

*На правах рукописи*



Волков Александр Владимирович

**ПРИМЕНЕНИЕ МИКРО-ДИЛАТАЦИОННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ  
ДЛЯ УТОЧНЁННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ НАПРЯЖЁННО-  
ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Специальность: 01.02.04 - «Механика деформируемого твёрдого тела»

Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата физико-  
математических наук

Москва, 2019

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институт прикладной механики Российской академии наук (ИПРИМ РАН) и в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

**Научный руководитель**

кандидат физико-математических наук,

**Соляев Юрий Олегович**

**Официальные оппоненты:**

**Никабадзе Михаил Ушангиевич**

Доктор физико-математических наук, доцент кафедры механики композитов  
Механико-математического факультета Московского государственного университета имени  
М.В. Ломоносова (МГУ)

**Лисовенко Дмитрий Сергеевич**

Доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник  
Лаборатории механики технологических процессов  
Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН,

**Ведущая организация:** Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики Российской академии наук»

Защита диссертации состоится «25» декабря 2019 г. в 14 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.125.05 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете) по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ФГБОУ ВПО МАИ (НИУ) и на сайте <https://mai.ru/upload/iblock/502/Dissertatsiya-Volkov.pdf>

Автореферат разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2019 г.

Учёный секретарь

диссертационного совета



Федотенков Г. В.

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы диссертации.** К настоящему времени предложено большое количество неклассических моделей упругих сред, формулировка которых отличается от классической теории упругости наличием дополнительных кинематических переменных (теория Коссера, модели сред с микроструктурой Миндлина), повышенным порядком уравнений (градиентная теория упругости, моментные *couple stress* теории), учетом особых свойств поверхностей и граней среды и т.д. Во всех этих теориях, помимо классических модулей упругости, присутствуют дополнительные материальные константы, которые, с одной стороны, позволяют получить уточненное описание механического поведения среды с учетом, например, масштабных эффектов, но с другой стороны требуют достаточно сложной процедуры экспериментальной идентификации.

Необходимость использования обобщённых теорий упругости связана с наличием микроструктуры у материалов. Различные неоднородности, такие как поры, зёрна, включения, трещины в естественных материалах, формируют подобные микроструктуры. В искусственно созданных материалах (метаматериалах) микроструктура может проектироваться и создаваться целенаправленно. В результате, из-за наличия микроструктуры, напряжённо-деформированное состояние в телах может отличаться от предсказанного в классической теории упругости. Кроме этого, в классической теории упругости нет масштабных параметров, но с масштабными параметрами связаны многие методы расчёта длительной прочности, масштабные эффекты могут оказывать сильное влияние на уровень концентрации напряжений. При рассмотрении материалов на микро и нано уровне зачастую нельзя целиком игнорировать наличие микроструктуры, так как характерные размеры неоднородностей уже могут быть сравнимы с размерами рассматриваемого представительного объема. Масштабные эффекты могут наблюдаться во многих композитных материалах или биоматериалах.

Одной из обобщённых моделей континуума является теория упругости с микро-дилатацией, рассматриваемая в настоящей диссертации. Теория упругих сред с микро-дилатацией (*elasticity with voids theory, micro-dilatation elasticity theory*) впервые была сформулирована в работах *Cowin, Nunziato (J Elasticity, 1979, 1983)* и, независимо, в статье *Markov (ZAMM, 1981)*. Можно заметить, что микро-дилатационная теория упругости является наиболее простым частным случаем теории сред с микроструктурой Миндлина *Mindlin (Arch. Rational Mech. Anal., 1964)*. Первые численные результаты в этой теории были получены в работе *Iovan & Nasedkin (Computers&Structures, 2012)*. Теория упругих материалов с порами и поверхностными микро-дилатационными свойствами рассматривалась в работах Лурье, Белова, Каламкарова. Различные аспекты этой теории в разное время исследовались в работах Ф. Дель'Изолы (*dell'Isola*), Рамезани (*Ramesani*), Иесана (*Iesan*), Альтенбаха (*Altenbach*) и др. Эта теория позволяет получить уточнённое описание процессов деформирования упругих

пористых сред, в которых объемное содержание пористости (или плотность) линейно и обратимо зависит от прикладываемой внешней нагрузки. Подобное поведение сред может быть характерным для задач биомеханики, геомеханики, механики композиционных материалов, ячеистых сред и в задачах с метаматериалами.

**Целью работы** является:

Разработка методов уточненного описания пористых материалов, сред с микро-дилатацией, и разработка теоретической базы для идентификации материальных констант микро-дилатационной теории на основе простых экспериментальных методик.

Построение аналитических и численных решений в рамках микродилатационной теории упругости и термоупругости для прикладных задач деформациях балки, слоя, полого цилиндра.

Сравнение результатов численных и аналитических решений для проверки точности реализованных численных методов моделирования и для исследования областей возможного применения простых аналитических решений, без привлечения численного моделирования.

Исследование неклассических масштабных эффектов, возникающих в задачах микродилатационной теории упругости.

**Методы исследования.** Для решения задач применяются аналитические и численные методы теории упругости и механики сплошных сред. В третьей главе диссертации для решения задачи чистого изгиба балки в рамках микродилатационной теории упругости с поверхностными эффектами используется полуобратный метод Сен-Венана. В третьей и последующих главах для численного решения используется метод конечных элементов, реализованный в системе COMSOL Multiphysics для микродилатационной теории за счет введения обобщенного вектора перемещений, включающего перемещения среды и дополнительную кинематическую переменную среды – микро-дилатацию. Решение задачи о температурных деформациях слоя построено аналитически, за счет сведения трехмерной формулировки теории к одномерному случаю введением гипотезы о плоской деформации и использованию интегральных уравнений равновесия для напряжений, действующих в плоскости слоя.

**Научная новизна:**

1. Впервые для микродилатационной теории упругости и термоупругости реализовано трехмерное численное моделирование. Точность получаемых численных решений подтверждена сравнением с аналитическими решениями.

2. Впервые построено аналитическое решение задачи чистого изгиба балки с учётом наличия эффектов микро-дилатации на поверхности среды.

3. Впервые построены и сопоставлены численное и аналитическое решение для задачи прогрева двухслойной полосы в рамках

микродилатационной теории термоупругости, а также для различных задач изгиба.

4. Впервые построено численное решение для задачи прогрева полого цилиндра в рамках микродилатационной теории термоупругости.

**Теоретическая и практическая значимость.** Во второй и третьей главе рассмотрены различные задачи изгиба балки. Введено понятие эффективных модулей упругости балки с микродилатацией. На основе сопоставления аналитического решения, полученного для задачи о чистом изгибе, с численными решениями для различных задач изгиба, показано, что полученное аналитическое решение для эффективного изгибного модуля может быть использовано для идентификации параметров рассматриваемой теории, фактически, в любых стандартных испытаниях на изгиб (трех-, четырёхточечный, консольный).

Показано, что микродилатационная теория упругости может применяться для моделирования материалов с отрицательным коэффициентом Пуассона (ауксетиков).

Решение задач термоупругости для диска и двухслойной полосы может быть использовано для уточнённого моделирования напряжённо-деформированного состояния керамических материалов и покрытий. В частности, показано, что эффекты микро-дилатации пористых сред могут приводить к изменению знака напряжений в пористых покрытиях и к неклассической зависимости напряжений от диаметра толстостенных труб, выполняемых из пористых материалов.

