q_s(t) \Psi_s(\zeta), \quad (5)$$

где $\Psi_s(\zeta)$ — собственные формы колебаний, предварительно определяемые на ЭВМ методом конечных элементов или аналитически методом граничных элементов; m — число собственных форм колебаний НБ, учитываемых при расчете.

Кинетическую и потенциальную энергию НБ запишем в виде

$$T_H = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \|\Psi_s\|^2 \dot{q}_s^2; \quad (6)$$

$$U_H = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^m \|\Psi_s\|^2 \omega_s^2 q_s^2. \quad (7)$$

Здесь $\|\Psi_i\|^2$ определяется формулой

$$\|\Psi_i\|^2 = \int_0^{l_{H0}} \Psi_i^2(\zeta) \rho F(\zeta) d\zeta,$$

где l_{H0} — длина НБ.

Элементарная работа внешних сил, действующих на НБ, определяется как

$$\delta A_H = \delta A_p + \delta A_m + \delta A_a + \delta A_u. \quad (8)$$

В формуле (8) индексы «*p*», «*a*», «*m*» и «*u*» имеют тот же смысл, что и в формуле (4).

Работа реакций в узлах крепления и сил трения определяется по аналогии с ПБ. Элементарную работу внешней нагрузки и сил инерции по аналогии с ПБ можно выразить через интегральные характеристики F_H^x, F_H^y, M_H^z (силы и момент),

$$a_{Hi}(t) = \int_0^{l_{H0}} p_a^H(\zeta, t) \Psi_i(\zeta) d\zeta, \quad -\chi_y^0 M_H g,$$

$$b_{Hi}(t) = \int_0^{l_{H0}} p_u^H(\zeta, t) \Psi_i(\zeta) d\zeta \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

где $p_a^H(\zeta, t), p_u^H(\zeta, t)$ — соответственно распределенная активная и инерционная нагрузки, действующие на НБ; M_H — масса НБ.

Обобщенные координаты и уравнения связей. При выводе уравнений движения для рассматриваемой системы с помощью уравнений Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{r}_i} \right) - \frac{\partial (T - U)}{\partial r_i} = \frac{\partial A}{\partial r_i} \quad (9)$$

используем полученные выражения (2)—(4) для $T_{II}, U_{II}, \delta A_{II}$ и (6)—(8) для $T_H, U_H, \delta A_H$, которые содержат следующие неизвестные функции времени:

линейные и угловые перемещения ПБ $x_{uII}(t), y_{uII}(t), \alpha(t)$; коэффициенты $f_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) разложения (1) прогиба ПБ $w(\xi, t)$; реакции в узлах крепления ПБ P_1, P_2, P_3 ; коэффициенты $q_s(t)$ ($s = 1, 2, \dots, m$) разложения (5) прогиба НБ $\psi(\zeta, t)$.

В качестве обобщенных координат принимаем следующие функции: $r_1 = x_{uII}; r_2 = y_{uII}; r_3 = \alpha;$
 $r_{i+3} = f_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$); ($s = 1, 2, \dots, m$).

После выполнения операций, предусмотренных уравнением Лагранжа (9), с использованием полученных выражений для потенциальной U , кинетической T энергии ПБ, НБ и элементарной работы δA внешних сил, действующих на них, после преобразований получаем следующие дифференциальные уравнения динамики исследуемой механической системы:

$$M_{II} \ddot{x}_{uII} = \sum_{i=1}^3 (-P_i \sin \alpha - F_{mi} \cos \alpha) + F_{II}^x;$$

$$M_{II} \ddot{y}_{uII} = \sum_{i=1}^3 (P_i \cos \alpha - F_{mi} \sin \alpha) + F_{II}^y - \chi_y^0 M_{II} g;$$

$$J_{uII} \ddot{\alpha} = P_1 d_1 + P_2 d_2 - P_3 d_3 + \sum_1^3 F_{mi} (w_i + l_\sigma) + M_{II}^z;$$

$$\ddot{f}_i + \Omega_i^2 f_i =$$

$$= \frac{1}{\|W_i\|^2} \left[\sum_{k=1}^3 P_k W_i(\xi_k) + a_{IIi}(t) + b_{IIi}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n); \right] \quad (10)$$

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i =$$

$$= \frac{1}{\|\Psi_i\|^2} \left[\sum_{k=1}^3 (-P_k \Psi_i(\zeta_k)) + a_{Hi}(t) + b_{Hi}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m); \right]$$

$$F_{mi} = k_m |P_i| = k_m \text{sign}(P_i) P_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Здесь используются следующие обозначения: l_σ — высота узлов крепления ПБ к НБ; w_i ($i = 1, 2, 3$) — деформации ПБ в точках, где находятся узлы крепления; ψ_i ($i = 1, 2, 3$) — деформации НБ в точках контакта с ПБ; d_i ($i = 1, 2, 3$) — расстояния между ЦМ ПБ и узлами крепления; ζ_i ($i = 1, 2, 3$) — расстояние между ЦМ НБ и точками контакта с ПБ.

