

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

*На правах рукописи*



Маковский Сергей Владимирович

**ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МОДИФИЦИРОВАННЫХ  
ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ С ВИСКЕРИЗОВАННЫМИ  
ВОЛОКНАМИ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:  
Профессор Дудченко Александр Александрович  
Доктор Технические Наук

Москва 2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>4</b>
<b>ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>10</b>
<b>1.1. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ВИСКЕРИЗОВАННЫХ ВОЛОКНАХ И КОМПОЗИТОВ НА ИХ ОСНОВЕ.....</b>	<b>10</b>
<b>1.2. ФИЗИЧЕСКИЕ, ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И МАТЕРИАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВИСКЕРИЗОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ.....</b>	<b>15</b>
<b>1.3. ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ И ДЕМПФИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА .....</b>	<b>16</b>
<b>1.4. МЕТОДЫ ОСРЕДНЕНИЯ. ....</b>	<b>18</b>
1.4.1. Осреднение Фойгта и Рейсса. ....	19
1.4.2. Осреднение по границам. ....	19
1.4.3. Осреднение по методу Эшелби. ....	20
1.4.4. Осреднение по методу самосогласования (модель эффективного поля). 22	
1.4.5. Осреднение по методу самосогласования (Модель дифференциальная). 23	
1.4.6. Осреднение по методу Мори-Танака. ....	23
1.4.7. Осреднение по полидисперсной модели (Метод композитной сферической или цилиндрической сборки — метод двух фаз). ....	25
1.4.8. Осреднение по методу самосогласованного поля Эшелби (Трехфазная модель). ....	26
1.4.9. Метод асимптотического осреднения. ....	27
1.4.10. Анализ и выводы. ....	28
1.4.11. Демпфирующие свойства. ....	30
<b>1.5. МЕТОДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ВИСКЕРИЗОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ И ИХ РЕЗУЛЬТАТЫ.....</b>	<b>32</b>
<b>1.6. ПОДХОДЫ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭФФЕКТИВНЫХ СВОЙСТВ КОМПОЗИТОВ.....</b>	<b>39</b>
<b>1.7. ПРИНЦИП УПРУГО-ВЯЗКОУПРУГОЙ АНАЛОГИИ КОМПЛЕКСНЫХ МОДУЛЕЙ ..</b>	<b>47</b>
<b>ГЛАВА 2. МОДЕЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТЫ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ВИСКЕРИЗОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ.....</b>	<b>48</b>
<b>2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ. ....</b>	<b>48</b>
<b>2.2. МОДЕЛЬ ВИСКЕРИЗОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ, ОСНОВАННАЯ НА МЕТОДЕ САМОСОГЛАСОВАНИЯ ЭШЕЛБИ (МЕТОД ТРЕХ ФАЗ).....</b>	<b>51</b>
2.2.1. Определение модуля продольного сдвига .....	54
2.2.2. Определение объемного модуля плоской деформации .....	60
2.2.3. Определение продольного модуля Юнга и коэффициента Пуассона ....	66
2.2.4. Определение модуля поперечного сдвига .....	73
2.2.5. Определение модуля поперечного сдвига .....	80

<b>ГЛАВА 3. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНЫХ ТРАНСВЕРСАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ВИСКЕРИЗОВАННОГО СЛОЯ .....</b>	<b>81</b>
<b>3.1. Приближенная структурная модель вискеризованного межфазного слоя. ....</b>	<b>81</b>
<b>3.2. Определение динамических характеристик: модуль потерь и динамический модуль вискеризованного межфазного слоя.....</b>	<b>83</b>
<b>3.3. Выводы к главе 3.....</b>	<b>88</b>
<b>ГЛАВА 4. ВЛИЯНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МЕЖФАЗНОГО СЛОЯ НА ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ И ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ВСЕГО ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА.....</b>	<b>92</b>
<b>4.1. О методиках определения эффективных характеристик вискеризованного композита.....</b>	<b>92</b>
<b>4.2. Вискреизованный слой с наноструктурой на основе ZnO .....</b>	<b>93</b>
<b>4.3. Продольный модуль сдвига для вискеризованного слоя с углеродными нанорубками.....</b>	<b>95</b>
<b>4.4. Эффективные характеристики поперечного модуля .....</b>	<b>97</b>
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ.....</b>	<b>100</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЯ .....</b>	<b>101</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ А. МАТЕРИАЛ, КОНФИГУРАЦИЯ И СВОЙСТВА КОМПОНЕНТОВ ВИСКЕРИЗОВАННЫХ ВОЛОКНИСТЫХ КОМПОЗИТОВ.....</b>	<b>101</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б. ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНАЯ СРЕДА .....</b>	<b>102</b>
Б.1 Трансверсально-изотропная среда с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси $-3$ или $-z$ .....	102
Б.2 Трансверсально-изотропная среда с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси $l$ .....	105
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ В. ИЗОТРОПНАЯ СРЕДА .....</b>	<b>108</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Г. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ СРЕДНЕЙ ДЕФОРМАЦИИ И СРЕДНЕГО НАПРЯЖЕНИЯ.....</b>	<b>109</b>
Г.1 Теорема средней деформации.....	109
Г.2 Теорема среднего напряжения.....	110
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Д. ТЕОРЕМА И ФОРМУЛА КЛАПЕЙРОНА.....</b>	<b>111</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Е. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМУЛА ЭШЕЛБИ.....</b>	<b>113</b>
<b>ПРИЛОЖЕНИЕ Ж. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО <math>D_2^{N+1}=0</math> ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОРМУЛЫ ЭШЕЛБИ .....</b>	<b>118</b>
Ж.1 Задача всестороннего нагружения поперек ячейки.....	118
Ж.2 Задача чистого сдвига вдоль ячейки (волокон) .....	118
Ж.3 Задача одноосном растяжении вдоль волокон.....	119
Ж.4 Задача чистого сдвига в плоскости изотропии .....	119
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>	<b>121</b>

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность работы.** Композиционные материалы широко используются в авиационных и ракетных конструкциях, а также находят широкое применение в различных других областях техники, включая транспорт, медицину и др. Композитные конструкции с различными комбинациями компонентов в структуре имеют много преимуществ по сравнению с традиционными материалами на основе металлических сплавов. Известно, что механические свойства композитов контролируются условиями контакта между волокном и матрицей (характеристиками интерфейса) в композите. Влияние структуры на характер взаимодействия фаз в области контакта фаз оказывается особенно значительным. Разработаны различные методики повышения качества интерфейса, и наиболее распространенными являются: модификация поверхности волокна, улучшение химических взаимодействий, либо добавление третьего фазы (межфазного слоя) между волокном и матрицей. Идеи, лежащие в основе этих методов заключаются в улучшении межфазных адгезионных свойств и в увеличении площади поверхности волокна для более эффективной передачи нагрузок между волокнами и матрицей и дополнительного улучшения свойств композитов.

Известно, что механические свойства композитов контролируются условиями контакта между волокном и матрицей (т.е. характеристиками интерфейса) в композите [1,2]. Влияние структуры на характер взаимодействия фаз в области контакта фаз оказывается особенно значительным. Разработаны различные методики для повышения качества интерфейса, и наиболее распространенными являются: модификация поверхности волокна, улучшение химических взаимодействий, либо добавление третьего фазы (межфазного слоя) между волокном и матрицей [3-5]. Идеи, лежащие в основе этих методов заключаются в улучшении межфазных адгезионных свойств и в увеличении площади поверхности волокна для более эффективной передачи нагрузок между волокнами и матрицей и дополнительного улучшения свойств композитов.

В настоящее время активно развиваются технологии получения современных волокнистых композитов, в которых для повышения сдвиговых свойств композита на круговой поверхности углеродных волокон выращены специальные микроструктуры, содержащие нановолокна (вискерсы) — нанопроволоки [4,6,7] и углеродные нанотрубки («Фуззи»-волокна) [5,8,9]. Проведенные исследования [5-8] доказали, что для подобных систем существенно повышается прочность межфазной границы (интерфейса) на сдвиг. Для композиционных материалов с вискеризованными волокнами реализуется более высокая предельная прочность и жесткость на сдвиг по сравнению типовыми композитами, не имеющими дополнительную микроструктуру на поверхности волокон. Кроме того, присутствие этих же микроструктур повышает трансверсальную прочность и жесткость, и также демпфирующие характеристики и электропроводность композитов [8,10,11]. Важно отметить, что улучшение свойств композитов зависит от характеристики вискерсов, выращенных на поверхности волокна, и поэтому можно сказать, что вискеризованная волокнистая система представляет собой функциональные волокна [5-8,12,13]. Композиционные материалы на их основе называются современными мультифункциональными композиционными материалами так как одновременно могут быть улучшены различные свойства композитов: прочность, жесткость, демпфирование, усталость, и электро- и теплопроводность [14]. В связи с этим прогнозирование свойств таких мультифункциональных волокнистых композитов представляет теоретический и практический интерес. Поэтому, тема диссертации, посвященная моделированию деформирования волокнистых композитов с функциональными волокнами, имеющими слоистую структуру и дополнительный вискеризованный слой и разработке методов оценки эффективных свойств таких волокнистых композитов, несомненно, является актуальной.

**Цель работы.** Целью работы является и разработка методики моделирования эффективных свойств модифицированных волокнистых неоднородных композиционных материалов, основанной на аналитическом решении серии тестовых задач в рамках метода трех фаз и способной достоверно

прогнозировать механические и динамические свойства с определением модулей потерь и динамических модулей на основе вязкоупругой аналогии и метода комплексных модулей упругости. Получение зависимостей динамических характеристик (упругие и диссипативные) с учетом свойств и концентраций фаз с учетом характеристик микро- или наноструктур (вискерсов), выращенных на поверхности базового волокна.

Одной из основных целей является моделирование динамических характеристики (модулей потерь и динамических модулей) вискеризованного слоя на поверхности волокон, как отдельной неоднородной структуры, а также уточнение демпфирующих характеристик всего модифицированного композита с учетом эффективных динамических характеристик вискеризованного слоя.

**Научная новизна работы** заключается в следующем:

Впервые предложен подход оценки демпфирующих свойств модифицированного композита, основанный на рассмотрении вискеризованного слоя как отдельной волокнистой структуры, на использовании структурной модели вискеризованного межфазного слоя на поверхности волокон, и метода трех фаз Эшелби –Кристенсена для определения эффективных демпфирующих свойств вискеризованного слоя как одной из фаз модифицированного волокнистого композита с учетом геометрических и механических характеристик микроструктуры.

Предложена методика и алгоритм расчета эффективных динамических свойств волокнистых композитов с вискеризованными (функциональными) волокнами в целом, основанный на методе Эшелби и методе комплексных модулей, позволяющий давать обоснованные оценки эффективных характеристик с учетом реальной микро – наноструктуры, также с учетом возможности использования в качестве матрицы в вискеризованном слое вязкоупругого полимера, обеспечивающего повышение свойств демпфирования.

Доказана возможность использования упрощенных предельных соотношений типа Рейса для проведения экспресс оценок эффективных

диссипативных характеристик вискеризованного слоя и модифицированного композита в целом, что обеспечивает эффективность проектировочных оценок.

Представлена уточненная методика оценки диссипативных и динамических свойств двух этапное моделирование, сначала для определения эффективных свойств вискеризованного слоя, а затем эффективных свойств композита в целом по эффективным свойствам вискеризованного слоя и базового волокна.

**Практическое значение работы.** Получен аналитический метод расчета и прогноза свойств демпфирующих свойств, обнаружена возможность получения на базе модифицированных волокнистых композиционных материалов нового поколения с высокими демпфирующими свойствами и сохранением их механических показателей в процессе эксплуатации конструкций. Разработана методика оценки эффективных динамических характеристик новых типов композитов, методы экспресс оценки динамических характеристик межфазного слоя с учетом разного типа матрицы и вискерсов включая вязкоупругий полимер. Предложенная методика дает возможность проводить проектировочные расчеты и широкую оптимизацию такого типа композитных материалов, т.к. учитываются все параметры неоднородного модифицированного волокнистого композита, включая базовое волокно, характеристики микро- и наноструктуры, вискеризованных волокон, объемное содержание волокон с учетом слоя вискеризации, показана возможность получения новых типов и предложена методика, позволяющая давать экспресс анализ демпфирующих свойств вискеризованного слоя и композита в целом.

**Реализация результатов работы.** Результаты, полученные в диссертации, используются в Институте Прикладной механики (ИПРИМ) РАН, Вычислительном центре РАН, МАИ (Государственном техническом университете).

**Достоверность результатов** обосновывается использованием строгих подходов теории упругости, механики композитов и апробированных математических методов осреднения, а также совпадением результатов,

полученных автором с экспериментальными данными, приведенными в литературе и с результатами решения аналогичных проблем для дисперсных и волокнистых композитов, приведенных в работах других авторов, в том числе с результатами прямого численного моделирования методом асимптотического осреднения.

**Апробация работы и публикации.** Основные результаты были представлены на конференциях: Международная конференция “Advance in Composite Science and Technologies”, Москва, декабрь 2018 и на конференции Международная научная конференция «Современные проблемы математики и механики», посвященная 80-летию академика В. А. Садовниченко, Москва, май 2019.

Основное содержание диссертационной работы опубликовано в двух научных печатных работах, одна из которых опубликована в рецензируемом международном журнале и одна в издании, рекомендуемом Перечнем ВАК:

A.A. Dudchenko, S.A. Lurie, S.V. Makovskij and K.K. Shramko.: Stress-strain state of the interfacial layer in a visco-composite composite with longitudinal shear // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering Vol. 683, 2019.

Кривень Г.И., Маковский С.В.: О демпфирующих свойствах вискеризованного слоя в модифицированных волокнистых композитах т. Влияние характеристик вискерсов на эффективный продольный модуль сдвига композиционных материалов, армированных вискеризованными волокнами // Труды МАИ, №114, 2020

**Объем и структура работы.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, приложения, и списка литературы. Она содержит 129 страниц, из них 9 занимает список использованных источников. Список используемой литературы включает 104 наименования (из них 86 на иностранном языке).

В первой главе даются обзоры вискеризованных волокон и композитов на их основе, классических методов и их основ при моделировании эффективных



механических свойства композитов, и методов моделирования вискеризованных волокнистых композитов.

Во второй главе излагается постановка краевых задач в цилиндрических системах координат для многофазных ортотропных фаз в композите. Приводится методика осреднения и аналитического расчета эффективных механических и динамических свойств функциональных волокнистых композитов, которые состоят из многофазных ортотропных тел.

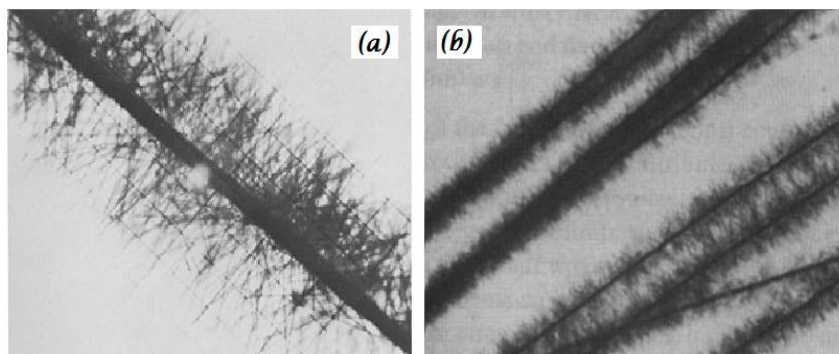
В третьей главе исследуется влияние характеристик микро- или наноструктур (вискерсов) на эффективные механические и динамические свойства вискеризованных волокнистых композитов.

В четвертой главе даются оценки эффективных свойств демпфирования композит, связанных с трансверсальными деформациями, которые строятся с учетом свойств демпфирования вискеризованных слоев. Рассматриваются случаи возможной замены связующего в слоях вискеризации с эпоксидной матрицы на свойства вязкоупругого полимера на температуре стеклования и ниже температуры стеклования, указывается класс композитов, в которых можно достичь высоких демпфирующих характеристик (вязкоупругий полимер на температуре стеклования), оценки эффективных свойств делаются на основе самосогласованного метода Эшелби и на основе упрощенных оценок типа Рейса для трехфазного материала.

## Глава 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

### 1.1. Некоторые сведения о вискеризованных волокнах и композитов на их основе

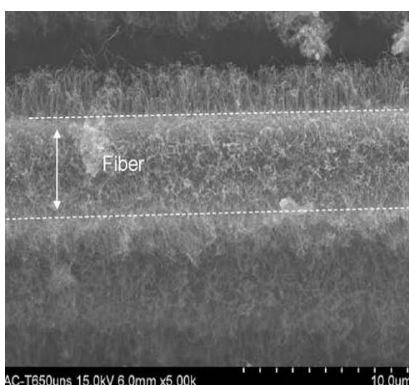
Несколько десятилетий назад были созданы углеродные волокна, вискеризованные *графитовыми микровискерсами* (см. рис. 1.1). Было показано, что прочность интерфейса на сдвиг полимерных композитов на основе таких волокон улучшается в 3–5 раз [15,16]. Однако, один из серьезных недостатков этой технологии заключается в том, что механические процессы, которые породили микровискерсы на поверхности волокон, существенно уменьшали предельную прочность на растяжение базовых волокон, и поэтому, прочность и жесткость композитов в направлении укрепления значительно уменьшились [17,19]. Таким образом, исследования в рамках этой технологии в течение достаточно долгого периода были приостановлены.



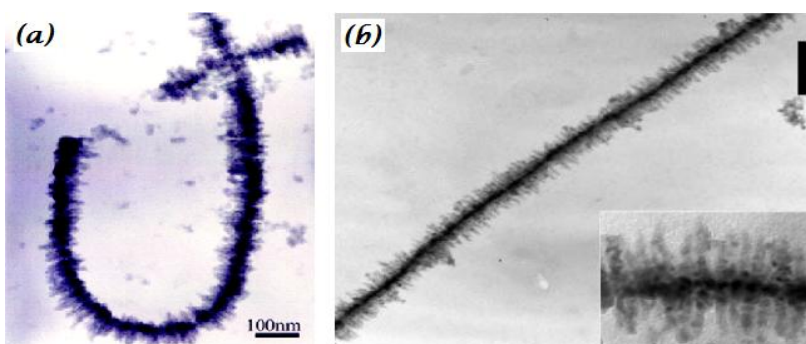
**Рис. 1.1** (а) Единичное углеродное волокно, вискеризованное микровискерсами (сетка – 10 мкм) [15], и (б) Углеродные волокна (марки RAЕ), вискеризованные микровискерсами [16].

Интересно, что в современную эпоху нанотехнологий эта технология возобновляется. Углеродные нанотрубки (УНТ), которые стали доступными с 1990-х годов, в настоящее время используются для нанесения на поверхность углеродного волокна (см. рис. 1.2). Такое волокно именуется *волокном «Фуззи»* [5,8]. В экспериментальных работах [5,8] доказано, что при наличии нанотрубок,

которые выращены на поверхности волокна, прочность интерфейса на сдвиг композита существенно повышается. Так как нанотрубки выращены радиально в трансверсальном направлении волокон, сжимающая прочность композита в том же направлении возрастает значительно [18]. Кроме того, приведенные исследования [12,13] показали, что плотность, длина и ориентация нанотрубок могут влиять на поведение таких композитов. К сожалению, также как и его предшественник, этот тип волокна отличается существенным сокращением жесткости и прочности на растяжение. Это связано с высокой температурой, используемой в растущих нанотрубках на поверхности волокна. Тем не менее, Штейнер и др. [7] недавно объявил, что они успешно разработали новые методики производства волокон «Фуззи» без повреждения базового волокна.

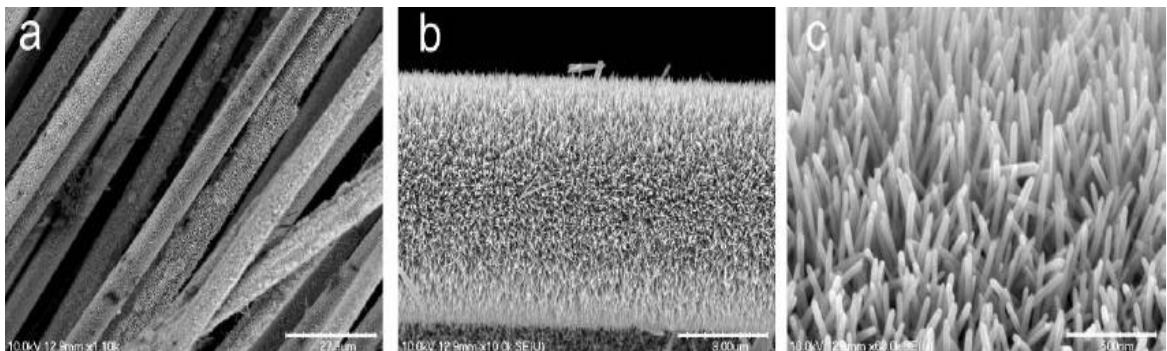


**Рис. 1.2** Волокно «Фуззи» — углеродное волокно, вискеризованное углеродными нанотрубками [5].

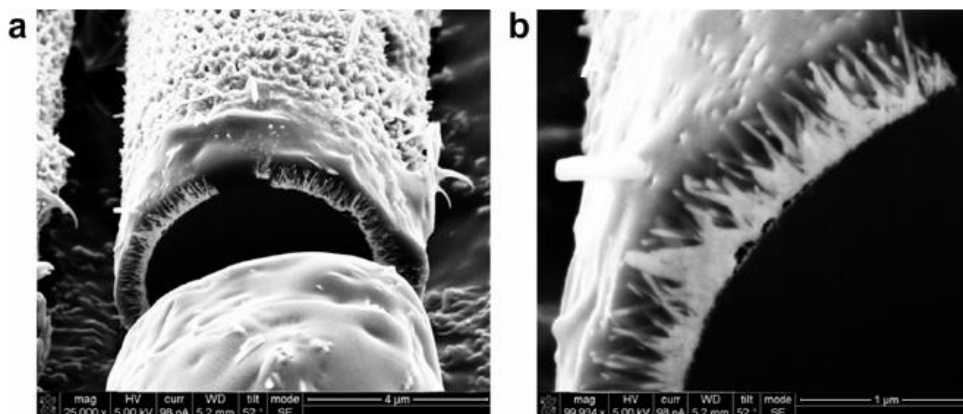


**Рис 1.3 (а)** CdTe-SiO<sub>2</sub> наноструктура, и **(б)** форма наноструктуры похожа на многоножки (масштаб – 200 нм) [6,20].

Помимо нанотрубок, нанопроволоки и наностержни также используются в нано-армированных материалах. Например, Ванг и др. [6] создали нанопроволоки теллурида кадмия (CdTe), вискеризованные нанопроволоками кремния оксида (SiO<sub>2</sub>) (рис. 1.3). Отмечено, что эта наноструктура похожа на *нано-многоножки* [20]. По данным Гузя И.А. и др. [21], такая наноструктура имеет три компонента: 1) твердая базовая нанопроволока CdTe, 2) покрытие SiO<sub>2</sub>, и 3) нанопроволоки SiO<sub>2</sub>. Несмотря на свой огромный потенциал для композитного приложения, дополнительная информация о характеристиках таких композита не найдена.



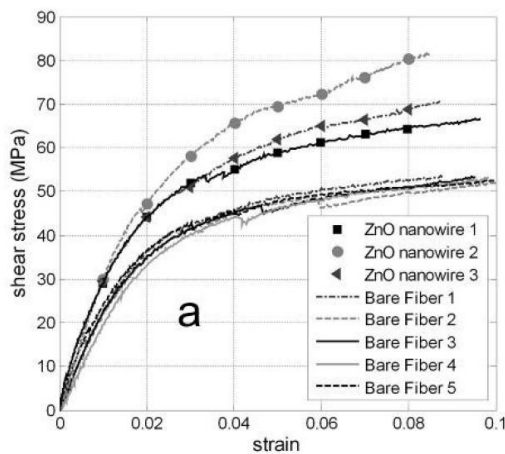
**Рис. 1.4** Углеродные волокна, вискеризованные нанопроволоками (масштаб: а. 27.8 мкм, б. 3 мкм, с. 500 нм) [4].



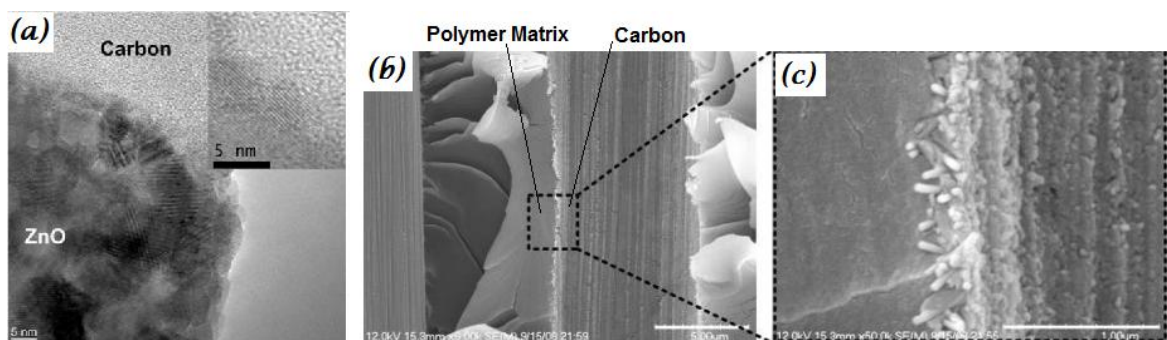
**Рис. 1.5** Микро-фотографии вискеризованного волокна с матрицей [4].

Далее, Лин и др. [4] и Галан и др. [7] получили новую подобную систему волокна без применения высокой температуры. В их работах создаются углеродные волокна, вискеризованные нанопроволоками оксида цинка (ZnO). На рис. 1.4 показана морфология этой волокнистой системы, и видно, что

нанопроволоки выращены на поверхности волокна перпендикулярно с высокой плотностью. На рис. 1.5, с матрицей, видно, что такой композит имеет четыре слоя: 1) твердое базовое углеродное волокно марки IM7, 2) покрытие оксида цинка, 3) вискеризованный межфазный слой, который состоит из нанопроволок оксида цинка и полимерной матрицы, и 4) полимерная матрица. Можно увидеть также, что нанопроволоки смочены матрицей полностью.



**Рис. 1.6** Модуль продольного сдвига композита с микроструктурой и без микроструктуры [4].



**Рис. 1.7** (а) Изображение НТРЕМ – Интерфейс волокно-ZnO (б) межфазный слой между волокном и матрицей, и (в) Интерфейс ZnO- матрицы [4].

Согласно экспериментальным данным сегментационного теста единичного волокна [4], изменяя диаметр (50 - 200 нм) и длину (0,2 - 1,6  $\mu\text{m}$ ) нанопроволоки, можно повышать сдвиговую прочность интерфейса до 228%. Вообще говоря, при увеличении диаметра и длины нанопроволок, повышается прочность интерфейса

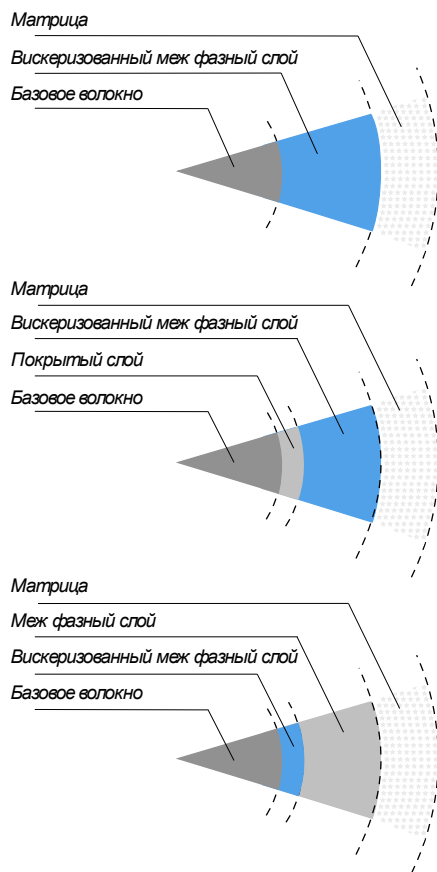
на сдвиг композита [7]. Самый интересный результат представляет собой данные для модуля продольного сдвига, полученные в эксперименте «V-notch shear testing - ASTM 5379». Рис. 1.6 показывает, что по сравнению с композитом без нанопроволок средний модуль сдвига композита с нанопроволоками повышается на 37,5%.

Интересно отметить, что авторы [4,7] описывают область, содержащую нанопроволоки и матрицу как межфазный слой между волокном и матрицей, а также два интерфейса — волокно-ZnO и ZnO-матрица. Эти интерфейсы по сравнению с начальным интерфейсом волокно-матрицы обладают более высокой прочностью. Сообщалось, что интерфейс волокно-ZnO имеет лучшее прилипание чем интерфейс волокно-матрицы, а интерфейс ZnO-матрица — более сильное взаимодействие, не только за счет лучшего прилипания, но также из-за и большей поверхности контакта. Поэтому, композит на их основе становится более прочным материалом. На рис. 1.7. в видно, что хотя нанопроволоки главным образом выращены перпендикулярно к поверхности волокна, они в матрице ориентированы случайным образом. Интересно также, что этот тип волокнистой системы, согласно [7], не теряет прочностных свойств после роста нанопроволок.

Помимо полимерных композитов, армированных вискеризованными волокнами, существуют также композиционные материалы на основе металлических матриц, армированных вискеризованными металлическими волокнами. В последнее время разрабатываются композиты на основе алюминия, армированные непрерывными волокнами оксида алюминия  $Al_2O_3$ . Для улучшения механического контакта с матрицей, длинные волокна  $Al_2O_3$  подвергаются вискеризации вискерсами (карбид кремния  $SiO_2$ , титана оксида  $TiO_2$ , муллита  $3Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$  и т.д.) непосредственно в процессе изготовления композита. При изготовлении вокруг волокон образуется межфазный слой, в зависимости от состава матрицы [22].

## 1.2. Физические, геометрические и материальные характеристики вискеризованных волокнистых композитов

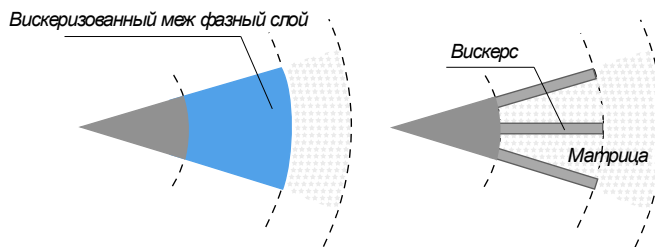
На основе предыдущего обзора видно, что вискеризованные волокнистые композиты являются многофазными структурами. На рис. 1.8 представлены различные конфигурации таких композитов. Верхняя фигура соответствует композитам, армированным волокнами, вискеризованными вискерсами или нанотрубками. Средняя фигура поясняет компоненты композита, армированного волокнами, вискеризованными нанопроволоками, а нижняя фигура — композита на основе алюминия, армированного вискеризованными волокнами  $Al_2O_3$ .



**Рис. 1.8** Различные конфигурации вискеризованных волокнистых композитов.

Можно увидеть, что вискеризованный межфазный слой является нанокompозитом, который состоит из вискерсов и матрицы (рис. 1.9). Итак, механические свойства этого слоя зависят от несколько параметров вискерсов в слое — плотность (количество), длина, диаметр, ориентация, и тип материала.

Геометрические и материальные характеристики таких композитов даны в приложении А.



**Рис. 1.9** Схема вискеризованного межфазного слоя, содержащего вискерсы и матрицу.

### **1.3. Эффективные упругие и демпфирующие свойства**

Моделирование композиционных материалов (КМ) содержит фундаментальную проблему, так как в макромасштабе они считаются однородными континуумами, а в микромасштабе — существенно неоднородными, т.е., компоненты или фазы композита различаются по свойствам, и между ними существует явная граница раздела (интерфейс или межфазной слой особенно в полимерной матрице) [1]. В связи с этим, эффективные свойства КМ в целом зависят от характеристик фаз композитов (их свойств, объемного содержания, формы, размера, распределения и ориентации), состояния интерфейса или межфазного слоя, и внутренних взаимодействий (когезионных и адгезионных эффектов) [2]. Кроме того, параметры обработки в производстве также влияют как на свойства отдельных фаз, так и на эффективные свойства композитов. Таким образом, для определения макроскопических свойств КМ важную роль играет *микромеханика*.

Можно отметить, что история современных КМ является сравнительно небольшой по сравнению с другими традиционными (конвенциональными) конструкционными материалами и металлическими сплавами. Так можно считать, что современные КМ были впервые введены, когда впервые были



получены стекловолокна (они были случайно созданы в 1930-х г). В то время, как полимерная химическая промышленность уже давно существовала. Большинство изделий КМ использовались для неструктурных приложений даже в аэрокосмических промышленностях. Стекловолокнистые КМ были впервые использованы в коммерческих самолетах лишь в 1950-х г. Бурное развитие современных КМ особенно для аэрокосмических (коммерческих и военных) началось в 1960-х, что было связано с новыми технологиями и успехами в области производства современных волокнистых материалов — борных, углеродных, и кевларов, и новых улучшенных полимерных материалов [23]. Интересно отметить также, что микромеханическая теория современных КМ также начала развиваться в течение этого же периода времени.

*Микромеханикой* называется область механики материалов, в которой дается анализ композитных или гетерогенных материалов на уровне отдельных компонентов, составляющих эти материалы. Учитывая свойства материалов компонентов композитов, как уже упоминалось ранее, одной из важных целей микромеханики материалов является моделирование деформации и характеристик КМ, эта задача определяется как *осреднение* или *гомогенизация*. Преимущество гомогенизации заключается в том, что поведение гетерогенных материалов может быть определено без обращения к испытанию потому, что такое испытание может быть весьма дорогим. Кроме того, результаты экспериментов представляют собой так или иначе макромасштабные данные. Тем не менее, конкретная теория микромеханики должна быть проверена путем сравнения с экспериментальными данными. Вторая основная задача микромеханики — это *локализация*, которая направлена на оценку локальных полей (напряжения и деформаций) в фазах под действием макроскопической нагрузки. Такое знание особенно важно для описания повреждения материала.

Так как большинство методов микромеханики основаны на механике сплошной среды, метод, основанный на атомистических подходах как молекулярной динамики не охвачен. Более того, мы будем обсуждать аналитические методы в рамках линейной классической теории упругости, а не

численные методы, такие как метод конечных элементов. Тем не менее, интересно напомнить о том, что происхождение и основание современной механики сплошных сред, были рассмотрены Навье (1827) и Коши (1827)<sup>1</sup> в значительной степени как — «микромеханические» [24]. Они разработали уравнения континуума (упругих сплошных сред) и использовали понятие *материальной точки*. Но на самом деле в некотором смысле материальной точкой является «гомогенная» или «гомогенизированная» ньютоновская картина материалов, находящихся в более меньшем масштабе, где предполагается, что материальная точка макроскопически ведет себя в сплошном теле таким же образом как и материал, имеющий молекулярную структуру [25,26].

Можно отметить, что актуальный анализ микрогетерогенных материалов имеет небольшую историю — это примерно 190 лет. Но сначала все работы были направлены на определение макроскопических свойств материалов, состоящих из матрицы и распределения частиц, например в работах электрической проводимости и магнитных полей: Пуассона (1824), Фарадея (1838), Максвелла (1854), и в работах разбавленных суспензий твердых частиц — Лорда Релея (1892), и Эйнштейна (1905) [24,27].

Анализ эффективных свойств микрогетерогенных твердых тел (поликристаллов) дается в работах Фойгта (1910) и Рейсса (1929), которыми изучались поликристаллы [28]. Как мы уже отмечали ранее, наибольшее развитие микромеханические теории КМ особенно на волокнистых композитах получили после 1960-х г., и это связано с значительными работами Эшелби (1956,1957) [29,30].

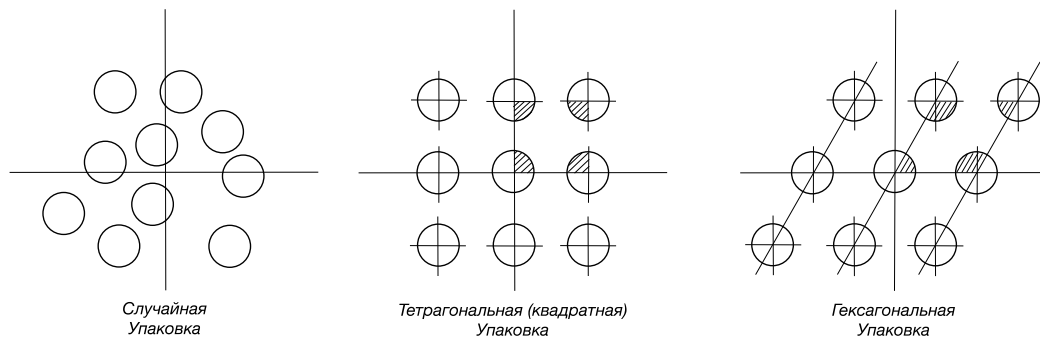
#### **1.4. Методы осреднения.**

Для непрерывных волокнистых армирующих композиционных материалов развиты многие аналитические методы, основанные на распределении волокон в поперечном сечении однонаправленного композита, например, распределение случайное и периодическое — квадратная и шестиугольная упаковка (см. рис.