**Обоснованность и достоверность** научных положений и выводов диссертации основывается на использовании апробированных методов теории упругости, механики сплошных сред и уравнений математической физики. Задачи, исследуемые в работе, решаются одновременно и аналитическим и численными методами. Хорошее совпадение полученных результатов позволяет убедиться в возможности использования численных методов и существующих программных комплексов для решения различных задач микро-дилатационной теории упругости.

#### **Результаты, выносимые на защиту:**

1. Аналитическое решение, полученное на основе полуобратного метода Сен-Венана, для оценки эффективного (кажущегося) модуля упругости балки, в объеме и на поверхности которой, присутствуют эффекты микро-дилатации.

2. Результаты анализа точности построенного аналитического решения задачи чистого изгиба балки, реализованного с использованием численного трехмерного конечно-элементного моделирования в микро-дилатационной теории.

4. Результаты оценки влияния масштабных, связанных и поверхностных эффектов на жесткость и напряженно-деформированное состояние микро-

дилатационной балки в различных испытаниях на изгиб (трёхточечный, четырёхточечный, консольный). Показанная возможность прогноза кажущегося модуля упругости в любых испытаниях на изгиб на основе приближенной аналитической формулы, следующей из решения задачи чистого изгиба, которая также может применяться для обработки экспериментальных данных и идентификации неклассических материальных констант теории.

5. Результаты численного и аналитического решения для задачи прогрева пористого слоя, лежащего на массивном основании.

6. Результаты численного решения задачи моделирования деформаций полого пористого цилиндра в рамках микродилатационной теории упругости.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты работы докладывались на следующих конференциях:

1. Исследование масштабных эффектов в задаче чистого изгиба теории пористых сред. А.В, Соляев Ю.О., Лурье С.А. Математическое Моделирование в Естественных Науках, Пермь 2016.

2. Surface effects in the theory of elastic materials with voids. Solyaev Y.O., Lurie S.A., Volkov A.V. Advanced problems in mechanics 2015 XLIII International Conference.

3. Численное и аналитическое решение задач чистого изгиба в постановке дилатационной и градиентной теории пористых сред, Волков А.В, Соляев Ю.О., Лурье С.А. Математическое Моделирование в Естественных Науках, Пермь 2016.

4. Численные решения плоских задач теории упругости со свободной дилатацией частиц, Волков А.В., Соляев Ю.О. Гагаринские чтения, Москва 12-16 апреля 2016

5. Сопоставление масштабных эффектов при чистом изгибе балки в теории упругости с микродилатацией и теории Аэро-Кувшинского, Гагаринские чтения 2017, 5-20 апреля 2017

6. Масштабные эффекты для тепловых напряжений в круглом диске с отверстием при осесимметричном стационарном температурном поле в рамках микродилатационной теории упругости, Волков А.В. Гагаринские чтения, 2018.

7. Численное моделирование масштабных эффектов для температурных напряжений в круглом диске с отверстием в рамках микродилатационной теории упругости. Волков А.В Математическое Моделирование в Естественных Науках, Пермь 2018.

8. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния слоя, лежащего на массивном основании, в модели термоупругости пористых сред с учетом поверхностной дефектности, Волков А.В. Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Москва, 18-19 декабря 2018 г.

**Публикации.** По теме диссертационной работы опубликовано 11 работ, в том числе 2 научных работы в журналах из списка Scopus и 1 научная работа в

издание, входящем в перечень ведущих рецензируемых научных журналов, рекомендованных ВАК РФ.

**Объём и структура диссертации.** Работа состоит из введения, 6 глав и заключения, содержит 102 страницы основного текста, 10 страниц списка литературы, 48 рисунков.

### Основное содержание работы

**Во введении** определяется цель и задачи диссертационной работы, кратко рассмотрено основное содержание глав, сформулированы результаты, выносимые на защиту.

**В первой главе** описано современное состояние проблемы, дан краткий обзор результатов, полученных в рамках микро-дилатационной теории упругости. Дается классическая постановка задачи линейной микродилатационной теории упругости.

**Во второй главе** приведена вариационная постановка микро-дилатационной теории упругости, в том числе, с поверхностными эффектами.

Лагранжиан модели линейной изотропной среды, в которой присутствуют микродилатация и поверхностные свойства, может быть представлен в следующем виде:

$$L = A - U = A - \int_V U_V dV - \oint_S U_S dS \quad (1)$$

$$U_V(\varepsilon_{ij}, \phi, \phi_{,k}) = \frac{1}{2} (\lambda \theta^2 + 2\mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} + 2\beta \phi \theta + \xi \phi^2 + \alpha \phi_{,k} \phi_{,k}) \quad (2)$$

$$U_S(\phi) = \frac{1}{2} \xi_S \phi^2 \quad (3)$$

Здесь  $A = \int_V p_i u_i dV + \oint_S P_i u_i dS$  – работа внешних объемных сил  $p_i$  и поверхностных сил  $P_i$  на перемещениях деформируемого тела  $u_i$ ,  $U$  – полная энергия деформации,  $U_V$  – объемная плотность энергии деформации и микро-деформаций,  $U_S$  – поверхностная плотность энергии микро-деформаций,  $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$  – тензор бесконечно малых деформаций,  $\theta = \varepsilon_{ii}$  – деформации изменения объема,  $\lambda, \mu$  – параметры Ламе,  $\beta, \xi, \alpha$  – дополнительные материальные константы микро-дилатационной теории,  $\xi_S$  – неклассический поверхностных параметр, определяющий дефектность поверхности среды. По повторяющимся индексам предполагается суммирование, запятая перед нижним индексом обозначает производную. Далее по тексту иногда будет также использоваться объёмный модуль упругости  $K$ .

Физические соотношения микродилатационной теории упругости с поверхностными эффектами записываются так:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_V}{\partial \varepsilon_{ij}} = \lambda \theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \beta \phi \delta_{ij} \quad (4)$$

$$-g = \frac{\partial U_V}{\partial \phi} = \xi \phi + \beta \varepsilon_{kk} \quad (5)$$

$$h_i = \frac{\partial U_V}{\partial \phi_{,i}} = \alpha \phi_{,i} \quad (6)$$

$$g_s = \frac{\partial U_S}{\partial \phi} = \xi_s \phi \quad (7)$$

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} + p_i = 0, \quad x_i \in V \quad (8)$$

$$h_{k,k} + g = 0, \quad x_i \in V \quad (9)$$

Граничные условия:

$$\sigma_{ij} n_j = P_i, \quad x_i \in S_\sigma \quad (10)$$

$$h_k n_k + g_s = 0, \quad x_i \in S_h \quad (11)$$

Для численного решения уравнений микродилатационной теории (4)-(11) можно использовать существующие системы конечно-элементного моделирования, позволяющие решать пользовательские системы дифференциальных уравнений второго порядка. В настоящей работе использовались системы FlexPDE (для задачи упругости) и программный пакет COMSOL Multiphysics (для задач термоупругости). Постановка граничной задачи в этих системах может быть определена непосредственно в виде дифференциальных уравнений относительно расширенного набора кинематических переменных, включающего три компоненты вектора перемещений и дополнительную переменную – функцию микро-дилитации. Для задания уравнений теории в системах численного моделирования, их удобно переписать в следующей дивергентной форме (это требуется, в частности, в интерфейсе General form PDE системы COMSOL):

$$\nabla \cdot \Gamma = p \text{ в области } \Omega \quad (12)$$

$$-n \cdot \Gamma = P \text{ на } \partial\Omega_p$$

$$u = u^0 \text{ на } \partial\Omega_u$$

Здесь  $\Omega$  - область построения решения,  $\nabla$  - оператор набла,  $\Gamma$  - тензор потока (тензор напряжений Коши в классической теории упругости),  $p$  - вектор объёмных сил,  $n$  - вектор внешней нормали на части границы области  $\partial\Omega_p$ ,  $P$  - вектор поверхностных источников на части границы области  $\partial\Omega_u$ ,  $u$  - вектор кинематических переменных,  $u^0$  заданные значения кинематических переменных на границе  $\partial\Omega_u$ .