Далее, рассматривая деформации ПБ и НБ, можно получить кинематические соотношения (уравнения связей).

Из рис. 2 видно, что

$$(d_{1,2} - \Delta x_{1,2}) \sin \alpha + (w_{1,2} + l_\sigma + \Delta y_{1,2}) \cos \alpha - \psi_{1,2} + (y_{uII} - y_{uH}) = 0; \quad (11)$$

$$(-d_3 - \Delta x_3) \sin \alpha + (w_3 + l_\sigma + \Delta y_3) \cos \alpha - \psi_3 + (y_{uII} - y_{uH}) = 0, \quad (12)$$

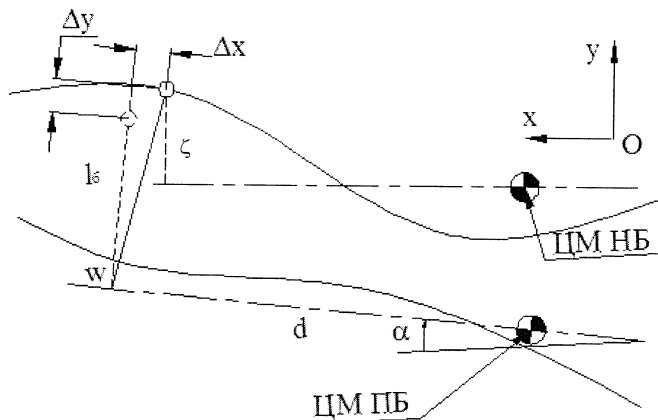


Рис. 2. Кинематическая схема упругих балок

где $\Delta x_i, \Delta y_i$ — деформации узлов крепления ПБ к НБ. Они определяются по следующим формулам:

$$\Delta x_i = F_{mi} K_{xi}; \quad \Delta y_i = P_i K_{yi} \quad (i = 1, 2, 3),$$

где K_{xi}, K_{yi} — коэффициенты податливости узлов крепления.

Дифференцируя (11), (12) по времени, получаем

$$\begin{aligned} \dot{P}_j = & \frac{1}{K_y - K_x k_m \text{sign}(P_j)} \left[\sum_{i=1}^m (\dot{q}_i \Psi_i(\zeta_j) + q_i \Psi'_i(\zeta_j) v) - \right. \\ & - (d_{jj} - K_x k_m \text{sign}(P_j)) \dot{\alpha} - \\ & \left. - \sum_{i=1}^n \dot{f}_i W_i(\xi_j) - \dot{y}_{u\Pi} \right] \quad (j = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь v — скорость движения ПБ; $d_{11} = d_1$; $d_{22} = d_2$;

$$d_{33} = -d_3.$$

Учитывая условие, что НБ движется равноускоренно с ускорением a , систему уравнений (10) можно переписать в следующем виде:

$$\ddot{y}_{u\Pi} = \frac{1}{M_{\Pi} \cos \alpha} \sum_{i=1}^3 P_i + a \text{tg} \alpha - \chi_y^0 g + \frac{1}{M_{\Pi}} (F_{\Pi}^y - F_{\Pi}^x \text{tg} \alpha);$$

$$J_{u\Pi} \ddot{\alpha} = \sum_{j=1}^3 P_j d_{jj} + \sum_{i=1}^3 F_{mi} (w_i + l_{\sigma}) + M_{\Pi}^z;$$

$$\ddot{f}_i + \Omega_i^2 f_i =$$

$$= \frac{1}{\|W_i\|^2} \sum_{k=1}^3 P_k W_i(\xi_k) + a_{\Pi i}(t) + b_{\Pi i}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, n); \quad (14)$$

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i =$$

$$= \frac{1}{\|\Psi_i\|^2} \sum_{k=1}^3 (-P_k \Psi_i(\zeta_k)) + a_{Hi}(t) + b_{Hi}(t) \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$F_{mi} = k_m |P_i| = k_m \text{sign}(P_i) P_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где a — ускорение ПБ.