---

<sup>1</sup> (год) – год когда работа появилась, что показывается для исторического контекста.

1.10). Для периодических структур наиболее плотная упаковка включений (волокон) в квадратной структуре —  $c_1^{max} = 0.78$ , а в гексагональной —  $c_1^{max} = 0.92$  [31]. С другой стороны, по словам Хашина [32], случайное или регулярное распределение лучше всего представлено гексагональной структурой.



**Рис. 1.10** Распределение волокон в однонаправленном композите.

#### 1.4.1. Осреднение Фойгта и Рейсса.

Эти методы являются самыми простыми методами при определении свойств КМ (двухфазных и многофазных), хотя и эти методы первоначально были созданы для изучения характеристик поликристаллов. Осреднения по Фойгту и Рейссу являются решениями для композита, который подвергнут постоянной деформации и постоянному напряжению, соответственно [23]. В то же время, можно считать, что методы Фойгта и Рейсса для и волокнистых композитов являются решениями для параллельно и последовательно растягиваемых стрержней при условии равенства обобщенных перемещений в первом случае и обобщенных сил во втором случае [2]. Получаемые по этим формулам результаты зависят от объемных долей и модулей упругости фаз, входящих в состав композита.

#### 1.4.2. Осреднение по границам.

По Рикардию А. [33], при приближении эффективных свойств композитов существуют два подхода — прямая оценка и оценка границ. Исторически осреднения Фойгта и Рейсса были первыми моделями, позволяющими строго

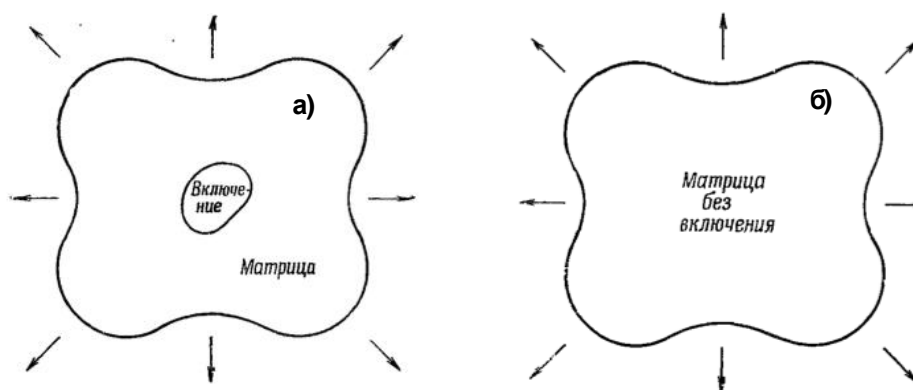
оценить верхнюю и нижнюю границы эффективных свойств, соответственно [2]. Однако польза такого подхода все же оказалась весьма ограниченной, поскольку этот подход дает хорошие результаты только для композитов, свойства фаз которых близки. Для случая пустот, имеющих нулевой модуль упругости данные оценки дают тривиальные результаты, т.е. верхняя оценка для модуля соответствует материалу без пустот, а нижняя — материалу, потерявшему несущую способность с нулевым модулем. Для абсолютно жестких включений, что является типичным для композитов, данные оценки настолько далеки от свойств типичных композитов, что они не имеют практического значения, особенно при низкой объемной доле включений.

Было доказано, что наилучшие возможные границы свойств гетерогенной двухфазной среды для макроскопически изотропной среды, которые не могут быть далее улучшены для произвольного статистического распределения фаз без уточнения формы включений, являются границы Хашина-Штрикмана [34]. Данные границы отличаются от указанных ранее границ Фойгта и Рейса тем, что границы Хашина-Штрикмана включили переменные поля допустимых напряжений и деформаций. С другой стороны, вполне приемлемые уточненные возможные границы для свойств двухфазной среды, имеющей макроскопически трансверсально-изотропную среду были найдены Хашиным и Хиллом [35].

#### **1.4.3. Осреднение по методу Эшелби.**

Два основных результата теории упругости, применяющиеся для анализа гетерогенных твердых сред, были получены Эшелби [29,30]. В одной работе [30], Эшелби рассматривал единичное включение находящееся внутри неограниченной матрицы (см. рис. 1.11.а). Рассматриваемое включение является эллипсоидом. Таким образом, любыми взаимодействиями между включениями пренебрегают. Поле деформаций (напряжений) на бесконечности считается однородным. Данная аппроксимация является вполне удовлетворительной, по крайней мере, для малых концентраций включений. Как было показано Эшелби [30], дополнительное поле деформаций (напряжений), создаваемое включением зависит от характерного размера и формы включения, и расстояния между включениями. Кроме того,

Эшелби показал, что поле деформаций (напряжений) внутри эллипсоидального включения в однородно нагруженном теле также является однородным. Это позволяет существенно упростить решение и дальнейшие выкладки, получить аналитическое решение для изолированного включения. В конце концов, Эшелби построил точное решение этой проблемы с помощью точного значения для матрицы Эшелби, определяющей соответствие между полями деформации во включении и в матрице. Конкретные типы конфигураций включений рассматривались многими авторами, и различные матрицы Эшелби для этих различных конфигураций можно найти в книге Мура [34].

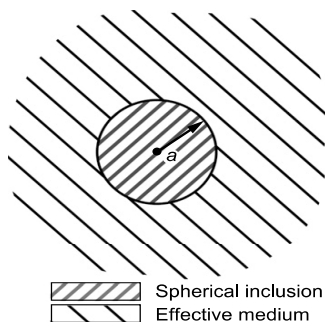


**Рис. 1.11** а) Изолированное включение в среде (матрице), и б) среда без включения — матрица [35].

В его другой известной работе [29], Эшелби построил формулу, основанную на энергетическом методе для анализа гетерогенных твердых сред. Формула, выведенная Эшелби для вычисления энергии деформирования между средами с включением и без включения, преобразует обычное интегрирование по объему в интегрирование по поверхности частного вида. Как было показано Кристенсен, для случая изолированного включения с малой концентрацией, получено точное решение с помощью уравнений теории упругости и формулы Эшелби [35]. Для сферических и цилиндрических включений, получаемые решения совпадают с решениями, основанными на матрице Эшелби [36], хотя и процедура, использующая формулу Эшелби не учитывает во включении однородное поле деформаций (напряжений).

#### 1.4.4. Осреднение по методу самосогласования (модель эффективного поля).

Идея метода состоит в рассмотрении каждого включения как находящегося в среде с упругими свойствами, соответствующими эквивалентному континууму, образованному матрицей и всеми остальными включениями (см. рис. 2) [2]. Для случая упругости данный метод впервые был предложен, вероятно, Херши и Кронером для поликристаллов [35], а затем — Хиллом и Будянским для КМ [37,38]. В данных моделях уравнения теории упругости решаются для сферических и цилиндрических включений в матрице с неизвестными упругими свойствами, затем вычисляются эффективные модули. Показано, что в частном случае метод эффективного поля включает метод осреднения Эшелби, так что эффективная среда совпадает с эффективным полем. В изотропном рассматриваемом случае метод приводит к системе двух алгебраических уравнений относительно двух эффективных упругих констант, а в анизотропном случае — к системе уравнений, число которых равно числу констант для эквивалентного упругого континуума.



**Рис. 1.12** Схема метода самосогласования [36].

Для малых концентраций включений метод дает результаты, асимптотически совпадающие с результатами, полученными согласно методу малых концентраций. В случае конечных концентраций включений, но не слишком больших, разумных концентраций, некоторые из эффективных модулей могут оказаться нефизическими, лежащими вне границ Хашина-Штрикмана. Кроме того, для пустот или трещин метод дает тривиальные результаты.

### 1.4.5. Осреднение по методу самосогласования (Модель дифференциальная).

Идея метода состоит в разделении включений на бесконечно малые порции, вносимые в матрицу. Для каждой последующей порции применяется метод самосогласования, т.е. каждая новая порция рассматривается как внедренная в эквивалентную среду, образованную матрицей и всеми включениями, внедренными на предыдущих этапах (см. рис. 1.13) [2]. Как метод самосогласования эффективного поля в изотропном случае метод приводит к системе двух дифференциальных уравнений относительно двух упругих констант, а в анизотропном случае — к системе дифференциальных уравнений, число которых равно числу констант для эквивалентного упругого континуума. Идея метода впервые была применена Роском для разбавленных суспензий твердых частиц [39]. Затем данный метод применялся Маклафином для композитов, и показано, что в отличие от метода самосогласования, в случае конечных типичных концентраций включений все эффективные модули сферических и волокнистых композитов лежат внутри границ Хашина-Штрикмана [40].

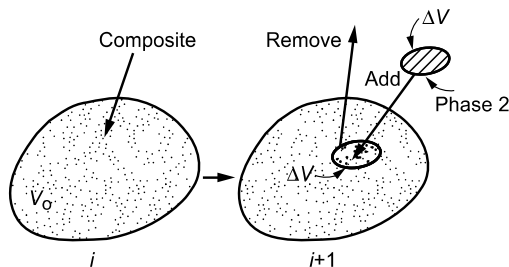
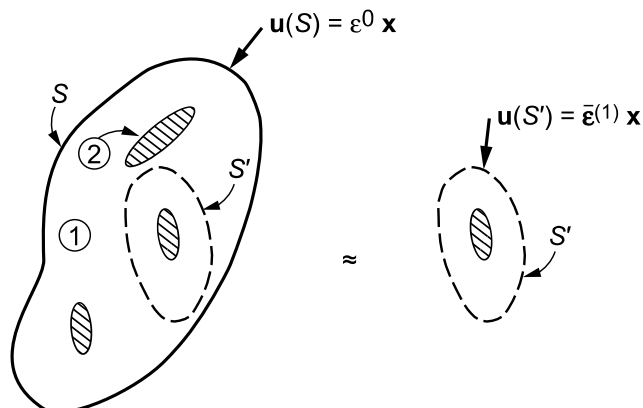


Рис. 1.13 Схема метода осреднения дифференциального [36].

### 1.4.6. Осреднение по методу Мори-Танака.

Идея метода состоит в рассмотрении каждого включения как находящегося в поле напряжений, соответствующем среднему полю напряжений в матрице и, вообще говоря, отличному от среднего поля напряжений в композите (см. рис. 1.14) [2]. Модель впервые была предложена Мори и Танака, и использовались для моделирования композитов с эллиптическими включениями [41]. Наиболее наглядно идея метода может быть сформулирована для случая пустот и в этом случае среднее поле напряжений в матрице отличается от усредненного поля

напряжений в образце на величину относительной пористости (отношения объема пор к объему образцы). Эффект взаимодействия пустот при этом сводится исключительно к уменьшению эффективного сечения (за счет пустот) образца. Для случая трещин (пустот с нулевой толщиной) метод сводится к методу невзаимодействующих включений.



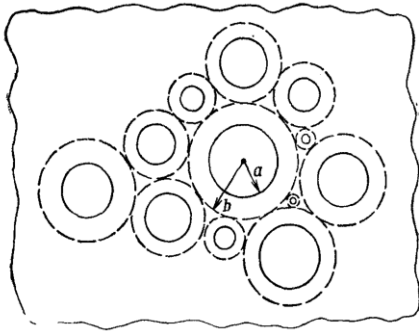
**Рис. 1.14** Схема метода Мори-Танака [36].

Метод Мори-Танака может рассматриваться как частный случай метода эффективного поля, в рамках которого эффективные поля напряжений для каждой из рассматриваемых частиц не обязательно должны быть одинаковыми и однородными. Наиболее простой подход метода Мори-Танака при определении эффективных свойств композитов предложен Бенвенисте (1987) [42]. На основе данного подхода осуществлялось и вычисление полного набора упругих констант волокнистого композита. Однако, при получении эффективных констант этот метод основан на использовании матрицы Эшелби, где используется предположение однородных полей внутри включений и для этого, этот подход дает хорошие результаты для малых концентраций включений особенно в поперечных характеристиках композита.



### 1.4.7. Осреднение по полидисперсной модели (Метод композитной сферической или цилиндрической сборки — метод двух фаз).

Идея метода состоит в том, что в непрерывной среде заполнены случайные распределенные включения различного размера (см. рис. 1.15). Штриховая линия ограничивает области матрицы, связанные с каждым отдельным включением. Отношение радиусов  $a/b$  принято постоянным для такой каждой составной частицы независимо от ее абсолютного размера. Очевидно, что распределение требует того, чтобы размеры частиц уменьшились до бесконечно малых. Можно ожидать, что эта модель даст разумные результаты для реальных систем, которые имеют широкое довольное непрерывное распределение размеров включений, и почти очевидно, что от этой модели нельзя ожидать приемлемых результатов для систем, содержащих большие концентрации включений одного размера [35].



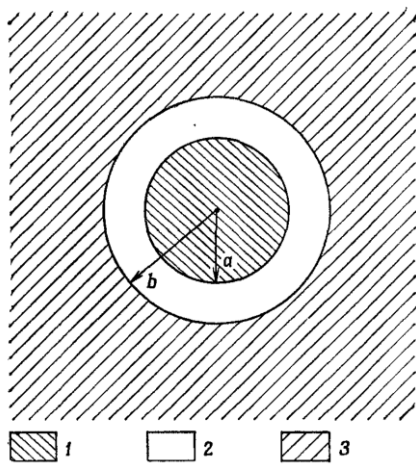
**Рис. 1.15** Схема полидисперсной модели со сферическими или цилиндрическими включениями [35].

Этот метод первоначально был развит Хашиным и др. [32,43]. В рамках данной модели, рассматривается симметричная ячейка (отдельный объем), состоящая из одного включения (сферического или цилиндрического) и матрицы. С помощью уравнений теории упругости эффективные модули композита найдены при сравнении плотности энергии деформации между ячейкой и эффективной средой, имеющей те же объем ячейки и образованной матрицей и включением (гомогенизированным композитом). Тем не менее, получаемые результаты утверждены только в случае если решения, в которых используются два разных граничных условия деформаций и напряжений, совпадают. На самом

деле, этот метод основан на подходе, который производит к границам Хашина-Штрикмана (где форма включения не учтена). В случае сферического включения (т.е. форма включения определена) границы макроскопически изотропного композита для эффективного объема сжатия совпадают и поэтому, получено явное выражение этого модуля. Однако, для модуля сдвига найдены более узкие границы [32,35]. Для большинства методов микромеханики, описанных ранее, их результаты всегда сравниваются с этими границами для проверки их точности. В случае цилиндрического включения решение лежит внутри границ Хашина-Штрикмана. В конце концов, этот метод также дает хорошие точные результаты для конечных до достаточно высоких концентраций включений.

#### **1.4.8. Осреднение по методу самосогласованного поля Эшелби (Трехфазная модель).**

Метод трех фаз основан на полидисперсной модели и методе самосогласования (эффективного поля), и построен, чтобы получить точное решение для эффективного модуля сдвига [44]. Модель впервые была предложена Кристенсен-ом-Ло для сферических и цилиндрических (волокнистых) композитов. Идея этого метода основана на рассмотрении трехфазного материала (см. рис. 1.16). Проводя осреднения по формуле Эшелби, рассматриваем задачу о симметричной ячейке на из трех фаз. Первый и второй компонент являются соответственно включением и матрицей, обладающими модулями упругости включения и матрицы. Объемная доля включения при этом такая же, как и в исследуемом композите. Модуль упругости третьей фазы считается равным эффективному модулю упругости эффективного гомогенного материала и является искомой величиной.



**Рис. 1.16** Схема трехфазной модели: 1 – сферическое/цилиндрическое включение, 2 – матрица, 3 – эквивалентная гомогенная среда [35].

С помощью формулы Эшелби и уравнений теории упругости эффективные модули композита будут найдены путем сравнения энергии упругости, запасаемой в ячейке композита (т.е. в эквивалентной гомогенной среде с включением и матрицей) и эффективной среде (т.е. в эквивалентной гомогенной среде без включения и матрицы). В отличие от оригинальной полидисперсной модели, метод трех фаз дает точные результаты для эффективного модуля сдвига включений, так как включение образовано здесь двумя фазами и поэтому однородное деформирование состояние не реализуется [35]. Интересно отметить, что результаты и для других упругих константах, полученных по методу трех фаз идентично совпадают с результатами полидисперсной модели [39,45]. Также, метод трех фаз может дать достаточно аккуратные результаты для достаточно высоких концентраций включений [46].

#### **1.4.9. Метод асимптотического осреднения.**

Самую высокую точность в задачах определения эффективных свойств композитов, основанных на использовании точных математических приемов метод является асимптотического осреднения, построенный Бахваловым и Панасенко [47], и Победрей [48]. В этом методе, композит считается периодической средой. В соответствии с техникой асимптотического осреднения

процессов в средах с периодической структурой рассматривается бесконечная среда с периодическими микровключениями.

Формальное асимптотическое разложение общего решения строится в форме ряда по степеням малого геометрического параметра  $\varepsilon$ , который является периодом периодичности (диаметр включения). В этом разложении быстрые и медленные переменные разделяются для локального и глобального поведения. Важно указать на первые два члена разложения, которые описывают напряженно-деформированное состояние в композите с учетом и в соответствии с эффективными характеристиками эффективной среды. Этот подход является теорией нулевого приближения [48], и такой подход может получить аккуратные результаты для конечных и достаточно высоких концентраций включений в композите [49,50].

#### **1.4.10. Анализ и выводы.**

В рамках классической теории упругости в настоящее время существуют подходы, позволяющие в принципе решить задачу нахождения эффективных характеристик композита, состоящего из матрицы и небольшой объемной доли включений другого материала. Иными словами, для малых концентраций включений такая задача в принципе решена.

Существующие решения для жестких включений в форме произвольного эллипсоида вращения, или для плоского эллипсоида вращения, вырожденного в диск, или для пустот, не всегда согласуются между собой и даже имеют ошибки. В связи с этим требуется дополнительный анализ для выяснения релевантности результатов доступных в литературных источниках.

Эффективные свойства композита с конечной концентрацией включений могут быть найдены с использованием какой-либо из аппроксимационных схем. Для концентраций до 20-30% относительное расхождение между результатами, полученными согласно различным теориям, не столь велико и, по видимому, не превышает экспериментальной погрешности для обычных наполненных

композитов. По сравнению с несколькими экспериментальными данными [36,39] или с результатами конечных элементов [35,46], и со строгими границами Хашина-Штрикмана [35,49], метод трех фаз и асимптотического осреднения являются более точными методами при определении характеристик композитов для конечных до достаточно высоких концентраций включений.

Несколько рассмотренных методов (особенно метод двух и трех фаз) расширены на многофазную систему [51,52], которая используется для изучения влияния межфазного слоя [53], покрытия [54], и также эффектов когезии и адгезии (хотя эти эффекты являются неклассическими) [55,56]. Помимо изотропных фаз, в композите рассматриваются трансверсально-изотропные и ортотропные фазы [57-62].

- Относительное изменение упругих модулей композита со включениями по сравнению с упругими модулями матрицы определяется:
- Объемной концентрацией включений (изменение модуля пропорционально концентрации в случае малых концентраций);
- Отношением модулей (свойств) матрицы и включений;
- Формой включений (существенно зависит от соотношения максимального и минимального размеров включений);
- Ориентацией включений (если несферические включения имеют некоторые предпочтительные ориентации, композит становится анизотропным даже в случае изотропной матрицы).

В соответствии с теорией упругости относительное изменение упругих модулей композита с включениями, по сравнению с упругими модулями матрицы, почти не зависит (слабо зависит) от абсолютного размера включений при одинаковой концентрации. В тоже время, ряд авторов указывает на экспериментально наблюдаемую сильную зависимость эффективных упругих констант от абсолютного размера включений для композитов с микро- и нановключениями. Следовательно, изменение упругих модулей должно существенно зависеть от абсолютного размера включений при одинаковой объемной концентрации и форме включений, что противоречит классической

теории упругости. Этот факт объясняется изменением свойств материала матрицы на контакте со включением, и на первую роль выдвигается величина удельной поверхности включений. Таким образом, необходимо проведение тщательного анализа, и возможно дополнительных экспериментов, для обнаружения причины наблюдаемого явления.

#### **1.4.11. Демпфирующие свойства.**

Эффективные вибрационные и шумовые управляющие структуры являются важными в аэрокосмических промышленности [1,63,64]. Уменьшение вибрационной энергии приводит к увеличению срока службы изделий и конструкций, и в тоже время уменьшение шума означает увеличение комфорта для пассажиров, а также способствует охране окружающей среды [65].

Демпфированием в простой терминологии, является преобразование механической энергии в рассеивающую энергию, например, тепловую энергию [1]. В механической системе, демпфирование можно разделить на активное и пассивное демпфирование [66]. Для нашего исследования, пассивное демпфирование представляет собой интерес потому, что это связано с материальными особенностям. Хорошо известно, что полимерные композиты, армированные волокнами обеспечивают более высокое материальное затухание, чем наиболее распространенные металлы. Конечно, это происходит главным образом из-за присутствия вязкоупругого материала — полимерной матрицы. Наряду с матрицей, существуют и другие источники энергии диссипации (т.е. механизм демпфирования) в композитах. Например, от других фаз в композите - волокон и межфазных слоев, от повреждений — трещин, расслоений и внутренних трений, вязкопластического и термального затухания, и вязкоупругого демпфирования при существовании большой амплитуды вибрации или высокого уровня напряжений и деформаций из-за больших интенсивностей напряжений или деформаций в области между волокнами или фазами [65,67,73].

Чандра Р. и др. [66,67] предоставили хороший обзор о демпфированных исследованиях композитов до 1999 года. В своей работе они пришли к выводу,

что существует два аналитических методов, используемых при прогнозе демпфирующих характеристик композитов — принцип упруго-вязкоупругой аналогии [35,36,68, 69,109,110] и метод, основанный на потенциальной энергии деформации [70,71]. Принцип упруго-вязкоупругой аналогии имеет два подхода — это преобразование Лапласа и метод комплексных модулей. В целом, оба подхода преобразуют выражения для эффективных упругих свойств в выражения для вязкоупругих свойств гетерогенных сред. Однако, метод комплексных модулей является более простым. Тем не менее, этот метод может быть использован только для диапазона небольших вибрационных частот (больших длин волн) [68]. Другие микромеханические работы были направлены на исследование влияния межфазных, покрытий и трещин на демпфирующие характеристики волокнистых композитов [63,72-74].

Для дальнейшего повышения демпфирующих свойств композитов рассматривается концепция гибридных композитов с вязкоупругими материалами (т.е. полимерными материалами, которые имеют рубочные свойства на температуре стеклования). Имея вязкоупругий композиционный материал, может быть достижима хорошая комбинация высокого демпфирования и жесткости [75-77]. В последнее десятилетие такую концепцию аналитически и численно исследовали много ученых [78-84]. На микромеханическом уровне вязкоупругий материал покрыт между волокном и матрицей, а на макромеханическом уровне — между слоями или пластинами. Тем не менее, результаты часто показывали, что хотя повышать демпфирующую способность композита получается, сохранять достаточно высокую жесткость является трудным. Однако, было показано, что такой композит может быть получен только когда толщина вязкоупругого материала порядка нанометров [46,65].

## **1.5. Методы моделирования вискеризованных волокнистых композитов и их результаты**

Несколько десятилетий назад, была разработана модель модифицированной матрицы [121-123] для определения свойств вискеризованных волокнистых композитов. Расчет упругих характеристик материалов на основе вискеризованных волокон не имеет принципиальных отличий от расчета упругих характеристик материалов, образованных системой двух фаз. Т.е., однонаправленный композит состоит из вискеризованных волокон и модифицированной матрицы. Свойств модифицированной матрицы определяются как усреднение свойств вискерсов и матрицы. Однако, кроме объемной доли вискерсов, такой метод не учитывает геометрические характеристики (длину и диаметр) и плотность вискерсов в композите. Кроме того, эта модель не отражает физическую реальность потому, что не вся матрица и только матрица, которая находится около волокна укрепляется вискерсами.

В настоящее время, существуют несколько аналитических моделей, которые анализируют эффективные механические свойства вискеризованных волокнистых композитов с учетом характеристик вискерсов. Например, Гузь и др. [85,86] исследовали эффекты плотность графитовых вискерсов на эффективные упругие свойства конкретного вискеризованного углеродного волокнистого композита, у которого есть четыре слоя — базовое волокно, слой покрытия, вискеризованный межфазный слой и матрица. В целом, эффективные свойства найдены путем процедуры двухэтапной гомогенизации. Свойства вискеризованного межфазного слоя в первом этапе определяются осреднением Фойгта и Рейса, а во втором этапе определяются окончательные свойства композита путем отношения средних напряжений и деформаций и метода комплексной переменной потенциала Мухелишвили [87-89]. Рассматривались эффекты присутствия вискеризованного слоя и влияние трех различных плотностей (разреженных, средних, плотных) на модуль продольного сдвига. Результаты показали, что из-за наличия вискеризованного межфазного слоя, модуль сдвига увеличивается существенно. Однако, показано, что влияние



различных плотностей на эффективный модуль мало. Позже, они расширили свою модель для многофазных композитов [90-91].

В случае эффективных свойств Фуззи-волокнутого композита, содержащего базовое волокно, вискеризованный слой и матрица, Кундавал и Рей [92] использовали методы сопротивления материалов и Мори-Танака. Интересно отметить, что вместо двухэтапной процедуры, использована процедура трехэтапной гомогенизации. В своей работе они рассмотрели влияние диаметра нанотрубки и межфазного слоя между нанотрубками и матрицей. Результаты, полученные двумя методами, согласовались друг с другом. Показано также, что из-за присутствия вискеризованного слоя поперечные упругие константы композиты значительно повышаются, а диаметр нанотрубки мало влияет на эффективные свойства такого композита. Кроме того, эффект межфазного слоя между нанотрубками и матрицей является несущественным.

Ту же композитную систему исследовали Чатзигеоргии и др. [93] с помощью комбинационных методов двух фаз и трех фаз. Как было показано ранее, метод двух не дает точное решение для модуля поперечного сдвига, поэтому использовался в их работе метод трех фаз. Они эту задачу решили путем процедуры двухэтапной гомогенизации. Чтобы проверить их результаты, величины полученных эффективных свойств, сравниваются с результатами, полученными численным методом асимптотического осреднения [94], и показано что, результаты обоих подходов находятся в очень хорошем согласии друг с другом. Показано также, что из-за наличия вискеризованного межфазного слоя в композите, эффективные сдвиговые и поперечные свойства улучшены существенно, и длина и объемная доля нанотрубки играют большую роль при определении поведения вискеризованных волокнустых композитов. Интересно, авторы этой работы отмечали, что использование метода трех фаз при определении эффективных продольного модуля сдвига, объемного модуля плоской деформации, продольного модуля Юнга и коэффициента Пуассона приведет к нелинейным уравнениям, как и когда эффективный поперечный

модуль получается. Однако, будет показано, что решения для этих модулей, кроме поперечного модуля сдвига, не необходимы стать нелинейными.

Следует отметить, что вискерсы во всех моделях предположены расти на круговой поверхности волокна перпендикулярно. Более того их свойства считаются как длинные непрерывные волокна и это предположение возможно потому, что они имеют высокое отношение поверхности к объему как наноструктуры [87-94]. Однако, вся модель не учитывают одновременно эффект плотности, диаметра, длины, объемной доли и свойства вискерсов в вискеризованном межфазном слое композита при определении таких композитов. В то же время в литературе пока неизвестна модель, определяющая эффективные диссипативные свойства. Таким образом, мы хотим моделировать эффективные упругие и диссипативные свойства вискеризованных волокнистых композитов с учетом характеристик вискерсов в вискеризованном межфазном слое.

#### **Методы определения эффективных характеристик.**

Здесь остановимся на нескольких понятиях при определении эффективных свойств неоднородных материалов. Кроме того, основные фундаментальные подходы гомогенизации композиционных материалов, приведенные в этом разделе и основанные на нескольких классических работах по микромеханике композитов будут даны и обсуждены.

#### **Понятие о представительном объеме.**

Механика сплошных сред основана на концепции однородного континуума, который может быть повторно подразделяется на бесконечно малые под-объемы или может быть представлен бесконечно малым объемом, каждый из которых сохраняет свойства сыпучих материалов. Однако, как отмечено ранее КМ — это гетерогенный материал. Здесь целью микромеханического анализа является учет гетерогенной микроструктуры материала, т.е. микроструктурных масштабов при построении соответствующей модели эффективного континуума. Для этого, методы микромеханики используются на уровне представительного объема элемента («*representative volume element - RVE*») или *элементарной ячейки*.

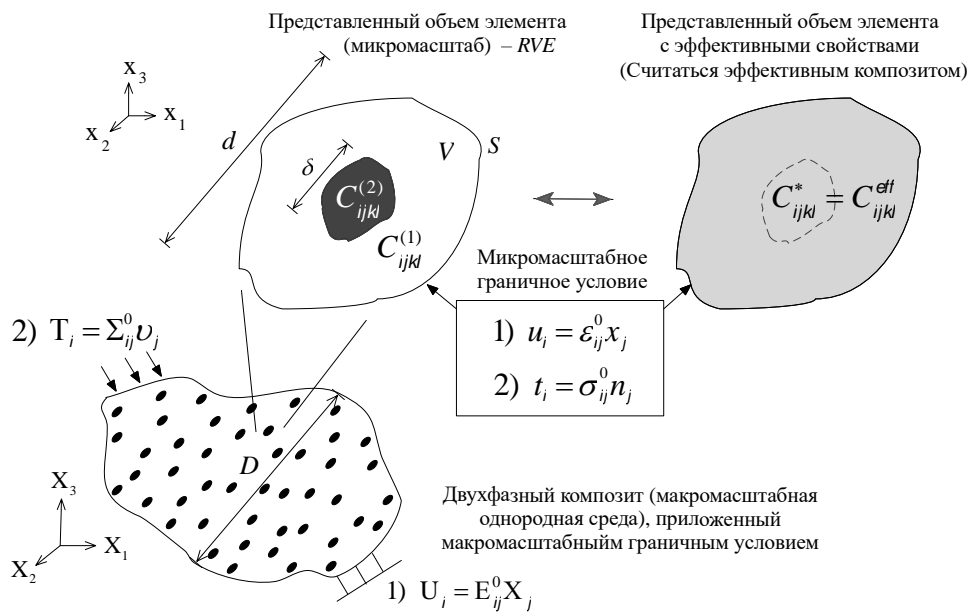
В целом, элементарная ячейка представляет собой малый объем материала, где его эффективные свойства являются свойствами целого материала. В контексте микромеханики КМ ячейка соединяет микромасштабный уровень с макромасштабным уровнем [36]. Например размер ячейки является бесконечно малой по сравнению с композитной средой:

$$d/D \ll 1$$

где  $d$  — размер ячейки;  $D$  — размер композитной среды, но в то же время размер ячейки достаточно больше чем размер гетерогенного включения:

$$\delta/d < 1 \text{ или } \delta/d \ll 1.$$

где  $\delta$  — размер гетерогенности включения. Для понимания, см. рис. 1.17. Итак, с помощью ячейки эффективные поведения КМ могут быть моделированы.



**Рис. 1.17** Понятие представительного объемного элемента в многомасштабной гомогенизации двухфазных композитов.

Гипотеза, в которой существует такая ячейка в гетерогенной среде, которая может представлять поведение гетерогенной среды называется *эффективной* или *эквивалентной, гомогенности* [35]. С другой стороны, Хилл (1963) строго определил способность ячейки для правильного описания эффективных свойств композитов, где средняя плотность энергии деформации, полученная на границе

ячейки, заданной внешним граничным условием, либо вектором перемещений, либо вектором напряжений, должна быть одинаковой [95]. Понятие ячейки исторически уже давно использовалось в механике сплошных сред, но формальное описание представительного объема элемента для микромеханики композитов появилось в 1960-е годы.

***Системы разрешающих уравнений и их роль в методике осреднения.***

Статическое уравнение равновесия в макромасштабной среде (в композите) принимает вид:

$$\Sigma_{ij,j} + \rho F_i = 0, \quad (1.1)$$

где  $S_{ij}$  — макромасштабные компоненты симметричного тензора напряжений Коши;  $F_i$  — массовая сила;  $\rho$  — массовая плотность;  $S_{ij,j}$  — дивергенция тензора напряжений по макромасштабной системе координат  $C_j$ ; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Макромасштабные граничные условия имеют два типа:

1) на всей поверхности, ограничивающей упругое тело, задан вектор перемещений:

$$U_i = E_{ij}^0 C_j, \quad (1.2)$$

где  $U_i$  — компоненты вектора перемещений макромасштабной материальной точки;  $E_{ij}^0$  — компоненты постоянных деформаций; и  $C_j$  — радиус-вектор точек,

2) на всей поверхности, ограничивающей упругое тело, задан вектор напряжений:

$$T_i = \Sigma_{ij}^0 v_j, \quad (1.3)$$

где  $T_i$  — компоненты вектора напряжений макромасштабной материальной точки;  $\Sigma_{ij}^0$  — компоненты постоянных напряжений; и  $v_j$  — единственный вектор внешней нормали к поверхности. Макромасштабная кинематическая связь на основе соотношения Коши имеет вид:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (U_{i,j} + U_{j,i}), \quad (1.4)$$

где  $E_{ij}$  — макромасштабные компоненты тензора малых деформаций; и  $U_{i,j}$  — градиент вектора перемещений относительно макромасштабной системы координат  $C_j$ . Макромасштабный закон Гука является:

$$\Sigma_{ij} = C_{ijkl}^* E_{kl}, \quad (1.5)$$

где  $C_{ijkl}^*$  — компоненты тензора эффективных модулей упругости, которые получены из микромасштабной ячейки и таким образом зависит от микромасштабной системы координат  $x_i$ .

Для микромасштабной ячейки статические уравнения равновесия<sup>2</sup> выражаются через

$$S_{ij,j} = 0, \quad (1.6)$$

где  $S_{ij}$  — микромасштабные компоненты симметричного тензора напряжений Коши;  $S_{ij,j}$  — дивергенция тензора напряжений по системе координат  $x_i$ .

Микромасштабная кинематическая связь на основе соотношения Коши имеет вид:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.7)$$

где  $e_{ij}$  — микромасштабные компоненты тензор малых деформаций;  $u_i$  — микромасштабный компоненты вектора перемещения материальной точки; и  $u_{i,j}$  — градиент вектора перемещений относительно микромасштабной системы координат  $x_i$ . На границах ячейки даны два типа граничных условий<sup>3</sup> — вектор перемещений и вектор напряжений:

$$u_i = \varepsilon_{ij}^0 x_j, \quad (1.8)$$

$$t_i = \sigma_{ij}^0 n_j. \quad (1.9)$$

<sup>2</sup> Видно, что массовая сила исключена из уравнения (1.13). Это следует из статической многомасштабной теории, в которой массовую силу не нужно рассмотреть в микромасштабных уравнениях равновесия [96,97].

<sup>3</sup> На основе многомасштабной теории можно показать, что микромасштабные граничные условия перемещений и векторов напряжений являются однородными и последовательным с макромасштабными деформациями и напряжениями [28,36,95].

Если фазы в композите являются линейными упругими материалами, то отношение тензора напряжений Коши и тензора малых деформаций Коши через закон Гука имеет вид:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (1.10)$$

где  $C_{ijkl}$  — компоненты тензора модулей упругости четвертого ранга, которые изменяются по  $x_i$  зависящий от микроструктуры композита. С помощью тензор упругой податливости  $S_{ijkl}$  уравнение (1.17) альтернативно может выражаться:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl}. \quad (1.11)$$

Известно, что тензор четвертого ранга в уравнении (1.12) имеет 81 независимых компонентов и из-за симметричных тензоров напряжений и малых деформаций, число независимых компонентов уменьшается до 36. Далее, для линейного анизотропного упругого тела тензор модулей упругости имеет 21 независимых компонентов [98-100]. С дополнительными предположениями относительно материальной симметрии можно еще больше уменьшить число независимых компонентов тензора модулей упругости. В частности тензор модулей упругости для ортотропного упругого тела принимает вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix} \quad (1.12)$$

Тензор модулей упругости в уравнении (1.13) можно выражаться через обозначение Фойгта. Далее, форма и компоненты тензоров модулей упругости для трансверсально-изотропной и изотропной среды показаны в приложениях Б и В.

**Разрешающие уравнения в полярных цилиндрических координатах** [89,100]. На основании (1.15), дифференциальные соотношения Коши (кинематические связи) в цилиндрической систем координат:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), \quad \varepsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right).\end{aligned}\tag{1.12}$$

Для уравнений равновесия находим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{rr}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rr}^{(i)} - \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rz}^{(i)}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_{r\theta}^{(i)}}{r} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(i)}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{rz}^{(i)}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(i)}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_{rz}^{(i)}}{r} + \frac{\partial \sigma_{zz}^{(i)}}{\partial z} &= 0,\end{aligned}\tag{1.13}$$

и на основании (1.15) тензор модулей упругости для ортотропного материала в цилиндрической системе координат можно выразаться в следующем виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{rr} & C_{r\theta} & C_{rz} & 0 & 0 & 0 \\ C_{r\theta} & C_{\theta\theta} & C_{\theta z} & 0 & 0 & 0 \\ C_{rz} & C_{\theta z} & C_{zz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{\theta z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{rz} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{r\theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \varepsilon_{zz} \\ 2\varepsilon_{\theta z} \\ 2\varepsilon_{rz} \\ 2\varepsilon_{r\theta} \end{pmatrix}.\tag{1.14}$$

## **1.6. Подходы для определения эффективных свойств композитов**

В этом разделе рассматриваются три подхода, которые обычно используются во многих классических микромеханических методах при определении эффективных свойств композиционных материалов.