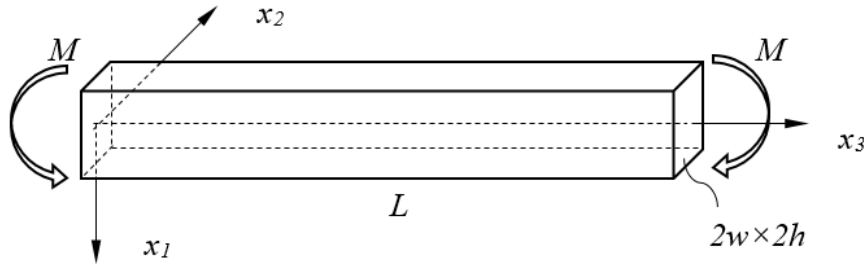


Переменные удобно записать в матричной форме. В общем трехмерном случае, имеем:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \phi \end{pmatrix}; \Gamma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}; p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}; P = \begin{pmatrix} -P_1 \\ -P_2 \\ -P_3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Легко видеть, что подстановка (13) в (12) приводит к системе уравнений и граничным условиям (8)-(11). Особенностью этой формулировки (12), (13) является то, что в рассматриваемой неклассической теории, часть уравнений равновесия, связанных с напряжениями  $g$  (скалярная функция, имеющая смысл давления возникающего при микро-дилатации каркаса пористой среды), должна быть отнесена в «правую часть» уравнений равновесия. Определяющие и кинематические соотношения теории должны быть дополнительно заданы в рассматриваемой области. Далее численное решение может быть найдено с использованием применяемого решателя. В частности, в данной работе конечно-элементные модели строились стандартными средствами FlexPDE и COMSOL с использованием тетраэдральных и кубических элементов с квадратичными аппроксимирующими функциями. Запись уравнений теории в слабой форме, сборка матрицы жесткости, обращение матрицы системы и обработка решения также строилась стандартными средствами указанных систем.

**В третьей главе** дано решение задачи чистого изгиба балки в рамках микро-дилатационной теории упругости с поверхностными эффектами (**Рис. 1**).



**Рис. 1** Чистый изгиб балки

Аналитическое решение строится полубратным методом Сен-Венана. Объемная нагрузка отсутствует. Верхняя и нижняя поверхности балки свободны от нагрузки и на них задаются условия равенства нулю соответствующих компонент тензора напряжений и вектора неклассических напряжений:

$$\sigma_{11} = \sigma_{12} = \sigma_{13} = 0, \quad x_1 = \pm h: \quad (14)$$

$$h_1 = 0 \Rightarrow \alpha \varphi_{,k} n_k + \xi_S \varphi = 0, \quad x_1 = \pm h: \quad (15)$$

Балка нагружается моментами  $M$ , приложенными на её торцах. Все остальные равнодействующие усилия (продольные и поперечные силы) и моменты на боковых и торцевых поверхностях балки равны нулю. Делается

предположение, что торцевые и боковые поверхности балки остаются плоскими, и используются следующие граничные условия в интегральной форме относительно моментов (относительно результирующих усилий соответствующие условия выполняются автоматически вследствие вводимых далее гипотез для перемещений):

$$x_3 = 0, L: \quad 2w \int_{-h}^{+h} x_1 \sigma_{33} dx_1 = -M \quad (16)$$

$$x_2 = \pm w: \quad \int_{-w}^w \int_{-h}^{+h} x_1 \sigma_{22} dx_1 = 0 \quad (17)$$

Делается предположение о следующем виде функций перемещений, которые содержат две неизвестные константы, определяющие деформации в продольном и поперечном направлении балки, и одну неизвестную функцию, определяющую деформации по толщине балки:

$$u_1 = -C_1 \frac{x_3^2}{2} - C_2 \frac{x_2^2}{2} + \int \varepsilon_{11}(x_1) dx_1, \quad u_2 = C_2 x_1 x_2, \quad u_3 = C_1 x_1 x_3 \quad (18)$$

В результате построения решения и выполнения уравнений равновесия в направлении толщины балки и граничных условий на ее верхней и нижней поверхностях, находятся следующие функции для перемещений, напряжений и микро-дилатации:

$$\sigma_{22}(x_1) = 2\mu(C_2 x_1 - \varepsilon_{11}(x_1)) \quad (19)$$

$$\sigma_{33}(x_1) = 2\mu(C_1 x_1 - \varepsilon_{11}(x_1)) \quad (20)$$

$$\varepsilon_{11}(x_1) = -\frac{\nu}{1-\nu}(C_1 + C_2)x_1 - \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}\phi(x_1) \quad (21)$$

$$h_1(x_1) = \alpha \phi_1(x_1) \quad (22)$$

$$\phi(x_1) = -RH(C_1 + C_2)\ell \left( \frac{x_1}{\ell} - \frac{\alpha + \xi_s h}{\alpha + \xi_s \ell} \frac{\text{sh}(x_1/\ell)}{\text{ch}(h/\ell)} \right) \quad (23)$$

$$\text{где } R = \frac{2\mu\ell^2}{\alpha}, \quad H = \frac{\beta}{\lambda + 2\mu}, \quad \ell^2 = \frac{\alpha}{\xi - H\beta}.$$

Неизвестные константы  $C_1, C_2$  определяются из граничных условий на торцах (14), (15):

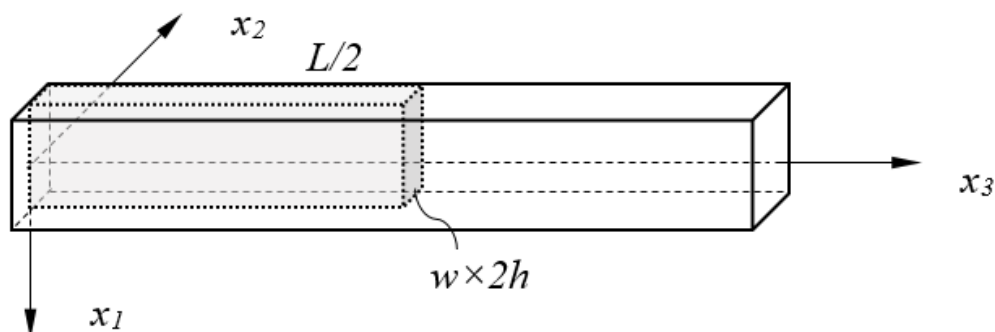
$$C_1 = -\frac{M}{EI} \frac{1-J(1+\nu)}{1-2J}, \quad C_2 = \frac{M}{EI} \frac{\nu - J(1+\nu)}{1-2J}, \quad (24)$$

Здесь  $I = 4bh^3/3$  – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси  $x_2$ . Также используется неклассический безразмерный параметр:

$$J = RH^2 \frac{1-\nu}{1+\nu} \left( 1 - 3 \frac{\ell^3}{h^3} \frac{\alpha + \xi_s h}{\alpha + \xi_s \ell} \left( \frac{h}{\ell} - \text{th}\left(\frac{h}{\ell}\right) \right) \right), \quad \text{зависящий от}$$

толщины сечения и неклассических модулей.