Общий порядок системы дифференциальных уравнений (13), (14) равен $2(m + n) + 7$. Система приводится к стандартному виду Коши и интегрируется на ЭВМ методом Рунге—Кутты, для применения которого необходимо сформулировать начальные условия.

Предположим, что в первоначальный момент времени вся система находится в состоянии покоя.

Тогда мы можем записать

$$\dot{y}_{u\Pi}(0) = \dot{\alpha}(0) = 0, \quad \dot{q}_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m);$$

$$\dot{f}_i(0) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad y_{u\Pi}(0) = 0, \quad \alpha(0) = 0.$$

Начальные значения $P_j(0)$ ($j = 1, 2, 3$) равны значениям вертикальных составляющих реакций в точках F, G, H , определяемых из расчета статической неопределимой ПБ, т.е.

$$P_j(0) = P_{j0} \quad (j = 1, 2, 3).$$

Величины $q_i(0)$ и $f_i(0)$ определяются начальным деформированным состоянием системы. Для того чтобы найти $q_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), необходимо знать прогибы НБ $\psi_i = \psi(\zeta_j)$ в нескольких точках ζ_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Зная ψ_i , определим значения $q_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) как решение системы уравнений

$$\psi_j = \sum_{i=1}^m q_i(0) \Psi_i(\zeta_j) \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Аналогично находим значения $f_i(0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

Анализ результатов параметрических расчетов

Описанная выше модель динамики механической системы «ПБ—НБ» была реализована в виде программы для ЭВМ с помощью компьютерной математической системы Matlab. В расчетах принимается $p_a^H = p_a^{\Pi} = F_{\Pi}^x = F_{\Pi}^y = M_{\Pi}^z = 0$, постоянный коэффициент $\chi_y^0 = 1$, коэффициент трения $k_{mp} = 0,4$, ускорение движение ПБ $a = 130$ м/с², коэффициенты податливости $K_x = 0,4 \cdot 10^{-4}$ м/кН, $K_y = 0,3 \cdot 10^{-4}$ м/кН.

В результате вычислений определяются как функции времени вертикальные реакции в узлах крепления и ускорения в ПБ, отнесенные к ускорению силы тяжести g . Графики этих функций изображены на рис. 3.

На рис. 3 маркерами показаны результаты расчета, полученные в работе В.В. Фирсанова. Анализ показывает хорошее соответствие результатов, полученных различными методами.

Исследуем влияние различных параметров на динамическое состояние системы.

Рассмотрим влияние начального деформированного состояния, вызванного действием внешних нагрузок.