### ***A. Прямой подход***

В микромеханике обычно предполагается, что макромасштабные напряжения и деформации считаются равны средним напряжениям и деформациям (микромасштабным) [28,96]:

$$\Sigma = \bar{\sigma},\tag{1.15}$$

$$E = \bar{\varepsilon}.\tag{1.16}$$

Итак, с помощью (1.3), (1.4), (1.10) и (1.11), можно записать закон Гука (1.9) в виде

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \quad (1.17)$$

где  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  и  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  означают средние напряжения и деформации в микромасштабном уровне;  $C_{ijkl}^* = C_{ijkl}^{eff}$  — компоненты эффективного тензора модуля упругости элементарной ячейки где  $C_{ijkl}^* = \frac{1}{V} \int_V C_{ijkl}(\mathbf{x}) dV$ ; и  $C_{ijkl}(\mathbf{x})$  —

пространственно зависимые упругие модули композита, т.е., эти модули зависят от величин модулей упругости фаз в композите. Таким образом, эффективные свойства макромасштабный композит определяются выбранной ячейкой и напряженно-деформационным состоянием в микромасштабном уровне.

Однако, хотя и эта формула (1.18) кажется простой в общих чертах, она сложна в деталях, и при ее выполнении необходима осторожность. Для строго выполнения гомогенизации необходимо иметь точные решение для полей напряжений  $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$  и деформаций  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{x})$  в гетерогенной среде (в ячейке). Интересно отметить, что этот подход был использован в работе Гузя и др. [85,86] при оценке свойств их вискеризованных волокнистых композитов, и на тот же подход опирается и метод асимптотического осреднения.

### ***Б. Подход на основе отношения объемного осреднения***

В этом подходе используются теоремы средней деформации и среднего напряжения<sup>4</sup>.

---

<sup>4</sup> Хилл [95,28] считал, что ячейка должна быть достаточно малой, т.е. такой, что с макроскопической точки зрения напряжения и деформации макроскопического тела можно считаться приблизительно постоянными в месте ячейки. В результате этого, ячейку можно считать материальной точкой в макроскопическом теле. С одной стороны, та же ячейка должна быть достаточно большой, так что флуктуация граничных полей достаточно относительно мала. Таким образом, если существует такая ячейка, то приводятся теоремы средней деформации и среднего напряжения. Важно отметить, что если существует неидеальный контакт между фазами, выводится дополнительный член (см. приложения Г)



**Теорема средней деформации** показывает, что при наличии однородного внешнего граничного условия, средние деформации по объему ячейки композита, имеющего идеальный контакт между фазами, равны введенным постоянным деформациям на границах ячейки<sup>5</sup>:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \varepsilon_{ij} dV = \varepsilon_{ij}^0. \quad (1.19)$$

**Теорема среднего напряжения** заявляет, что при отсутствии вектора массовых сил средние напряжения по объему ячейки равны постоянным напряжениям, приложенным на границах ячейки<sup>5</sup>:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij} dV = \sigma_{ij}^0. \quad (1.19)$$

Чтобы хорошо понимать этот подход, рассматривается двухфазный композит. Считаем сначала, что на поверхности ячейки задано однородное граничное условие вектора перемещений (1.12). Можно записать для и двухфазного композита со совершенным контактом между фазами его среднюю объемную деформацию в следующем виде:

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = c_1 \langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \rangle + c_2 \langle \varepsilon_{ij}^{(2)} \rangle, \quad (1.20)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  являются объемной доли фаз композита и  $c_1 + c_2 = 1$  (можно считать фазу 1 — матрица и фазу 2 — включение);  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle$  — средняя деформация композита (ячейки) по объему;  $\langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \rangle$  и  $\langle \varepsilon_{ij}^{(2)} \rangle$  — средняя объемная деформация в матрице и во включении. С одной стороны, среднее объемное напряжение ячейки имеет вид:

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = c_1 \langle \sigma_{ij}^{(1)} \rangle + c_2 \langle \sigma_{ij}^{(2)} \rangle, \quad (1.21)$$

где  $\langle \sigma_{ij} \rangle$  — среднее объемное напряжение композита;  $\langle \sigma_{ij}^{(1)} \rangle$  и  $\langle \sigma_{ij}^{(2)} \rangle$  — среднее объемное напряжение в матрице и во включении соответственно. Можно переписать (1.22) в другом виде

$$C_{ijkl}^* \langle \varepsilon_{ij} \rangle = c_1 C_{ijkl}^{(1)} \langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \rangle + c_2 C_{ijkl}^{(2)} \langle \varepsilon_{ij}^{(2)} \rangle, \quad (1.22)$$

---

<sup>5</sup> Для доказательства смотрите на приложении Г.

где  $\langle C_{ijkl}^{(1)} \rangle$  и  $\langle C_{ijkl}^{(2)} \rangle$  — тензор модулей упругости матрицы и включения соответственно. Учитывая теорему средней деформации (1.19) и отношение (1.21), на основании (1.23) имеет место равенство

$$C_{ijkl}^* \varepsilon_{kl}^0 = C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{kl}^0 + c_2 (C_{ijkl}^{(2)} - C_{ijkl}^{(1)}) \langle \varepsilon_{kl}^{(2)} \rangle. \quad (1.23)$$

Итак, эта удивительно простая формула показывает, что для вывода выраженных эффективных свойств композита необходимо знать только состояние деформации во включении. В практике, обычно  $e_{kl}^0$  считается равным единице. С одной стороны, если на границах ячейки задано однородное граничное условие вектора напряжений, то определяется следующая формула

$$S_{ijkl}^* \sigma_{kl}^0 = S_{ijkl}^{(1)} \sigma_{kl}^0 + c_2 (S_{ijkl}^{(2)} - S_{ijkl}^{(1)}) \langle \sigma_{kl}^{(2)} \rangle. \quad (1.24)$$

Можно увидеть, что существует единственная зависимость средних деформаций или напряжений по объему фаз к средним деформации или напряжению по объему композита. При этом имеются следующие равенства:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij}^{(1)} \rangle &= A_{ijkl}^{(1)} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, & \langle \varepsilon_{ij}^{(2)} \rangle &= A_{ijkl}^{(2)} \langle \varepsilon_{kl} \rangle, \\ \langle \sigma_{ij}^{(1)} \rangle &= B_{ijkl}^{(1)} \langle \sigma_{kl} \rangle, & \langle \sigma_{ij}^{(2)} \rangle &= B_{ijkl}^{(2)} \langle \sigma_{kl} \rangle, \end{aligned} \quad (1.25)$$

где  $A_{ijkl}^{(\alpha)}$  — тензор деформации концентрации фаз; и  $B_{ijkl}^{(\alpha)}$  — тензор напряжения концентрации фаз. Итак, на основании (1.30) можно записать (1.28) и (1.29) в следующем окончательном виде:

$$\mathbf{C}^* = \mathbf{C}^{(1)} + c_2 (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) \frac{\langle \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \rangle}{\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle} = \mathbf{C}^{(1)} + c_2 (\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}) \mathbf{A}^{(2)}, \quad (1.26)$$

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{S}^{(1)} + c_2 (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}) \frac{\langle \boldsymbol{\sigma}^{(2)} \rangle}{\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle} = \mathbf{S}^{(1)} + c_2 (\mathbf{S}^{(2)} - \mathbf{S}^{(1)}) \mathbf{B}^{(2)}. \quad (1.27)$$

Многие методы для и прогнозирования свойств композитов опираются на эти формулы (1.27) и (1.28), и каждый метод имеет свой методикку или процедуру при определении своих тензоров деформации и напряжения концентрации, которые

зависят от формы и свойств включения и взаимодействий<sup>6</sup> в матрице. Такой подход использован в методах матрицы Эшелби, Мори-Танака, и самосогласования — эффективного поля и дифференциального<sup>7</sup>. Однако, как мы узнали ранее, эти методы, много из них, только дают хорошие результаты для малых концентраций включений в композите.

### *Энергетический метод*

В предыдущем разделе эффективные свойства композитов определены путем формулы (1.23) с участием средних деформаций и напряжений в ячейке. А в этом разделе эффективные свойства выводятся через энергия эквивалентности и имеется два типа метода энергии.

В этом подходе эффективные свойства композитов найдены путем эквивалентности средней плотности энергии деформации между ячейками композита (RVE) и эффективного композита (см. рис. 1.13). Следует отметить, что плотность энергии деформации композита равна сумме плотности энергии деформации каждого компонента в композите. По формуле Клапейрона удельной энергией деформации упругого тела, подчиняющегося закону Гука является<sup>8</sup>:

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}. \quad (1.28)$$

На основании (1.29) можно считать, что удельная энергия деформации как плотность энергии деформации (средняя энергия деформация). Поэтому, можно записать эквивалентность плотности энергии деформации между ячейками двухфазного композита и эффективного композита в виде

<sup>6</sup>Взаимодействия могут быть описаны как беспорядков на состоянии напряжения или деформации («eigenstress» или «eigenstrain») из-за присутствия включения в матрице, эффекта температуры и т.д.

<sup>7</sup> См. работу [36] для деталей.

<sup>8</sup>Теорема Клапейрона, которая справедлива для любого упругого тела имеет вид:  $A = \int_V \varepsilon_{ij} (\partial W / \partial \varepsilon_{ij}) dV$ . См. приложении Д для доказательства.

$$\begin{aligned}
W^{eff} &= \langle W^{eff} \rangle = \langle W^{RVE} \rangle = W^{RVE} \\
\frac{1}{2} \sigma_{ij}^{eff} \varepsilon_{ij}^{eff} &= \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij}^{eff} \varepsilon_{ij}^{eff} \rangle = \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij}^{RVE} \varepsilon_{ij}^{RVE} \rangle = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^{RVE} \varepsilon_{ij}^{RVE} \\
\frac{1}{2V^{eff}} \int_V \sigma_{ij}^{eff} \varepsilon_{ij}^{eff} dV &= \frac{1}{2V^{RVE}} \int_V \sigma_{ij}^{RVE} \varepsilon_{ij}^{RVE} dV,
\end{aligned} \tag{1.29}$$

где  $V^{eff} = V^{RVE} = V$  — объем ячейки. В левую часть равенства (1.30) с помощью теоремы Хилла<sup>9</sup> имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^{eff} \varepsilon_{ij}^{eff} dV &= \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij}^{eff} \varepsilon_{ij}^{eff} \rangle = \frac{1}{2} \langle \sigma_{ij}^{eff} \rangle \langle \varepsilon_{ij}^{eff} \rangle \\
&= \frac{1}{2} C_{ijkl}^{eff} \langle \varepsilon_{ij}^{eff} \rangle \langle \varepsilon_{kl}^{eff} \rangle = \frac{1}{2} C_{ijkl}^{eff} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0,
\end{aligned} \tag{1.30}$$

а в правой части,

$$\frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^{RVE} \varepsilon_{ij}^{RVE} dV = \frac{1}{V} \left[ \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV + \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV \right]. \tag{1.31}$$

Итак, приравняв (1.31) и (1.32), получим

$$C_{ijkl}^{eff} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 = \frac{1}{V} \left[ \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV + \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV \right]. \tag{1.32}$$

Будет показано, что равенство (1.30) использовано в методе полидисперсной модели (метод двух фаз). Можно обобщить результаты (1.30) и (1.33) для многофазных композитов и запишем:

$$\begin{aligned}
W^{eff} &= W^{RVE} \\
C_{ijkl}^{eff} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 &= \frac{1}{V} \left[ \int_{V_1} \sigma_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(1)} dV + \int_{V_2} \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^{(2)} dV + \dots + \int_{V_N} \sigma_{ij}^{(N)} \varepsilon_{ij}^{(N)} dV \right],
\end{aligned} \tag{1.33}$$

где  $N$  — число слоя или фазы в композите.

### **Г. Другая технология реализации энергетического метода основанная на приращении энергии взаимодействия.**

В этом подходе формулируется энергия взаимодействия между фазами композита при определении эффективных свойств композитов. Этот подход основан на оригинальной интегральной формуле Эшелби, которая дает хорошие

---

<sup>9</sup> Теорема Хилла показывает, что для малых деформации и в условии, где граничные условия достаточно постоянными, следующее равенство действительно:  $\langle \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \rangle = \langle \sigma_{ij} \rangle \langle \varepsilon_{ij} \rangle$  [95,28]. См. замечании 4.

результаты для малых концентраций включений. Однако, уже сказано, что такой подход может быть модифицирован, чтобы использовался для достаточно высоких объемных долей включений. Теперь рассмотрим энергетическую формулировку для малой концентрации включения в двухфазном композите. Тем не менее, показываемая процедура, которая приводит к знаменитой интегральной формуле Эшелби будет отличаться от того, что была предложена Кристенсен<sup>10</sup>.

Сначала произведем свертку (1.24) при помощи тензора средних деформаций  $\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0$  и умножая с половиной:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 &= \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 + \frac{1}{2} c_2 \left( C_{ijkl}^{(2)} - C_{ijkl}^{(1)} \right) \langle \varepsilon_{kl}^{(2)} \rangle \varepsilon_{ij}^0 \\ &= \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 + \frac{1}{2V} \int_{V_2} \left( C_{ijkl}^{(2)} \varepsilon_{kl}^{(2)} \varepsilon_{ij}^0 - C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^{(2)} \right) dV. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Используя симметрию,  $C_{ijkl}^{(1)} = C_{klij}^{(1)}$  в последний член интеграла (1.35), имеем

$$C_{klij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^{(2)} = \sigma_{kl}^0 \varepsilon_{kl}^{(2)}.$$

Итак с равенством  $\sigma_{ij}^{(2)} = C_{ijkl}^{(2)} \varepsilon_{kl}^{(2)}$ , можно записать (1.35) в виде

$$\frac{1}{2} C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 = \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 + \frac{1}{2V} \int_{V_1} \left( \sigma_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}^0 - \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^{(2)} \right) dV, \quad (1.35)$$

где  $V$  — объем ячейки. Приняв

$$\begin{aligned} U^{RVE} &= W^{RVE} V = \frac{1}{2} C_{ijkl}^* \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 V, \\ U^0 &= W^0 V = \frac{1}{2} C_{ijkl}^{(1)} \varepsilon_{ij}^0 \varepsilon_{kl}^0 V, \end{aligned}$$

где  $U^{RVE}$  — энергия деформации с включением (композит);  $U^0$  — энергия деформации среда без включения (матрица), и с помощью теоремы Гаусса-Остроградского<sup>11</sup>, равенство (1.36) принимает вид

$$U^{RVE} = U^0 + U^{INT} = U^0 + \frac{1}{2} \int_{S_i} \left( t_i u_i^0 + t_i^0 u_i \right) dS, \quad (1.36)$$

<sup>10</sup> Произведение интегральной формулы Эшелби, предложено Кристенсеном для малой концентрации двухфазного материала дается в приложении Е.

<sup>11</sup> См. замечания номера 13 приложения Г.

где  $S_i$  — контакт поверхности между включением и матрицей;  $t_i, u_i$  — компоненты вектора напряжений и перемещений матрицы (среда с включением) в контакте фаз;  $t_i^0, u_i^0$  — компоненты вектора напряжений и перемещений матрицы (среда без включения) в контакте фаз; и  $U^{INT}$  — дополнительная энергия взаимодействия, которая возникает когда включение входит в среду без включения.

Позже, Кристенсен и Ло в своем предполагаемом методе трех фаз (см. рис. 1.12) модифицировали формулу Эшелби (1.37). Как мы узнали ранее, что метод трех фаз (самосогласованный метод Эшелби) основан на идее полидисперсной модели композите с изолированными включениями (т.е. волокном и матрицей), окруженными бесконечной эквивалентной гомогенной средой, с однородным полем деформации реализующимся на большом расстоянии от включений. Итак, на основании (1.37), они предложили, что энергия деформации между эквивалентными гомогенными средами с включениями  $U^{RVE}$  и без включений  $U^{eff}$  идентичны. Это условие сводится к тому, что дополнительная энергии деформации, связанная с наличием включений в эффективной матрице равна нулю. В результате, формула Эшелби (1.37) дает следующее энергетическое соотношение, на поверхности контакта включения и эквивалентной гомогенной среды:

$$\int_{S_i} (\sigma_{ij}^{N+1} u_i^{eff} - \sigma_{ij}^{eff} u_i^{N+1}) n_j dS = 0, \quad (1.37)$$

где  $S_i$  — контакт поверхности между матрицей ( $N$ -фазой) и эквивалентной гомогенной средой ( $N+1$  фазой);  $\sigma_{ij}^{N+1}, u_i^{N+1}$  — компоненты тензора напряжений и вектора перемещений на поверхности контакта среды с включениями. Эти напряжения и перемещения присутствуют в условиях контакта, записываемых на поверхности при решении контактной задачи;  $\sigma_{ij}^{eff}, u_i^{eff}$  — компоненты тензора напряжений и вектора перемещений на поверхности контакта для среды без включений со стороны эффективной среды. Следуя [35], эффективная среда (без включений) представляет собою среду, у которой включения заменены

окружающим его материалом. Для рассматриваемой модели — это эффективная среда с эквивалентными гомогенными свойствами, эквивалентная трансверсально-изотропная среда если включение является цилиндрическим.

### **1.7. Принцип упруго-вязкоупругой аналогии комплексных модулей**

Как уже упоминалось ранее, принцип упруго-вязкоупругой аналогии комплексных модулей преобразует выражения для эффективных упругих свойств в выражения для вязкоупругих свойств. Проиллюстрируем описанную процедуру простым примером; заменяя каждый модуль в (1.37) соответствующим модулем, получим

$$C_{ijkl}^{eff*} \varepsilon_{ij}^{0*} \varepsilon_{kl}^{0*} = \frac{1}{V} \left[ \int_{V_1} C_{ijkl}^{(1)*} \varepsilon_{ij}^{(1)*} \varepsilon_{kl}^{(1)*} dV + \int_{V_2} C_{ijkl}^{(2)*} \varepsilon_{ij}^{(2)*} \varepsilon_{kl}^{(2)*} dV \right]. \quad (1.38)$$

Описание двухфазных комплексных модулей с учетом зависимости от частоты имеет вид

$$C_{ijkl}^{(1)*} = C'_{ijkl}{}^{(1)}(\omega) + i C''_{ijkl}{}^{(1)}, \quad C_{ijkl}^{(2)*} = C'_{ijkl}{}^{(2)}(\omega) + i C''_{ijkl}{}^{(2)}. \quad (1.39)$$

Подстановка этих выражений (1.39) в (1.40) приводит к эффективным комплексным модулям

$$C_{ijkl}^{eff*} = C'_{ijkl}{}^{eff} + i C''_{ijkl}{}^{eff}. \quad (1.40)$$

Известно, что  $C'_{ijkl}$  — действительная часть, которая равна модулю накопления, а мнимая часть  $C''_{ijkl}$  — модуль потерь. Отношение мнимой части к действительной в (1.41) часто используется в качестве характеристики материала. Тангенс потерь  $C_{ijkl}^*$  определяется следующим образом

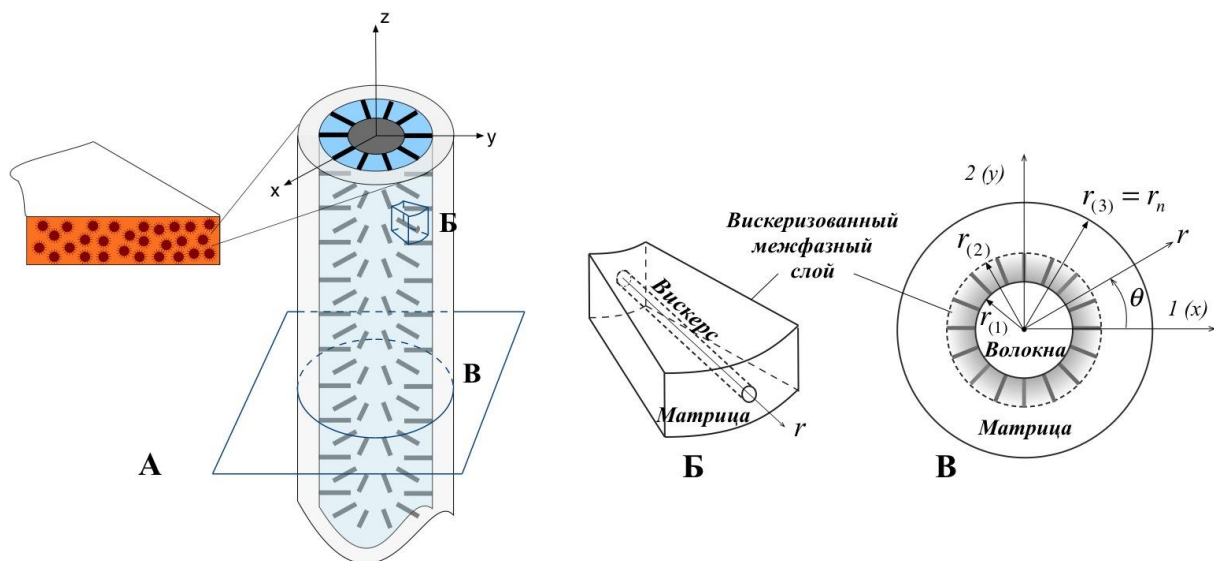
$$tg \eta = C''_{ijkl}(\omega) / C'_{ijkl}(\omega). \quad (1.41)$$

Угол  $\eta$  интерпретируется как фазовый угол запаздывания деформации относительно напряжения при установившихся гармонических колебаниях в вязкоупругой среде.

## Глава 2. Моделирование и расчеты эффективных механических и динамических свойств вискеризованных волокнистых композитов.

### 2.1. Постановка задачи.

На рис. 2.1.а показан вискеризованный волокнистый композит для однонаправленного монослоя. Для простоты, композиционная структура состоит из двух компонентов и определяется с одной стороны вискеризованным волокном, а с другой — полимерной матрицей. Из-за наличия микро- или нановолокон (вискерсов или щетин), такой композит имеет дополнительный межфазный слой между базовым волокном и матрицей, и поэтому, такие материалы можно отнести к волокнистым многофазным композитам. Итак, в нашем случае мы считаем, что наш композит имеет только три слоя или фазы (т.е.  $N = 3$  где  $N$  — число слоя в композите).



**Рис 2.1** а) Однонаправленный вискеризованный волокнистый композит; б) ячейка вискеризованного межфазного слоя; в) ячейка вискеризованного волокнистого композита.

При моделировании эффективных свойств таких композитов, мы считаем, что у композита есть трансверсально-изотропная структура с плоскостью



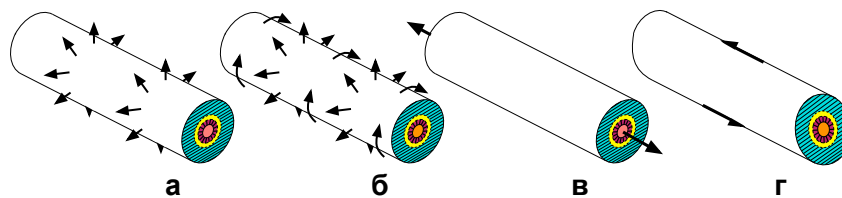
изотропии поперек волокна (см. рис. 2.1.в). Кроме того, приняты несколько предположений, которые состоят в том, что вискеризованные межфазные слои в матрице не пересекаются друг с другом, и вискерсы выращены перпендикулярно к поверхности базового волокна. Предполагается также, что свойства вискерсов являются свойствами длинных микро- или нановолокон и это возможно потому, что они имеют высокое отношение поверхности к их объему [93].

Чтобы получить эффективные свойства композита, необходимо сначала найти эффективные свойства вискеризованного слоя. В реальности этот слой показывает ортотропное поведение (радиальный тип структуры [58]) и в то же время, имеет градиентные свойства по длине вискерсов (см. рис. 2.1.б). Тем не менее, для нашего аналитического моделирования предполагается, что эта фаза соответствует трансверсально-изотропному материалу с плоскостью изотропии поперек вискерсов (т.е. ось симметрии, направлена вдоль направления оси  $r$ ) и ее свойства являются постоянными по длине вискерсов — цилиндрическая ортотропия [85,86,91,93]. Последнее упрощение кажется разумным с учетом того, что длина вискерсов довольно мала [85,86]. Будет показано, что эти предположения являются основой при построении предполагаемой приближенной геометрической модели (см. рис. 2.3), которая будет использоваться при оценке свойств вискеризованного межфазного слоя с помощью известных формул метода трех фаз, полученных для и двухфазного композита с цилиндрическими включениями.

После определения эффективных свойств вискеризованного межфазного слоя мы находим окончательные эффективные механические свойства вискеризованного волокнистого композита, используя предлагаемый метод Эшелби для ортотропного многофазного композита, а также метод на основе полидисперсной модели (метод двух фаз) и метод на основе комплексного переменного потенциала. Два последних метода исследуются для сравнительного анализа. Для эффективных динамических свойств, предполагается использовать метод комплексных модулей. Далее, в следующей главе исследуется влияние

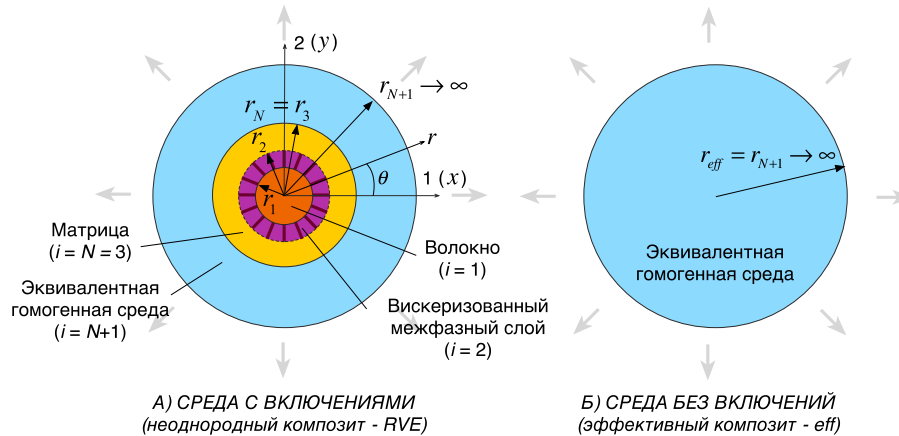
различных характеристик вискерсов на окончательные эффективные свойства такого композита.

Следует отметить, что для композита с цилиндрическими включениями рассматриваются две постановки задач — в плоскости изотропии и в перпендикулярной к ней плоскости, т.е. деформирование в направлении волокон (см. рис. 2.2). Эффективный объемный модуль плоской деформации и модуль поперечного сдвига получается соответственно из решения задач всестороннего растяжения (сжатия) поперек волокон и чистого сдвига в трансверсальной плоскости, которые решаются в цилиндрической полярной системе координат. Модуль продольного сдвига определяется из решения задачи чистого сдвига вдоль волокон. Эффективные модуль Юнга и коэффициент Пуассона в направлении волокон определяются из решения задачи об одноосном растяжении (сжатии) в цилиндрической системе координат. Эффективный коэффициент Пуассона определяется как отношение поперечной эффективной деформации к продольной при растяжении вдоль волокон. В конце концов с помощью этих найденных свойств можно найти другие свойства как эффективный поперечный модуль Юнга через установленные соотношения, данные в Приложении Б. Чтобы определить эффективные механические свойства композита в каждой задаче определяются допустимые поля перемещений для напряженно-деформированного состояния композита во всех указанных ортотропных фазах композита.



**Рис. 2.2** Задача в плоскости изотропии: а) задача всестороннего растяжения (сжатия) поперек волокон; б) задача чистого сдвига в трансверсальной плоскости и задача в перпендикулярной плоскости изотропии; в) задача об одноосном растяжении (сжатии); г) задача чистого сдвига в направлении вдоль волокон.

**2.2. Модель вискеризованных волокнистых композитов, основанная на методе самосогласования Эшелби (метод трех фаз).**



**Рис 2.3** а) Ячейка вискеризованного волокнистого композита, и б) ячейка эффективного композита (гомогенизированный композит).

На рис. 2.3 представлены ячейки вискеризованного волокнистого композита по методу самосогласованного поля Эшелби и его эффективного композита.

В введении отмечено, что этот метод позволяет найти все необходимые эффективные константы, включающие продольные и поперечные модуля Юнга и сдвига, объемный модуль плоской деформации и коэффициенты Пуассона из решения задач в плоскости изотропии и в перпендикулярной к ней плоскости (см. рис. 2.2). В каждом случае нагружения определяются общие допустимые поля перемещений для ортотропных фаз композита из решения соответствующей задачи теории упругости. С помощью соотношений Коши и уравнений закона Гука находятся конкретные поля деформаций и напряжений для всех фаз в композите. Далее, эти поля перемещений и напряжений подставляются в граничные условия на границах контактов фаз: условия непрерывности перемещения и напряжения, условия несингулярности в центре волокна, и условия на бесконечности (внешнее граничное условие). На основе этих условий формулируется система алгебраических уравнений, из которой с помощью интегральной формулы Эшелби (1.38) находятся все неизвестные константы и,

следовательно, все эффективные модули упругости, которые также были включены в число искомым неизвестных постоянных.

Здесь показаны тензоры упругих модулей ( $C_{ijkl}^{(i)}$ ) фаз в композите, которые будут использоваться для предлагаемой модели. На основе закона Гука тензор упругих модулей первой фазы ( $i=1$ ) или базового волокна (трансверсально-изотропная среда с осей симметрии, направленной вдоль своей оси волокна — приложение Б.1) имеет вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(1)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(1)} \\ \sigma_{zz}^{(1)} \\ \sigma_{\theta z}^{(1)} \\ \sigma_{rz}^{(1)} \\ \sigma_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} & C_{12}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(1)} & C_{11}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{(1)} & C_{13}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(1)} - C_{12}^{(1)}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(1)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(1)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

где индексы компонентов тензора упругих модулей  $r, \theta, z$  заменены индексами 1, 2, 3, соответственно.

Для второй фазы ( $i=2$ ) или вискеризованного межфазного слоя тензор упругих модулей принимает вид

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(2)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(2)} \\ \sigma_{zz}^{(2)} \\ \sigma_{\theta z}^{(2)} \\ \sigma_{rz}^{(2)} \\ \sigma_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(2)} & C_{23}^{(2)} & C_{22}^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}^{(2)} - C_{23}^{(2)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(2)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(2)} \\ \varepsilon_{zz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Видно, что ось симметрии этого трансверсально-изотропного слоя отличается от оси плоскости изотропии волокна (см. Приложение Б). Полученные эффективные физические модули упругости в можно преобразовать к модулям упругости  $C_{ij}^{(2)}$  с помощью соотношений, данных в приложении Б (см. формулы (Б.27)). Далее, тензор упругих модулей изотропной матрицы или третьей фазы ( $i=N=3$ ) можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{(3)} \\ \sigma_{\theta\theta}^{(3)} \\ \sigma_{zz}^{(3)} \\ \sigma_{\theta z}^{(3)} \\ \sigma_{rz}^{(3)} \\ \sigma_{r\theta}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(3)} & C_{11}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(3)} & C_{12}^{(3)} & C_{11}^{(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{(3)} - C_{12}^{(3)}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{(3)} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{(3)} \\ \varepsilon_{zz}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{rz}^{(3)} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{(3)} \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Тензор упругих модулей для эквивалентной гомогенной среды или внешней фазы ( $i = N + 1$ ) считается равным эффективному модулю упругости эффективного гомогенизированного материала и является искомой величиной. Кроме того, эта среда обладает трансверсально-изотропным свойствам по оси симметрии, направленной вдоль оси базового волокна и поэтому, имеем

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{N+1} \\ \sigma_{\theta\theta}^{N+1} \\ \sigma_{zz}^{N+1} \\ \sigma_{\theta z}^{N+1} \\ \sigma_{rz}^{N+1} \\ \sigma_{r\theta}^{N+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{N+1} & C_{12}^{N+1} & C_{13}^{N+1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{N+1} & C_{11}^{N+1} & C_{13}^{N+1} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{N+1} & C_{13}^{N+1} & C_{33}^{N+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{N+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^{N+1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{N+1} - C_{12}^{N+1}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{N+1} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{N+1} \\ \varepsilon_{zz}^{N+1} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{N+1} \\ 2\varepsilon_{rz}^{N+1} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{N+1} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Наконец, тензор упругих модулей для эффективного композита (среда без включений или гомогенизированный композит, который имеет эквивалентные трансверсально-изотропные свойства,) имеет тот же тензор упругих модулей эквивалентной гомогенной среды (т.е.  $C_{ij}^{eff} = C_{ij}^{N+1}$ ) и это запишем в виде

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}^{eff} \\ \sigma_{\theta\theta}^{eff} \\ \sigma_{zz}^{eff} \\ \sigma_{\theta z}^{eff} \\ \sigma_{rz}^{eff} \\ \sigma_{r\theta}^{eff} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{eff} & C_{12}^{eff} & C_{13}^{eff} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{eff} & C_{11}^{eff} & C_{13}^{eff} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{eff} & C_{13}^{eff} & C_{33}^{eff} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{eff} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44}^{eff} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}^{eff} - C_{12}^{eff}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr}^{eff} \\ \varepsilon_{\theta\theta}^{eff} \\ \varepsilon_{zz}^{eff} \\ 2\varepsilon_{\theta z}^{eff} \\ 2\varepsilon_{rz}^{eff} \\ 2\varepsilon_{r\theta}^{eff} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

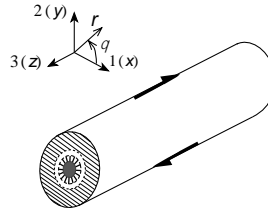
### 2.2.1. Определение модуля продольного сдвига

#### А. Постановка задачи чистого сдвига в направлении вдоль волокон в цилиндрических координатах для ортотропного многофазного среды.

Предполагается, что ось волокон направлена вдоль оси  $z$  (оси 3) в цилиндрической системе координат. Эффективный модуль продольного сдвига определяется из решения задачи чистого сдвига вдоль волокон (см. рис. 2.4). На внешней границе ячейки задано поле перемещения вдоль волокон  $u_z(r, \theta)$ . При этом возникают только перемещения фаз вдоль волокон, которые зависят от радиуса и угла, а угловые и радиальные перемещения равны нулю:

$$u_z^{(i)}(r, \theta) \neq 0, \quad u_r^{(i)} = u_\theta^{(i)} = 0, \quad (2.6)$$

где  $i$  — фаза композита.



**Рис. 2.4** Задача чистого продольного сдвига.

Введем для простоты обозначение  $u_z(r, \theta) = u_z$  и по соотношениям деформации Коши (1.13) и (2.6) получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad 2\varepsilon_{\theta z} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta}, \quad 2\varepsilon_{rz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial r}, \\ \varepsilon_{rr} &= \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{r\theta} = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

и с помощью закона Гука (1.15) вместе с соотношениями (2.7) имеем

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z} &= G_{\theta z} 2\varepsilon_{\theta z} = & \sigma_{rz} &= G_{rz} 2\varepsilon_{rz} = \\ &= G_{\theta z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right), & &= G_{rz} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подставив (2.4) в уравнение равновесия (1.14), получим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial r} \left[ G_{rz} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} \left( G_{\theta z} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \right) \right] + \frac{1}{r} \left[ G_{rz} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \right] + 0 = 0 \\
& \Rightarrow G_{rz} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} G_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} G_{\theta z} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0 \\
& \Rightarrow r^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \lambda^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} = 0 \\
& \Rightarrow r^2 u_z''(r) + r u_z'(r) + \lambda^2 u_z''(\theta) = 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

где  $\lambda = \sqrt{G_{\theta z}/G_{rz}}$ . Другую форму дифференциального уравнения (2.9) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
& r^2 R''(r)T(\theta) + rR'(r)T(\theta) + \lambda^2 R(r)T''(\theta) = 0 \\
& \Rightarrow \frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{-R(r)} = \lambda^2 \frac{T''(\theta)}{T(\theta)},
\end{aligned} \tag{2.10}$$

где общее решение этого уравнения имеет форму

$$u_z(r, \theta) = R(r)T(\theta) = u_z(r)u_z(\theta). \tag{2.11}$$

С учетом [65] общее решение дифференциального уравнения (2.11) имеет вид

$$R(r) = u_r(r) = A_1 r^\lambda + A_2 r^{-\lambda} \tag{2.12}$$

Далее ищем общую форму решения для  $u_\theta(r)$ . Аналогично пусть левая часть уравнения (2.9) равна  $-1$ , и поэтому, имеем

$$T''(\theta) + T(\theta) = 0 \tag{2.13}$$

и общую форму решения дифференциального уравнения (2.13) можно записать в виде

$$T(\theta) = u_z(\theta) = B_1 \cos \theta + B_2 \sin \theta \tag{2.14}$$

Однако, на основе состояния деформирования ячейки под действием чистого продольного сдвига, константа  $B_2$  должна быть равна нулю и поэтому, решение (2.14) приводится к виду

$$T(\theta) = u_z(\theta) = B_1 \cos \theta \tag{2.15}$$

Таким образом, на основании (2.12) и (2.15), имеем

$$\begin{aligned} u_z(r, \theta) &= (A_1 r^\lambda + A_2 r^{-\lambda}) B_1 \cos \theta = \\ &= (A_1 B_1 r^\lambda + A_2 B_1 r^{-\lambda}) \cos \theta. \end{aligned}$$

Итак, общими допустимыми полями перемещений ортотропных многофазных композита являются.

$$u_z^{(i)}(r, \theta) = \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} \right) \cos \theta \quad (2.16)$$

где  $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$  — неизвестные константы, которые определяются из граничных условий; и  $\lambda_{(i)} = \sqrt{G_{\theta z}^{(i)} / G_{rz}^{(i)}}$  — материальная константа фазы.