Построенное аналитическое решение было сопоставлено с численным трехмерным моделированием, которое для рассматриваемой теории было реализовано впервые. При построении численного решения задачи чистого изгиба учитывалась симметрия и рассматривалась одна четвертая часть балки. Таким образом, размеры рассматриваемой модели составляют  $L/2 \times w \times 2h$  (Рис. 2).



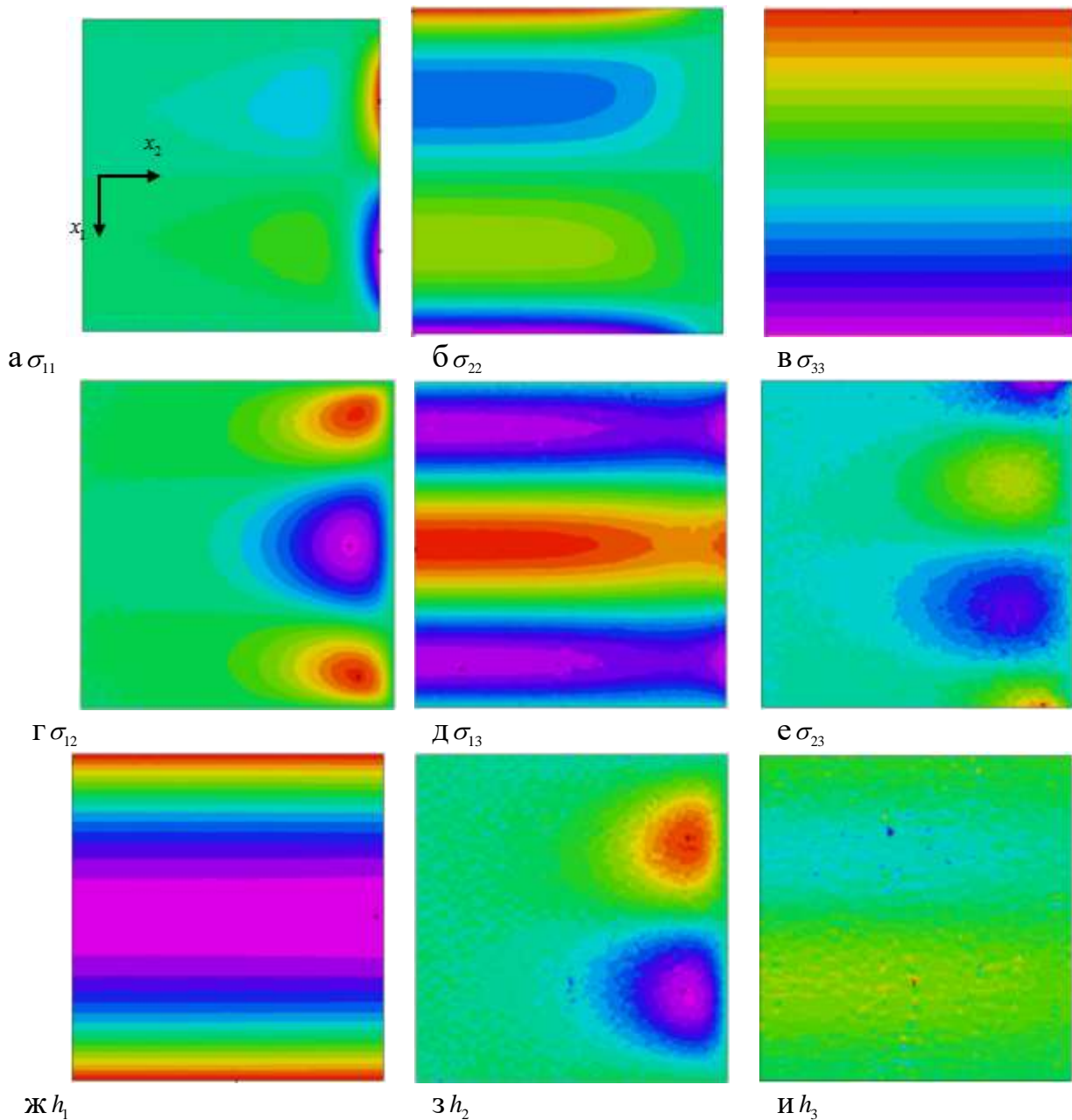
**Рис. 2** К численному решению задачи чистого изгиба балки

В численном решении величина модуля Юнга задавалась равной 1000 МПа. Соотношения размеров сторон балки составляют  $w/h = 2$ ,  $L/h = 20$ . Параметр связанности модели  $N$  варьируется в пределах от 0 до 0.99. Масштабный параметр модели варьируется в пределах  $10^{-4}h \leq \ell \leq 10^{-1}h$ . Для построения решений в перемещениях задается порядок точности до  $10^{-6}$ .

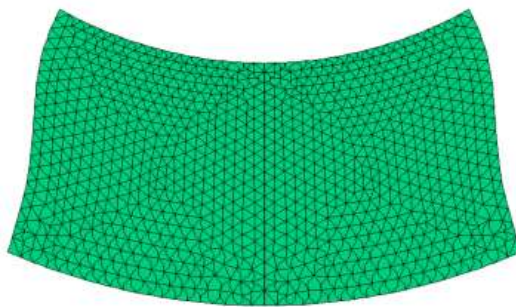
На Рис. 3 - Рис. 4 показан характер распределения напряжений по сечению. На этих рисунках точки соответствуют численному решению в узлах сетки, а сплошные линии – это построенная аппроксимация. наглядно продемонстрировано выполнение принципа Сен-Венана в микро-дилатационной теории упругости: граничные условия, сформулированные относительно напряжений в численном решении или в интегральной форме в аналитическом решении, вызывают одинаковое напряженное состояние вдали от границ. На Рис. 5 цветом показан характер распределения различных компонент классических и неклассических напряжений по поперечному сечению балки с микро-дилатацией.

В отличие от классической теории упругости и в отличие от аналитического решения в численном решении происходит искривление боковых и торцевых поверхностей балки. Возникает депланация сечений – отклонение от линейного закона распределения перемещений (Рис. 6).



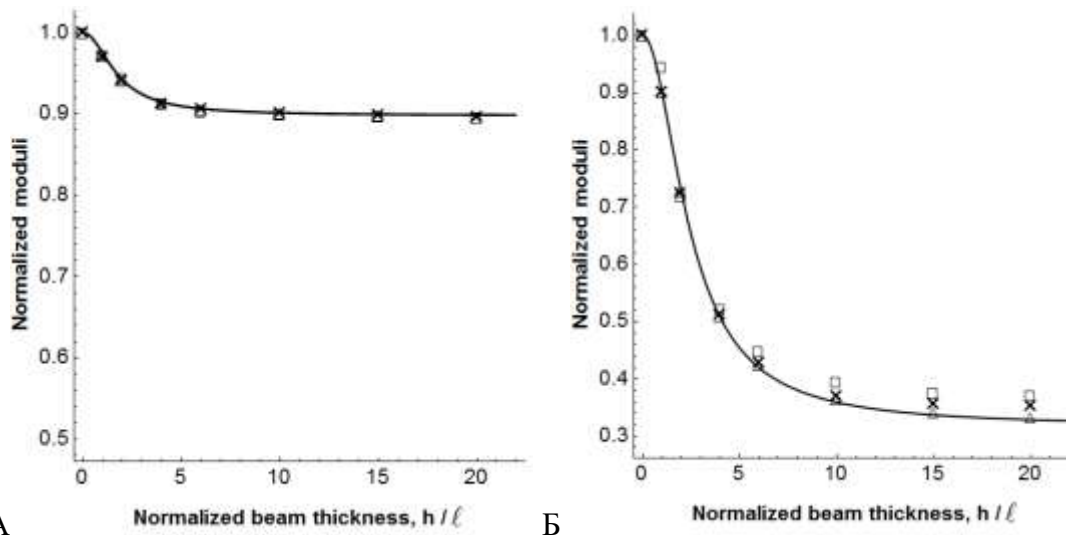


**Рис. 5** Характер распределения напряжений по поперечному сечению балки (представлена половина поперечного сечения  $0 \leq x_2 \leq w$ ),  $N=0.9$ ,  $\ell/h=0.9$ . а -  $\sigma_{11}$ , б -  $\sigma_{22}$ , в -  $\sigma_{33}$ , г -  $\sigma_{12}$ , д -  $\sigma_{13}$ , е -  $\sigma_{23}$ , ж -  $h_1$ , з -  $h_2$ , и -  $h_3$