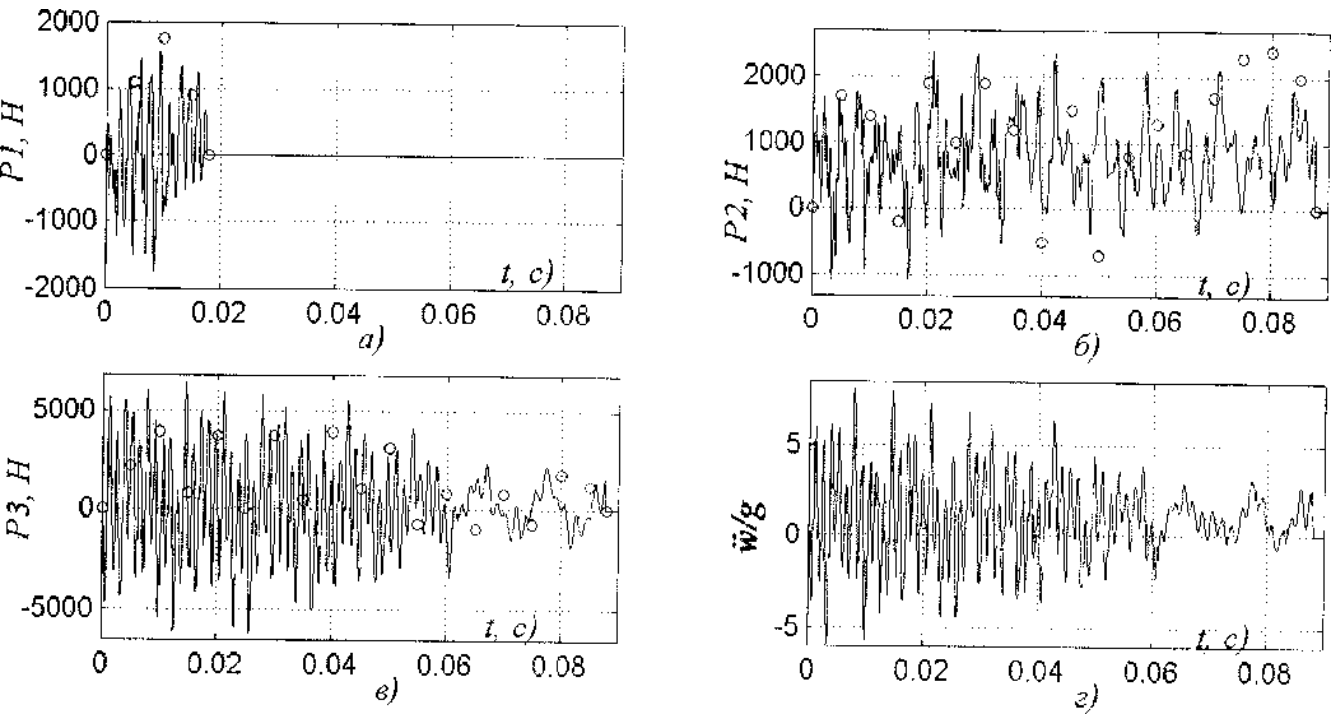


Рис. 3. Изменение во времени вертикальных усилий в узлах крепления (а,б,в) и относительного вертикального ускорения (г)

На рис. 4 приведены графики изменения во времени вертикального усилия в третьем узле крепления P_3 (рис. 4,а) и вертикального ускорения ПБ (рис. 4,б).

Рис. 4. Временная зависимость вертикального усилия (а) и относительного ускорения ПБ (б) с учетом начального деформированного состояния

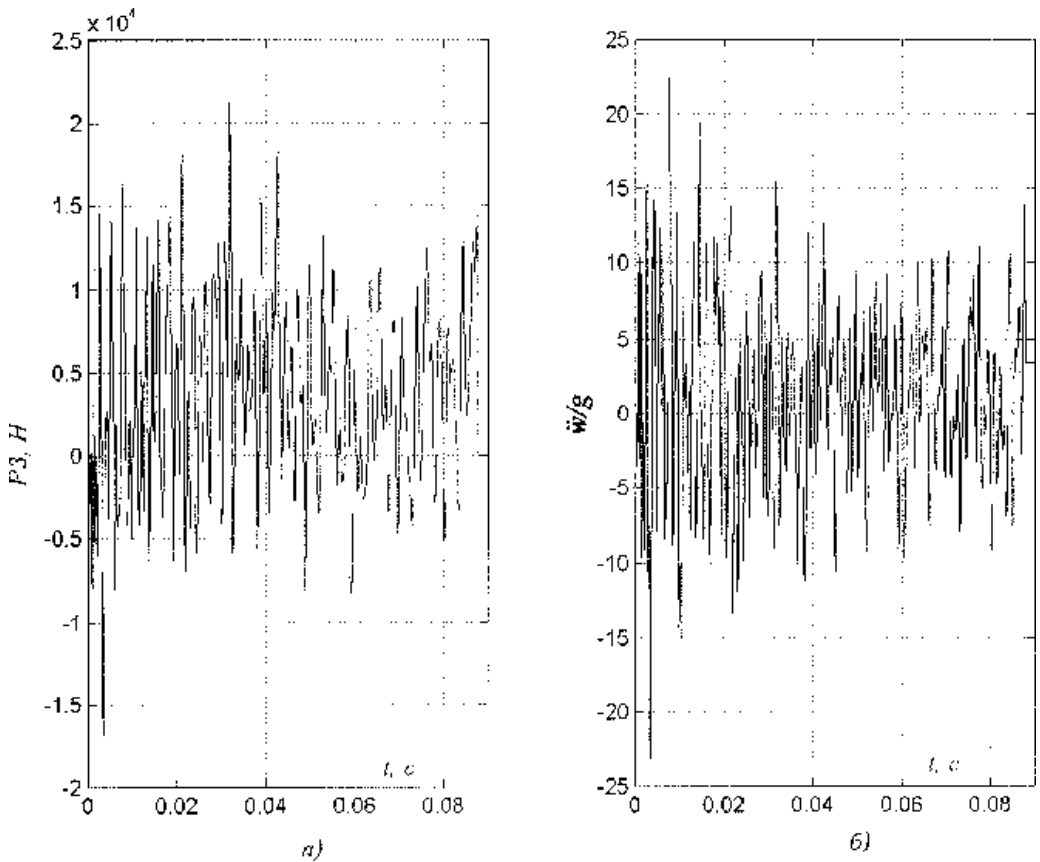


Рис. 4. Временная зависимость вертикального усилия (а) и относительного ускорения ПБ (б) с учетом начального деформированного состояния