Следовательно, используя соотношения Коши, можно записать допустимые поля деформаций ортотропных фаз в следующем виде

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} \frac{1}{r^{\lambda_{(i)}}} \right) \cos \theta \right] = \\ &= \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}} \right) (-\sin \theta), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{rz}^{(i)}(r, \theta) &= \frac{\partial u_z}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} \frac{1}{r^{\lambda_{(i)}}} \right) \cos \theta \right] = \\ &= \left( \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1} + (-\lambda_{(i)}) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}} \right) \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.18)$$

и используя закон Гука для (2.17) и (2.18), допустимые поля напряжений ортотропных фаз примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) &= G_{\theta z}^{(i)} 2\varepsilon_{\theta z}^{(i)} = -G_{\theta z}^{(i)} \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}} \right) \sin \theta = \\ &= -C_{44}^{(i)} \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}} \right) \sin \theta, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rz}^{(i)}(r, \theta) &= G_{rz}^{(i)} 2\varepsilon_{rz}^{(i)} = G_{rz}^{(i)} \left( \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1} + (-\lambda_{(i)}) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}} \right) \cos \theta = \\ &= C_{55}^{(i)} \left( \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1} + (-\lambda_{(i)}) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}} \right) \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Видно, что в равенствах (2.19) и (2.20) тензоры модулей упругости  $G_{rz}$  и  $G_{\theta z}$  заменены индексами  $C_{55}$  и  $C_{44}$  соответственно.

В случае изотропных или трансверсально-изотропных сред с осью плоскости изотропии, направленной вдоль волокон материальная константа фаз равна

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{G_{\theta z}^{(i)} / G_{rz}^{(i)}} = \sqrt{C_{44}^{(i)} / C_{55}^{(i)}} = 1, \quad (2.21)$$



потому что в этом случае имеется равенство

$$G_{\theta z} = G_{rz} \text{ или } C_{44}^{(i)} = C_{55}^{(i)}. \quad (2.22)$$

Кроме того, соотношение (Б.5), данное в Приложении Б, действительно. Таким образом, с учетом (2.21), (2.22) и (Б.5), можем переписать (2.16), (2.17), (2.18), (2.19) и (2.20) следующим образом:

$$u_r^{(i)}(r, \theta) = (D_1^{(i)} r + D_2^{(i)} r^{-1}) \cos \theta, \quad (2.23)$$

$$2\varepsilon_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) = -(D_1^{(i)} + D_2^{(i)} r^{-2}) \sin \theta, \quad (2.24)$$

$$2\varepsilon_{r\theta}^{(i)}(r, \theta) = (D_1^{(i)} - D_2^{(i)} r^{-2}) \cos \theta, \quad (2.25)$$

$$\sigma_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) = -\mu_{23}^{(i)} (D_1^{(i)} + D_2^{(i)} r^{-2}) \sin \theta, \quad (2.26)$$

$$\sigma_{rz}^{(i)}(r, \theta) = \mu_{23}^{(i)} (D_1^{(i)} - D_2^{(i)} r^{-2}) \cos \theta, \quad (2.27)$$

### **Б. Методика получения эффективного модуля продольного сдвига.**

Рассмотрим вновь задачу чистого сдвига для слоистой структура и предположим что, в направлении вдоль ячейки на бесконечности задано поле перемещений  $u_z(r, \theta) = 2\varepsilon_0 r \cos \theta$ . Опять при этом возникают только допустимые перемещения вдоль волокон, которые имеют следующий вид

$$u_z^{(i)}(r, \theta) = (D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}}) \cos \theta, \quad (2.28)$$

где

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{44}^{(i)} / C_{55}^{(i)}} \quad (2.29)$$

и для изотропных и трансверсально-изотропных фаз с осью симметрии, направленной вдоль оси волокна,  $\lambda_{(i)} = 1$ . Из равенств (2.19) и (2.20) соответствующие поля напряжений каждой фазы принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}^{(i)}(r, \theta) &= -C_{44}^{(i)} (D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1}) \sin \theta, \\ \sigma_{rz}^{(i)}(r, \theta) &= C_{55}^{(i)} (\lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} - \lambda_{(i)} D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1}) \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Теперь определим поля перемещений и напряжений для эквивалентной гомогенной среды, которые соответствуют средам с трансверсально-изотропными

свойствами с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси волокна. Из равенств (2.23), (2.26) и (2.27) имеем

$$u_z^{N+1}(r, \theta) = (D_1^{N+1} r + D_2^{N+1} r^{-1}) \cos \theta, \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}^{N+1}(r, \theta) &= -\mu_{23}^{N+1} (D_1^{N+1} + D_2^{N+1} r^{-2}) \sin \theta, \\ \sigma_{rz}^{N+1}(r, \theta) &= \mu_{23}^{N+1} (D_1^{N+1} - D_2^{N+1} r^{-2}) \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Очевидно, что мы имеем девять неизвестных констант, состоящих из восьми неизвестных констант  $(D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_1^{N+1}$  и  $D_2^{N+1})$  и одного неизвестного модуля — эффективного модуля продольного сдвига  $\mu_{23}^{N+1}$ .

Далее, чтобы найти все постоянные, задается условие несингулярности в центре волокна ( $r = 0$ ):

$$D_2^{(1)} = 0, \quad (2.33)$$

условие непрерывности на границах идеального контакта фаз:

$$u_z^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = u_z^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad \sigma_{rz}^{(i)}(r_{(i)}, \theta) = \sigma_{rz}^{(i+1)}(r_{(i)}, \theta), \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad (2.34)$$

внешнее граничное условие на бесконечности ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ):

$$u_z^{N+1}(r_{N+1}) = 2\varepsilon_0 r_{N+1} \cos \theta, \quad (2.35)$$

где в микромеханике композитов величина  $\varepsilon_0$  часто принята единицей ( $\varepsilon_0 = 1$ ); и условие энергетического взаимодействия по поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S (\sigma_{rz}^{N+1} u_z^{eff} - \sigma_{rz}^{eff} u_z^{N+1})_{r=r_N} dS = 0. \quad (2.36)$$

Видно, что угловые поля напряжений не входят в интегральную формулу Эшелби (2.36), потому что угловые перемещения равны нулю. Сначала определим поля перемещений и напряжений эффективного композита в подынтегральной (2.36). Эти поля имеют те же формы поля перемещений и напряжений эквивалентной гомогенной среды:

$$u_z^{eff}(r, \theta) = (D_1^{eff} r + D_2^{eff} r^{-1}) \cos \theta, \quad (2.37)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}^{eff}(r, \theta) &= -\mu_{23}^{eff} (D_1^{eff} + D_2^{eff} r^{-2}) \sin \theta, \\ \sigma_{rz}^{eff}(r, \theta) &= \mu_{23}^{eff} (D_1^{eff} - D_2^{eff} r^{-2}) \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.38)$$

С помощью равенства (2.33), которое применимо также для эффективного композита где  $D_2^{eff} = 0$ <sup>12</sup>, (2.37) и (2.38) приводят к следующему виду

$$u_z^{eff}(r, \theta) = D_1^{eff} \cos \theta \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta z}^{eff}(r, \theta) &= -\mu_{23}^{eff} D_1^{eff} \sin \theta, \\ \sigma_{rz}^{eff}(r, \theta) &= \mu_{23}^{eff} D_1^{eff} \cos \theta. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Видно, что на основании (2.35), которое применимо также для эффективного композита вместе с (2.39), неизвестная константа  $D_1^{eff}$  принимает вид

$$D_2^{N+1} = 0. \quad (2.41)$$

Таким образом, на основании (2.31), (2.32), (2.39), (2.40) и (2.41), формула (2.36) приводится к равенству

$$D_1^{N+1} = 2\varepsilon_0, \quad (2.42)$$

где длина ячейки считается равной  $2L$ . Доказательство (2.42) дано в приложении Ж.2. Далее, на основании (2.31), (2.35) и (2.42), можно записать величину  $D_1^{N+1}$  в виде

$$\begin{aligned} 1) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}} - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}} = 0, \\ 2) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}} - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}} = 0, \\ 3) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}} - 2\varepsilon_0 r_3 = 0, \\ 4) \quad & C_{55}^{(1)} \lambda_{(1)} D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}-1} - C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}-1} + C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}-1} = 0, \\ 5) \quad & C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}-1} - C_{55}^{(2)} \lambda_{(2)} D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}-1} - C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}-1} + C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}-1} = 0, \\ 6) \quad & C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}-1} - C_{55}^{(3)} \lambda_{(3)} D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}-1} - 2\varepsilon_0 \mu_{23}^{N+1} = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Теперь мы имеем пять неизвестных констант —  $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$  и один искомый эффективный модуль продольного сдвига  $\mu_{23}^{N+1} = \mu_{23}^{eff}$ . Шесть неизвестных констант можно получить с помощью условий непрерывности перемещения и напряжения (2.34) на радиусах  $r_1, r_2, r_3 = r_N$ :

$$\mu_{23}^{N+1} = \mu_{23}^{eff} = \frac{1}{2\varepsilon_0} C_{55}^{(3)} \left[ \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r^{\lambda_{(3)}-1} + (-\lambda_{(3)}) D_2^{(3)} r^{-\lambda_{(3)}-1} \right] \cos \theta. \quad (2.44)$$

<sup>12</sup> см. работах [35] на странице 88, и [45] на странице 30.

Видно, что из шестого уравнения (2.44) определяется эффективный объемный модуль продольного сдвига

$$\mu_{23}^{N+1} = \mu_{23}^{eff} = \frac{1}{2\varepsilon_0} C_{55}^{(3)} \left[ \lambda_{(3)} D_1^{(3)} r^{\lambda_{(3)}-1} + (-\lambda_{(3)}) D_2^{(3)} r^{-\lambda_{(3)}-1} \right] \cos \theta. \quad (2.45)$$

Таким образом, если обобщить результат (2.60) для многофазных композитов, то эффективный объемный модуль продольного сдвига имеет вид

$$\mu_{23}^{eff} = \frac{1}{2\varepsilon_0} C_{55}^{(N)} \left[ \lambda_{(N)} D_1^{(N)} r^{\lambda_{(N)}-1} + (-\lambda_{(N)}) D_2^{(N)} r^{-\lambda_{(N)}-1} \right] \cos \theta, \quad (2.46)$$

где

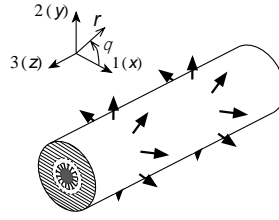
$$\lambda_{(N)} = \sqrt{C_{44}^{(N)} / C_{55}^{(N)}} \quad (2.47)$$

### 2.2.2. Определение объемного модуля плоской деформации

А. Постановка задачи всесторонней нагрузки (растяжение - сжатие) поперек волокон в цилиндрических координатах для ортотропной многофазной среды.

Предполагается, что ось волокон направлена вдоль оси  $z$  (оси 3) в цилиндрической системе координат. Эффективный объемный модуль плоской деформации определяется из решения в задачи плоской деформации и всестороннего нагружения (растяжение - сжатие) поперек волокон (см. рис. 257). Согласно работ [45,61,93], на внешней границе ячейки задано радиальное перемещение поперек волокон  $u_r(r)$ . При этом состояние деформирования ячейки будет осесимметричным и в фазах ячейки возникают только радиальные перемещения. Т.е. угловые перемещения  $u_\theta$  равны нулю, и также перемещения вдоль волокон  $u_z$  равны нулю из-за плоской деформации и поэтому, радиальные перемещения фаз зависят только от радиуса:

$$u_r^{(i)}(r) \neq 0, \quad u_\theta^{(i)} = u_z^{(i)} = 0. \quad (2.48)$$



**Рис. 2.5** Задача всестороннего (растяжение - сжатие) нагружения.

Используя соотношение малых деформации (1.17), имеем

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}. \quad (2.49)$$

Подставив (2.64) в уравнение закона Гука (1.19), находим

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{rr}\varepsilon_{rr} + C_{r\theta}\varepsilon_{\theta\theta} & \sigma_{\theta\theta} &= C_{r\theta}\varepsilon_{rr} + C_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} \\ &= C_{rr}\frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta}\frac{u_r}{r}, & &= C_{r\theta}\frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta\theta}\frac{u_r}{r}. \end{aligned} \quad (2.50)$$

При помощи уравнения равновесия (1.14) вместе с равенством (2.50), получим дифференциальное уравнение второго ранга

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r} \left[ C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r} \right] + \frac{1}{r} \left[ C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r} - \left( C_{r\theta} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r} \right) \right] = 0 \\ \Rightarrow &C_{rr} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + C_{r\theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_r}{r} \right) + \frac{C_{rr}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r^2} - \frac{C_{r\theta}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r^2} = 0 \\ \Rightarrow &C_{rr} \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{C_{rr}}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - C_{\theta\theta} \frac{u_r}{r^2} = 0 \\ \Rightarrow &r^2 u_r'' + r u_r' - \lambda^2 u_r = 0. \end{aligned} \quad (2.51)$$

где  $\lambda = \sqrt{C_{\theta\theta}/C_{rr}}$ . Также как и ранее, делая в (2.51) замену переменной

$$u_r = r^m, \quad u_r' = m r^{m-1}, \quad u_r'' = m(m-1)r^{m-2},$$

имеем

$$\begin{aligned} &r^2 \left[ m(m-1)r^{m-2} \right] + r \left[ m r^{m-1} \right] - \lambda^2 r^m = 0 \\ \Rightarrow &m^2 - \lambda^2 = 0 \\ \Rightarrow &m_{1,2} = \pm \lambda. \end{aligned}$$

Таким образом, допустимые общие поля перемещений ортотропных фаз в композите принимают вид

$$u_r^{(i)}(r) = D_1^{(i)} r^{\lambda(i)} + D_2^{(i)} r^{-\lambda(i)}, \quad (2.52)$$

где  $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$  — неизвестные константы, которые определяются из граничных условий; и  $\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{\theta\theta}^{(i)}/C_{rr}^{(i)}}$  — материальная константа. Следовательно, с помощью соотношения Коши соответствующие поля деформаций ортотропных фаз имеют вид

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} \right) = \\ &= \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1}} - \lambda_{(i)} D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}},\end{aligned}\quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= \frac{1}{r} \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} \right) = \\ &= D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}},\end{aligned}\quad (2.54)$$

и подставив (2.53) и (2.54) в уравнение Гука, для полей напряжений ортотропных фаз получим следующий вид

$$\begin{aligned}\sigma_{rr}^{(i)}(r) &= C_{rr}^{(i)} \left[ \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1}} - \lambda_{(i)} D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}} \right] + C_{r\theta}^{(i)} \left[ D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}} \right] = \\ &= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{rr}^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)-1}} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{rr}^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)-1}} = \\ &= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)-1}} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)-1}},\end{aligned}\quad (2.55)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= C_{r\theta}^{(i)} \left[ \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1}} - \lambda_{(i)} D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}} \right] + C_{\theta\theta}^{(i)} \left[ D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)-1}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)-1}} \right] = \\ &= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{r\theta}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)-1}} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{r\theta}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)-1}} = \\ &= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)-1}} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)-1}}.\end{aligned}\quad (2.56)$$

Видно, что в равенствах (2.55) и (2.56) индексы тензора модулей упругости  $r$  и  $\theta$  заменены индексами 1 и 2 соответственно.

В случае изотропных или трансверсально-изотропных сред с осью плоскости изотропии, направленной вдоль волокон материальная константа равна

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{\theta\theta}^{(i)}/C_{rr}^{(i)}} = \sqrt{C_{22}^{(i)}/C_{11}^{(i)}} = 1, \quad (2.57)$$

так как в этом случае имеется равенство

$$C_{rr} = C_{\theta\theta} \text{ или } C_{11}^{(i)} = C_{22}^{(i)} \quad (2.58)$$

Кроме того, соотношения (Б.4) и (Б.6), данные в Приложении Б действительны. Таким образом, с учетом (2.57), (2.58), (Б.4) и (Б.6), можем переписать (2.52), (2.53), (2.54), (2.55) и (2.56) следующим образом:

$$u_r^{(i)}(r) = D_1^{(i)} r + D_2^{(i)} r^{-1}, \quad (2.59)$$

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) = D_1^{(i)} - D_2^{(i)} r^{-2}, \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) = D_1^{(i)} + D_2^{(i)} r^{-2}, \quad (2.61)$$

$$\sigma_{rr}^{(i)}(r) = 2K_{12}^{(i)} D_1^{(i)} - 2\mu_{12}^{(i)} D_2^{(i)} r^{-2}, \quad (2.62)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) = 2K_{12}^{(i)} D_1^{(i)} + 2\mu_{12}^{(i)} D_2^{(i)} r^{-2}. \quad (2.63)$$

**Б. Методика получения эффективного объемного модуля плоской деформации.**

Рассмотрим вновь задачу всестороннего (растяжение - сжатие) и предположим, что поперек ячейки задано поле перемещений  $u_r(r) = \varepsilon_0 r$  на бесконечности. При этом возникают только радиальные перемещения, которые имеют следующий вид

$$u_r^{(i)}(r) = D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}}, \quad (2.64)$$

где

$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{22}^{(i)} / C_{11}^{(i)}} \quad (2.65)$$

и для изотропных и трансверсально-изотропных фаз с осью симметрии, направленной вдоль оси волокна,  $\lambda_{(i)} = 1$ . Из равенств (2.55) и (2.56) соответствующие поля напряжений каждой фазы принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)}-1}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)}-1}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

Теперь определим поля перемещений и напряжений для эквивалентной гомогенной среды, которые соответствуют средам с трансверсально-изотропными свойствами с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси волокна. Из равенств (2.59), (2.52) и (2.53) имеем

$$u_r^{N+1}(r) = D_1^{N+1} r + D_2^{N+1} r^{-1} \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{N+1}(r) &= 2K_{12}^{N+1} D_1^{N+1} - 2\mu_{12}^{N+1} D_2^{N+1} r^{-2}, \\ \sigma_{\theta\theta}^{N+1}(r) &= 2K_{12}^{N+1} D_1^{N+1} + 2\mu_{12}^{N+1} D_2^{N+1} r^{-2}. \end{aligned} \quad (2.68)$$

Очевидно, что мы имеем десять неизвестных постоянных, состоящих из восьми неизвестных констант  $(D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_1^{N+1}$  и  $D_2^{N+1})$  и двух неизвестных

модулей — эффективный объемный модуль плоской деформации  $K_{12}^{N+1}$  и эффективный модуль плоского сдвига  $\mu_{12}^{N+1}$ .

Далее чтобы получить все переменные, задается условие несингулярности в центре волокна ( $r = 0$ ):

$$D_2^{(1)} = 0; \quad (2.69)$$

условия непрерывности на границах идеального контакта фаз:

$$u_r^{(i)}(r_{(i)}) = u_r^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad (2.70)$$

внешнее граничное условие на бесконечности ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ):

$$u_r^{N+1}(r_{N+1}) = \varepsilon_0 r_{N+1}, \quad (2.71)$$

и условие энергетической поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S (\sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1})_{r=r_N} dS = 0. \quad (2.72)$$

Опять, угловые поля напряжений не входят в интегральную формулу Эшелби (2.72). Важно отметить, что из равенств (2.69) — (2.72) мы имеем только девять уравнений. Однако, будет показано, что неизвестный модуль плоского сдвига будет определяться из интегрального соотношения (2.72).

Как и ранее, определим поля перемещений и напряжений эффективного композита в соотношении (2.72). Эти поля имеют те же формы поля перемещений и напряжений эквивалентной гомогенной среды:

$$u_r^{eff}(r) = D_1^{eff} r + D_2^{eff} r^{-1}, \quad (2.73)$$

$$\sigma_{rr}^{eff}(r) = 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} - 2\mu_{12}^{eff} D_2^{eff} r^{-2}, \quad (2.74)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{eff}(r) = 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} + 2\mu_{12}^{eff} D_2^{eff} r^{-2}.$$

С помощью равенства (2.69), которое применимо также для эффективного композита, где  $D_2^{eff} = 0$ , приводят (2.73) и (2.74) к следующему виду

$$u_r^{eff}(r) = D_1^{eff} r, \quad (2.75)$$

$$\sigma_{rr}^{eff}(r) = 2K_{12}^{eff} D_1^{eff}, \quad (2.76)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{eff}(r) = 2K_{12}^{eff} D_1^{eff}.$$

Видно, что на основании (2.71), которое применимо также для эффективного композита и в (2.75), неизвестная константа  $D_1^{eff}$  принимает вид



$$D_1^{eff} = \varepsilon_0. \quad (2.77)$$

Таким образом, на основании (2.67), (2.68), (2.75), (2.76) и (2.77), формула (2.72) приводит к равенству

$$D_2^{N+1} = 0. \quad (2.78)$$

Доказательство (2.78) дано в Приложении Ж.1. В равенстве (2.78) можно увидеть, что эффективный модуль плоского сдвига в (2.68) находится из системы уравнений. Далее, на основании (2.67), (2.61) и (2.78), можно записать величину  $D_1^{N+1}$  в виде

$$D_1^{N+1} = \varepsilon_0. \quad (2.79)$$

Теперь мы имеем пять неизвестных констант —  $D_1^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}$  и один искомый эффективный объемный модуль плоской деформации  $K_{12}^{N+1} = K_{12}^{eff}$ . Шесть неизвестных констант можно получить с помощью условий непрерывности перемещения и напряжения (2.70) на радиусах  $r_1, r_2, r_3 = r_N$ :

$$\begin{aligned} 1) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}} - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}} = 0, \\ 2) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}} - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}} = 0, \\ 3) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}} - \varepsilon_0 r_3 = 0, \\ 4) \quad & D_1^{(1)} (\lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)}) r_1^{\lambda_{(1)}-1} - \\ & - D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{\lambda_{(2)}-1} - D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_1^{-\lambda_{(2)}-1} = 0, \\ 5) \quad & D_1^{(2)} (\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{\lambda_{(2)}-1} + D_2^{(2)} (-\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)}) r_2^{-\lambda_{(2)}-1} - \\ & - D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{\lambda_{(3)}-1} - D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_2^{-\lambda_{(3)}-1} = 0, \\ 6) \quad & D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{\lambda_{(3)}-1} + D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r_3^{-\lambda_{(3)}-1} - 2\varepsilon_0 K_{12}^{N+1} = 0. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Видно, что опять из шестого уравнения (2.80) определяется объемный модуль плоской деформации

$$K_{12}^{N+1} = K_{12}^{eff} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left[ D_1^{(3)} (\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r^{\lambda_{(3)}-1} + D_2^{(3)} (-\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)}) r^{-\lambda_{(3)}-1} \right]. \quad (2.81)$$

Таким образом, если обобщаем результат (2.81) для многофазных композитов, то эффективный объемный модуль плоской деформации имеет вид

$$K_{12}^{eff} = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left[ D_1^{(N)} (\lambda_{(N)} C_{11}^{(N)} + C_{12}^{(N)}) r^{\lambda_{(N)}-1} + D_2^{(N)} (-\lambda_{(N)} C_{11}^{(N)} + C_{12}^{(N)}) r^{-\lambda_{(N)}-1} \right], \quad (2.82)$$

где

$$\lambda_{(N)} = \sqrt{C_{22}^{(N)} / C_{11}^{(N)}}. \quad (2.83)$$

### 2.2.3. Определение продольного модуля Юнга и коэффициента Пуассона

А. Постановка задачи одноосного растяжения вдоль волокон в цилиндрических координатах для ортотропного многофазного среды.

Предполагается, что ось волокон направлена вдоль оси  $z$  (оси 3) в цилиндрической системе координат. Эффективный продольный модуль Юнга и коэффициент Пуассона определяются из решения задачи одноосного растяжения вдоль волокон (см. рис. 2.6). Согласно работам [45,61,93] вне ячейки задано поле перемещения вдоль волокон  $u_z(z) = \varepsilon_0 z$ . При этом возникают перемещения вдоль волокон и радиальные перемещения, а угловые перемещения равны нулю:

$$u_r^{(i)}(r) \neq 0, \quad u_z^{(i)}(z) = \varepsilon_0 z, \quad u_\theta^{(i)} = 0. \quad (2.84)$$

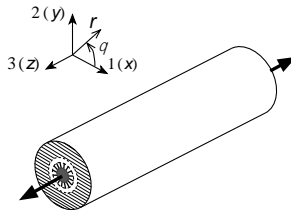


Рис. 2.6 Задача одноосного растяжения (сжатия).

По соотношениям деформации Коши (1.13) и (2.84) находим

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) = \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_0, \quad (2.85)$$

и с помощью закона Гука (1.15) вместе с соотношениями (2.85) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= C_{rr} \varepsilon_{rr} + C_{r\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + C_{rz} \varepsilon_{zz} = \\ &= C_{rr} \frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta} \frac{u_r}{r} + C_{rz} \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta\theta} &= C_{r\theta}\varepsilon_{rr} + C_{\theta\theta}\varepsilon_{\theta\theta} + C_{\theta z}\varepsilon_{zz} = \\ &= C_{r\theta}\frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta\theta}\frac{u_r}{r} + C_{\theta z}\varepsilon_0,\end{aligned}\quad (2.87)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{zz} &= C_{rz}\varepsilon_{rr} + C_{\theta z}\varepsilon_{\theta\theta} + C_{zz}\varepsilon_{zz} = \\ &= C_{rz}\frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta z}\frac{u_r}{r} + C_{zz}\varepsilon_0.\end{aligned}\quad (2.88)$$

При помощи уравнения равновесия (1.14) вместе с равенствами (2.86), (2.87) и (2.88), получается дифференциальное уравнение второго ранга в виде

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial r}\left[C_{rr}\frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta}\frac{u_r}{r} + C_{rz}\varepsilon_0\right] + \frac{1}{r}\left[C_{rr}\frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{r\theta}\frac{u_r}{r} + C_{rz}\varepsilon_0\right] - \frac{1}{r}\left[C_{r\theta}\frac{\partial u_r}{\partial r} + C_{\theta\theta}\frac{u_r}{r} + C_{\theta z}\varepsilon_0\right] = 0 \\ \Rightarrow &C_{rr}\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + C_{rr}\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{C_{\theta\theta}u_r}{r} + \frac{(C_{rz} - C_{\theta z})}{r}\varepsilon_0 = 0 \\ \Rightarrow &r^2\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + r\frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{C_{\theta\theta}}{C_{rr}}u_r + \frac{(C_{rz} - C_{\theta z})}{C_{rr}}\varepsilon_0 r = 0 \\ \Rightarrow &r^2 u_r''(r) + r u_r'(r) + \lambda^2 u_r + \beta \varepsilon_0 r = 0,\end{aligned}\quad (2.89)$$

где  $\lambda = \sqrt{C_{\theta\theta}/C_{rr}}$  и  $\beta = \frac{C_{rz} - C_{\theta z}}{C_{rr}}$ . Можно записать (2.89) в виде

$$r^2 u_r''(r) + r u_r'(r) + \lambda^2 u_r = -\beta \varepsilon_0 r. \quad (2.90)$$

Форма решения дифференциального уравнения (2.90) имеет вид

$$u_r(r) = u_r^{(h)}(r) + u_r^{(p)}(r), \quad (2.91)$$

где  $u_r^{(h)}$  — однородное решение левой части дифференциального уравнения (2.90), которое равно нулю;  $u_r^{(p)}$  — неоднородное решение уравнения (2.90). Форма однородного решения (2.91) уже дана в равенстве (2.52). Теперь найдем общее неоднородное решение с помощью следующей формулы

$$u_{r2}(r) = -u_A \int \frac{u_B S}{W} dr + u_B \int \frac{u_A S}{W} dr, \quad (2.92)$$

Где  $u_A(r), u_B(r)$  — компоненты однородного решения, например,  $u_r^{(1)} = Au_A(r) + Bu_B(r)$ , и поэтому, на основании (2.52) имеем

$$\begin{aligned}u_A(r) &= r^\lambda, & u_B(r) &= r^{-\lambda}, \\ u_A'(r) &= \lambda r^{\lambda-1}, & u_B'(r) &= -\lambda r^{-\lambda-1};\end{aligned}\quad (2.93)$$

и  $S$  — правая часть уравнения (2.90)

$$S = \beta \varepsilon_0 r = \left( \frac{C_{rz} - C_{\theta z}}{C_{rr}} \right) \varepsilon_0 r ; \quad (2.94)$$

и  $W$  — Формула Вронскиена (Wronskian)

$$W(u_A, u_B) = \begin{vmatrix} u_A & u_B \\ u'_A & u'_B \end{vmatrix} = u_A u'_B - u_B u'_A = r^\lambda (-\lambda r^{-\lambda-1}) - r^{-\lambda} (\lambda r^{\lambda-1}) = -2\lambda r^{-1}. \quad (2.95)$$

Подставив (2.93), (2.94) и (2.95) в формулу (2.92) получаем

$$u_r^{(p)}(r) = \nu \varepsilon_0 r , \quad (2.96)$$

где  $\nu = \left( \frac{C_{rz} - C_{\theta z}}{C_{\theta\theta} - C_{rr}} \right)$ . Таким образом, с учетом (2.52) и (2.96) поля

перемещений ортотропных фаз в этой задаче принимают вид

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + \nu^{(i)} \varepsilon_0 r, \\ u_z^{(i)}(z) &= \varepsilon_0 z. \end{aligned} \quad (2.97)$$

где  $D_1^{(i)}, D_2^{(i)}$  — неизвестные константы, которые определяются из граничных условий;  $\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{\theta\theta}^{(i)} / C_{rr}^{(i)}}$  и  $\nu^{(i)} = \left( \frac{C_{rz}^{(i)} - C_{\theta z}^{(i)}}{C_{\theta\theta}^{(i)} - C_{rr}^{(i)}} \right)$  — константы. Следовательно,

используя соотношения малых деформации, можно записать поля деформаций ортотропных фаз в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr}^{(i)}(r) &= \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left[ D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + \nu^{(i)} \varepsilon_0 r \right] = \\ &= \lambda_{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + (-\lambda_{(i)}) D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} + \nu^{(i)} \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.98)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= \frac{u_r}{r} = \frac{1}{r} \left[ D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}} + \nu^{(i)} \varepsilon_0 r \right] = \\ &= D_1^{(i)} r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} r^{-\lambda_{(i)}-1} + \nu^{(i)} \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.99)$$

$$\varepsilon_{zz}^{(i)}(r) = \varepsilon_0. \quad (2.100)$$

и с уравнением законом Гука для полями напряжений ортотропных фаз получаем

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{rr}^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)} \right) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{rr}^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)} \right) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\ &+ \left( C_{rr}^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)} \right) \nu^{(i)} \varepsilon_0 + C_{rz}^{(i)} \varepsilon_0 = \\ &= D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)} \right) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)} \right) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\ &+ \left( C_{11}^{(i)} + C_{12}^{(i)} \right) \nu^{(i)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(i)} \varepsilon_0, \end{aligned} \quad (2.101)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{r\theta}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{r\theta}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\
&\quad + (C_{r\theta}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)}) \nu^{(i)} \varepsilon_0 + C_{\theta z}^{(i)} \varepsilon_0 \\
&= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\
&\quad + (C_{12}^{(i)} + C_{22}^{(i)}) \nu^{(i)} \varepsilon_0 + C_{23}^{(i)} \varepsilon_0,
\end{aligned} \tag{2.102}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz}^{(i)}(r) &= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{rz}^{(i)} + C_{\theta z}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{rz}^{(i)} + C_{\theta z}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\
&\quad + (C_{rz}^{(i)} + C_{\theta z}^{(i)}) \nu^{(i)} \varepsilon_0 + C_{zz}^{(i)} \varepsilon_0 = \\
&= D_1^{(i)} (\lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)}) r^{\lambda_{(i)}-1} + D_2^{(i)} (-\lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)}) r^{-\lambda_{(i)}-1} + \\
&\quad + (C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)}) \nu^{(i)} \varepsilon_0 + C_{33}^{(i)} \varepsilon_0.
\end{aligned} \tag{2.103}$$

Так же можно найти соотношения для случая изотропных или трансверсально-изотропных сред с осью плоскости изотропии.

Кроме того, соотношения (Б.4), (Б.6) и (Б.7), данные в Приложении Б действительны. Таким образом, с учетом (2.58), (Б.4), (Б.5) и (Б.7), можем переписать (2.97), (2.98), (2.99), (2.100), (2.101), (2.102) и (2.103) в следующем виде:

$$u_r^{(i)}(r) = D_1^{(i)} r + D_2^{(i)} r^{-1}. \tag{2.104}$$

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) = D_1^{(i)} - D_2^{(i)} r^{-2}. \tag{2.105}$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) = D_1^{(i)} + D_2^{(i)} r^{-2}. \tag{2.106}$$

$$\varepsilon_{zz}^{(i)}(r) = \varepsilon_0, \tag{2.107}$$

$$\sigma_{rr}^{(i)}(r) = 2K_{12}^{(i)} D_1^{(i)} - 2\mu_{12}^{(i)} D_2^{(i)} r^{-2} + 2K_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)} \varepsilon_0, \tag{2.108}$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) = 2K_{12}^{(i)} D_1^{(i)} + 2\mu_{12}^{(i)} D_2^{(i)} r^{-2} + 2K_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)} \varepsilon_0, \tag{2.109}$$

$$\sigma_{zz}^{(i)}(r) = 4K_{12}^{(i)} \nu_{31}^{(i)} D_1^{(i)} - 4K_{12}^{(i)} (\nu_{31}^{(i)})^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{(i)} \varepsilon_0. \tag{2.110}$$

Б. Методика получения эффективных продольного модуля Юнга и коэффициента Пуассона. В задаче об одноосном растяжении вдоль волокон предположим что, в направлении вдоль ячейки задано поле перемещений  $u_z(z) = \varepsilon_0 z$  вне ячейки. При этом возникают радиальные перемещения и перемещения вдоль волокон (см. Приложение И).

Теперь определим поля перемещений и напряжений для эквивалентной гомогенной среды, которые соответствуют средам с трансверсально-изотропными свойствами с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси волокна. Из равенств (2.104), (2.108), (2.109) и (2.110) имеем

$$u_r^{N+1}(r) = D_1^{N+1} r + D_2^{N+1} r^{-1}, \quad u_z^{N+1}(z) = \varepsilon_0 z, \quad (2.111)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{N+1}(r) &= 2K_{12}^{N+1} D_1^{N+1} - 2\mu_{12}^{N+1} D_2^{N+1} r^{-2} + 2K_{12}^{N+1} \nu_{31}^{N+1} \varepsilon_0, \\ \sigma_{\theta\theta}^{N+1}(r) &= 2K_{12}^{N+1} D_1^{N+1} + 2\mu_{12}^{N+1} D_2^{N+1} r^{-2} + 2K_{12}^{N+1} \nu_{31}^{N+1} \varepsilon_0, \\ \sigma_{zz}^{N+1}(r) &= 4K_{12}^{N+1} \nu_{31}^{N+1} D_1^{N+1} + 4K_{12}^{N+1} \left(\nu_{31}^{N+1}\right)^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{N+1} \varepsilon_0. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Очевидно, что мы имеем двенадцать неизвестных постоянных, состоящих из восьми неизвестных констант ( $D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_1^{N+1}$  и  $D_2^{N+1}$ ) и четырех неизвестных модулей —  $K_{12}^{N+1}, \mu_{12}^{N+1}, \nu_{31}^{N+1}$  и  $E_{33}^{N+1}$ . Будет показано, что все эти неизвестные эффективные модули (кроме коэффициента Пуассона) не будут входить в систему алгебраических уравнений при получении этих неизвестных констант.

