УДК 624.074.434 DOI: 10.34759/trd-2020-110-2

Колебания стержня, несущего малую присоединенную массу

Добрышкин А.Ю.

Комсомольский-на-Амуре государственный университет, пр. Ленина, 27,

Комсомольск-на-Амуре, 681013, Россия

e-mail: wwwartem21@mail.ru

Статья поступила 02.02.2020

Аннотация

В данной работе рассмотрено колебание стержня, несущего малую присоединенную массу, в нелинейной постановке. За основу для разработки новой математической модели принято общее уравнение колебаний. Учтено место крепления, а так же влияние малой присоединенной массы на частотные характеристики собственной частоты. Определены первая и вторая собственные частотные характеристики колебаний стержня, несущего присоединенную массу. Так же определено, что наличием малой присоединенной массы является фактором, запускающим взаимодействие изгибных колебаний с радиальными. Решение бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений используется новый симптотический подход, основанный на введении искусственного малого параметра μ. Рассмотрен случай, когда система близка к состоянию внутреннего резонанса.

Ключевые слова: стержень, колебания, малая присоединенная масса.

Математическая модель

Уравнение движения выглядит следующим образом [1-5]:

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\beta_1 u-\varepsilon\beta_2 u^3-\frac{M}{h}\delta(x-x_0)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0$$

Концы стержня жестко защемлены:

$$u|_{x=0,1} = 0.$$

Здесь u – продольное перемещение; x – пространственная координата; t – время; l – длина стержня; $a = \sqrt{E/\rho}$, где E – модуль Юнга, ρ –плотность материала стержня; β_1 , β_2 – некоторые коэффициенты, ε –безразмерный малый параметр, $\varepsilon \to 0$.

Решение должно удовлетворять периодичности: $u(x,t) = u(x,t+T)$, где $T = 2\pi/\omega$ – период, ω – искомая собственная частота колебаний.

Преобразование времени: $\tau = \omega t$, тогда:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \cdots,$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \cdots,$$

где $\omega_0 = \sqrt{(a\pi/l)^2 + \beta_1}$- собственная частота основного тона колебаний линейной системы (при ε=0).

Подставляя выражения в исходную краевую задачу и приравнивая между собой члены при одинаковых степенях ε, получаем рекуррентную систему линейных уравнений:

$$a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} - \omega_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} - \beta_1 u_0 - \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \omega_0^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} - \beta_1 u_1 = 2\omega_0 \omega_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + \beta_2 u_0^3 + \frac{M}{h} \delta(x - x_0, y - y_0) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

Граничные условия и условия периодичности принимают вид

$$u_i|_{x=0,l} = 0,$$

$$u_i(x,\tau) = u_i(x,\tau+2\pi), i = 0,1,2 \dots.$$

Решение краевой задачи соответствует нулевому приближению [6-9]:

$$u_0 = \sum_{i=1}^{\infty} A_i sin\left(\frac{\omega_i^{lin}}{\omega_0}\tau\right) sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right),$$

где A_1 - амплитуда основного тона колебаний, определяемая из начальных условий; A_j, j=2,3,4… - амплитуды последующих гармоник; $\omega_i^{lin} = \sqrt{(a\pi i/l)^2 + \beta_1}, i = 1,2,3 \dots$ - собственные частоты гармоник в линейном случае, $\omega_0 = \omega_1^{lin}$.

Теоретические исследования

Далее переходим к решению, с помощью граничных условий. С целью устранения в уравнениях вековых параметров в правой части уравнения постоянные при переменных вида $sin\left(\frac{\omega_i^{lin}}{\omega_0}\tau\right) sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right), i = 1,2,3 \dots$ необходимо приравнять нулю. Такая замена позволяет получить бесконечную систему нелинейных уравнений [10-14]:

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2A_i\omega_1}{\beta_2\omega_0}\left(\omega_i^{lin}\right)^2 = \frac{9}{16}A_i^2 + \frac{3}{4}A_i\left(\sum_{k=1}^{i-1} A_k^2 + \sum_{k=i+1}^{\infty} A_k^2\right), i = 1,2,3 \dots.$$

Определение численных значений переменных дает возможность найти другой параметр ω_1– корректировку частотной характеристики, полученную при решении нелинейного уравнения. Сопоставим вероятные характеристики уравнения. Форма колебаний определяется выражением:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} A_i sin(\Omega_i t) sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right) + O(\varepsilon),$$

где $\Omega_i = \frac{\omega_i^{lin}}{\omega_1^{lin}}\omega -$ частоты гармоник.

В общем случае имеет место только одна i -ая гармоника. Тогда:

$$A_j = 0, \omega_1 = \frac{9A_i^2\beta_2\omega_0}{32\left(\omega_i^{lin}\right)^2}, j \in N, j \neq i,$$

а искомая АЧХ запишется в виде:

$$\Omega_i = \omega_i^{lin} + 0.28125\frac{A_i^2\beta_2}{\omega_i^{lin}}\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

где i=1,2,3… . Значения параметра волнообразования выше нуля относятся к твердому, а ниже нуля слабому параметру демпфирующей силы. Наличие нескольких составляющих внутреннего колебательного процесса есть особенность системы, при котором возможно расщепление частотного спектра. Малая присоединенная масса, есть одни из включений, отклоняющих от идеального механизма гармонических колебаний. Поэтому возможно взаимодействие форм колебаний, приводящих систему к резонансу. В данном исследовании установлено, что это возможно при β_1=0.