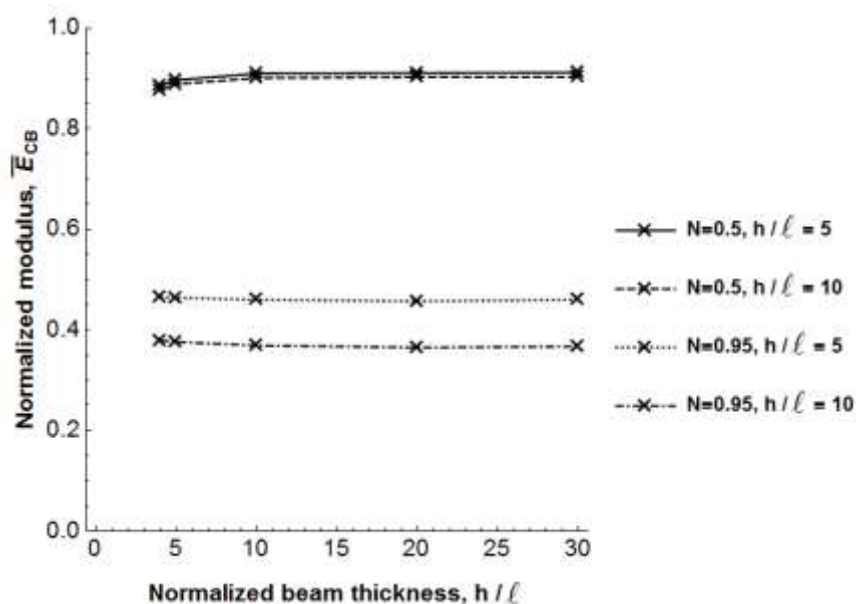


**Рис. 6** Деформации поперечного сечения балки с микродилитацией с дополнительным увеличением искривления поверхностей в 10 раз,  $N=0.9$ ,  $\ell/h=0.9$

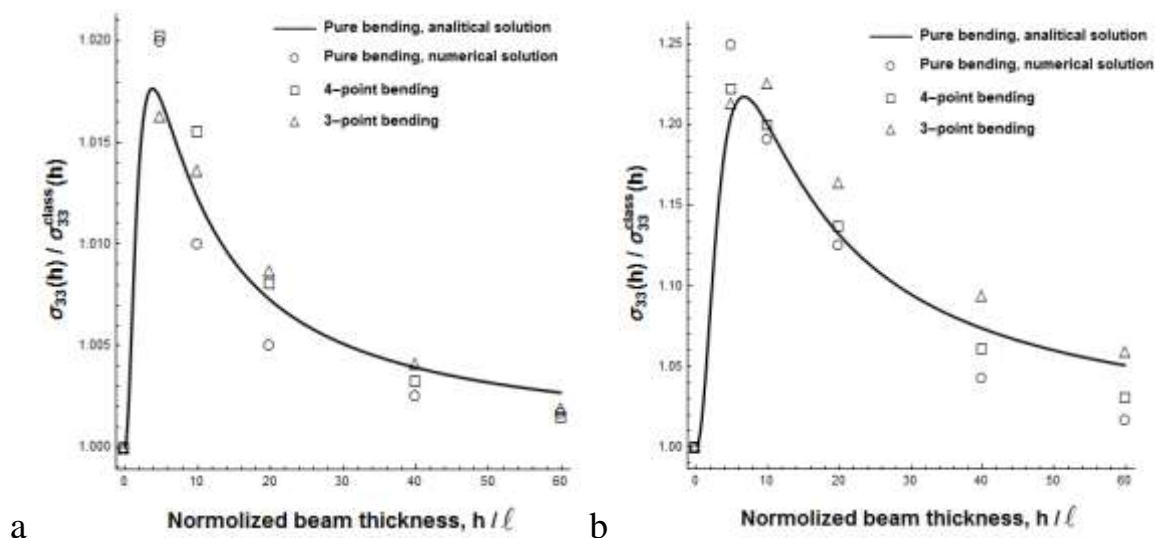
В четвёртой главе рассмотрено численное решение для различных задач изгиба в рамках микро-дилатационной теории. Рассмотрены четырёхточечный, трёхточечный и консольный изгиб. Для разных задач изгиба введены эффективные модули упругости. Показано, что введенные эффективные модули одинаковым образом зависят от толщины балки с микро-дилатацией: при увеличении толщины эффективные модули снижаются. Показана возможность применения аналитического решения, следующего из задачи о чистом изгибе балки, для описания зависимости кажущегося модуля упругости балки с микро-дилатацией от ее толщины в различных испытаниях на изгиб (Рис. 7). Показано, что по данной зависимости можно идентифицировать дополнительные материальные константы теории: параметр связанности из испытаний на растяжения достаточно толстых балок, в которых масштабные эффекты не проявляются (или по результатам испытаний образцов на растяжение), и масштабный параметр – по характеру зависимости эффективного модуля при изгибе от толщины балки. Для задачи консольного изгиба балки было отдельно исследовано влияние длины балки на значение эффективной жесткости – оно оказывается незначительным (Рис. 8). На Рис. 9 показаны графики влияния толщины на максимальные осевые напряжения в балке при различных испытаниях на изгиб. Решения согласуются достаточно хорошо. Это означает, что в различных задачах реализуется одинаковое относительное повышение осевых напряжений. Значительное повышение максимальных напряжений в балке, которое может влиять на её прочность, реализуется только при очень больших параметрах связанности (Рис. 9Б).



**Рис. 7** Влияние толщины балки на её эффективный изгибный модуль упругости в различных испытаниях на изгиб при значении параметра связанности  $N=0.5$  (а) и  $N=0.95$  (б). Точки соответствуют конечно-элементному моделированию трехмерных моделей балок. Линия - аналитическое решение.



**Рис. 8** Влияние длины балки на ее эффективный изгибный модуль в испытаниях на консольной изгиб. Для балок с достаточно большим соотношением  $L/h$  влияние длины отсутствует, как и в решении для чистого изгиба балки. Все результаты здесь получены на основании численного решения трехмерной задачи.



**Рис. 9** Влияние толщины на максимальные осевые напряжения в балке при различных испытаниях на изгиб. Представлено значение осевых напряжений, нормированное относительно его величины в решении задачи классической теории упругости. Параметр связанности равен  $N=0.5$  (a) и  $N=0.99$  (b). Точки соответствуют конечно-элементному моделированию на трехмерных моделях балок, сплошная линия – решение из задачи чистого изгиба.

В пятой главе предложено обобщение линейной микродилатационной теории упругости на случай температурных эффектов. Построены

аналитическое и численное решения о деформациях пористого слоя на упругом основании.