Чтобы получить неизвестные константы, задается условие несингулярности в центре волокна ( $r = 0$ ):

$$D_2^{(1)} = 0, \quad (2.113)$$

условия непрерывности на границах идеального контакта фаз:

$$u_r^{(i)}(r_{(i)}) = u_r^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad \sigma_{rr}^{(i)}(r_{(i)}) = \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_{(i)}), \quad (i = 1, 2, \dots, N); \quad (2.114)$$

внешнее граничное условие на бесконечности ( $r_{N+1} \rightarrow \infty$ ):

$$\sigma_{rr}^{N+1}(r_{N+1}) = 0; \quad (2.115)$$

и также условие энергетической поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S \left( \sigma_{zz}^{N+1} u_z^{eff} - \sigma_{zz}^{eff} u_z^{N+1} \right)_{r=r_N} dS = 0. \quad (2.116)$$

Теперь определяем поля перемещений и напряжений эффективного композита в виде

$$u_r^{eff}(r) = D_1^{eff} r + D_2^{eff} r^{-1}, \quad u_z^{eff}(z) = \varepsilon_0 z, \quad (2.117)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} - 2\mu_{12}^{eff} D_2^{eff} r^{-2} + 2K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} \varepsilon_0, \\
\sigma_{\theta\theta}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} + 2\mu_{12}^{eff} D_2^{eff} r^{-2} + 2K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} \varepsilon_0, \\
\sigma_{zz}^{eff}(r) &= 4K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} D_1^{eff} + 4K_{12}^{eff} \left(\nu_{31}^{eff}\right)^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{eff} \varepsilon_0.
\end{aligned} \tag{2.118}$$

На основании (2.113), которое применимо также для эффективного композита где  $D_2^{eff} = 0$ , уравнения (2.119) и (2.120) приводят к виду

$$u_r^{eff}(r) = D_1^{eff} r, \quad u_z^{eff}(z) = \varepsilon_0 z, \tag{2.119}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} + 2K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} \varepsilon_0, \\
\sigma_{\theta\theta}^{eff}(r) &= 2K_{12}^{eff} D_1^{eff} + 2K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} \varepsilon_0, \\
\sigma_{zz}^{eff}(r) &= 4K_{12}^{eff} \nu_{31}^{eff} D_1^{eff} + 4K_{12}^{eff} \left(\nu_{31}^{eff}\right)^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{eff} \varepsilon_0.
\end{aligned} \tag{2.120}$$

Шесть неизвестных констант ( $D_1^{(1)}$ ,  $D_1^{(2)}$ ,  $D_2^{(2)}$ ,  $D_1^{(3)}$ ,  $D_2^{(3)}$  и  $\nu_{31}^{N+1}$ ) можно решить с помощью условий непрерывности перемещения и напряжения (2.116) на радиусах  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3 = r_N$ :

$$\begin{aligned}
1) \quad & D_1^{(1)} r_1^{\lambda_{(1)}} + \nu^{(1)} \varepsilon_0 r_1 - D_1^{(2)} r_1^{\lambda_{(2)}} - D_2^{(2)} r_1^{-\lambda_{(2)}} - \nu^{(2)} \varepsilon_0 r_1 = 0, \\
2) \quad & D_1^{(2)} r_2^{\lambda_{(2)}} + D_2^{(2)} r_2^{-\lambda_{(2)}} + \nu^{(2)} \varepsilon_0 r_2 - D_1^{(3)} r_2^{\lambda_{(3)}} - D_2^{(3)} r_2^{-\lambda_{(3)}} - \nu^{(3)} \varepsilon_0 r_2 = 0, \\
3) \quad & D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}} + \nu^{(3)} \varepsilon_0 r_3 = -\nu_{31}^{N+1} \varepsilon_0 r_3 \\
4) \quad & D_1^{(1)} \left( \lambda_{(1)} C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)} \right) r_1^{\lambda_{(1)}-1} + \left( C_{11}^{(1)} + C_{12}^{(1)} \right) \nu^{(1)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(1)} \varepsilon_0 - \\
& - D_1^{(2)} \left( \lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) r_1^{\lambda_{(2)}-1} - D_2^{(2)} \left( -\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) r_1^{-\lambda_{(2)}-1} - \\
& - \left( C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) \nu^{(2)} \varepsilon_0 - C_{13}^{(2)} \varepsilon_0 = 0, \\
5) \quad & D_1^{(2)} \left( \lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) r_2^{\lambda_{(2)}-1} + D_2^{(2)} \left( -\lambda_{(2)} C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) r_2^{-\lambda_{(2)}-1} \\
& + \left( C_{11}^{(2)} + C_{12}^{(2)} \right) \nu^{(2)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(2)} \varepsilon_0 - \\
& - D_1^{(3)} \left( \lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) r_2^{\lambda_{(3)}-1} - D_2^{(3)} \left( -\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) r_2^{-\lambda_{(3)}-1} - \\
& - \left( C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) \nu^{(3)} \varepsilon_0 - C_{13}^{(3)} \varepsilon_0 = 0, \\
6) \quad & D_1^{(3)} \left( \lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) r_3^{\lambda_{(3)}-1} + D_2^{(3)} \left( -\lambda_{(3)} C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) r_3^{-\lambda_{(3)}-1} + \\
& + \left( C_{11}^{(3)} + C_{12}^{(3)} \right) \nu^{(3)} \varepsilon_0 + C_{13}^{(3)} \varepsilon_0 = 0.
\end{aligned} \tag{2.121}$$

**Коэффициент Пуассона вдоль волокон** определяется из третьего уравнения (2.121) как отношение поперечной эффективной деформации к продольной при растяжении вдоль волокон на границе  $r_3$

$$\nu_{31}^{N+1} = \nu_{31}^{eff} = -\frac{1}{\varepsilon_0 r_3} \left( D_1^{(3)} r_3^{\lambda_{(3)}} + D_2^{(3)} r_3^{-\lambda_{(3)}} + \nu^{(3)} \varepsilon_0 r_3 \right). \tag{2.122}$$

Для многофазных композитов (2.122) приводим к виду:

$$\nu_{31}^{eff} = -\frac{1}{\varepsilon_0 r_N} \left( D_1^{(N)} r_N^{\lambda_{(N)}} + D_2^{(N)} r_N^{-\lambda_{(N)}} + \nu^{(N)} \varepsilon_0 r_N \right). \quad (2.123)$$

### **Эффективный продольный модуль Юнга.**

Введем дополнительное уравнение при определении эффективного продольного модуля Юнга. Для этого используем полную формулу Эшелби (Е.18) для многофазного композита

$$U^{RVE} = U^{eff} + U^{INT} = U^{eff} + \frac{1}{2} \int_{S_i} \left( \sigma_{ij}^{N+1} u_i^{eff} - \sigma_{ij}^{eff} u_i^{N+1} \right) n_j dS. \quad (2.124)$$

Так как  $U^{INT} = 0$ , формула (2.124) преобразуется к следующему виду

$$U^{RVE} = U^{INT}. \quad (2.125)$$

Путем осреднения по объему можно рассматривать равенство (2.125) как эквивалентность плотности энергии деформации между средами с включениями и без включений

$$\frac{1}{2V^{RVE}} \int_{V^{RVE}} \left( \sigma_{zz}^{RVE} \varepsilon_{zz}^{RVE} \right) dV = \frac{1}{2V^{eff}} \int_{V^{eff}} \left( \sigma_{zz}^{eff} \varepsilon_{zz}^{eff} \right) dV, \quad (2.126)$$

где  $V^{RVE}$  — объем среды с включениями (эквивалентная гомогенная среда с волокном, вискеризованном межфазном слое и матрицей);  $V^{eff}$  — объем среды без включений (эквивалентная гомогенная среда, которая считается эффективными композитом), который равен  $V^{RVE}$ .

С учетом совместности деформации [65]:

$$\varepsilon_{zz}^{eff} = \varepsilon_{zz}^{N+1} = \varepsilon_0. \quad (2.127)$$

Получим выражение для эффективного продольного модуля Юнга вида

$$E_{33}^{eff} = \frac{2}{\varepsilon_0 r_N^2} \sum_{i=1}^N \left( D_1^{(i)} \left( \lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)} \right) \left( \frac{r_{(i)}^{\lambda_{(i)+1}} - r_{(i-1)}^{\lambda_{(i)+1}}}{1 + \lambda_{(i)}} \right) + D_2^{(i)} \left( -\lambda_{(i)} C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)} \right) Z^{(i)} + \right. \\ \left. + \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \left( C_{13}^{(i)} + C_{23}^{(i)} \right) \nu^{(i)} + C_{33}^{(i)} \left( r_{(i)}^2 - r_{(i-1)}^2 \right) \right) \right) \quad (2.128)$$



где

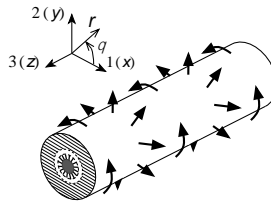
$$\lambda_{(i)} = \sqrt{C_{22}^{(i)} / C_{11}^{(i)}}, \quad Z^{(i)} = \begin{cases} \ln r_{(i)} - \ln r_{(i-1)}, & \lambda_{(i)} = 1, \\ \frac{r_{(i)}^{-\lambda_{(i)+1} - r_{(i-1)}^{-\lambda_{(i)+1}}}{1 - \lambda_{(i)}}, & \lambda_{(i)} \neq 1. \end{cases} \quad (2.129)$$

#### 2.2.4. Определение модуля поперечного сдвига

А. Постановка задачи чистого сдвига в плоскости изотропии в цилиндрических координатах для ортотропной многофазной среды.

Предполагается, что ось волокон направлена вдоль оси  $z$  (оси 3) в цилиндрической системе координат. Эффективный модуль поперечного сдвига определяются из решения задачи плоской деформации и чистого сдвига поперек волокон (см. рис. 2.7). Согласно работ [45,61,93] ячейка находится под действием напряжений  $S_{rr} = \sin \varphi$  и  $\sigma_{r\theta} = \cos \theta$ . При этом возникают только перемещения радиального и углового.

$$u_r^{(i)}(r) = u_\theta^{(i)} \neq 0, \quad u_z^{(i)}(z) = 0. \quad (2.130)$$



**Рис. 2.7** Задача чистого сдвига поперек волокон

Если мы рассмотрим сначала поведение однородной среды в состоянии чистого сдвига, то компоненты в декартовой системе координат в осях  $x, y, z$  определяются следующим образом

$$u_x = cx, \quad u_y = -cy, \quad u_z = 0, \quad (2.131)$$

где максимум деформации чистого сдвига имеет значение  $c$ . Перепишем выражения для перемещений, соответствующих (2.131), в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}
u_r &= cr \sin \theta, \\
u_\theta &= cr \cos \theta, \\
u_z &= 0.
\end{aligned}
\tag{2.132}$$

Руководствуясь предшествующими формулами для деформации однородной среды, запишем общее решение для неоднородной среды в виде

$$\begin{aligned}
u_r &= u(r) \sin \theta, \\
u_\theta &= w(r) \cos \theta, \\
u_z &= 0,
\end{aligned}
\tag{2.133}$$

где  $u(r)$  и  $w(r)$  — неизвестные функциями, которые зависят от радиуса единственно.

Подставив (2.133) в соотношение Коши, имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= u' \sin 2\theta, \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= \left( \frac{u - 2w}{r} \right) \sin 2\theta, \\
2\varepsilon_{r\theta} &= \left( \frac{2u - w}{r} + w' \right) \cos 2\theta.
\end{aligned}
\tag{2.134}$$

Используя (2.134) в законе Гука, получаем

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= \left[ C_{rr} u' + C_{r\theta} \left( \frac{u - 2w}{r} \right) \right] \sin 2\theta, \\
\sigma_{\theta\theta} &= \left[ C_{r\theta} u' + C_{\theta\theta} \left( \frac{u - 2w}{r} \right) \right] \sin 2\theta, \\
\sigma_{r\theta} &= G_{r\theta} \left( \frac{2u - w}{r} + w' \right) \cos 2\theta.
\end{aligned}
\tag{2.135}$$

Подставив (2.135) в уравнение равновесия, разрешающее уравнение приобретает вид:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow C_{rr} \left( (r^2 u''(r) + r u'(r)) - (C_{\theta\theta} + 4G_{r\theta}) u(r) - \right. \\
\left. - 2(C_{r\theta} + G_{r\theta}) r w'(r) + 2(C_{\theta\theta} + G_{r\theta}) w \right) = 0,
\end{aligned}
\tag{2.136}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left[ G_{r\theta} \left( \frac{2u(r) - w(r)}{r} + w'(r) \right) \cos 2\theta \right] + \\ & + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( C_{r\theta} u'(r) + C_{\theta\theta} \left( \frac{u(r) - 2w(r)}{r} \right) \right) \sin 2\theta \right] + \\ & + \frac{2}{r} \left[ \left( G_{r\theta} \left( \frac{2u(r) - w(r)}{r} + w'(r) \right) \right) \cos 2\theta \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2(C_{r\theta} + G_{r\theta})ru'(r) + 2(C_{\theta\theta} + G_{r\theta})u(r) + G_{r\theta}(r^2w'' + rw') - (4C_{\theta\theta} + G_{r\theta})w = 0. \quad (2.137)$$

Характеристическое уравнение для  $\lambda$  записывается в виде:

$$L\lambda^4 + M\lambda^2 + N = 0, \quad (2.138)$$

где

$$\begin{aligned} L &= C_{rr}G_{r\theta}, \\ M &= -\left[ (C_{rr} + C_{\theta\theta} - 8C_{r\theta})G_{r\theta} + 4(C_{rr}C_{\theta\theta} - C_{r\theta}^2) \right], \\ N &= 9C_{\theta\theta}G_{r\theta}. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Корни ( / ) выражения (2.138) зависят от свойств материалов, показанных в (2.139). Согласно работе З. Хашина[11], имеется три варианта корней ( / ): 1) все корни представляют собой действительные числа, 2) все комплексные корни, и 3) одна пара действительная и одна пара комплексная. Однако, в классической теории упругости в соответствии с работами Хашина[10] и Цукрова [11] корни являются вещественными числами. В целом для любых действительных корней  $l_1, l_2, l_3$  и  $l_4$  выражения  $u(r)$  и  $w(r)$  представляются в следующем виде

$$\begin{aligned} u(r) &= F_1 r^{\lambda_1} + F_2 r^{\lambda_2} + F_3 r^{\lambda_3} + F_4 r^{\lambda_4}, \\ w(r) &= D_1 r^{\lambda_1} + D_2 r^{\lambda_2} + D_3 r^{\lambda_3} + D_4 r^{\lambda_4}, \end{aligned} \quad (2.140)$$

где  $l_{(i)}^1, l_{(i)}^3$  — положительные величины; и  $l_{(i)}^2, l_{(i)}^4$  — отрицательные величины.

Кроме того, по соотношению (2.134) константы  $F$  и  $D$  имеют линейную зависимость друг с другом. Т.е. аналогично имеем

$$F_j = \phi_j D_j, \quad (2.141)$$

где

$$\phi_j = 2 \frac{C_{\theta\theta} + G_{r\theta} - \lambda_j (C_{r\theta} + G_{r\theta})}{C_{\theta\theta} + 4G_{r\theta} - (\lambda_j)^2 C_{rr}}.$$

Таким образом, поля перемещения для этой задачи имеют вид

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r) &= \left( \phi_1^{(i)} D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + \phi_2^{(i)} D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + \phi_3^{(i)} D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + \phi_4^{(i)} D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \sin 2\theta = \\ &= \left( \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.142)$$

$$\begin{aligned} u_\theta^{(i)}(r) &= \left( D_1^{(i)} r^{\lambda_1^{(i)}} + D_2^{(i)} r^{\lambda_2^{(i)}} + D_3^{(i)} r^{\lambda_3^{(i)}} + D_4^{(i)} r^{\lambda_4^{(i)}} \right) \cos 2\theta = \\ &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Соответствующие поля деформаций имеют вид

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) = \left( \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} \right) \sin 2\theta, \quad (2.144)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) = \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (\phi_j^{(i)} - 2) \right) \sin 2\theta, \quad (2.145)$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{(i)}(r) = \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (2\phi_j^{(i)} + \lambda_j^{(i)} - 1) \right) \cos 2\theta, \quad (2.146)$$

и поля напряжений принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)}(r) &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (C_{rr}^{(i)} \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{r\theta}^{(i)} (\phi_j^{(i)} - 2)) \right) \sin 2\theta = \\ &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (C_{11}^{(i)} \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{12}^{(i)} (\phi_j^{(i)} - 2)) \right) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.147)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (C_{r\theta}^{(i)} \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)} (\phi_j^{(i)} - 2)) \right) \sin 2\theta = \\ &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (C_{12}^{(i)} \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{22}^{(i)} (\phi_j^{(i)} - 2)) \right) \sin 2\theta, \end{aligned} \quad (2.148)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r\theta}^{(i)}(r) &= G_{r\theta} \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (2\phi_j^{(i)} + \lambda_j^{(i)} - 1) \right) \cos 2\theta = \\ &= C_{66} \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (2\phi_j^{(i)} + \lambda_j^{(i)} - 1) \right) \cos 2\theta, \end{aligned} \quad (2.149)$$

где постоянные  $f_j$  имеют вид

$$\phi_j^{(i)} = 2 \frac{C_{\theta\theta}^{(i)} + G_{r\theta}^{(i)} - \lambda_j^{(i)} (C_{r\theta}^{(i)} + G_{r\theta}^{(i)})}{C_{\theta\theta}^{(i)} + 4G_{r\theta}^{(i)} - (\lambda_j^{(i)})^2 C_{rr}^{(i)}} = 2 \frac{C_{22}^{(i)} + C_{66}^{(i)} - \lambda_j^{(i)} (C_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)})}{C_{22}^{(i)} + 4C_{66}^{(i)} - (\lambda_j^{(i)})^2 C_{11}^{(i)}}, \quad (2.150)$$

и  $\lambda_j^{(i)}$  — решения характеристического уравнения, данного ниже

$$L(\lambda_j^{(i)})^4 - M(\lambda_j^{(i)})^2 + N = 0, \quad (2.151)$$

где

$$\begin{aligned} L &= C_{rr}^{(i)} G_{r\theta}^{(i)} = C_{11}^{(i)} C_{66}^{(i)}, \\ M &= (C_{rr}^{(i)} + C_{\theta\theta}^{(i)} - 8C_{r\theta}^{(i)}) G_{r\theta}^{(i)} + 4(C_{rr}^{(i)} C_{\theta\theta}^{(i)} - (C_{r\theta}^{(i)})^2) = \\ &= (C_{11}^{(i)} + C_{22}^{(i)} - 8C_{12}^{(i)}) C_{66}^{(i)} + 4(C_{11}^{(i)} C_{22}^{(i)} - (C_{12}^{(i)})^2), \\ N &= 9C_{\theta\theta}^{(i)} G_{r\theta}^{(i)} = 9C_{22}^{(i)} C_{66}^{(i)}. \end{aligned} \quad (2.152)$$

Видно, что тензор модулей упругости индексов  $C_{rr}^{(i)}$ ,  $C_{\theta\theta}^{(i)}$ ,  $C_{r\theta}^{(i)}$  заменен тензором с индексами  $C_{11}^{(i)}$ ,  $C_{22}^{(i)}$ ,  $C_{66}^{(i)}$ .

Для трансверсально-изотропных сред с учетом решения характеристического уравнения

$$\lambda_1^{(i)} = 1, \quad \lambda_2^{(i)} = -1, \quad \lambda_3^{(i)} = 3, \quad \lambda_4^{(i)} = -3. \quad (2.153)$$

можно переписать соотношения в следующем виде

$$u_r^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} r + D_2^{(i)} \left( 1 + \frac{K_{12}^{(i)}}{\mu_{12}^{(i)}} \right) r^{-1} + D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)} - \mu_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^3 - D_4^{(i)} r^{-3} \right) \sin 2\theta, \quad (2.154)$$

$$u_\theta^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} r + D_2^{(i)} r^{-1} + D_3^{(i)} r^3 + D_4^{(i)} r^{-3} \right) \cos 2\theta, \quad (2.155)$$

$$\varepsilon_{rr}^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} - D_2^{(i)} \left( 1 + \frac{K_{12}^{(i)}}{\mu_{12}^{(i)}} \right) r^{-2} + 3D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)} - \mu_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^2 + 3D_4^{(i)} r^{-4} \right) \sin 2\theta, \quad (2.156)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta}^{(i)}(r) = \left( -D_1^{(i)} - D_2^{(i)} \left( 1 - \frac{K_{12}^{(i)}}{\mu_{12}^{(i)}} \right) r^{-2} - 3D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^2 - 3D_4^{(i)} r^{-4} \right) \sin 2\theta, \quad (2.157)$$

$$\varepsilon_{r\theta}^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} + D_2^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)}}{\mu_{12}^{(i)}} \right) r^{-2} + 3D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^2 - 3D_4^{(i)} r^{-4} \right) \cos 2\theta, \quad (2.158)$$

$$\sigma_{rr}^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} - 2D_2^{(i)} K_{12}^{(i)} r^{-2} + 3D_4^{(i)} \mu_{12}^{(i)} r^{-4} \right) \sin 2\theta, \quad (2.159)$$

$$\sigma_{\theta\theta}^{(i)}(r) = \left( -D_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + 3D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)} - \mu_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^{-2} - 3D_4^{(i)} \mu_{12}^{(i)} r^{-4} \right) \sin 2\theta, \quad (2.160)$$

$$\sigma_{r\theta}^{(i)}(r) = \left( D_1^{(i)} \mu_{12}^{(i)} + D_2^{(i)} K_{12}^{(i)} r^{-2} + 3D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{(i)} \mu_{12}^{(i)}}{2K_{12}^{(i)} + \mu_{12}^{(i)}} \right) r^2 - 3D_4^{(i)} \mu_{12}^{(i)} r^{-4} \right) \cos 2\theta. \quad (2.161)$$

Б. Методика получения эффективного модуля поперечного сдвига.

Рассмотрим вновь задачу чистого сдвига в плоскости изотропии ячейки, для слоистой структуры, которая под действием напряжений:  $\sigma_{rr}(r_{N+1}) = \sin 2\theta$  и  $\sigma_{r\theta}(r_{N+1}) = \cos 2\theta$ . В этом случае возникают радиальные и угловые перемещения

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r, \theta) &= \left( \sum_{j=1}^4 \phi_j^{(i)} D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \sin 2\theta, \\ u_\theta^{(i)}(r, \theta) &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}} \right) \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.162)$$

где опять запишем

$$\phi_j^{(i)} = 2 \frac{C_{22}^{(i)} + C_{66}^{(i)} - \lambda_j^{(i)} (C_{12}^{(i)} + C_{66}^{(i)})}{C_{22}^{(i)} + 4C_{66}^{(i)} - (\lambda_j^{(i)})^2 C_{11}^{(i)}},$$

и  $\lambda_{(i)}$  — решение характеристического уравнения, данного ниже

$$L(\lambda^{(i)})^4 - M(\lambda^{(i)})^2 + N = 0$$

где

$$\begin{aligned} L &= C_{11}^{(i)} C_{66}^{(i)}, \\ M &= (C_{11}^{(i)} + C_{22}^{(i)} - 8C_{12}^{(i)}) C_{66}^{(i)} + 4(C_{11}^{(i)} C_{22}^{(i)} - (C_{12}^{(i)})^2), \\ N &= 9C_{22}^{(i)} C_{66}^{(i)}. \end{aligned}$$

Здесь мы получаем, что  $\lambda_{(1)}, \lambda_{(3)}$  — положительные числа, и  $\lambda_{(2)}, \lambda_{(4)}$  — отрицательные числа. Соответствующие поля напряжений, которые необходимы для нашего анализа имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^{(i)}(r, \theta) &= \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (C_{11}^{(i)} \phi_j^{(i)} \lambda_j^{(i)} + C_{12}^{(i)} (\phi_j^{(i)} - 2)) \right) \sin 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{(i)}(r, \theta) &= C_{66}^{(i)} \left( \sum_{j=1}^4 D_j^{(i)} r^{\lambda_j^{(i)}-1} (2\phi_j^{(i)} + \lambda_j^{(i)} - 1) \right) \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.163)$$

Перемещения в  $N$  слоях записываются в виде:

$$u_r^{N+1}(r) = \left( D_1^{N+1} r + D_2^{N+1} \left( 1 + \frac{K_{12}^{N+1}}{\mu_{12}^{N+1}} \right) r^{-1} + D_3^{(i)} \left( \frac{K_{12}^{N+1} - \mu_{12}^{N+1}}{2K_{12}^{N+1} + \mu_{12}^{N+1}} \right) r^3 - D_4^{N+1} r^{-3} \right) \sin 2\theta, \quad (2.164)$$

$$u_\theta^{N+1}(r) = \left( D_1^{N+1} r + D_2^{N+1} r^{-1} + D_3^{N+1} r^3 + D_4^{N+1} r^{-3} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_{rr}^{N+1}(r) = \left( D_1^{N+1} \mu_{12}^{N+1} - 2D_2^{N+1} K_{12}^{N+1} r^{-2} + 3D_4^{N+1} \mu_{12}^{N+1} r^{-4} \right) \sin 2\theta, \\ \sigma_{r\theta}^{N+1}(r) = \left( D_1^{N+1} \mu_{12}^{N+1} + D_2^{N+1} K_{12}^{N+1} r^{-2} + \right. \\ \left. + 3D_3^{N+1} \left( \frac{K_{12}^{N+1} \mu_{12}^{N+1}}{2K_{12}^{N+1} + \mu_{12}^{N+1}} \right) r^2 - 3D_4^{N+1} \mu_{12}^{N+1} r^{-4} \right) \cos 2\theta. \quad (2.165)$$

Используя полученные перемещения (2.264) и (2.265) записываем условия на внешней границе:

$$u_r^{N+1}(r, \theta) = \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r + (\eta^{N+1} + 1) \frac{D_2^{N+1}}{r} + \frac{D_4^{N+1}}{r^3} \right) \sin 2\theta, \quad (2.166)$$

$$u_\theta^{N+1}(r, \theta) = \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r + (\eta^{N+1} - 1) \frac{D_2^{N+1}}{r} - \frac{D_4^{N+1}}{r^3} \right) \cos 2\theta,$$

$$\sigma_{rr}^{N+1}(r, \theta) = \left( 1 - \Gamma^{N+1} \frac{D_2^{N+1}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{D_4^{N+1}}{r^4} \right) \sin 2\theta, \quad (2.167)$$

$$\sigma_{r\theta}^{N+1}(r, \theta) = \left( 1 + \frac{D_2^{N+1}}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{D_4^{N+1}}{r^4} \right) \cos 2\theta,$$

где

$$\eta^{N+1} = 1 + 2 \frac{K_{12}^{N+1}}{\mu_{12}^{N+1}}, \quad \Gamma^{N+1} = 1 + \left( \frac{K_{12}^{N+1}}{\mu_{12}^{N+1}} \right)^2. \quad (2.168)$$

Очевидно, что помимо четырнадцати констант  $(D_1^{(1)}, D_2^{(1)}, D_3^{(1)}, D_4^{(1)}, D_1^{(2)}, D_2^{(2)}, D_3^{(2)}, D_4^{(2)}, D_1^{(3)}, D_2^{(3)}, D_3^{(3)}, D_4^{(3)}, D_2^{N+1}$  и  $D_4^{N+1})$ , имеем два неизвестных эффективных модуля  $K_{12}^{N+1} = K_{12}^{eff}$  и  $\mu_{12}^{N+1} = \mu_{12}^{eff}$ . Будет показано, что знание эффективного объемного модуля плоской деформации не необходимо и поэтому, нужно получить только пятнадцать неизвестных констант. Пятнадцать требуемых уравнений состоят из условий несингулярности:

$$D_2^{(1)} = D_4^{(1)} = 0, \quad (2.169)$$

условия непрерывности на границах идеального контакта фаз:

$$\begin{aligned} u_r^{(i)}(r_i, \theta) &= u_r^{(i+1)}(r_i, \theta), & u_\theta^{(i)}(r_i, \theta) &= u_\theta^{(i+1)}(r_i, \theta), \\ \sigma_{rr}^{(i)}(r_i, \theta) &= \sigma_{rr}^{(i+1)}(r_i, \theta), & \sigma_{r\theta}^{(i)}(r_i, \theta) &= \sigma_{r\theta}^{(i+1)}(r_i, \theta), \end{aligned} \quad (i=1, 2, \dots, N); \quad (2.170)$$

и условия энергетической поверхности на контакте ( $r = r_N$ ):

$$\int_S \left( \sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} + \sigma_{r\theta}^{N+1} u_\theta^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1} - \sigma_{r\theta}^{eff} u_\theta^{N+1} \right)_{r=r_N} dS = 0. \quad (2.171)$$

Определяем поля перемещений и напряжений эффективного композита, которые имеют вид при  $r \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} u_r^{eff}(r, \theta) &= \frac{r \sin 2\theta}{2\mu_{12}^{eff}}, & u_\theta^{eff}(r, \theta) &= \frac{r \cos 2\theta}{2\mu_{12}^{eff}}, \\ \sigma_{rr}^{eff}(r, \theta) &= \sin 2\theta, & \sigma_{r\theta}^{eff}(r, \theta) &= \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (2.172)$$

Используя (2.205), (2.206), (2.171) в (2.172), находим

$$D_2^{N+1} = 0. \quad (2.173)$$

Таким образом, соотношения (2.169), (2.170) и (2.173) формируют систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных констант и в том числе эффективного поперечного модуля сдвига  $\mu_{12}^{N+1} = \mu_{12}^{eff}$ . Видно, что в отличие от предыдущих случаев здесь не удастся получить аналитическое представления для модуля сдвига, так как система уравнений включает в себя нелинейное уравнение — характеристическое уравнение. Тем не менее, было показано ранее, что решения для других модулей не привлекают нелинейные уравнения, и поэтому ясные окончательные выражения других необходимых модулей могут быть получены.

### 2.2.5. Определение модуля поперечного сдвига

По известным значениям эффективного объемного модуля плоской деформации, продольного модуля Юнга, модуля плоского сдвига, и коэффициента Пуассона определяем поперечный модуль Юнга по формуле (Б.12)

$$E_{11}^{eff} = \frac{4\mu_{12}^{eff} K_{12}^{eff}}{K_{12}^{eff} + \mu_{12}^{eff} + 4(v_{31}^{eff})^2 \mu_{12}^{eff} K_{12}^{eff} / E_{33}^{eff}}. \quad (2.174)$$

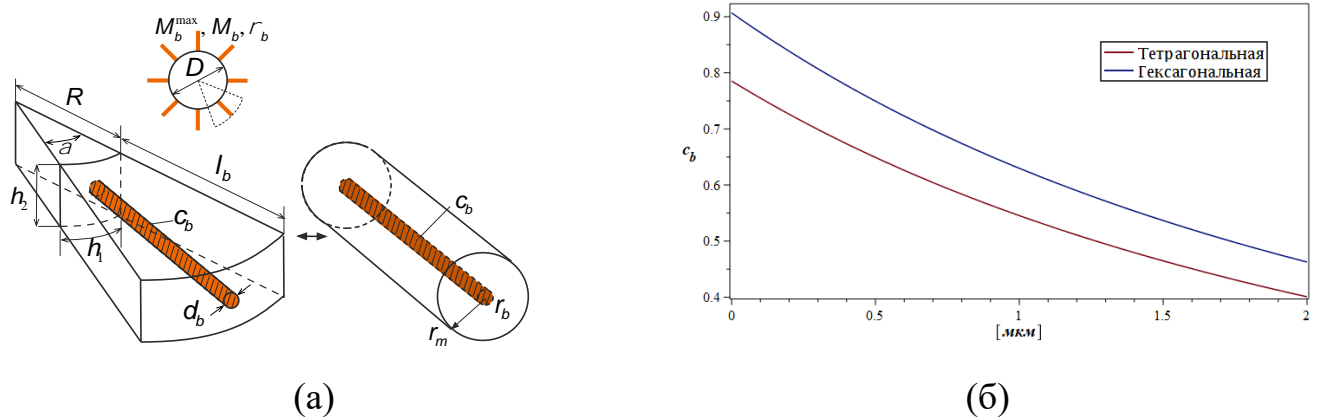
Другие коэффициенты Пуассона можно найти в Приложении Б.1 равенств (Б.13) и (Б.14).



### Глава 3. Оценка эффективных трансверсальных свойств вискеризованного слоя

#### 3.1. Приближенная структурная модель вискеризованного межфазного слоя.

На рис. 3.1 показывается приближенная структурная модель вискеризованного межфазного слоя, которая построена для нахождения объемной доли вискерсов, и следовательно, эффективных свойств вискеризованного межфазного слоя с учетом различных характеристик вискерсов (т.е. длины, плотности, диаметра, свойств вискерсов) в этом слое.



**Рис.3.1.** (а) - Приближенная структурная модель вискеризованного межфазного слоя, (б) – распределение вискерсов межфазного слоя по радиусу  $r$

Теперь определяем максимальное допустимое число вискерсов  $M_b^{\max}$ , которое может поместиться на длине окружности волокна по формуле

$$M_b^{\max} = \pi D / d_b, \quad (3.1)$$

где  $D$  — диаметр базового волокна;  $d_b$  — диаметр вискерса. Угол между вискерсами  $\alpha$  задается, как

$$\alpha = 2\pi M_b, \quad (3.2)$$

где  $M_b$  — число вискерсов, выращенных на поверхности волокна.

Расстояние  $h_1$  между вискерсами задается формулой

$$h_1 = \alpha R, \quad (3.3)$$

где  $R = D/2$  — радиус базового волокна. Расстояния между вискерсами по единичной длине  $h_2$  волокна запишем

$$h_2 = p h_1, \quad (3.4)$$

где  $p$  — константа, определяющая отношение между  $h_1$  и  $h_2$ . Объем вискерсов в вискеризованном межфазном слое  $V_b$  определяется формулой вида

$$V_b = \pi M_b l_b d_b^2 / 4, \quad (3.5)$$

где  $l_b$  — длина вискерса, а объемом вискеризованного межфазного слоя является

$$V_{bm} = \pi (r_2^2 - r_1^2) h_2, \quad (3.6)$$

где  $r_1 = R$  и  $r_2 = R + l_b$ . Итак, взяв соотношение (3.5) и (3.6), определяем объемную долю вискерсов в этом слое так

$$c_b = \frac{M_b d_b^2}{4(l_b + D)h_2}. \quad (3.7)$$

Так как для простоты, ячейка на корне вискерса считается квадратной, имеем  $p = 1$ . Следовательно, на основании (3.2), (3.3) и (3.4), можно переписать (3.7) в виде

$$c_b = \frac{M_b^2 d_b^2}{4\pi(l_b + D)D}. \quad (3.8)$$

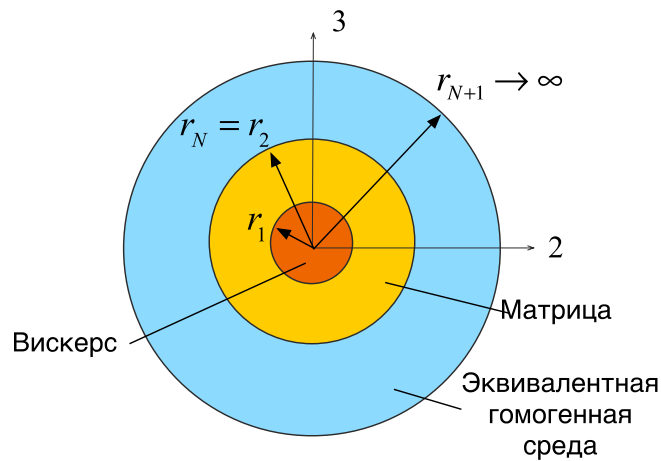
Плотность вискерсов связана с числом вискерсов, выращенных на единичной поверхности волокна. Однако, для простоты мы определяем в расчете, что плотность вискерсов представляет собой соотношение числа вискерсов, выращенных на волокне к максимальному допустимому числу вискерсов, умещающихся по длине окружности волокна. Имеем

$$\rho_b = (M_b / M_b^{\max}) 100\% \quad (3.9)$$

Уравнения (3.8) и (3.9) используются для расчета объемной доли вискерсов в вискеризованном межфазном слое.