Сравнивая графики на рис. 4 с аналогичными графиками на рис. 3, можно установить, что учет начального деформированного состояния приводит к существенному увеличению максимальных значений вертикальных ускорений и реакций в узлах крепления.

Результаты исследования влияния податливости узлов крепления ПБ к НБ на динамику системы приведены на рис. 5 в виде временной зависимости вертикального ускорения ПБ, при этом рис. 5,а соответствует уменьшенным в четыре раза, а рис. 5,б — увеличенным в четыре раза значениям ранее принятых коэффициентов.

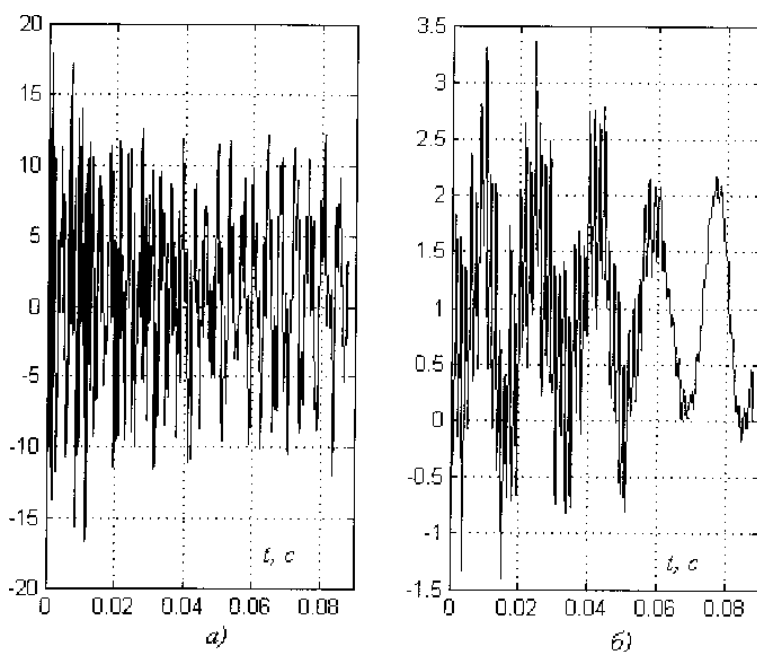


Рис. 5. Временная зависимость вертикального ускорения ПБ при различных значениях податливости узлов крепления

Расчеты выполнены без учета начального деформированного состояния. Сравнивая эти графики с графиком на рис. 3,г, можно делать вывод, что податливость узлов крепления ПБ к НБ существенно влияет на результаты расчетов. Например, с увеличением коэффициентов податливости в четыре раза максимальное вертикальное ускорение уменьшается примерно в два раза.

При варьировании коэффициента трения в пределах $0,2 \div 0,6$ можно установить, что коэффициент трения незначительно влияет на величину вертикального ускорения.

Выводы

1. На основании уравнения Лагранжа второго рода построена математическая модель, описывающая динамику системы двух неоднородных балок при их относительном движении со значительным ускорением.

2. С помощью полученной модели исследовано влияние различных параметров на динамику системы. Установлено следующее:

— начальное деформированное состояние, вызванное действием внешних нагрузок, приводит к существенному увеличению значений реакций в узлах крепления и значений вертикальных ускорений;

— податливость узлов крепления системы оказывает значительное влияние на ее динамическое состояние, например с увеличением коэффициентов податливости вертикальное ускорение уменьшается;

— силы трения незначительно влияют на результаты расчетов.

3. Сравнение результатов расчетов, полученных в данной работе, с аналогичными данными, имеющимися в литературе, показало их хорошее соответствие.

*Работа выполнена при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований (грант № 09-08-00519-а)*

Библиографический список

1. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. — М.: Наука, 1979.
2. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. — М.: Наука, 1967.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 4.12.2008