Рассматривается двухслойная структура, состоящая из слоя-покрытия толщиной  $h$ , лежащего на слое-основании толщиной  $H$  (Рис. 10). Ось  $Y$  направлена перпендикулярно к поверхности слоев. Ось  $Z$  направлена перпендикулярно к плоскости рисунка (плоскости  $XOY$ ).

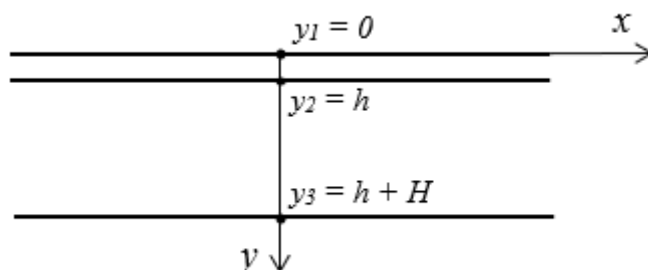


Рис. 10 Слой, лежащий на массивном основании

Материалы слоев могут содержать пористость и рассматриваются в рамках микродилатационной теории упругости. Слоистая система считается бесконечной в направлении осей  $ox$ ,  $oz$ . В направлении этих осей имеет место однородная деформация.

В диссертации рассмотрена задача термоупругости для линейной теории пористых изотропных материалов. Используется классическая гипотеза Дюамеля-Неймана для полных стесненных деформаций изменения объема:

$$\theta = \theta_e + \theta_T \quad (25)$$

Уравнения равновесия в перемещениях:

$$(\lambda + \mu)u_{k,ki} + \mu w_{i,jj} + \beta\varphi_{,i} - 3Ka(\Delta T)_{,i} = 0 \quad (26)$$

$$\alpha\varphi_{,kk} - \xi\varphi - \beta(u_{k,k} - a\Delta T) = 0$$

Определяющие соотношения:

$$\sigma_{ij} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{ij} + \beta\varphi\delta_{ij} - 3Ka\Delta T \quad (27)$$

$$h_i = \alpha\varphi_{,i}$$

$$g = -\xi\varphi - \beta(\theta - a\Delta T)$$

$$g^F = \xi^F\varphi$$

Статические граничные условия:

$$\sigma_{ij}n_j = 0 \quad (28)$$

$$h_in_i + g^F = 0$$

Рассматривается постановка задачи термоупругости пористых сред для случая плоской деформации. В этом случае компоненты перемещений в направлении координат  $ox$  и  $oy$  в плоскости  $XOY$  не зависят от координаты  $z$ :  $u_1 = u(x, y)$ ,  $u_2 = v(x, y)$ , и перемещения в направлении оси  $oz$  являются линейной функцией  $u_3 = e \cdot z$ ,  $\varepsilon_z = e$ . Так как нагрев является равномерным, то



предполагается, что координаты  $ox$  и  $oz$  являются равноправными. Можно записать:  $u_1 = e \cdot x$  и  $u_2 = v(y)$ . Сдвиги и касательные напряжения в рассматриваемой постановке не возникают. Дилатация также является функцией только координаты  $y$ . Получаются следующие кинематические соотношения:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = e, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (29)$$

$$\varphi = \varphi(y) = P_r(y) - P(y)$$

Отличные от нуля напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_z = \lambda \varepsilon_y + 2(\mu + \lambda)e + \beta \varphi - 3Ka\Delta T, \quad (30)$$

$$\sigma_y = 2\lambda e + (2\mu + \lambda)\varepsilon_y + \beta \varphi - 3Ka\Delta T,$$

$$h_y = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$g = -\xi \varphi - \beta(\varepsilon_y + 2e - a\Delta T)$$

$$g^F = \xi^F \varphi$$

Уравнения равновесия при постоянном нагреве слоев (из трех классических уравнений равновесия в дифференциальной форме можно рассмотреть только уравнение в направлении оси  $Y$ ):

$$(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad (31)$$

$$\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \xi \varphi - \beta \left( \frac{\partial v}{\partial y} + 2e - a\Delta T \right) = 0 \quad (32)$$

Нормальные напряжения, действующие в направлении оси  $X$  и  $Z$  должны быть самоуравновешенными (по сути, интегральные условия заменяют требование отсутствия соответствующих компонент напряжений на боковых поверхностях слоя, отнесенных на бесконечность):

$$\int_0^{h+H} \sigma_x dy = \int_0^{h+H} \sigma_z dy = 0 \quad (33)$$

Статические граничные условия относительно классических и неклассических напряжений на свободной поверхности  $y = 0$  имеют вид:

$$\sigma_y = 2\lambda e + (2\mu + \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} + \beta \varphi - 3Ka\Delta T = 0 \quad (34)$$

$$h_y + g^F = \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \xi^F \varphi = 0$$

Для задачи о равномерном прогреве двухслойной структуры, получается следующая постановка:

$$y_i \leq y \leq y_{i+1} : (\lambda_i + 2\mu_i) \frac{\partial^2 v_i}{\partial y^2} + \beta_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = 0, \quad (35)$$

$$\alpha_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} - \xi_i \varphi_i - \beta_i \left( \frac{\partial v_i}{\partial y} + 2e - a\Delta T \right) = 0, \quad (36)$$

$$y_1 = 0 : \quad \sigma_{y1} = 0, \quad h_{y1} = 0 \quad (37)$$

$$y_2 = h : \quad v_1 = v_2, \quad \sigma_{y1} = \sigma_{y2}, \quad h_{y2} - h_{y1} = g^F, \quad \varphi_1 = \varphi_2 \quad (38)$$

$$y_3 = h + H : \quad v_2 = 0, \quad h_{y2} = 0. \quad (39)$$

Здесь индекс  $i$  принимает значения 1 или 2, величины с индексом 1 относятся к материалу слоя-покрытия, а с индексом 2 – к материалу основания. Контактные условия по неклассическим напряжениям заданы с учетом дефектности: на контактной границе действуют поверхностные напряжения  $g^F = \xi^F \varphi_1 = \xi^F \varphi_2$ . На внешних поверхностях слоев задано равенство нулю градиента свободной дилатации. На обратной стороне массивного основания задано закрепление – запрещены перемещения в вертикальном направлении, которые могут также рассматриваться как условия симметрии для соответствующей структуры, на двух поверхностях которой нанесено покрытие.

Общее решение уравнений равновесия модели (31)-(32) легко находится аналитически. Для этого продифференцируем первое уравнение равновесия (31), выразим из него  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$  и подставим во второе уравнение равновесия (32).

Получим:

$$-\frac{\alpha(\lambda + 2\mu)}{\beta} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \xi \varphi - \beta \left( \frac{\partial v}{\partial y} + 2e - a\Delta T \right) = 0. \quad (40)$$

Далее выразим  $\varphi$ :

$$\varphi = -\frac{\alpha(\lambda + 2\mu)}{\beta\xi} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - \frac{\beta}{\xi} \left( \frac{\partial v}{\partial y} + 2e - a\Delta T \right). \quad (41)$$

Далее подставим полученное выражение (41) в первое уравнение равновесия (31), при этом при дифференцировании уничтожаются константы – значения деформации в плоскости слоев  $e$  и изменение температуры  $\Delta T$ . Получаем:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \frac{1}{l^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \quad (42)$$

Здесь введено обозначение для масштабного параметра  $l^{-2} = \frac{\xi(\lambda + 2\mu) - \beta^2}{\alpha(\lambda + 2\mu)}$ , который принимает только положительные значения, так как из условия положительной определенности энергии деформаций следует, что  $\beta^2 < \xi(\lambda + 2\mu / 3)$ .