При дальнейшей оценке эффективных свойств будем учитывать, что плотность вискерсов изменяется по радиусу волокна, что задаст определенный диапазон концентраций технологически воспроизводимый для волокнистых структур показан на Рис.3.1.а.,

### 3.2. Определение динамических характеристик: модуль потерь и динамический модуль вискеризованного межфазного слоя.



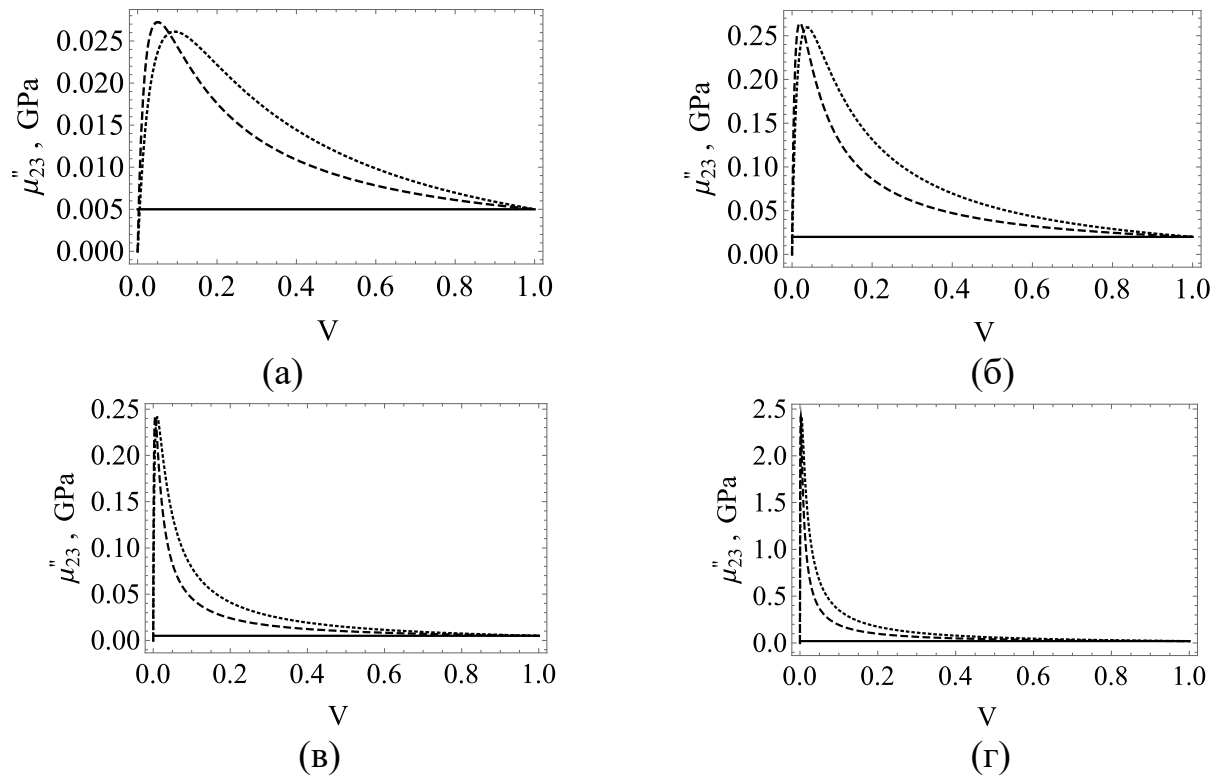
**Рис. 3.2** Ячейка вискеризованного межфазного слоя по методу трех фаз.

В данном разделе впервые предлагается исследовать межфазный слой как отдельную структуру. Для исследования динамических характеристик применяется метод комплексных модулей. Комплексный модуль определяется равенством  $E = E' + iE''$ , где мнимая часть является модулем потерь и характеризует собой демпфирующие характеристики материала.

Для определения продольного  $\mu_{23}$  и поперечного  $\mu_{12}$  модуля сдвига вискеризованного межфазного слоя, а так же поперечного модуля упругости  $E_{22}$  будем пользоваться методом трех фаз, рассмотренным в разделе 2.2.1. данной диссертации. Дополнительно рассмотрим упрощенный способ оценки эффективных свойств вискеризованного слоя в виде метода Рейсса и сравним полученные результаты для различных типов структур.

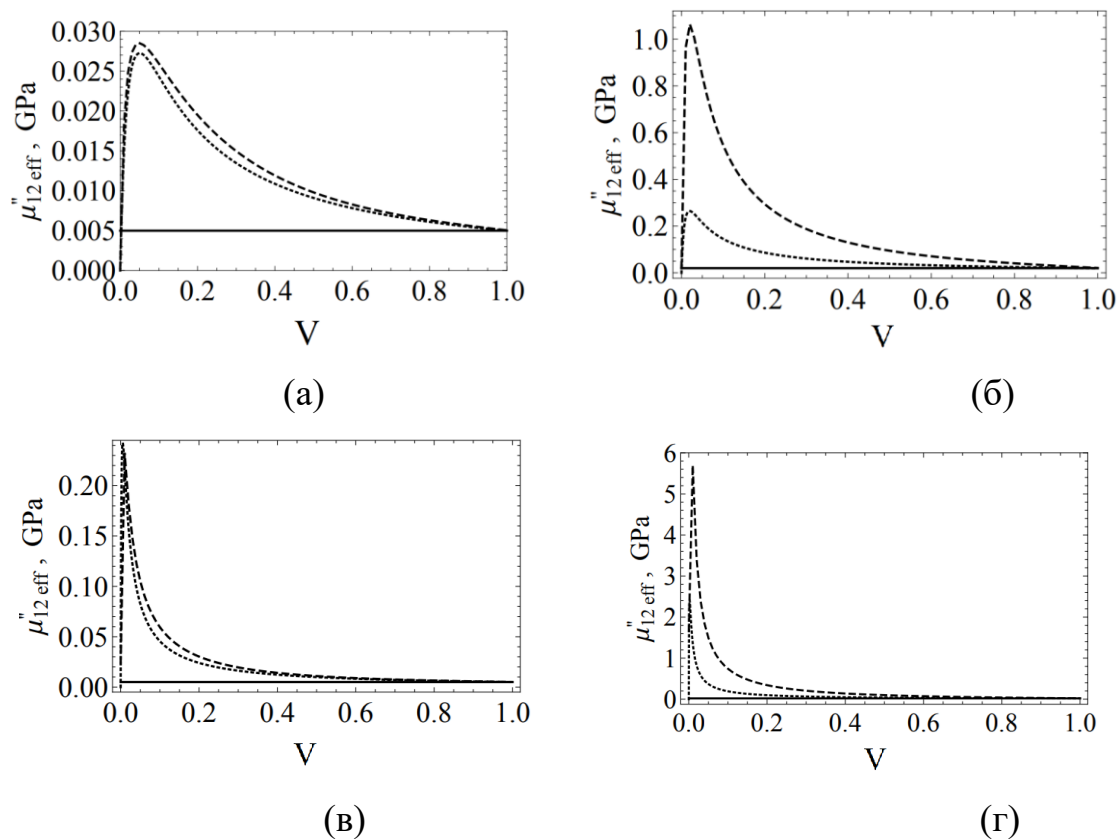
Согласно методу Рейсса эффективные модули можно записать следующим образом:  $1/\mu_{eff}^* = (1-V)/\mu_1^* + V/\mu_2^*$ ,  $1/E_{eff}^* = (1-V)/E_1^* + V/E_2^*$ , где  $V$  – объемная доля матрицы,  $\mu_1^*$ ,  $\mu_2^*$ ,  $E_1^*$  и  $E_2^*$  – модули сдвига и Юнга вискерса и матрицы соответственно,  $k_1$  – объемный модуль вискерса,  $k_2$  – объемный модуль матрицы.

Рассмотрим межфазный вискеризованный слой образованный образованный вискерсами и матрицей. Вискерсы рассматриваются как жесткий материал с  $\mu_1^* = b$ , а матрица как вязкоупругий материал с  $\mu_2^* = a(1+i\eta) = \mu_2' + i\mu_2''$ . Свойства компонентов структуры для определения эффективных характеристик представлены в Таблице А.1 Приложения А.



**Рис.3.3** Зависимости эффективного модуля потерь при продольном сдвиге: метод трех фаз (...), метод Рейсса (- - -), матрица (\_\_\_\_) (а)- вискеризованный слой с ZnO и эпоксидной матрицей; (б)- вискеризованный слой с ZnO и вязкоупругим полимером при температуре ниже температуры стеклования, (в)- вискеризованный слой с УНТ и эпоксидной матрицей; (г)- вискеризованный слой с УНТ и вязкоупругим полимером при температуре ниже температуры стеклования.

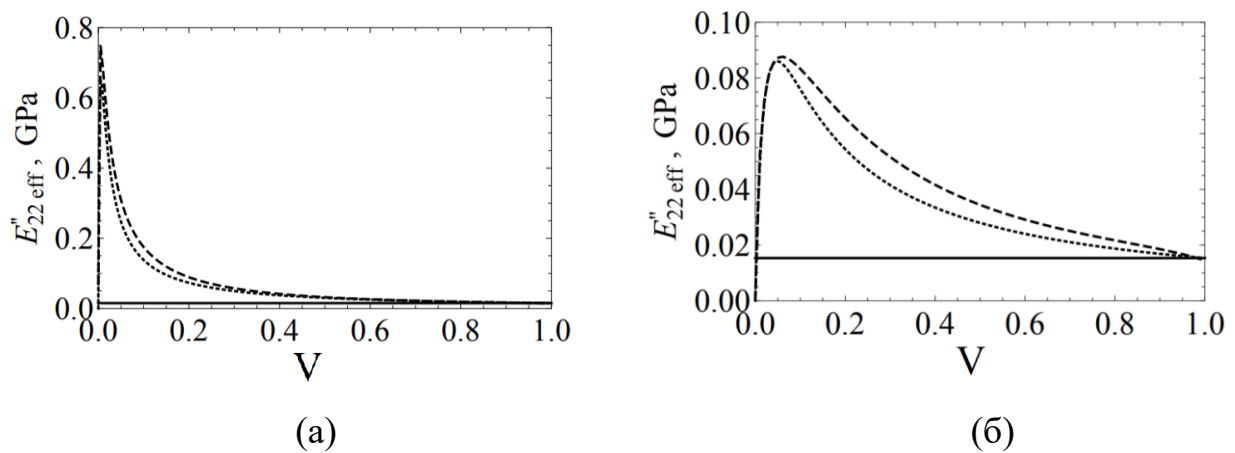
Графики на Рис.3.3 продольного модуля потерь показывают, что осреднение по Рейссу дает более низкий результат модуля потерь по сравнению с методом трех фаз во всем диапазоне возможных концентраций вискерсов в слое, показанном на Рис.3.1(б). Влияние типа связующего в вискеризованном слое на эффективные характеристики можно увидеть из сравнения пар графиков (а), (б) и (в), (г), как видно полимерная матрица с вязкоупругим полимером показывает увеличение модуля потерь на порядок при оптимальной концентрации. Аналогичную картину можно увидеть при сравнении пар графиков (а), (в) и (б), (г), что говорит о преимуществе использования УНТ в качестве вискерсов. Отметим быстрорастущие показатели модуля потерь, который уже при средних концентрациях вискерсов в слое показывает рост в разы, по сравнению с модулем потерь исходной эпоксидной матрицы.



**Рис. 3.4** Зависимости эффективного модуля потерь при поперечном сдвиге: метод Рейсса (...), метод трех фаз (- - -), матрица (\_\_\_\_), (а)- вискеризованный слой с ZnO и эпоксидной матрицей, (б)- вискеризованный слой с ZnO и вязкоупругим полимером при температуре ниже температуры стеклования, (в)-

вискеризованный слой с УНТ и эпоксидной матрицей; (г)- вискеризованный слой с УНТ и вязкоупругим полимером при температуре ниже температуры стеклования

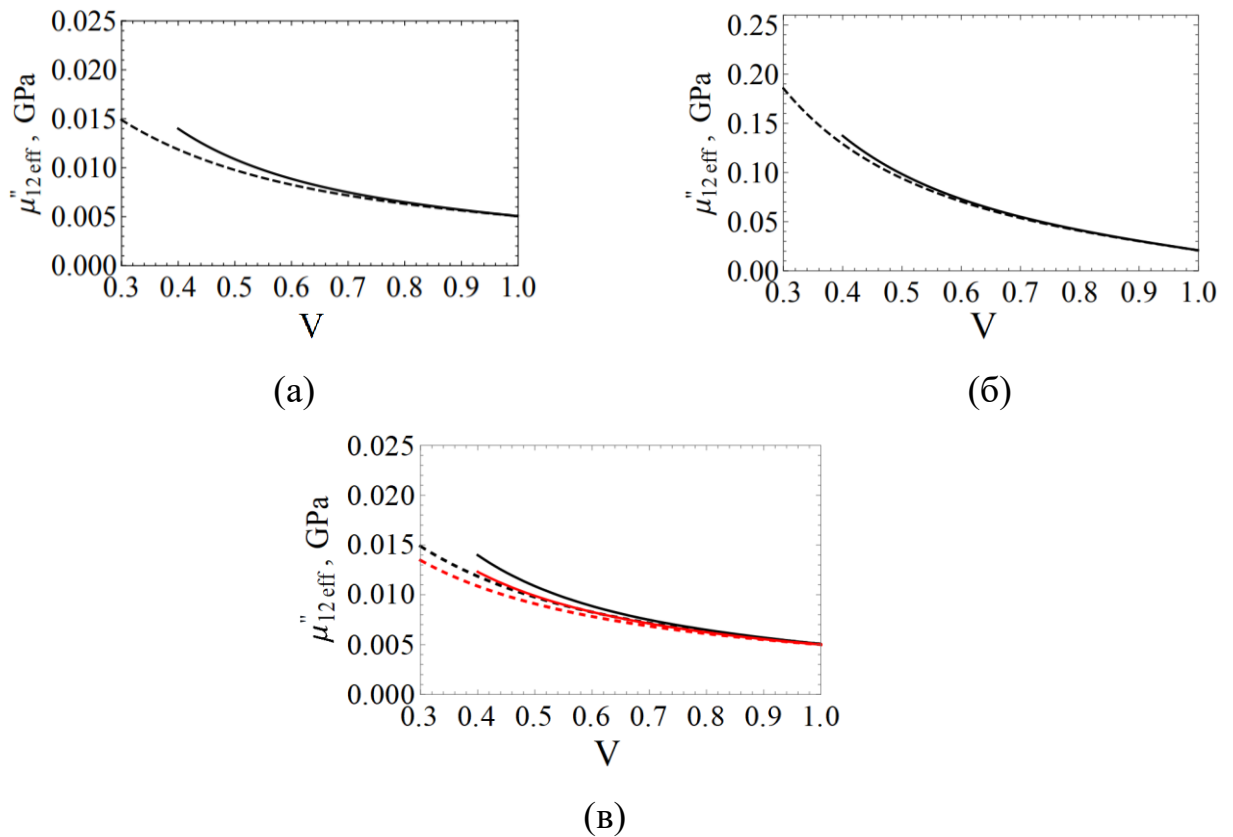
Графики на Рис 3.4 в целом показывают схожую картину и для поперечного модуля потерь, так же заметно что осреднение по Рейссу дает более низкий результат по сравнению с методом трех фаз. Влияние типа связующего и вискерсов в межфазном слое на эффективные характеристики аналогично говорят в пользу выбора УНТ в качестве вискерсов и вязкоупруго полимерного связующего в качестве матрицы. Показатели эффективного модуля потерь вискеризованного слоя по отношению к значению модуля потерь исходной матрицы так же растут в разы уже при средних значениях концентраций.



**Рис.3.5-** Зависимости эффективного поперечного модуля потерь при поперечном сдвиге: метод Рейсса (...), метод трех фаз (- - -), матрица (\_\_\_\_) (а)- вискеризованный слой с УНТ и вязкоупругим полимером при температуре ниже температуры стеклования; (б)- вискеризованный слой с ZnO и вязкоупругим полимером при температуре ниже температуры стеклования.

Поперечный модуль потерь имеет аналогичный продольным сдвиговым модулям характер поведения и роста в зависимости от концентрации включений, что только подтверждает преимущество использования в межфазном слое

вязкоупругого связующего для получения огромного прироста демпфирующих свойств.



**Рис.3.6** Зависимости эффективных модулей потерь при поперечном сдвиге: (а)- вискеризованный УНТ (—) и ZnO и (- - -) слой с эпоксидной матрицей, (б)- вискеризованный УНТ (—) и ZnO и (- - -) слой с вязкоупругим полимером при температуре ниже температуры стеклования, (в)- Зависимости эффективных поперечных модулей потерь: вискеризованный слой с УНТ и эпоксидной матрицей (—) по методу трех фаз, вискеризованный слой с ZnO и эпоксидной матрицей (- - -) по методу Рейсса; вискеризованный слой с УНТ и эпоксидной матрицей (—) по методу Рейсса, вискеризованный слой с ZnO и эпоксидной матрицей (- - -) по методу трех фаз.

На Рис 3.6 показаны сравнительные характеристики факторов, влияющих на величину получаемых демпфирующих характеристик в возможном диапазоне концентраций включений. На графике (а) наглядно показано большее влияние вискерсов из УНТ, по сравнению с вискерсами из оксида цинка на величину

модуля потерь поперечного сдвига при средних и малых концентрациях включений в слое с эпоксидной матрицей. На графике (б) виден аналогичный по характеру эффект, но меньший в соотношении, применения вискерсов из УНТ, по сравнению с вискерсами из оксида цинка на величину модуля потерь поперечного сдвига при средних и малых концентрациях включений в слое с вязкоупругой матрицей. Так же сравним между собой график (а) для межфазного слоя на базе ZnO и эпоксидного связующего с графиком (б) для межфазного слоя на базе ZnO и вязкоупругого полимера при температуре ниже температуры стеклования. Видно, что модуль потерь поперечного сдвига (б) более чем на порядок превосходит значение модуля потерь (а), хотя изначально величина модуля потерь вязкоупругой матрицы (б) всего в 4 раза выше модуля потерь исходной эпоксидной матрицы (а), оба слоя армированы ZnO.

На графике (в) приведено сравнение применяемых методов осреднения (черный - метод трех фаз, красный – метод Рейсса) и влияния используемых вискерсов (сплошной – УНТ, пунктир - ZnO) в слое с эпоксидной матрицей на величину эффективного модуля потерь вискеризованного межфазного слоя. Отметим влияние высоких характеристик вискерсов из УНТ на модуль потерь межфазного слоя (на порядок при оптимальных концентрациях, и до 30% в области технологически осуществимых относительно значений слоя с вискерсами из ZnO). Видно, что метод осреднения Рейсса более прост алгебраически относительно более точного метода трех фаз, показывает несколько заниженные значения модулей потерь, однако на фоне весьма значительного роста демпфирующих характеристик эта разница не является критической и вполне позволяет применять метод Рейсса для экспресс-оценки интересующих нас эффективных характеристик потерь межфазного слоя композита.

### **3.3. Выводы к главе 3.**

Впервые приведена оценка динамических характеристик вискеризованного межфазного слоя модифицированного композита как отдельного волокнистого композита с учетом различных характеристик его компонентов и применяемого



метода осреднения, рассмотрено поведение характеристик в зависимости от объемной доли включений и показана зависимость этой объемной доли от длины вискерса, отметим наиболее значимые эффекты:

В качестве вискерсов предпочтительнее использовать вискерсы из УНТ, поскольку они не только не оказывают негативного влияния на прочностные характеристики базового волокна, но и армированный ими межфазный слой стабильно показывает большие значения искомым модулей потерь относительно слоя, армированного вискерсами из ZnO, во всем диапазоне концентраций. Причем при оптимальных значениях объемного содержания вискерсов относительный рост значений модуля потерь в зависимости от материала вискерсов составляет примерно 10 раз в пользу УНТ. В случае технологически возможных значений объемной доли включений при у корня вискерса вблизи поверхности базового волокна характеристики слоя с УНТ способны вдвое превышать значения модулей потерь для слоя армированного волокнами из ZnO, при объемном содержании вискерсов в слое что соответствует внешней границе широкого слоя с вискерсами длиной порядка 2 мкм относительный рост составляет порядка 10%, прирост модуля потерь составляет уже в районе 20% в пользу слоя армированного УНТ и продолжает стремительно расти с ростом концентрации включений. Рост показателей эффективного модуля потерь межфазного слоя, относительно модуля потерь исходной матрицы при концентрациях вискерсов в слое равных с учетом использования различных методов осреднения, примерно составляет 2-3, 3.5-6 и 12-22 раз соответственно для межфазного слоя вискеризованного УНТ, и 2-2.5, 3-5 и 8-11 раз для слоя вискеризованного ZnO.

В качестве матрицы вискеризованного межфазного слоя предпочтительнее использовать вязкоупругий полимер с характеристиками ниже температуры стеклования  $T_g$ , не смотря на меньшее значение динамического модуля упругости относительно той же характеристики эпоксидной матрицы, поскольку нас интересует характер поведения демпфирующих свойств, рассматриваемого межфазного слоя, в зависимости от характеристик его компонент и их

концентраций. При определении модуля потерь межфазного слоя выбор матрицы имеет гораздо большее значение, чем материал вискерсов, которые лишь усиливают уже имеющиеся базовые демпфирующие характеристики матрицы и могут дать высокие пиковые характеристики при недостижимо малых объемных долях матрицы в слое. Данный эффект хорошо заметен на Рисунке 3.3 ((б) – ZnO + вязкоупругий полимер (ниже  $T_g$ ) и (в) – УНТ + эпоксидная матрица), где хорошо видны схожие пиковые характеристики, однако разную скорость накопления характеристик потерь в интересующей нас зоне технологически осуществимых концентраций вискерсов в межфазном слое. На графике (б) вязкоупругая матрица изначально имеет преимущество в виде в 4 раза большего модуля потерь, данное преимущество сохраняется до зоны средних концентраций и практически в полном объеме сохраняется до и только при приближении к пиковым значениям показатели начинают выравниваться по абсолютным величинам. Аналогичный эффект наблюдается на Рисунке 3.3 (б,в), где показаны модули потерь поперечного сдвига, но наиболее наглядно данный эффект просматривается на Рисунке 3.5 (а,б), который показывает поперечный модуль потерь. Далее сравним между собой график (а) для межфазного слоя на базе ZnO и эпоксидного связующего с графиком (б) для межфазного слоя на базе ZnO и вязкоупругого полимера при температуре ниже температуры стеклования. Видно, что модуль потерь поперечного сдвига (б), который при  $\omega$  более чем на порядок превосходит показатели (а), хотя изначально его модуль потерь всего в 4 раза выше исходной эпоксидной матрицы и армирован теми же вискерсами. Из всего вышеизложенного о выборе матрицы для межфазного слоя можно совершенно точно заключить, что именно модуль потерь вязкоупругой матрицы в межфазном слое имеет основное влияние на демпфирующие характеристики вискеризованного межфазного слоя и вероятно всего композита в целом.

Метод осреднения Рейсса, используемый в работе при определении эффективных демпфирующих характеристик вискеризованного межфазного слоя, является более простым алгебраически и следовательно удобным в применении по сравнению с более точным, но сложным алгебраически методом трех фаз,

который так же применялся в работе для определения эффективных демпфирующих характеристик межфазного вискеризованного слоя. Полученные характеристики потерь межфазного слоя, определенные при использовании метода Рейсса стабильно показывают более низкие величины, однако характер распределения величин искомых модулей в зависимости от объемной доли включений в слое идентичен методу трех фаз. После определения по методу Рейсса и метода трех фаз, интересующих нас модулей потерь поперек волокон, а так же модулей потерь продольного и поперечного сдвига, оценим отношения результатов, которые мы получили. Средняя разность модуля, наблюдаемое в технологическом диапазоне варьируется в диапазоне 20% в пользу более высоких характеристик, получаемых при использовании метода трех фаз, стоит заметить, что уровень разброса характеристик растет с увеличением объемной доли вискерсов в слое. Отметим, что уровень разброса характеристик зависит в том числе и от применяемого при их определении метода, так например модуль потерь продольного сдвига показывает стабильные показатели отличия результатов, полученных с использованием метода трех фаз и Рейсса. Для модуля потерь поперечного сдвига наблюдается иная картина, при которой наблюдается очень малый разброс для слоя, армированного вискерсами из оксида цинка, и чрезвычайно высокий для слоя вискеризованный УНТ, притом разница тем ярче выражена чем больше отношение жесткости вискерсов к исходному модулю потерь матрицы, в дальнейшем возможен учет получившегося эффекта. В случае поперечного модуля потерь характер разброса более похож на вариант разброса модуля потерь продольного сдвига. Были получены характеристики модулей потерь при помощи двух различных методов осреднения и проведена оценка характера разброса, полученных величин искомых модулей потерь, с учетом присущих им особенностей. На основании полученных оценок особенностей характера поведения вискеризованного слоя модифицированных композитов, сделаем вывод, что метод Рейсса может быть применен для экспресс-оценки характера поведения интересующих модулей потерь композита, с получением приближенных и несколько заниженных значений определяемых величин.

## **Глава 4. Влияние характеристик межфазного слоя на эффективные механические и динамические свойства всего волокнистого композита.**

В этой главе будет дана оценка эффективных диссипативных свойств вискеризованного композита с учетом особенности формирования эффективных свойств диссипации вискеризованного слоя. В качестве методик оценки эффективных свойств и соответствующих алгоритмов, будут использованы методики и алгоритмы изложенные в главе 2 и 3.

В данной главе везде будут делаться оценки на основе соотношений типа Рейсса, так как они качественно отражают суть результатов. Использование более точных оценок на основе метода трех (четырёх) фаз приводит к более высоким результатам по оценке демпфирования, что было показано в главе 3 при анализе диссипативных свойств вискеризованного слоя.

### **4.1. О методиках определения эффективных характеристик вискеризованного композита.**

При определении характеристик межфазного слоя для расчета можно использовать уже известные методы осреднения: метод трех фаз, изложенный в главе 2, данной диссертации, либо метод Рейсса, обобщенный для трехфазной структуры, который рассмотрен в работе [103]. Для приближенной оценки эффективных динамических свойств композита в целом и характера изменения его эффективных свойств от параметров микроструктуры, в зависимости от применяемых в межфазном слое материалов, будем использовать метод осреднения Рейсса, обобщенный на трехфазную систему. Так же рассмотрим третий вариант матрицы межфазного слоя, представляющий собой вязкоупругий композит при температуре стеклования  $T_g$ , и определим характер его влияния на поведение композита в целом. Так же отметим одну из особенностей метода Рейсса, заключающуюся в том, что модули продольного и поперечного сдвига в его рамках идентичны, что упрощает расчет, но следует учитывать приближенность полученных оценок при последующих уточнениях.

Эффективный продольный модуль сдвига вдоль волокна  $\mu_{23}^{eff}$  по методу осреднения Рейсса, обобщенный на трехфазную систему имеет следующий вид:

$$1/\mu_{23}^{eff} = V_1(1/\mu_{23}^{(1)}) + V_1(2\Delta/d)(1/\mu_{23}^{(2)}) + V_3(1/\mu_{23}^{(3)}), \quad (4.1)$$

$$V_1 = (1 - V_3)/(1 + 2\Delta/d) \quad (4.2)$$

Где  $V_3$  - общая объемная доля связующего,  $\Delta$  - толщина вискеризованного слоя (длина вискерса),  $d$  - диаметр базового волокна,  $\mu_{23}^{(1)}$  - продольный модуль сдвига волокна,  $\mu_{23}^{(2)}$  - поперечный модуль сдвига вискеризованного слоя,  $\mu_{23}^{(3)}$  - модуль сдвига эпоксидной матрицы.

Поперечный модуль по методу осреднения Рейсса, обобщенный на четырехфазную систему имеет следующий вид:

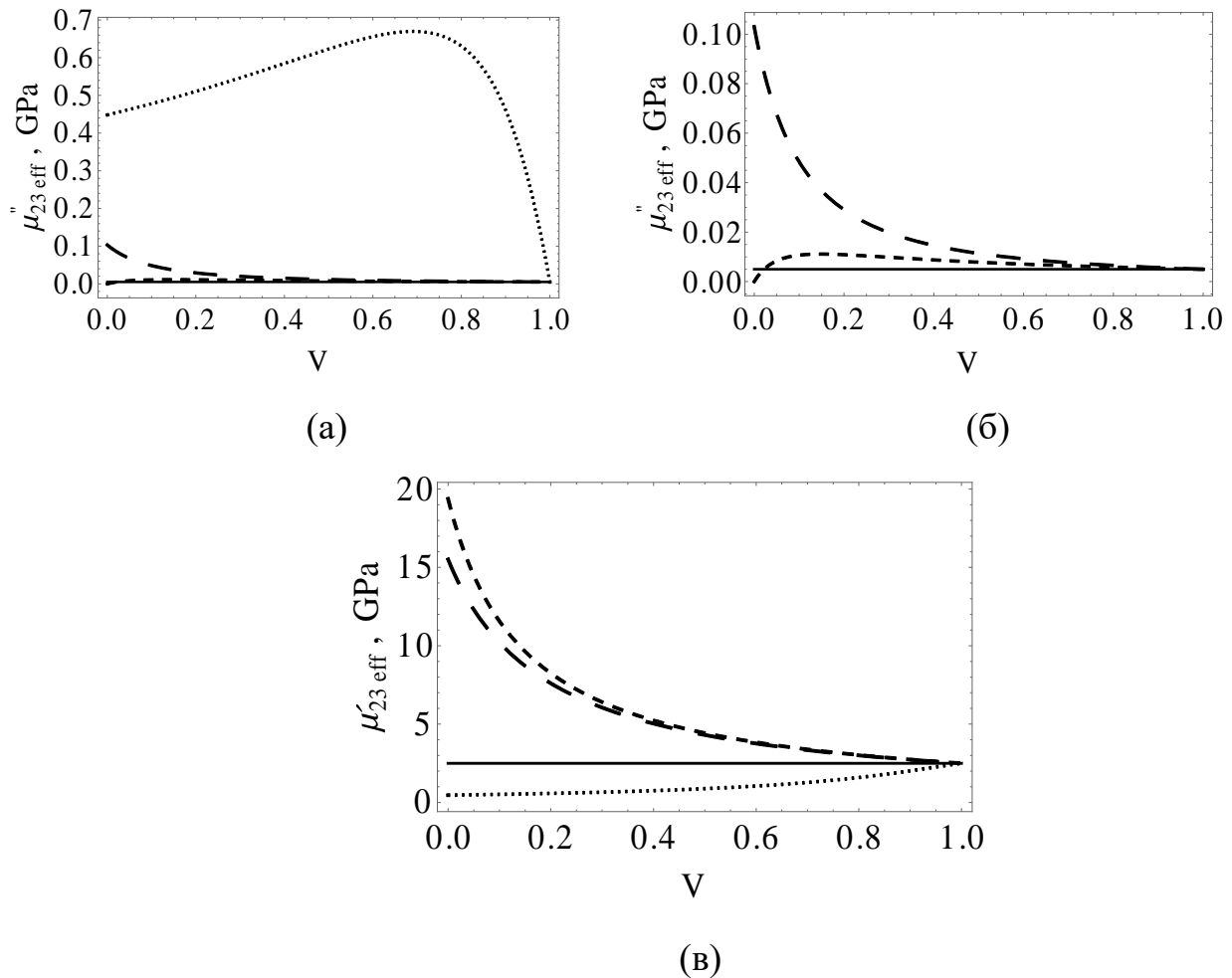
$$1/E_{22}^{eff} = V_1(1/E_{22}^{(1)}) + V_1(2\Delta/d)(1/E_{22}^{(2)}) + V_3(1/E_{22}^{(3)}) \quad (4.3)$$

Где  $\mu_{23}^{(1)}$  - продольный модуль сдвига волокна,  $\mu_{23}^{(2)}$  - поперечный модуль сдвига вискеризованного слоя,  $\mu_{23}^{(3)}$  - модуль сдвига эпоксидной матрицы.

#### **4.2. Вискреизованный слой с наноструктурой на основе ZnO**

Для определения эффективных характеристик вискеризованного композита воспользуемся полученными в предыдущей главе значениями модулей при средней объемной доле содержания матрицы в межфазном слое, при котором уже наблюдался существенный рост свойств слоя относительно значений исходных материалов. Так же, в качестве примера, рассмотрим поведение композита с вязкоупругой матрицей межфазного слоя при температуре стеклования  $T_g$ , чей модуль обладает малой величиной, по сравнению с двумя другими рассматриваемыми матрицами, величиной упругой составляющей, но большой, по отношению к ней демпфирующей составляющей

Далее приводятся результаты для модуля продольного сдвига с вискерсами из оксида цинка



**Рис.4.1** - Зависимости эффективного модуля потерь продольного сдвига: эпоксидная матрица + вискеризованный слой (полимер при  $T_g + \text{ZnO}$ ) + волокно IM7 (.....), эпоксидная матрица + вискеризованный слой (полимер ниже  $T_g + \text{ZnO}$ ) + волокно IM7 (\_\_\_), эпоксидная матрица + вискеризованный слой (эпоксидная матрица +  $\text{ZnO}$ ) + волокно IM7 (\_\_\_), эпоксидная матрица (- - -), (а) – модули потерь для композита со всеми типами вязкоупругой матрицы в межфазном слое, (б) – модули потерь для полимерной матрицы ниже  $T_g$ (\_\_\_), и эпоксидной в межфазном слое (- - -), (в) – механические характеристики (действительный модуль)

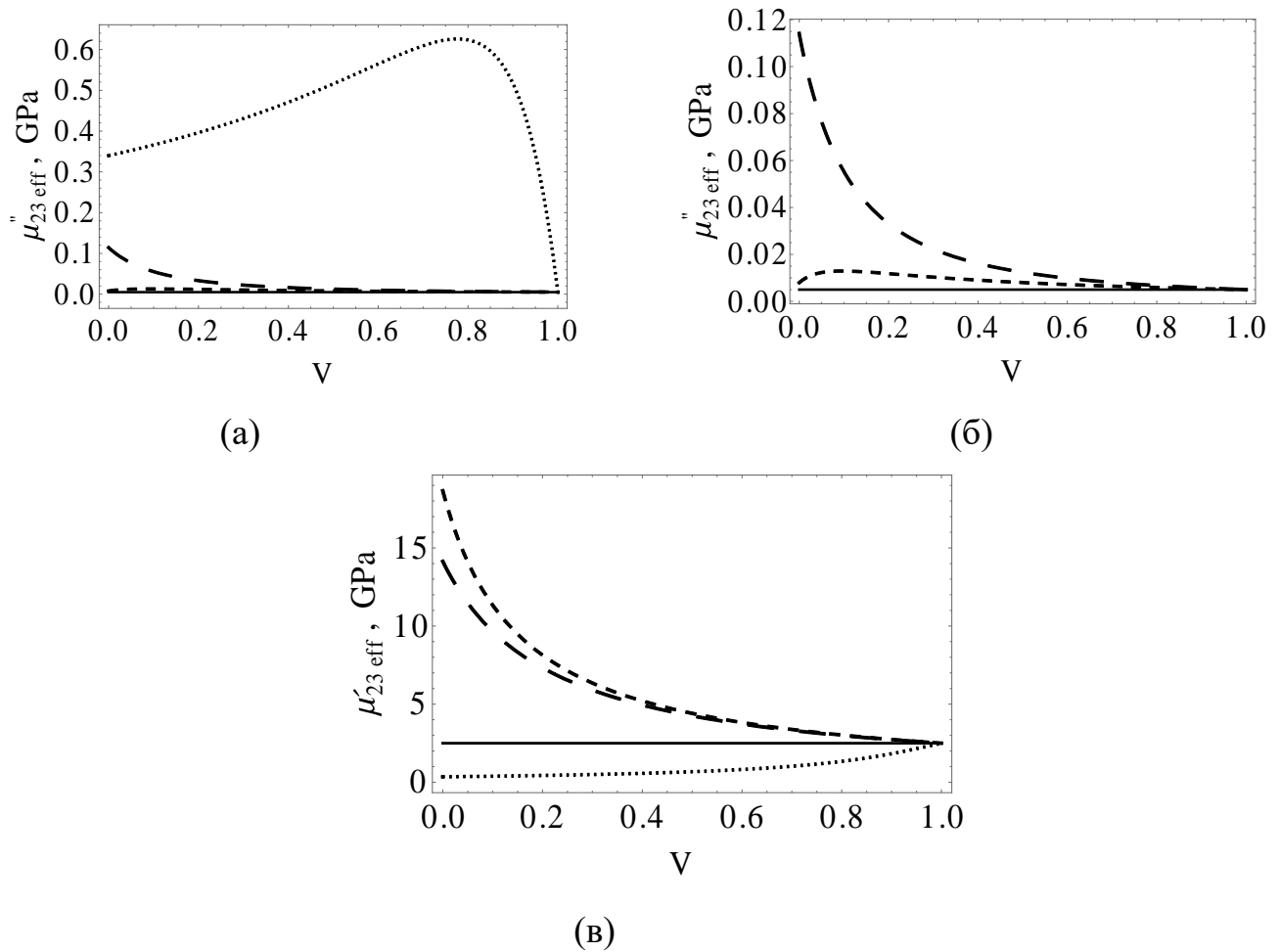
Увеличение масштаба по вертикальной оси на Рис.4.1.б указывает важный эффект, что даже при температуре ниже стеклования почти везде модуль потерь превышает модуль матрицы (0.005) а при высоких концентрациях волокон почти в 5-10 раз.

При повышении содержания волокон с вискерсами, значения модуля сдвига системы может быть существенно выше чем матрицы, за счет высоких свойств вискеризованного слоя.

Если использовать в вискеризованном слое матрицу (с вязкоупругими свойствами) или полимер при температуре ниже температуры стеклования, то растет динамический модуль, при падении модуля потерь. При том, что высокими остаются демпфирующие свойства. Если же использовать полимер на температуре стеклования, то можно получить композит с очень высоким демпфирующими характеристиками (более чем в 100 раз по отношению к базовой эпоксидной) но с потерей механических свойств примерно в 1.5, 2 раза в зависимости от содержания волокон. Оптимизация не проводилась.

#### **4.3. Продольный модуль сдвига для вискеризованного слоя с углеродными нанотрубками.**

Использование углеродных нанотрубок в качестве основы для вискеризации приводит к некоторому повышению демпфирующих свойств вискеризованного слоя, как это было показано в главе 3. Однако это увеличение оказывается незначительным. Тем не менее использование вискеризованных слоев с УНТ является предпочтительным, так как следуя публикациям, при этом не теряется прочность базовых волокон. Результаты, приведенные в этом разделе (Рис 4.2) подтверждают тот же вывод



**Рис.4.2.** Зависимости эффективного модуля потерь продольного сдвига: эпоксидная матрица + вискеризованный слой (полимер при  $T_g$  + УНТ) + волокно (.....), эпоксидная матрица + вискеризованный слой (полимер ниже  $T_g$  + УНТ) + волокно (- - -), эпоксидная матрица + вискеризованный слой (эпоксидная матрица+УНТ)+волокно (\_\_\_), эпоксидная матрица (\_\_\_\_), (а) – модули потерь, (б) – модули потерь (масштабированы по вертикальной оси), (в) – механические характеристики (действительный модуль)

Приведем некоторые промежуточные выводы:

Продольный модуль фактически не имеет диссипативных свойств, что и ожидалось.

Для трансверсальных модулей сдвига реализуются высокие демпфирующие свойства особенно при использовании вязкоупругого полимера на температуре стеклования, хотя соответствующие механические свойства падают. Этот факт не должен особенно пугать, так как высокие механические



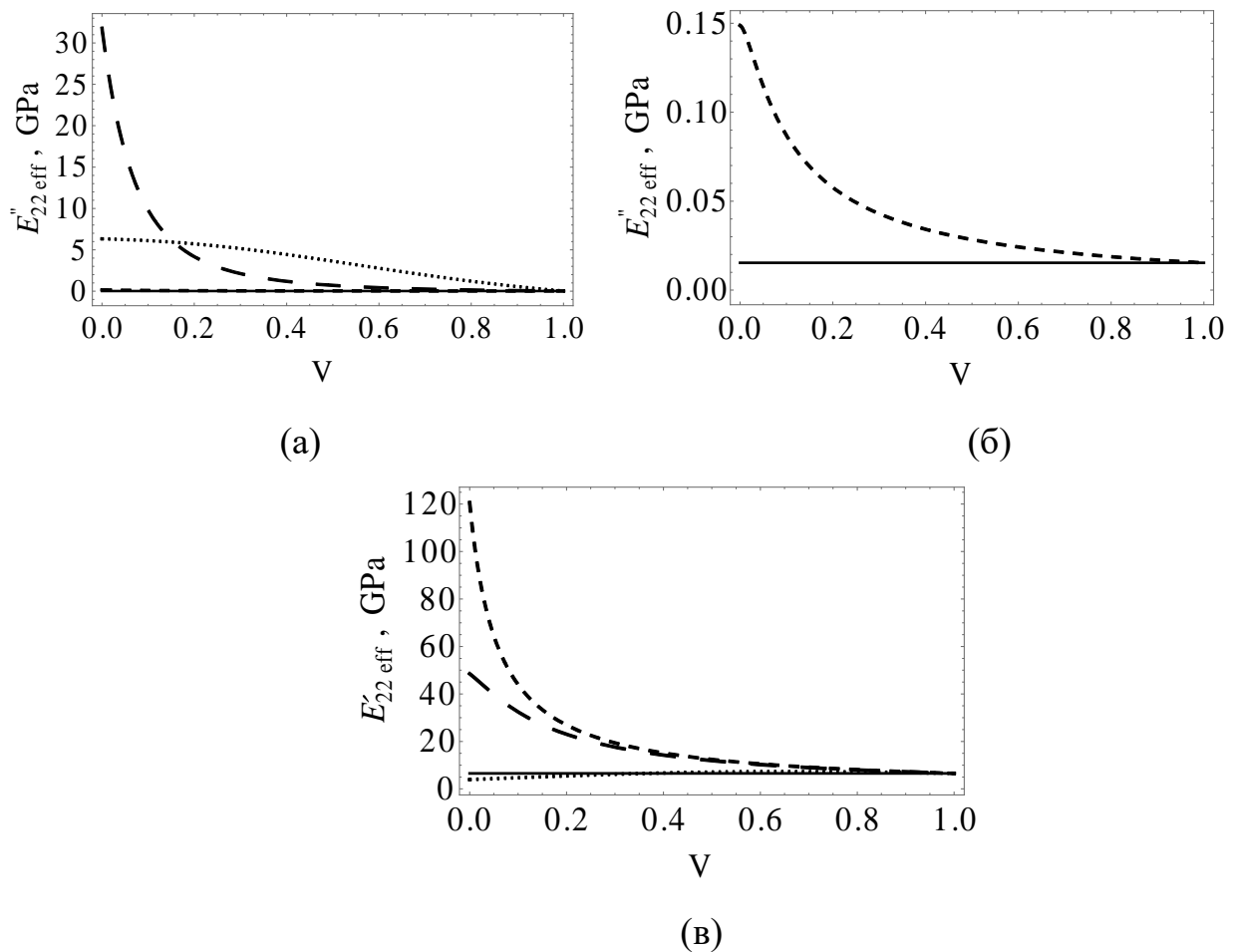
свойства таких композитов реализуются за счет волокон. Именно такие структуры и считаются предпочтительными.

В качестве матрицы вискеризованного межфазного слоя предпочтительнее использовать вязкоупругий полимер с характеристиками на температуре стеклования для получения сверхвысоких демпфирующих свойств, и полимера с  $T_g$ , ниже температуры стеклования  $T_g$ , несмотря на меньшее значение демпфирующего модуля, но большего динамического модуля упругости относительно варианта когда используется единое связующее эпоксидной матрицы. Поскольку нас интересует характер поведения демпфирующих свойств, рассматриваемого межфазного слоя, лежащие в плоскости трансверсальной изотропии материала, расположенной перпендикулярно оси базовых волокон, скорее отвечают за скрепляющую и формообразующую роль волокнистого композита.

#### **4.4. Эффективные характеристики поперечного модуля**

Ниже приводятся оценки поперечного модуля, даются зависимость изменения модуля потерь и динамического модуля. То что ранее было для модулей продольного и поперечного сдвига- здесь для поперечных характеристик.

Приведенные характеристики показывают, что в данном случае, хотя характерные зависимости и остаются такими же, как и в случае модуля сдвигов, имеет место увеличение модуля потерь и в случае использования полимера при температуре ниже температуры стеклования, при этом большим остается важная трансверсальная характеристика- динамический модуль. Демпфирующие свойства могут вырасти на порядки.



**Рис.4.3.** Зависимости эффективного поперечного модуля упругости: эпоксидная матрица + вискеризованный слой (полимер при  $T_g + \text{ZnO}$ ) + волокно (.....), эпоксидная матрица + вискеризованный слой (полимер ниже  $T_g + \text{ZnO}$ ) + волокно (- - -), эпоксидная матрица + вискеризованный слой (эпоксидная матрица+  $\text{ZnO}$ )+волокно ( \_ \_ ), эпоксидная матрица (\_\_\_\_), (а) – модули потерь, (б) – модули потерь (масштабированы по вертикальной оси), (в) – механические характеристики (действительный модуль)

Можно заключить следующее:

Предпочтительно использование вязкоупругого полимера в слое вискеризации, особенно при температурах  $T_g$

Использование полимера на температурах ниже температур стеклования приводит к некоторому увеличению демпфирующих свойств композита по сравнению с невискеризованными композитами (примерно в 1.5 раза) одновременно с ростом механических свойств.

Для поперечного модуля имеется существенное увеличение модуля потерь, что следует учитывать при проведении проектировочных расчетах слоистых композитов.

Использование УНТ в качестве системы для вискеризации повышает одновременно и демпфирующий модуль и динамический модуль. Уточняющие расчеты по методу трех фаз показывают, что трансверсальные характеристики демпфирования с вискерсами из УНТ повышаются существенно более значительно в таких уточнениях чем для вискерсов из ZnO.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ И ВЫВОДЫ

Предложенная новая процедура модификации волокнистого композита за счет вискеризованного слоя приводит к существенному повышению эффективного модуля потерь, когда эффективный модуль потерь может быть существенно увеличен по сравнению с модифицированными композитами, полученными на основе лишь эпоксидной матрицы и даже по сравнению с модулем потерь самой эпоксидной матрицы (более чем в 100 раз по сравнению с модулем потерь эпоксидной матрицей (Рис.4.1а, Рис.4.2а)). Эффективные свойства меняются в таком случае незначительно, и все полезные характеристики и особенности модифицированных волокнистых композитов остаются неизменно высокими.

Показано, что для оценки диссипативных характеристики возможно использование приближенной процедуры оценки модулей потерь и динамических характеристик, основанной на обобщении соотношений Рейса на трехфазный композит. Более точная процедура вычисления эффективных свойств, основанная на методе трех фаз дает несколько большие значения для эффективных характеристик модуля потерь, однако не меняет принципиально зависимость для модуля потерь.

Показано, что на базе модифицированных композитов можно получать новые типы конструкционных волокнистых композитов с повышенными демпфирующими свойствами и с минимальной потерей механических свойств за счет использования вязкоупругих полимеров в качестве связующего в вискеризованном слое. Разработана методика оценки свойств вискеризации и композита в целом.

Показано, что с точки зрения повышения эффективных свойств диссипации предпочтительным является полимер при  $T_g$  в вискеризованном слое. При этом трансверсальные свойства демпфирования повышаются более чем на порядок.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### ПРИЛОЖЕНИЕ А. Материал, конфигурация и свойства компонентов вискеризованных волокнистых композитов

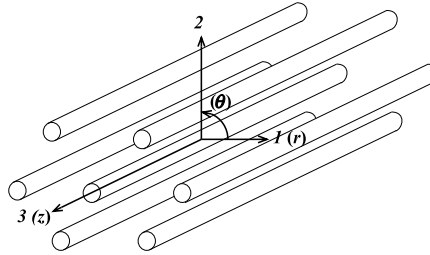
**Таблица А.1** Параметры материалов связующих и армирующих материалов композита и его вискеризованного межфазного слоя

Параметры	Связующее		
	Эпоксидная матрица	Полимер $T < T_g$	Полимер $T \leq T_g$
Модуль сдвига $E$ , ГПа	2,5+0,005i	1+0,02i	0,01(1+i)
Коэффициент Пуассона, $\nu_{LT}$	0,3	0,3	0,3
Объемный модуль плоской деформации, $K$ (ГПа)	2,5	4	4
	Базовое волокно IM7	Включение	
		ZnO	УНТ
Диаметр (мкм)	5.2	0,05 – 0,2	0,00051 – 0,00085
Длина (мкм)	—	0,2 – 2	1 – 2
Продольный модуль Юнга, $E_L$ (ГПа)	256,76	140	1100
Поперечный модуль Юнга, $E_T$ (ГПа)	25,51	—	—
Продольный модуль Юнга, $E_L$ (ГПа)	22,06	—	—
Поперечный модуль Юнга, $E_T$ (ГПа)	9,25	—	—
Коэффициент Пуассона, $\nu_{LT}$	0,289	0,35	0,14

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Трансверсально-изотропная среда

В этом разделе определим тензор модулей упругости и податливости для трансверсально-изотропной среды и их отношения с инженерными константами [35,105].

### **Б.1 Трансверсально-изотропная среда с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси -3 или -z**



**Рис. Б.1** Система трансверсально-изотропной среды где ось 3 — ось симметрии.

Допустим, что ось 3 — ось плоскости изотропии (см. рис Б.1). Тогда соотношение напряжения-деформации можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.1})$$

Видно из (Б.1), что пять упругих констант  $C_{11} = C_{22}, C_{12}, C_{13} = C_{23}, C_{33}$  и  $C_{44}$  обозначают пять независимых эффективных свойств трансверсальной изотропной среды с осью плоскости симметрии, направленной вдоль оси 3 (z). Так как эти упругие константы редко используются в практике, определим их соотношение с физическими константами.

Представим состояние одноосного нагружения вдоль оси 3, при котором —  $\sigma_{33} \neq 0$  и  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = \sigma_{12} = 0$ . В этом нагружении —  $\sigma_{33} = E_{33}\varepsilon_{33}$ , поэтому из третьей строки уравнения (Б.1) имеем

$$E_{33} = C_{13} \frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} + C_{13} \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} + C_{33},$$

где  $E_{33}$  — продольный модуль Юнга. Далее, из первой и второй строки (Б.1) получаем отношения

$$\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = \frac{-C_{13}}{C_{11} + C_{12}}, \quad \frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} = \frac{-C_{13}}{C_{11} + C_{12}}.$$

Таким образом, продольный модуль Юнга является

$$E_{33} = C_{33} - \frac{2C_{13}^2}{C_{11} + C_{12}}, \quad (\text{Б.2})$$

и также, определяются соотношения *коэффициентов Пуассона* (т.е. по изменению поперечных размеров образца при этом нагружении):

$$\nu_{31} = \frac{-\varepsilon_{11}}{\varepsilon_{33}} = \frac{C_{13}}{C_{11} + C_{12}} = \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{33}} = \nu_{32}, \quad (\text{Б.3})$$

где в обозначении  $\nu_{ij}$  принято, что первый индекс относится к направлению приложения деформации (напряжения), а второй — к направлению вызванной им поперечной деформации.

Далее рассмотрим состояние, когда  $\varepsilon_{33} = 0$ ,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon^0$ . Пусть  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma^0$ , тогда из (Б.1) находим, что  $\sigma^0 = 2K_{12}\varepsilon^0$ . Величину  $K_{12}$ , которая называется *объемным модулем упругости при плоском деформированном состоянии* или просто *объемным модулем плоской деформации*, найдем как

$$K_{12} = \frac{C_{11} + C_{12}}{2} = K_{21}. \quad (\text{Б.4})$$

И в конце концов, модули продольного и поперечного сдвига, которые можно получить прямо из (Б.1), выражаются, соответственно, следующим образом

$$\mu_{23} = \mu_{32} = C_{44} = C_{55} = \mu_{13} = \mu_{31}, \quad (\text{Б.5})$$

$$\mu_{12} = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = C_{66} = \mu_{21}. \quad (\text{Б.6})$$

Соотношения (Б.2) — (Б.6) можно преобразовать:

$$\begin{aligned}
C_{33} &= E_{33} + 4v_{31}^2 K_{12}, \\
C_{13} &= 2K_{12}v_{31}, \\
C_{11} &= \mu_{12} + K_{12}, \\
C_{12} &= -\mu_{12} + K_{12}, \\
C_{44} &= \mu_{13} = \mu_{23}.
\end{aligned} \tag{Б.7}$$

Помимо пяти независимых эффективных констант, определенных по формулам (Б.2-6), можно найти и другие константы, например, когда на тело действует одноосное нагружение в направлении, перпендикулярном оси плоскости изотропии. В связи с этим, находим

$$E_{11} = C_{11} + \frac{C_{13}^2(-C_{11} + C_{12}) + C_{12}(-C_{33}C_{12} + C_{13}^2)}{C_{33}C_{11} - C_{13}^2}, \tag{Б.8}$$

$$v_{13} = \frac{-\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{11}} = \frac{C_{13}(C_{11} - C_{12})}{C_{33}C_{11} - C_{13}^2}, \quad v_{12} = \frac{-\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} = \frac{C_{33}C_{12} - C_{13}^2}{C_{33}C_{11} - C_{13}^2}. \tag{Б.9}$$

Из свойств симметрии среды следует также, что

$$E_{11} = E_{22}, \quad v_{23} = v_{13}, \quad v_{32} = v_{31}, \quad v_{21} = v_{12}. \tag{Б.10}$$

Однако, надо отметить, что  $v_{31} \neq v_{13}$  и  $v_{32} \neq v_{23}$ ; из ранее выведенных формул легко найти связь между этими константами

$$\frac{v_{31}}{E_{33}} = \frac{v_{13}}{E_{11}}, \quad \frac{v_{32}}{E_{33}} = \frac{v_{23}}{E_{22}}. \tag{Б.11}$$

Полезными могут также оказаться следующие соотношения:

$$E_{11} = \frac{4\mu_{12}K_{12}}{K_{12} + \mu_{12} + 4v_{31}^2\mu_{12}K_{12}/E_{33}}, \tag{Б.12}$$

$$v_{12} = \frac{K_{12} - \mu_{12} - 4v_{31}^2\mu_{12}K_{12}/E_{33}}{K_{12} + \mu_{12} + 4v_{31}^2\mu_{12}K_{12}/E_{33}}, \tag{Б.13}$$

$$v_{13} = \frac{4v_{31}^2\mu_{12}K_{12}}{E_{33}(K_{12} + \mu_{12}) + 4v_{31}^2\mu_{12}K_{12}}, \tag{Б.14}$$

$$v_{31}^2 = \left( -v_{12} - \frac{1}{4} \frac{E_{11}}{K_{12}} + \frac{1}{4} \frac{E_{11}}{\mu_{12}} \right) \frac{E_{33}}{E_{11}}. \tag{Б.15}$$

При определении формул (Б.7), можно использовать другие формулы.

Тогда нужно сначала определить следующие отношения [105]:



$$\begin{aligned}
E_{33} &= E_L, & E_{11} &= E_{22} = E_T, \\
\mu_{13} &= \mu_{31} = \mu_{23} = \mu_{32} = \mu_L, & \mu_{12} &= \mu_{21} = \mu_T \\
v_{12} &= v_{21} = v_T, \\
v_{31} &= v_{32} = v_{LT}, \\
v_{13} &= v_{23} = v_{TL}.
\end{aligned} \tag{Б.16}$$

и тензор податливости  $S_{ij}$  имеет форму

$$\begin{bmatrix}
1/E_T & -v_T/E_T & -v_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\
-v_T/E_T & 1/E_T & -v_{LT}/E_L & 0 & 0 & 0 \\
-v_{TL}/E_T & -v_{TL}/E_T & 1/E_L & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/\mu_L & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_L & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/\mu_T
\end{bmatrix},$$

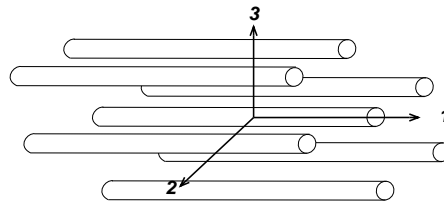
где  $\mu_T = E_T/2(1+v_T)$ . Таким образом, соотношения между упругими константами жесткости и инженерными константами можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= C_{22} = E_T(1-v_{TL}v_{LT})\Upsilon, & C_{33} &= E_L(1-v_T^2)\Upsilon, & C_{12} &= E_T(v_T+v_{TL}v_{LT})\Upsilon, \\
C_{13} &= C_{23} = E_T(v_{LT}+v_Tv_{TL})\Upsilon = E_L(v_{TL}+v_Tv_{TL})\Upsilon, & C_{44} &= \mu_L, & C_{66} &= \mu_T,
\end{aligned} \tag{Б.17}$$

где

$$\Upsilon = \frac{1}{1-v_T^2-2v_{TL}v_{LT}-2v_Tv_{TL}v_{LT}}.$$

## Б.2 Трансверсально-изотропная среда с плоскостью изотропии, перпендикулярной к оси $l$



**Рис. Б.2** Система трансверсально-изотропной среды где ось 1 — ось симметрии.

Соотношение напряжения-деформации такой среды (см. рис. Б.2) можно записать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{22}-C_{23}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{Б.18})$$

Пятью независимыми эффективными константами трансверсальной изотропной сред с осью плоскости симметрии, направленной вдоль оси 1 являются  $C_{11}, C_{22}, C_{12}, C_{23}$  и  $C_{66}$ . Тогда соотношения между этими независимыми константами и физическими константами даются в следующем виде:

$$E_{11} = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}, \quad (\text{Б.19})$$

$$\nu_{12} = \nu_{13} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}, \quad (\text{Б.20})$$

$$K_{23} = \frac{C_{22} + C_{23}}{2}, \quad (\text{Б.21})$$

$$\mu_{12} = \mu_{31} = C_{66}, \quad (\text{Б.22})$$

$$\mu_{23} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}, \quad (\text{Б.23})$$

$$E_{22} = C_{22} + \frac{C_{12}^2(-C_{22} + C_{23}) + C_{23}(-C_{11}C_{23} + C_{12}^2)}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad (\text{Б.24})$$

$$\nu_{21} = \frac{C_{12}(C_{22} - C_{23})}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}, \quad \nu_{23} = \frac{C_{11}C_{23} - C_{12}^2}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}. \quad (\text{Б.25})$$

Из свойств симметрии среды следует также, что

$$\begin{aligned} E_{22} &= E_{33}, & \nu_{21} &= \nu_{31}, & \nu_{12} &= \nu_{13}, & \nu_{23} &= \nu_{32}, \\ \frac{\nu_{21}}{E_{22}} &= \frac{\nu_{12}}{E_{11}}, & \frac{\nu_{31}}{E_{33}} &= \frac{\nu_{13}}{E_{11}}. \end{aligned} \quad (\text{Б.26})$$

Соотношения (Б.19) – (Б.23) можно преобразовать:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= E_{11} + 4v_{12}^2 K_{23}, \\
C_{12} &= 2K_{23}v_{12}, \\
C_{22} &= m_{23} + K_{23}, \\
C_{23} &= -m_{23} + K_{23}, \\
C_{66} &= m_{12} = m_{13}.
\end{aligned} \tag{Б.27}$$

Полезными могут также оказаться следующие отношения:

$$E_{22} = \frac{4\mu_{23}K_{23}}{K_{23} + \mu_{23} + 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}, \tag{Б.28}$$

$$v_{23} = \frac{K_{23} - \mu_{23} - 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}{K_{23} + \mu_{23} + 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}/E_{11}}, \tag{Б.29}$$

$$v_{21} = \frac{4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}}{E_{11}(K_{23} + \mu_{23}) + 4v_{12}^2\mu_{23}K_{23}}, \tag{Б.30}$$

$$v_{12}^2 = \left( -v_{23} - \frac{1}{4} \frac{E_{22}}{K_{23}} + \frac{1}{4} \frac{E_{22}}{\mu_{23}} \right) \frac{E_{11}}{E_{22}}, \tag{Б.31}$$

Другие формулы для определения упругих модулей (Б.27):

$$\begin{aligned}
E_{11} &= E_L, \quad E_{22} = E_{33} = E_T, \\
\mu_{12} &= \mu_{21} = \mu_{13} = \mu_{31} = \mu_L, \quad \mu_{23} = \mu_{32} = \mu_T, \\
v_{23} &= v_{32} = v_T, \\
v_{12} &= v_{13} = v_{LT}, \\
v_{21} &= v_{31} = v_{TL}.
\end{aligned} \tag{Б.32}$$

$$\begin{aligned}
C_{22} = C_{33} &= E_T(1 - v_{TL}v_{LT})\Upsilon, \quad C_{11} = E_L(1 - v_T^2)\Upsilon, \quad C_{23} = E_T(v_T + v_{TL}v_{LT})\Upsilon, \\
C_{12} = C_{13} &= E_T(v_{LT} + v_Tv_{LT})\Upsilon = E_L(v_{TL} + v_Tv_{TL})\Upsilon, \quad C_{66} = \mu_L, \quad C_{44} = \mu_T.
\end{aligned} \tag{Б.33}$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ В. Изотропная среда

В случае полной изотропии остаются две независимые компоненты  $C_{ij}$  [35]:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Можно записать (B.1) в виде [89]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \Theta \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (\text{B.2})$$

где  $\delta_{kl} \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kk} = \Theta$  — объемная деформация;  $\delta_{kl}$  — дельта Кронекера ( $\delta_{kl} = 1$  если  $k=l$  и  $\delta_{kl} = 0$  если  $k \neq l$ );  $\lambda$  и  $\mu$  — константы Ламе. Тогда соотношение (B.1) преобразует в форму:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.3})$$

Сравнивая (B.1) с (B.3), находим:

$$C_{11} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = \lambda, \quad (\text{B.4})$$

Также, объемный модуль сжатия имеет форму:

$$k = \lambda + \frac{2\mu}{3}. \quad (\text{B.5})$$

Полезными могут также оказаться следующие отношения [105]:

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (\text{B.6})$$

$$E = \frac{9K\mu}{3K + \mu}, \quad \nu = \frac{3K - 2\mu}{2(3K + \mu)}. \quad (\text{B.7})$$

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}. \quad (\text{B.8})$$

## **ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Доказательство теорем средней деформации и среднего напряжения**

### **Г.1 Теорема средней деформации.**

Преобразуя соотношение Коши (1.11) в формулу (1.2), имеем

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_V (u_{i,j} + u_{j,i}) dV. \quad (\text{Г.1})$$

С помощью теоремы Гаусса-Остроградского<sup>13</sup> формула (Г.1) принимает вид

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS. \quad (\text{Г.2})$$

Используя граничное условие вектора перемещений с теоремой Гаусса-Остроградского в формуле (Г.2), получаем

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= \frac{1}{2V} \int_S (\varepsilon_{ik}^0 x_k n_j + \varepsilon_{jk}^0 x_k n_i) dS = \\ &= \frac{1}{2V} \int_V \left( (\varepsilon_{ik}^0 x_k)_{,j} + (\varepsilon_{jk}^0 x_k)_{,i} \right) dV = \\ &= \frac{1}{2V} \int_V \left( (\varepsilon_{ik,j}^0 x_k + \varepsilon_{ik}^0 x_{k,j}) + (\varepsilon_{jk,i}^0 x_k + \varepsilon_{jk}^0 x_{k,i}) \right) dV = \\ &= \frac{1}{2V} \int_V (\varepsilon_{ik}^0 x_{k,j} + \varepsilon_{jk}^0 x_{k,i}) dV = \frac{1}{2V} \int_V (\varepsilon_{ik}^0 \delta_{kj} + \varepsilon_{jk}^0 \delta_{ki}) dV = \\ &= \frac{1}{2V} \int_V (\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ji}^0) dV = \frac{\varepsilon_{ij}^0}{V} \int_V dV. \end{aligned}$$

Итак, с учетом соотношения (1.4), теорема средней деформации имеет вид

<sup>13</sup> Теорема Гаусса-Остроградского, также называется теоремой о дивергенции, дает преобразование материала по объему в интеграл по поверхности, например, для векторного поля:  $\int_V u_{j,k} dV = \int_S u_j n_k dS$  [101].

$$\bar{\varepsilon}_{ij} \equiv \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0 \quad (\Gamma.3)$$

Для случая неидеального контакта между фазами или пустот формула (Г.3) имеет дополнительный член [36], например, рассмотрим для простоты двухфазный материал, имеем

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \left[ \int_{V_1} (u_{i,j}^{(1)} + u_{j,i}^{(1)}) dV + \int_{V_2} (u_{i,j}^{(2)} + u_{j,i}^{(2)}) dV \right], \quad (\Gamma.4)$$

где <sup>(1)</sup> и <sup>(2)</sup> обозначают фазу 1 и 2 в композите, соответственно;  $V_1$  и  $V_2$  — объем фаз 1 и 2. Используя теорему Гаусса-Остроградского, запишем (Г.4) в виде

$$\langle \varepsilon_{ij} \rangle = \frac{1}{2V} \left[ \int_{S_1} (u_i^{(1)} n_j + u_j^{(1)} n_i) dS + \int_{S_2} (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) dS \right], \quad (\Gamma.5)$$

где  $S_1$  и  $S_2$  — поверхности, ограничивающие фазы 1 и 2. Видно по рис. 1.17, поверхности  $S_1$  и  $S_2$  имеют интерфейсы  $S_{1-2}$  и внешнюю поверхность  $S$ . Итак, представим (Г.5) в виде:

$$\begin{aligned} 2V \langle \varepsilon_{ij} \rangle &= \int_{S_1} (u_i^{(1)} n_j + u_j^{(1)} n_i) dS - \int_{S_{2-I}} (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) dS + \int_{S_{2-II}} (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) dS = \\ &= - \int_{S_{1-2}} (u_i^{(1)} n_j + u_j^{(1)} n_i) dS + \int_{S_{1-2}} (u_i^{(2)} n_j + u_j^{(2)} n_i) dS + \int_S (u_i n_j + u_j n_i) dS. \end{aligned} \quad (\Gamma.6)$$

Если мы учитываем то, что интерфейс  $S_{1-2}$  в (Г.6) неидеальный (т.е.,  $[u_i] = u_i^{(2)} - u_i^{(1)} \neq 0$ ), то получаем:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} \equiv \langle \varepsilon_{ij} \rangle = \varepsilon_{ij}^0 - \frac{1}{V} \int_V ([u_i] n_j - [u_j] n_i) dS_{1-2}. \quad (\Gamma.7)$$

Видно, что если интерфейс  $S_{1-2}$  является идеальным, то формула (Г.7) приводится к формуле (Б.3).

## Г.2 Теорема среднего напряжения

Сначала рассмотрим уравнение равновесия без массовых сил, данное в (1.10):

$$\sigma_{ij,j} = 0,$$

[28,34,36] откуда следует, что производные моменты напряжений являются

$$\left( \sigma_{ij} x_k \right)_{,j} = \sigma_{ik,j} x_k + \sigma_{ij} x_{k,j} = \sigma_{ij} \delta_{jk} = \sigma_{ij}. \quad (\Gamma.8)$$

Представляя (Г.8) в (1.1), получаем

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = \frac{1}{V} \int_V (\sigma_{ij} x_k)_{,j} dV \quad (Г.9)$$

Используя теорему Гаусса-Остроградского и граничное условие вектора напряжений на границах ячейки, имеем

$$\begin{aligned} V \langle \sigma_{ij} \rangle &= \int_S \sigma_{ij} x_k n_j dS = \\ &= \int_S (\sigma_{ij} n_j) x_k dS = \int_S t_i x_k dS = \sigma_{ik}^0 \int_S x_j n_k dS = \\ &= \sigma_{ik}^0 \int_V x_{j,k} dV = \sigma_{ik}^0 \delta_{jk} \int_V dV. \end{aligned}$$

Итак, вместе с уравнением (1.3) можно записать теорему среднего напряжения в виде

$$\bar{\sigma}_{ij} \equiv \langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0 \quad (Г.10)$$

#### **ПРИЛОЖЕНИЕ Д. Теорема и формула Клапейрона**

Вывод этой теории основан на монографии Демидова [89]. Пусть упругое тело ограничено поверхностью  $S$  и имеет объем  $V$ , находится в равновесии под действием массовых сил  $f_i$  и поверхностных сил  $t_i$ . *Работа этих внешних сил* имеет вид:

$$A = \int_V \rho f_i u_i dV + \int_S t_i u_i dS \quad (Д.1)$$

где  $\rho$  — массовая плотность; и  $\rho f_i$  — объемная сила. Последний интеграл, учитывая  $t_i = \sigma_{ij} n_j$ , преобразуем по формуле Гаусса-Остроградского:

$$\int_S t_i u_i dS = \int_S \sigma_{ij} u_i n_j dS = \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV$$

Преобразуем интеграл в правой часть последнего равенство:

$$\begin{aligned} \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV &= \int_V (\sigma_{ij,j} u_i + \sigma_{ij} u_{i,j}) dV = \\ &= \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \int_V \sigma_{ij} (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dV = \\ &= \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \end{aligned}$$

где учтено, что  $\sigma_{ij} \omega_{ij} = 0$ , так как  $S_{ij}$  — симметричный тензор, а  $W_{ij}$  — кососимметричный тензор. Итак, равенство (Д.1) приведем к виду:

$$A = \int_V (\sigma_{ij,j} + \rho f_i) u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV . \quad (Д.2)$$

Из (Д.2) и, приняв во внимание дифференциальные уравнение равновесия:  $\sigma_{ij,j} + \rho f_i = 0$  и формулу Грина:  $\sigma_{ij} = \partial W / \partial \varepsilon_{ij}$ , получим

$$A = \int_V \varepsilon_{ij} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} dV . \quad (Д.3)$$

Таким образом, равенство (Д.3) является *теоремой Клапейрона* для любого упругого тела. В этом контексте  $W$  — *удельный упругий потенциал*, который при изотермическом деформировании определяется свободной энергией  $F = U - T_0 s$  (где  $U$  — удельная внутренняя энергия;  $T$  — постоянная температура; и  $s$  — энтропия)<sup>14</sup> и представляет собой *удельную потенциальную энергию деформации* или *плотность энергии деформации*.

Если упругое тело подчиняется закону Гука, то упругий потенциал является квадратной функцией  $\varepsilon_{ij}$ . В этом случае, учитывая уравнение равновесия и *формулу Клапейрона*:

$$W(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \varepsilon_{ij} = W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} , \quad (Д.4)$$

равенства (Д.2) и (Д.3) приведем к виду

$$\int_V W dV = \frac{1}{2} A . \quad (Д.5)$$

Следовательно, согласно теореме Клапейрона для линейно-упругого тела, работа деформации равна половине работы внешних сил на произведенных ими перемещениях.

---

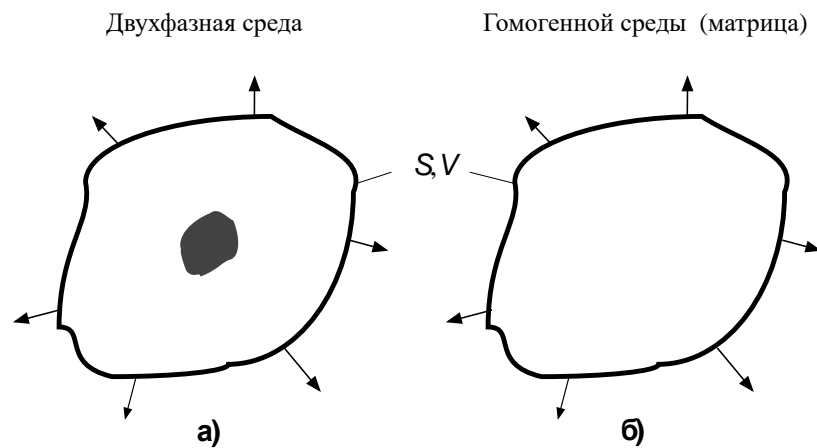
<sup>14</sup> В случае линейных твердых тел (в отличие от газообразных тел) величина  $T_0 s$  значительно меньше величины  $U$  и поэтому, соотношения между  $\sigma_{ij}$  и  $\varepsilon_{ij}$  (т.е. упругие постоянные или тензор жесткости) определяемые формулой Грина, при изотермическом и адиабатическом процессах не будут существенными различиями [89].



## ПРИЛОЖЕНИЕ Е. Интегральная формула Эшелби

Известная формула, выведенная Эшелби [29] для вычисления энергии деформирования, преобразует обычное интегрирование по объему к интегрированию по поверхности частного вида. Согласно Кристенсену [35], это упрощение очень удобно при определении эффективных свойств композитов. В принципе эта формула связывает энергию деформации между средами с включением и без включения (рис. Е.1).

Здесь, показывается процедура, которая приводит к замечательной формуле Эшелби.



**Рис. Е.1** Схемы: а) к задаче о включении в бесконечной средой, заданной векторами перемещений, и б) к вспомогательной задаче для однородной среды (матрица без включения)

Рассмотри сначала гетерогенное тело (матрица с включением) с заданными на поверхности граничными условиями в перемещениях и пренебрегаются массовые силы (см. рис. Е.1.а). Плотность энергии деформации в такой среде определяется следующим образом:

$$W = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV, \quad (\text{Е.1})$$

и плотность энергии деформации гомогенного тела (см. рис. Е.1.б) имеет вид:

$$W^0 = \frac{1}{2V} \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0 dV, \quad (\text{Е.2})$$

где  $V$  — объем ячейки; и величины с верхними индексами “0” соответствуют полям переменных к задаче однородного тела, а без верхних индексов — к задаче композита.

Выражение (E.1) вместе с (E.2) можно переписать в виде

$$W = W^0 + \frac{1}{2V} \int_V (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \sigma_{ij}^0 \varepsilon_{ij}^0) dV \quad (E.3)$$

Применяя теорему Гаусса-Остроградского вместе с уравнениями равновесия  $\sigma_{ij,j} = 0$  и  $\sigma_{ij,j}^0 = 0$  к (E.3), находим

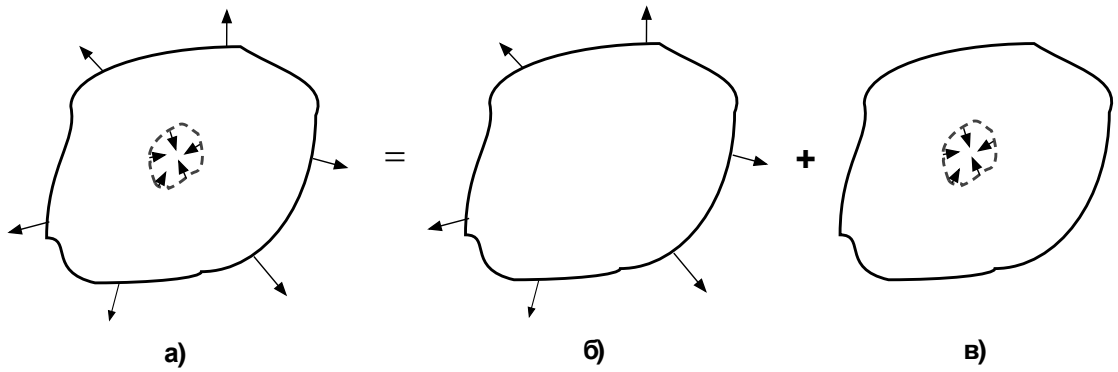
$$W = W^0 + \frac{1}{2V} \int_S (\sigma_{ij} u_i - \sigma_{ij}^0 u_i) n_j dS \quad (E.4)$$

где  $S$  — поверхности ячейки. Теперь, поскольку на поверхностях двух тел граничные условия обеих задач одинаковы, т.е.  $\sigma_{ij}^0 u_i n_j = \sigma_{ij} u_i n_j$  на  $S$ , можно переписать (E.4) в виде

$$W = W^0 + \frac{1}{2V} \int_S \sigma_{ij}^0 (u_{ij} - u_{ij}^0) n_j dS \quad (E.5)$$

Итак, формула (E.5) представляет собой промежуточную форму искомого результата. Для преобразования интеграла в (E.5) к другой форму решим вспомогательную задачу.