На основании (44) находим общий вид решений для перемещений в слое и в основании:

$$v_i(y) = C_{i1} + C_{i2}y + C_{i3}e^{y/l_i} + C_{i4}e^{-y/l_i}, \quad (i = 1, 2) \quad (43)$$

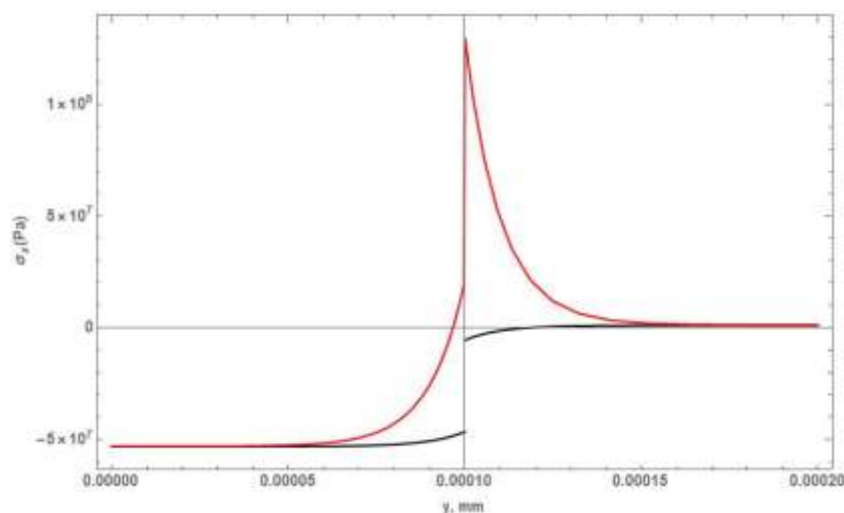
Здесь  $C_{ij}$  – восемь неизвестных констант, которые находятся из решения системы граничных условий (37)-(39), а  $l_i$  – масштабный параметр материала соответствующего материала.

После определения функций перемещений, необходимо определить свободную дилатацию в слоях на основании выражения (41). В общем виде получаем:

$$\varphi_i(y) = -\frac{\beta_i}{\xi_i}(C_{i2} + 2e - a\Delta T) - \frac{\xi_i(\lambda_i + 2\mu_i) - 2\beta_i^2}{l_i\beta_i\xi_i}(C_{i3}e^{y/l_i} - C_{i4}e^{-y/l_i}), \quad (44)$$

После этого в решении остается единственная неизвестная константа  $e$  (деформация слоев в плоскости), которая определяется из интегрального уравнения равновесия (33).

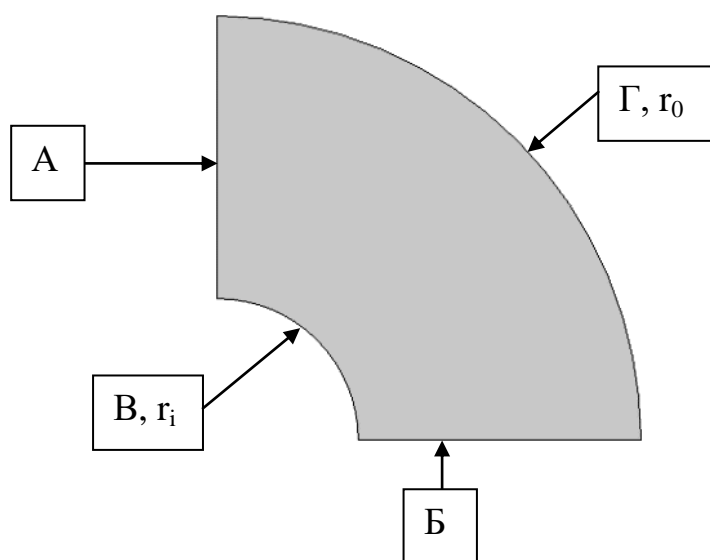
Численное решение рассмотренной задачи строиться методом конечных элементов в конечно-элементном комплекс COMSOL Multiphysics. Результаты аналитического и численного решения задачи представлены в диссертации. Интересным, представляется найденный эффект, связанный с поверхностными эффектами микро-дилатации, которые могут приводить к изменению знака напряжений, действующих в плоскости пористого покрытия (**Рис. 11**). Этот эффект может быть важным с прикладной точки зрения, так как возникновение положительных растягивающих напряжений может происходить даже в том случае, если классические модели термоупругости прогнозируют обратное (то есть сжатие слоя).



**Рис. 11** Распределение напряжений по толщине слоев структуры MoSi<sub>2</sub>-графит в случае идеального контакта слоев и контакта с эффектами микро-дилатации ( $\xi^F = 1 \text{ ГПа} \cdot \text{мм}$ ) при равномерном нагреве на 1000°C. Зелёная линия – классическое решение, синяя линия – теория упругости с микро-дилатацией, красная линия – теория упругости с микро-дилатацией и поверхностными эффектами

В шестой главе рассмотрена задача неравномерного прогрева толстостенного цилиндра с внутренним радиусом  $r_i$  и внешним радиусом  $r_0$ . В рассмотренной задаче предполагается, что температура изменяется только в радиальном направлении, и задача является осесимметричной. Определяются напряжения и изменение пористости в нагреваемом цилиндре с учетом эффектов микро-дилатации.

Численное решение строится методом конечных элементов. Используется конечно-элементный комплекс COMSOL Multiphysics. Создаётся двумерная геометрическая модель (Рис. 12). Для уменьшения объемов расчетов создаётся одна четверть модели, для которой задаются условия симметрии.



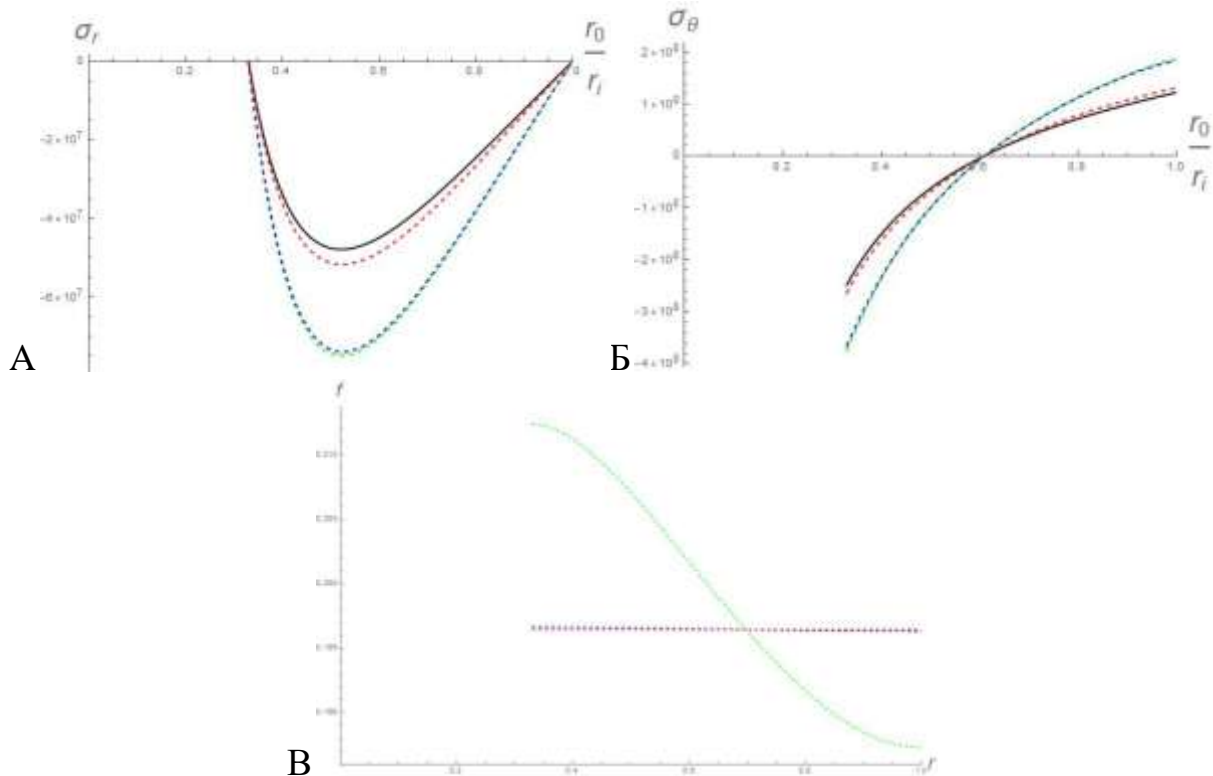
**Рис. 12** Граничные условия для перемещений (условия симметрии) и температуры