Рассмотрим гомогенное тело той же формы, что и на рис E.1.a, в котором эффект, связанный с наличием включения, учтен путем введения внутренних сил, распределенных некоторым образом (рис. E.2.a). Легко показать, что иллюстрируемая E.2.a задача о действии частной системы внутренних сил, приложенных по поверхности включения, дает в точности то же самое состояние полей переменных в области вне включения, что и задача, иллюстрируемая рис. E.1.a.



**Рис. Е.2** Схема суперпозиции решений.

Далее задачу, соответствующую рис. Е.2.а, можно представить как суперпозицию двух задач, показанных на рис. Е.2.б и Е.2.в. Видно, что задача Е.2.б равна задаче Е.1.б. Обозначим поля переменных для задачи Е.2.а с верхними знаками “ $\hat{\phantom{x}}$ ”, и для задачи Е.2.с с верхними штрихами “ $\prime$ ”. Используем условия, что  $\hat{\sigma}_{ij}, \hat{\varepsilon}_{ij}$  и  $\hat{u}_i$  идентичны  $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}, u_i$  соответственно, вне области, включающей внутренние силы, т.е. вне включения. При помощи метода суперпозиции задачи Е.2.а = Е.2.б + Е.2.в теперь можно записать

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{ij} &= \sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij}, \\ \hat{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij}, \\ \hat{u}_i &= u_i^0 + u'_i.\end{aligned}\tag{Е.6}$$

Теперь используя (Е.6), плотность энергии деформации в задаче, соответствующей рис. Е.2.а, можно записать в виде

$$\begin{aligned}\hat{W} &= \frac{1}{2V} \int_V (\sigma_{ij}^0 + \sigma'_{ij})(\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon'_{ij}) dV = \\ &= W^0 + W' + W^{INT},\end{aligned}\tag{Е.7}$$

где  $W^0$  определяется согласно (Е.2) и

$$W' = \frac{1}{2V} \int_V \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} dV,\tag{Е.8}$$

$$W^{INT} = \frac{1}{2V} \int_V (\sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} + \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^0) dV.\tag{Е.9}$$

Здесь член  $W^{INT}$  описывает эффект плотности энергии взаимодействия двух напряженных состояний для схем нагружения, показанных на рис. Е.2.б и в.

Плотность энергии взаимодействия (Е.9) можно записать в более удобной форме. Используя соотношения напряжение-деформация и симметрию  $C_{ijkl} = C_{klij}$ , запишем второй член в подынтегральном выражении (Е.9) в виде:

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij}\varepsilon_{ij}^0 &= C_{ijkl}\varepsilon'_{kl}\varepsilon_{ij}^0 = \\ &= C_{klij}\varepsilon_{ij}^0\varepsilon'_{kl} = \\ &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^0\varepsilon'_{ij} = \\ &= \sigma_{ij}^0\varepsilon'_{ij}.\end{aligned}\quad (\text{Е.10})$$

Подставляя (Е.10) в (Е.9) и применяя теорему Гаусса-Остроградского и уравнения равновесия  $\sigma'_{ij,j} = 0$  в  $V$ , получаем

$$W^{INT} = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dV = \frac{1}{V} \int_S \sigma_{ij}^0 u'_i n_j dS. \quad (\text{Е.11})$$

Формула (Е.11) связана с интегральным членом в (Е.5) поскольку  $u_i = \hat{u}_i$ , и поэтому можно записать (Е.5) в виде

$$W = W^0 + \frac{1}{2V} \int_S \sigma_{ij}^0 u'_i n_j dS = W^0 + \frac{1}{2} W^{INT}. \quad (\text{Е.12})$$

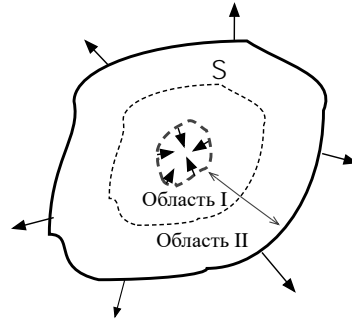
В заключение рассмотрим наиболее подходящие для использования в (Е.12) формы записи  $W^{INT}$ . Возвращаясь к формуле (Е.11) для  $W^{INT}$ , разделим, как показано на рис. Е.3, область интегрирования по объему на две части с поверхностью раздела  $\Sigma$ . Поверхность  $\Sigma$  берется вне области внутренних сил. С учетом этого разделения областей и соотношения (Е.10) уравнение (Е.11) примет вид:

$$\begin{aligned}W^{INT} &= \frac{1}{V} \int_{V_I} \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dV + \frac{1}{V} \int_{V_{II}} \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dV = \\ &= \frac{1}{V} \int_{V_I} \sigma_{ij}^0 \varepsilon'_{ij} dV + \frac{1}{V} \int_{V_{II}} \sigma'_{ij} \varepsilon_{ij}^0 dV.\end{aligned}\quad (\text{Е.13})$$

С помощью теоремы Гаусса-Остроградского в сочетании с уравнениями равновесия  $\sigma_{ij,j}^0 = 0$  в  $V_I$  и  $\sigma'_{ij,j} = 0$  в  $V_{II}$  (но не в  $V_I$ ) можно записать (Е.13) в следующем виде

$$W^{INT} = \frac{1}{V} \int_{\Sigma} \sigma_{ij}^0 u'_i n_j dS - \frac{1}{V} \int_{\Sigma} \sigma'_{ij} u_i n_j dS + \frac{1}{V} \int_S \sigma'_{ij} u_i n_j dS. \quad (\text{Е.14})$$

где знак минус, входящий в (Е.14), связан с тем, что положительное направление единичного вектора нормали к  $\Sigma$  противоположно для двух областей.



**Рис. Е.3** Положение промежуточной поверхности  $S$ , по которой производится интегрирование.

Однако,  $\sigma'_{ij}n_j = 0$  на  $S$  (см. рис. Е.2.в), поэтому имеем

$$W^{INT} = \frac{1}{V} \int_{\Sigma} (\sigma_{ij}^0 u'_{ij} - \sigma' u_i) n_j dS \quad (E.15)$$

Использование соотношения (Е.6) приводит (Е.15) к виду

$$W^{INT} = \frac{1}{V} \int_{\Sigma} (\sigma_{ij}^0 \hat{u}_i - \hat{\sigma}_{ij} u_i^0) n_j dS \quad (E.16)$$

Так как в основной задаче, соответствующей Е.2.а, переменные  $\hat{\sigma}_{ij}$  и  $\hat{u}_i$  идентичны  $\sigma_{ij}$  и  $u_i$  вне области, включающей внутренние силы, то с уравнением (Е.16) и (Е.12) приводится известная формула Эшелби

$$W = W^0 + \frac{1}{2V} \int_{S_i} (\sigma_{ij}^0 u_i - \sigma_{ij} u_i^0) n_j dS \quad (E.17)$$

где  $S$  берется по поверхности включения. Далее умножая с  $V$ , получается оригинальная формула Эшелби по энергии деформации взаимодействия:

$$U = U^0 + \frac{1}{2} \int_{S_i} (\sigma_{ij}^0 u_i - \sigma_{ij} u_i^0) n_j dS \quad (E.18)$$

где  $S_i$  — контакт поверхности между включением и матрицей;  $\sigma_{ij}, u_i$  — компоненты тензора напряжений и вектора перемещений включения или матрицы (среда с включением) в контакте фаз; и  $\sigma_{ij}^0, u_i^0$  — компоненты тензора напряжений и вектора перемещений матрицы (среда без включения) в контакте фаз.

Можно показать, что соответствующее решения задачи с заданными перемещениями на наружной границе имеет вид

$$U = U^0 + \frac{1}{2} \int_{S_i} (\sigma_{ij} u_i^0 - \sigma_{ij}^0 u_i) n_j dS \quad (\text{E.19})$$

**ПРИЛОЖЕНИЕ Ж. Доказательство  $D_2^{N+1}=0$  при использовании интегральной формулы Эшелби**

**Ж.1 Задача всестороннего нагружения поперек ячейки**

Из равенств (2.82), (2.83), (2.87), (2.90), (2.91) и (2.92), имеем

$$\frac{1}{2} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} (\sigma_{ij}^{N+1} u_i^{eff} - \sigma_{ij}^{eff} u_i^{N+1}) r_N d\theta dz = 0, \quad (\text{Ж.1})$$

где

$$\begin{aligned} u_r^{eff} &= \varepsilon_0 r, & u_r^{N+1} &= D_1^{N+1} r + D_2^{N+1} r^{-1}, \\ \sigma_{rr}^{eff} &= 2K_{12}^{eff} \varepsilon_0, & \sigma_{rr}^{N+1} &= 2D_1^{N+1} K_{12}^{N+1} - 2D_2^{N+1} \mu_{12}^{N+1} r^{-2}. \end{aligned} \quad (\text{Ж.2})$$

Итак,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2\pi L r_N \left[ (2D_1^{N+1} K_{12}^{N+1} - 2D_2^{N+1} \mu_{12}^{N+1} r_N^{-2}) (\varepsilon_0 r_N) - (2K_{12}^{eff} \varepsilon_0) (D_1^{N+1} r_N + D_2^{N+1} r_N^{-1}) \right] = 0 \\ &\Rightarrow D_1^{N+1} (K_{12}^{N+1} - K_{12}^{eff}) \varepsilon_0 r_N^2 - D_2^{N+1} (\mu_{12}^{N+1} + K_{12}^{eff}) \varepsilon_0 = 0. \end{aligned}$$

Поскольку  $K_{12}^{N+1} = K_{12}^{eff}$ , получаем

$$\begin{aligned} &\Rightarrow D_2^{N+1} (\mu_{12}^{N+1} + K_{12}^{eff}) \varepsilon_0 = 0 \\ &\Rightarrow D_2^{N+1} = 0. \end{aligned} \quad (\text{Ж.3})$$

**Ж.2 Задача чистого сдвига вдоль ячейки (волокон)**

Из уравнений (2.46), (2.47), (2.51), (2.54), (2.55) и (2.56), имеем

$$\frac{1}{2} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} (\sigma_{rz}^{N+1} u_r^{eff} - \sigma_{rz}^{eff} u_z^{N+1}) r_N d\theta dz = 0, \quad (\text{Ж.4})$$

где

$$\begin{aligned} u_z^{eff} &= 2\varepsilon_0 r_N \cos \theta, & u_z^{N+1} &= (D_1^{N+1} r_N + D_2^{N+1} r_N^{-1}) \cos \theta, \\ \sigma_{rz}^{eff} &= 2\mu_{23}^{eff} \varepsilon_0 \cos \theta, & \sigma_{rz}^{N+1} &= \mu_{23}^{N+1} (D_1^{N+1} - D_2^{N+1} r_N^{-2}) \cos \theta. \end{aligned} \quad (\text{Ж.5})$$

Итак,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \pi L r_N \left[ \left( \mu_{23}^{N+1} D_1^{N+1} \varepsilon_0 r_N - \mu_{23}^{N+1} D_2^{N+1} \varepsilon_0 r_N^{-1} \right) - \left( \mu_{23}^{eff} D_1^{N+1} \varepsilon_0 r_N + \mu_{23}^{eff} D_2^{N+1} r_N^{-1} \right) \right] = 0 \\ &\Rightarrow D_1^{N+1} \left( \mu_{23}^{N+1} - \mu_{23}^{eff} \right) \varepsilon_0 r_N - D_2^{N+1} \left( \mu_{23}^{N+1} + \mu_{23}^{eff} \right) \varepsilon_0 r_N^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Так как  $\mu_{23}^{N+1} = \mu_{23}^{eff}$ , имеем

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2D_2^{N+1} \mu_{23}^{N+1} \varepsilon_0 r_N^{-1} = 0 \\ &\Rightarrow D_2^{N+1} = 0. \end{aligned} \tag{Ж.6}$$

### Ж.3 Задача одноосном растяжении вдоль волокон

Из уравнений (2.132), (2.133), (2.137), (2.140), (2.141) и (2.142), получаем

$$\frac{1}{2} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} \left( \sigma_{zz}^{N+1} u_z^{eff} - \sigma_{zz}^{eff} u_z^{N+1} \right) r_N d\theta dz = 0, \tag{Ж.7}$$

где

$$\begin{aligned} u_z^{eff} &= \varepsilon_0 z, & u_z^{N+1} &= \varepsilon_0 z, \\ \sigma_{zz}^{eff} &= E_{33}^{eff} \varepsilon_0, & \sigma_{zz}^{N+1} &= 4K_{12}^{N+1} \nu_{31}^{N+1} D_1^{N+1} + 4K_{12}^{N+1} \left( \nu_{31}^{N+1} \right)^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{N+1} \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{Ж.8}$$

Итак,

$$\Rightarrow 4\pi L^2 \varepsilon_0 r_N \left[ \left( 4K_{12}^{N+1} \nu_{31}^{N+1} D_1^{N+1} + 4K_{12}^{N+1} \left( \nu_{31}^{N+1} \right)^2 \varepsilon_0 + E_{33}^{N+1} \varepsilon_0 \right) - E_{33}^{eff} \varepsilon_0 \right] = 0$$

Поскольку  $E_{33}^{N+1} = E_{33}^{eff}$ ,  $K_{12}^{N+1} = K_{12}^{eff}$ ,  $\nu_{31}^{N+1} = \nu_{31}^{eff}$ , получаем

$$\Rightarrow D_1^{N+1} = -\nu_{31}^{eff} \varepsilon_0. \tag{Ж.9}$$

На основании уравнений (2.64), (2.67) и (2.74) имеем

$$\Rightarrow D_2^{N+1} = 0. \tag{Ж.10}$$

### Ж.4 Задача чистого сдвига в плоскости изотропии

Из уравнений (2.205), (2.206), (2.110), (2.111), имеем

$$\frac{1}{2} \int_0^{2L} \int_0^{2\pi} \left( \sigma_{rr}^{N+1} u_r^{eff} + \sigma_{r\theta}^{N+1} u_\theta^{eff} - \sigma_{rr}^{eff} u_r^{N+1} - \sigma_{r\theta}^{eff} u_\theta^{N+1} \right) r_N d\theta dz = 0, \tag{Ж.11}$$

где

$$\begin{aligned}
u_r^{N+1}(r, \theta) &= \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r + (\eta^{N+1} + 1) \frac{D_2^{N+1}}{r} + \frac{D_4^{N+1}}{r^3} \right) \sin 2\theta, \\
u_\theta^{N+1}(r, \theta) &= \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r + (\eta^{N+1} - 1) \frac{D_2^{N+1}}{r} - \frac{D_4^{N+1}}{r^3} \right) \cos 2\theta, \\
\sigma_{rr}^{N+1}(r, \theta) &= \left( 1 - \Gamma^{N+1} \frac{D_2^{N+1}}{r^2} - \frac{3}{2} \frac{D_4^{N+1}}{r^4} \right) \sin 2\theta, \\
\sigma_{r\theta}^{N+1}(r, \theta) &= \left( 1 + \frac{D_2^{N+1}}{r^2} + \frac{3}{2} \frac{D_4^{N+1}}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\
u_r^{eff} &= \frac{r \sin 2\theta}{2\mu_{12}^{eff}}, & u_\theta^{eff} &= \frac{r \cos 2\theta}{2\mu_{12}^{eff}}, \\
\sigma_{rr}^{eff} &= \sin 2\theta, & \sigma_{r\theta}^{eff} &= \cos 2\theta.
\end{aligned} \tag{Ж.12}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \pi L r_N \left[ \frac{1}{8\mu_{12}^{eff}} \left( 4r_N - 4\Gamma^{N+1} \frac{D_2^{N+1}}{r_N} - 6 \frac{D_4^{N+1}}{r_N^3} \right) + \frac{1}{8\mu_{12}^{eff}} \left( 4r_N + 4 \frac{D_2^{N+1}}{r_N} + 6 \frac{D_4^{N+1}}{r_N^3} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r_N + (\eta^{N+1} + 1) \frac{D_2^{N+1}}{r_N} + \frac{D_4^{N+1}}{r_N^3} \right) - \frac{1}{4\mu_{12}^{N+1}} \left( 2r_N + (\eta^{N+1} - 1) \frac{D_2^{N+1}}{r_N} - \frac{D_4^{N+1}}{r_N^3} \right) \right] = 0 \\
&\Rightarrow \frac{1}{2\mu_{12}^{eff}} \left( r_N - \Gamma^{N+1} \frac{D_2^{N+1}}{r_N} \right) + \frac{1}{2\mu_{12}^{eff}} \left( r_N + \frac{D_2^{N+1}}{r_N} \right) - \\
&\quad - \frac{1}{2\mu_{12}^{N+1}} \left( r_N + \frac{(\eta^{N+1} + 1) D_2^{N+1}}{2 r_N} \right) - \frac{1}{2\mu_{12}^{N+1}} \left( r_N + \frac{(\eta^{N+1} - 1) D_2^{N+1}}{2 r_N} \right) = 0.
\end{aligned}$$

Так как  $\mu_{12}^{N+1} = \mu_{12}^{eff}$ , получаем

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow D_2^{N+1} \frac{(1 - \Gamma^{N+1} - \eta^{N+1})}{r_N} = 0 \\
&\Rightarrow D_2^{N+1} = 0.
\end{aligned} \tag{Ж.13}$$



**БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Васильев В.В., Тарнопольский Ю.М.: *Композиционные материалы. Справочник*. Машиностроение, Москва (1990) 512 с.
2. Лурье С.А., Дудченко А.А.: *Введение в механику нанокompозитов*. МАИ–ПРИНТ, Москва (2010) 160 с.
3. Kim J.K., Mai Y.W.: *Engineered interfaces in fiber reinforced composites*. Elsevier Science Ltd. (1998) pp. 18–33.
4. Lin Y., Ehlert G.J., Sodano H.A.: *Increase interface strength in carbon fiber composites through a ZnO nanowire interphase*. *Advan. Funct. Mater.* 19:16 (2009) pp. 2654–2660.
5. Sager R.J., Klein P.J., Lagoudas D.C., Zhang Q., Liu J., Dai L.: *Effect of carbon nanotubes on the interfacial shear strength of T650 carbon fiber in an epoxy matrix*. *Compos. Sci. Technol.* 69 (2009) pp. 898–904.
6. Wang Y., Tang Z., Liang X., Liz-Marzan L.M., Kotov N.A.: *SiO<sub>2</sub>-Coated CdTe nanowires: bristled nano centipedes*. *Nano Letters* 4:2 (2004) pp. 225–231.
7. Galan U., Lin Y., Ehlert G.J., Sodano H.A.: *Effect of ZnO nanowire morphology on the interfacial strength of nanowire coated fibers*. *Compos. Sci. Technol.* 71 (2011) pp. 946–954.
8. Garcia E.J., Wardle B.L., Hart A.J., Yamamonj N.: *Fabrication and multifunctional properties of a hybrid laminate with aligned carbon nanotubes grown in situ*. *Compos. Sci. Technol.* 68:9 (2008) pp. 2034–2041.
9. Sharma S.P., Lakkad S.C.: *Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites*. *Surface & Coatings Technology* 205 (2010) pp. 350–355.
10. Veedu V.P., Cao A., Li X., Ma K., Soldano C., Kar S., Ajayan P.M., Ghasemi-Nejhad M.N.: *Multifunctional composites using reinforced laminae with carbon nanotube forests*. *Nature materials* 5 (2006) pp. 457–462.
11. Alipour Skandani A., Masghouni N., Case S.W., Leo D.J., Al-Haik M.: *Enhanced vibration damping of carbon fibers-ZnO nanorods hybrid composites*. *Applied Physics Letters* 101:073111 (2012) pp. 1–4.

12. Lu P., Feng Y.Y., Zhang P., Chen H.M., Zhao N., Feng W.: *Increasing interfacial strength in carbon fiber/epoxy composites by controlling the orientation and length of fiber carbon nanotubes grown on the fibers*. Carbon 49 (2011) pp. 4665–4673.
13. Agnihotri P., Basu S., Kar K.K.: *Effect of carbon nanotube length and density on the properties of carbon nanotubes coated carbon fiber/polyester composites*. Carbon 49 (2011) pp. 3098–3106.
14. Gibson R.F.: *A review of recent research on mechanics of multifunctional composite materials and structures*. Compos. Struct. 92 (2010) pp. 2793–2810.
15. Goan J.C., Prosen S.P.: *Interfacial bonding in graphite fiber-resin composites, Interfaces of composites*. American Society of Testing, New York (1969) pp. 3–26.
16. Katz H.S., Milewski J.V. (eds): *Handbook of fillers and reinforcements for plastics*. Van Nostrand Reinhold Company, New York N.Y. (1978).
17. Narusberg V.L. & Riekstin'sh A.I.: *Evaluating the effect of whiskerization of the fibers of composites on the fundamental frequency of a laminated cylindrical shell*. Mechanics of Materials 23:6 (1988) pp. 727-732 [Translated from Mekhanika Kompozitsionnykh Materialov, No. 6, Nov-Dec 1987, pp. 1022–1027].
18. Sharma S.P., Lakkad S.C.: *Compressive strength of carbon nanotubes grown on carbon fiber reinforced epoxy matrix multi-scale hybrid composites*. Surface & Coatings Technology 205 (2010) pp. 350–355.
19. Steiner S.A., Li R., Wardle B.L.: *Circumventing the mechanochemical origins of strength loss in the synthesis of hierarchical carbon fibers*. ACS Appl. Mater. Interf. 5:11 (2013) pp. 4892–4903.
20. Sealy C., *Nanocentipedes could make strong composites*. Materials Today (Apr 2004) pp. 15.
21. Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J.: *Predicting the properties of micro- and nanocomposites: From the microwhiskers to the bristled nano-centipedes*. Phil. Trans. R. Soc. A 366 (2008) pp. 1827–1833.
22. Fei W., Kuiry S.C., Seal S.: *Advanced catalyst system prepared from a whiskered aluminium-coating metallic alloy substrate*. US 8247034 B2, US Patents (US 13/224,848), Aug 21, 2012.

23. Daniel I.M., Ishai O.: *Engineering mechanics of composite materials*. Oxford University Press, New York (1994) 394 с.
24. Markoz K.Z.: *Elementary micromechanics of heterogeneous media. Heterogeneous Media - Modeling and Simulation*, Birkhauser, Boston (1992) pp. 1–162.
25. Седов Л.И.: *Механика сплошной среды – Том 1*. Наука, Москва (1983) 491 с.
26. Седов Л.И.: *Механика сплошной среды – Том 2*. Наука, Москва (1984) 560 с.
27. Zohdi T.I., Wriggers P.: *An introduction to computational micromechanics*. Springer, Berlin. 2<sup>nd</sup> ed. (2008) 195 с.
28. Nemat-Nasser S., Hori M.: *Micromechanics: Overall properties of heterogeneous materials*. Elsevier (1999) 786 с.
29. Eshelby J.D.: *The continuum theory of lattice defects*. Progress in Solid State Physics. Vol. 3. (1956).
30. Eshelby J.D.: *The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusions, and related problem*. Proc. Royal of Society A. Vol. 241:1226 (1957) pp. 376–396.
31. Ванин Г.А.: *Микромеханика композиционных материалов*. Н. Думка, Киев (1985) 302 с.
32. Hashin Z.: *The elastic moduli of fiber-reinforced materials*. J. Appl. Mech. 31 (1964) pp. 223–232.
33. Riccardi A., Montheillet F.: *A generalized self-consistent methods for solids containing randomly-oriented spheroidal inclusions*. Acta Mechanica 133 (1999) pp. 39–56.
34. Mura T.: *Micromechanics of defects in solids*. Kluwers, 2<sup>nd</sup> ed. (1991) 587 с.
35. Кристенсен Р.М.: *Введение в механику композитов*. Мир, Москва (1982), 334 с.
36. Aboudi J., Arnold S.M., Bednarczyk B.A.: *Micromechanics of composite materials – A generalized multiscale analysis approach*. Elsevier (2013) 984 с.
37. Hill R.: *A self-consistent mechanics of composite materials*. J. Mech. Phys. Solids. 13 (1965) pp. 213–222.

38. Budiansky B.: *On the elastic moduli on some heterogeneous materials*. J. Mech. Phys. Solids 13 (1965) pp. 223–227.
39. Christensen R.M.: *A critical evaluation of for a class of micromechanics models*. J Mech Phys Solids 38:3 (1990) pp. 379–404.
40. McLaughlin R.: *A Study of the Differential Scheme for Composite Materials*. Int. J. Eng. Sci. 15 (1977) pp. 237–244.
41. Mori T., Tanaka K.: *Average Stress in Matrix and Average Energy of Materials With Misfitting Inclusions*. Acta Metall. 21:5 (1973) pp. 571–574.
42. Benveniste Y.: *A New Approach to the Application of Mori-Tanaka's Theory in Composite Materials*. Mech. Mater. 6 (1987) pp. 147–157.
43. Hashin Z.: *The elastic moduli of heterogeneous materials*. J. Appl. Mech. 29:1 (1962) pp. 143–150.
44. Christensen R.M., Lo KH.: *Solutions for Effective Shear Properties in Three Phase Sphere and Cylinder Models*. J. Mech. Phys. Solids 27 (1979) pp. 315–330.
45. Lurie S., Minhat M.: *Application of generalized self-consistent method to predict effective elastic properties of bristled fiber composites*. Composites: Part B. 61 (2014) pp. 26–40.
46. Gusev A.A., Lurie S.A.: *Loss amplification effect in multiphase materials with viscoelastic interfaces*. Macromolecules 42:14 (2009) pp. 5372–5377.
47. Бахвалов Н.С., Панасенко Г.П.: *Осреднение процессов в периодических средах: Математические задачи механики композиционных материалов*. Наука, Москва (1984) 352 с.
48. Победря Б.Е.: *Механика композиционных материалов*. Изд-во Моск. Ун-та, Москва (1984) 336 с.
49. Meguid S., Kalamkarov A.L.: *Asymptotic homogenization of elastic composite materials with a regular structure*. Int. J. Solids Struct. 31:3 (1994) pp. 303–316.
50. Andrianov I.V., Danishevs'ky V.V., Guillet A., Pareige P.: *Effective properties and micro-mechanical response of filamentary composite wires under longitudinal shear*. Euro. J. Mech. A/Solids 24 (2005) pp. 195–206.

51. Herve E., Zaoui A.: *N-layered inclusion-based micromechanical model*. Int. J. Eng. Sci. 31:1 (1993) pp. 1–10.
52. Herve E., Zaoui A.: *Elastic behavior of multiply coated fiber reinforced composites*. Int. J. Eng. Sci. 33:10 (1995) pp. 1419–1433.
53. Hashin Z.: *Thin interphase/imperfect interface in elasticity in application to coated fiber composites*. J. Mech. Phys. Solids 50 (2002) pp. 2509–2537.
54. Walpole L.J.: *A coated inclusion in an elastic medium*. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 83 (1978) pp. 495–506.
55. Лурье С.А., Соляев Ю.О.: *Модифицированный метод Эшелби в задаче определения эффективных свойств со сферическими микро- и нановключениями*. УДК 539.3, Москва (2010) pp. 80–90.
56. Lurie S.A., Volkov-Bogorodsky D., Zubov V., Tuchkova N.: *Advanced theoretical and numerical multiscale modelling of cohesion/adhesion interactions in continuum mechanics and its applications for filled composites*. Comp. Mater. Sci. 45 (2009) pp. 709–714.
57. Hashin Z.: *Analysis of properties of fiber composites with anisotropic constituents*. J. Appl. Mech. 46 (1979) pp. 543–550.
58. Hashin Z.: *Thermoelastic properties and conductivity of carbon/carbon fiber composites*. Mech. Mater. 8 (1990) pp. 293–308.
59. Cohen D., Hyer M.W.: *Residual stresses in cross-ply composite tubes*. Virginia Polytechnic Institute and State University CCMS-84-04 (1984)
60. Avery W.B., Herakovich C.T.: *Effect of fiber anisotropy on thermal stresses in fibrous composites*. J. Appl. Mech. 53 (1986) pp. 751–756.
61. Tsukrov I., Drach B.: *Elastic deformation of composite cylinders with cylindrically orthotropic layers*. Int. J. Eng. Sci. 47 (2010) pp. 25–33.
62. Tsukrov I., Drach B., Gross T.S.: *Effective stiffness and thermal expansion coefficients of unidirectional composites with fibers surrounded by cylindrically orthotropic matrix layers*. Int. J. Eng. Sci. 58 (2012) pp. 129–143.

63. Finegan I.C., Gibson R.F.: *Analytical modeling of damping at micromechanical level in polymer composites reinforced with coated fibers*. Compos. Sci. Technol. 60 (2000) pp. 1077–1084.
64. Neagu R.C., Bourban P.E., Manson J.E.: *Micromechanics and damping properties of composite integrating shear thickening fluids*. Compos. Sci. Technol. 69 (2009) pp. 515–522.
65. Lurie S., Minhat M., Tuchkova N., Soliaev J.: *On remarkable loss amplification mechanism in  $\text{SEP}$  fiber reinforced laminated composite materials*. Appl. Compos. Mater. (Jan 2014) DOI. 10.1007/s10443-013-9371-2.
66. Chandra R., Singh S.P. and Gupta K.: *Damping studies in fiber-reinforced composites – a review*. Compos. Struct. 46 (1999) pp. 41–51.
67. Chandra, R., Singh, S.P., Gupta, K.: *A study of damping in fiber-reinforced composites*. J. Sound Vib. 262 (2003) pp. 475–496.
68. Hashin Z.: *Complex moduli of viscoelastic composites – I. General theory and application to particulate composites*. Int. J. Solids Struct. 6 (1970) pp. 539-552.
69. Hashin Z.: *Complex moduli of viscoelastic composites – II. Fiber reinforced materials*. Int. J. Solids Struct. 6 (1970) pp. 797-807.
70. Zinove'v P.A., Ermakov Y.N.: *Anisotropy of the dissipative properties of fiber composites*// Mech. Mater. 21:5 (1986) pp. 555-563. [Translated from Mekhanika Kompozitnykh Materialov 5 (1985) pp. 816-825.
71. Saravanos D.A., Chamis C.C.: *Unified micromechanics of damping for unidirectional fiber reinforced composites*. NASA Technical Memorandum 102107 (Aug 1989) 28 c.
72. Chaturvedi S.K., Tzeng G.Y.: *Micromechanical modelling of material damping in discontinuous fiber three-phase polymer composites*. Compos. Eng. 1:1 (1991) pp. 49-60.
73. Hwang S.J., Gibson R.F.: *Prediction of fiber-matrix interphase effects on damping of composites using micromechanical strain energy finite element modeling*. Compos. Eng. 3:10 (1993) pp. 975-984.

74. Fisher F.T., Brinson L.C.: *Viscoelastic interphases in polymer-matrix composites: Theoretical models and finite element analysis*. Compos. Sci. Technol. 61 (2001) pp. 731-748.
75. Finegan, I.C., Gibson, R.F.: *Recent research on enhancement of damping in polymer composites*. Compos. Struct. 44 (1999) pp. 89–98.
76. Jones, D.I.G.: *Handbook of viscoelastic vibration damping*. Wiley, Chichester (2001).
77. Meaud, J., Sain, T., Hulbert, G.M., Waas, A.M.: *Analysis and optimal design of layered composites with high stiffness and high damping*. Int. J. Solids Struct. 50 (2013) pp. 1342–1353.
78. Remillit, C.: *Damping mechanism of polymers filled with elastic particles*. J. Mech. Mater. 39 (2007) pp. 525–537.
79. Meaud, J., Sain, T., Hulbert, G.M., Waas, A.M.: *Analysis and optimal design of layered composites with high stiffness and high damping*. Int. J. Solids Struct. 50 (2013) pp. 1342–1353.
80. Lakes, R.S.: *High damping composite materials: Effect of structural hierarchy*. J. Compos. Mater. 36:3 (2003) pp. 287–297.
81. Berthelot, J.M., Assarar, M., Sefrani, Y., Mahi, A.E.: *Damping of composite materials and structures*. Compos. Struct. 85 (2008) pp. 189–204.
82. Yu, L., Ma, Y., Zhou, C., Xu, H.: *Damping efficiency of the coating structure*. Int. J. Solids Struct. 42 (2005) pp. 3045–3058.
83. Fisher, F.T., Brinson, L.C.: *Viscoelastic interphases in polymer-matrix composites: theoretical model and finite element analysis*. Compos. Sci. Technol. 61 (2001) pp. 731–748.
84. Wei, P.J., Huang, Z.P.: *Dynamic effective properties of the particle reinforced composites with viscoelastic interphase*. Int. J. Solids Struct. 41 (2004) 6993–7007.
85. Guz I.A., Rodger A.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J.: *Predicting the properties of micro- and nanocomposites: from the microwhiskers to the bristled nanocentipedes*. Philos. Trans. R. Soc. A 366 (2008) pp. 1827–1833.

86. Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N.: *Mechanical models for nanomaterials. Handbooks of nanophysics – principles and methods*, CRC vol. 24 (2011) pp. 1–12.
87. Мухелишвили Н.И.: *Некоторые основные задачи математической теории упругости*. Наука, Москва (1996) 707 с.
88. Ванин Г.А.: *Микромеханика композиционных материалов*. Нау. Думка, Киев (1985) 302 с.
89. Демидов С.П.: *Теория упругости*. Высш. Школа, Москва (1979) 432 с.
90. Guz I.A., Rushchitsky J.J., Guz A.N.: *Effect of a special reinforcement on the elastic properties of micro- and nanocomposites with polymer matrix*. The Aeronautical Journal 117:1196 (2013) pp. 1019-1036.
91. Guz I.A., Guz A.N., Rushchitsky J.J.: *Modelling properties of micro- and nanocomposites with brush-like reinforcement*. Materialwissenschaft und Werkstofftechnik (Materials Science and Engineering Technology) 40:3 (2009) pp. 154-160.
92. Kundawal S.I., Ray M.C.: *Micromechanical analysis of fuzzy fiber reinforced composites*. Int. J. Mech. Mater. Des. 7 (2011) pp. 149-166.
93. Chatzigeorgiou G., Siedel G.D., Lagoudas D.: *Effective mechanical of ‘fuzzy fiber’ composites*. Composites B 43 (2012) pp. 2577–2593.
94. Chatzigeorgiou G., Efendiev Y., Lagoudas D.C.: *Homogenization of aligned fuzzy fiber composites*. Int. J. Solids Struct. 48:19 (2011) pp. 2668–2680.
95. Hill R.: *Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles*. J. Mech. Phys. Solids 11 (1963) pp. 357-372.
96. Seidel G.D.: *Micromechanics modeling of the multifunctional nature of carbon nanotube-polymer nanocomposites*. Graduate thesis, Texas A&M University (2007).
97. Jansson S.: *Homogenized nonlinear constitutive properties and local stress concentrations for composites with periodic internal structure*, Int. J. Solids Struct. 29:17 (1992) pp. 2181–2200.
98. Лехницкий С.Г.: *Теория упругости анизотропного тела*. Наука, Москва (1977) 416 с.



99. Победря П.Е.: *Лекции по тензорному анализу*. Изд-во Моск. Ун-та, Москва (1896) 264 с.
100. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В.: *Общие соотношения и вариационные принципы математической теории упругости*. МАИ, Москва (2009) 112 с.
101. Мейз Д.: *Теория и задачи механики сплошных сред*. (3-е) УРСС, Москва (2010) 320 с.
102. A.A. Dudchenko, S.A. Lurie, S.V. Makovskij and K.K. Shramko.: *Stress-strain state of the interfacial layer in a visco-composite composite with longitudinal shear* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering Vol. 683, 2019.
103. Кривень Г.И., Маковский С.В.: *О демпфирующих свойствах вискеризованного слоя в модифицированных волокнистых композитах т. Влияние характеристик вискерсов на эффективный продольный модуль сдвига композиционных материалов, армированных вискеризованными волокнами* // Труды МАИ, №114, 2020
104. С.А. Лурье, Е.Д. Лыкосова, Маковский С.В. *Об аномальных демпфирующих свойствах композитов с вязкоупругими покрытиями* // Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика В.А. Садовниченко, МАКС Пресс (Москва), 2019, стр. 758