$$A \ u_x = 0, \ Б \ u_y = 0, \ В. \ T_{r=r_i} = 100, \ Г. \ T_{r=r_0} = 0$$

В классической теории термоупругости при одинаковых значениях отношения внешнего радиуса цилиндра к внутреннему радиусу  $r_0 / r_i = const$ , будут получаться одинаковые напряжённо-деформируемые состояния. То есть если изменять радиус  $r_0$ , оставляя при этом одинаковым отношение  $r_0 / r_i = const$ , то напряжённо-деформированное состояние не меняется. В диссертации показано, что при изменении радиуса  $r_0$  и  $r_0 / r_i = const$  в микро-дилатационной теории термоупругости напряжённо-деформированное состояние будет изменяться, то есть можно наблюдать масштабный эффект. Из графиков (Рис. 13 А, Б) видно, что в микро-дилатационной теории упругости при одинаковых значениях  $r_0 / r_i$  наблюдается разное напряжённо-деформированное состояние при изменении  $r_0$ . Максимальные напряжения растут при увеличении внешнего радиуса  $r_0$ . Влияние микро-дилатации сказывается таким образом, что при

увеличении радиуса цилиндра, градиенты функции микродилатации  $\phi$  увеличивается, что приводит и к росту напряжений (Рис. 13 В).

**В заключении** диссертационной работы перечислены основные результаты и возможные области их применения.



**Рис. 13** Распределение напряжений  $\sigma_r$  (А),  $\sigma_\theta$  (Б) и микро-дилатации по радиусу. Во всех случаях  $r_0 / r_i = 3$ . Чёрным цветом показано классическое решение, Пунктиром показаны решения в рамках микродилатационной теории при  $N=0.9$ . зелёным – решение микродилатационной теории при  $r_0 = 0.03$ , синим при  $r_0 = 0.003$ , красным при  $r_0 = 0.0003$ .

### Основные результаты диссертационной работы:

1. Впервые построено полуобратное аналитическое решение для задачи чистого изгиба балки в рамках микро-дилатационной теории упругости с поверхностными эффектами. Показано, что построенное решение может быть использовано для обработки экспериментальных данных, необходимых для идентификации параметров рассматриваемой неклассической теории.

2. Впервые реализовано трехмерное численное моделирование в рамках микродилатационной теории упругости. Показано, что для задачи о чистом изгибе балки в отличие от аналитического решения, в численном решении удастся точно выполнить все граничные условия, при этом напряженное состояние балки оказывается трехмерным и возникает депланация сечений.

3. На основе сопоставления результатов численного и аналитического моделирования, показано, что аналитическое решение задачи чистого изгиба позволяет получать достаточно точные оценки для прогноза влияния

неклассических масштабных и поверхностных эффектов на эффективную жесткость и напряженное состояние пористых балок.

4. Впервые построено численное и аналитическое решение для задачи о температурных деформациях пористого слоя, лежащего на массивном основании при равномерном прогреве. Впервые построено численное решение задачи о полом цилиндра в условиях неравномерного нагрева. Показано наличие масштабных эффектов, возникающих в решениях этих задач, связанных с эффектами микро-дилатации в объеме и на поверхности среды. Показано, что вследствие эффектов микро-дилатации (то есть неравномерного изменения пористости, связанное с деформированием материала) в слоях пористых покрытий может изменяться знак напряжений, что может быть существенным при оценке их прочности.

### **СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ**

#### **Статьи в журналах из списка ВАК РФ (1) и базы Scopus (2-3):**

- 1) Ю.О. Соляев, С.А. Лурье, А.В. Волков Численное решение задачи чистого изгиба балки в рамках дилатационной теории упругости. Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10. № 2. С. 137-152.
- 2) Lurie S. A., Solyaev Y. O., Volkov-Bogorodskiy D, Volkov A.V. Bending problems in the theory of elastic materials with voids and surface effects. Mathematics and Mechanics of Solids. 2018. Т. 23. № 5. С. 787-804.
- 3) Sergey A. Lurie, Alexander L. Kalamkarov , Yury O. Solyaev , Anastasia D. Ustenko , Alexander V. Volkov Continuum micro-dilatation modeling of auxetic metamaterials, International Journal of Solids and Structures. 2018. Т. 132-133. С. 188-200.

#### **Прочие публикации по тематике диссертационной работы:**

- 4) Solyaev Y.O., Lurie S.A., Volkov A.V. Surface effects in the theory of elastic materials with voids. В сборнике: Advanced Problems in Mechanics 2015 XLIII International Conference. 2015. С. 104.
- 5) Волков А.В., Соляев Ю.О., Лурье С.А. Исследование масштабных эффектов в задаче чистого изгиба теории пористых сред. Математическое моделирование в естественных науках. 2015. Т. 1. С. 86-88.
- 6) Волков А.В., Соляев Ю.О., Лурье С.А. Численное и аналитическое решение задач чистого изгиба в постановке дилатационной и градиентной теории пористых сред. Математическое моделирование в естественных науках. 2016. Т. 1. С. 64-66.
- 7) Волков А.В., Соляев Ю.О., Лурье С.А. Сопоставление масштабных эффектов, возникающих в задаче чистого изгиба в постановке дилатационной и градиентной теории пористых сред. В сборнике: Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред Сборник трудов 6-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского: в 2-х томах. 2016. С. 40-46.
- 8) Волков А.В., Соляев Ю.О. Численные решения плоских задач теории упругости со свободной дилатацией частиц.
- 9) Соляев Ю.О., Волков А.В. Моделирование отрицательного масштабного эффекта для изгибного модуля упругости пористых балок в рамках микродилатационной теории упругости. В книге: Тезисы докладов V международного научного семинара "Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций

при воздействии полей различной физической природы" Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). 2016. С. 163-164.

- 10) Волков А.В. Численное моделирование масштабных эффектов для температурных напряжений в круглом диске с отверстием в рамках микродилатационной теории упругости. Математическое моделирование в естественных науках. 2018. Т. 1. С. 359-363.
- 11) Волков А.В. Численное моделирование напряженно-деформированного состояния слоя, лежащего на массивном основании, в модели термоупругости пористых сред с учетом поверхностной дефектности. В сборнике: Механика композиционных материалов и конструкций, сложных и гетерогенных сред. Сборник трудов 8-й Всероссийской научной конференции с международным участием им. И.Ф. Образцова и Ю.Г. Яновского. 2019. С. 230-235.