Тогда формы частот можно записать следующим образом:

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2A_1\omega_1}{\beta_2\omega_0}\left(\omega_1^{lin}\right)^2$$

$$= \frac{9}{16}A_1^3 + \frac{3}{4}A_1(A_2^2 + A_3^2 + A_4^2 + A_5^2)$$

$$+\frac{3}{8}(A_1A_2A_4 + A_2A_3A_4 + A_1A_3A_5 + A_2A_4A_5) + \frac{3}{16}(A_1^2A_3 + A_2^2A_3) + \cdots,$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2A_2\omega_1}{\beta_2\omega_0}\left(\omega_2^{lin}\right)^2$$

$$=\frac{9}{16}A_2^3+\frac{3}{4}A_2(A_2^2+A_3^2+A_4^2+A_5^2)$$

$$+\frac{3}{8}(A_1A_2A_3+A_1A_3A_4+A_1A_2A_5+A_1A_4A_5+A_3A_4A_5)$$

$$+\frac{3}{16}(A_1^2A_4+A_3^2A_4)+\cdots,$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2A_3\omega_1}{\beta_2\omega_0}\left(\omega_3^{lin}\right)^2$$

$$=\frac{1}{16}A_1^3+\frac{9}{16}A_3^3+\frac{3}{4}A_3(A_1^2+A_2^2+A_4^2+A_5^2)$$

$$+\frac{3}{8}(A_1A_2A_4+A_2A_3A_4+A_1A_3A_5+A_2A_4A_5)+\frac{3}{16}(A_2^2A_1+A_1^2A_5+A_4^2A_5)$$

$$+\cdots,$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2A_4\omega_1}{\beta_2\omega_0}\left(\omega_4^{lin}\right)^2$$

$$=\frac{9}{16}\mathrm{A}_4^3+\frac{3}{4}A_4(A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_5^2)$$

$$+\frac{3}{8}(A_1A_2A_3+A_1A_2A_5+A_2A_3A_5+A_3A_4A_5)+\frac{3}{16}(A_1^2A_2+A_3^2A_2)+\cdots,$$

$$\frac{2A_5\omega_1}{\beta_2\omega_0}\left(\omega_5^{lin}\right)^2$$

$$=\frac{9}{16}\mathrm{A}_5^3+\frac{3}{4}A_5(A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2)+\frac{3}{8}(A_1A_2A_4+A_2A_3A_4)$$

$$+\frac{3}{16}(A_2^2A_1+A_1^2A_3+A_3^2A_1+A_4^2A_3)+\cdots,$$

……………………………………………………………………………………………

Для решения бесконечной системы нелинейных алгебраических уравнений используется новый асимптотический подход, основанный на введении искусственного малого параметра μ. В правой части каждого i - го уравнения системы введем параметр μ перед каждым членом $A_k A_i A_m$, k,l,m=1,2,3 …, для которого выполняется условие *(k > i) ∪ (l > i) ∪ (m > i):*

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2A_1\omega_1}{\beta_2\omega_0}\left(\omega_1^{lin}\right)^2$$

$$=\frac{9}{16}\mathrm{A}_1^3$$

$$+\mu\left(\frac{3}{4}A_1(\mathrm{A}_2^2+\mathrm{A}_3^2+\mathrm{A}_4^2+\mathrm{A}_5^2)\right.$$

$$\left.+\frac{3}{8}(A_1A_2A_4+A_2A_3A_4+A_1A_3A_5+A_2A_4A_5)+\frac{3}{16}(A_1^2A_3+A_2^2A_3)+\cdots\right),$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2A_2\omega_1}{\beta_2\omega_0}\left(\omega_2^{lin}\right)^2$$

$$=\frac{9}{16}\mathrm{A}_2^3+\frac{3}{4}A_1\mathrm{A}_1^2$$

$$+\mu\left(\frac{3}{4}A_2(\mathrm{A}_3^2+\mathrm{A}_4^2+\mathrm{A}_5^2)\right.$$

$$+\frac{3}{8}(A_1A_2A_3+A_1A_3A_4+A_1A_2A_5+A_1A_4A_5+A_1A_4A_5)$$

$$\left.+\frac{3}{16}(A_1^2A_3+A_2^2A_3)+\cdots\right),$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2A_3\omega_1}{\beta_2\omega_0}\left(\omega_3^{lin}\right)^2$$

$$= \frac{1}{16}\mathrm{A}_1^3 + \frac{9}{16}\mathrm{A}_3^3 + \frac{3}{4}A_3(\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2) + \frac{3}{16}A_1\mathrm{A}_2^2$$

$$+ \mu\left(\frac{3}{4}A_3(\mathrm{A}_4^2 + \mathrm{A}_5^2) + \frac{3}{8}(A_1A_2A_4 + A_2A_3A_4 + A_1A_3A_5 + A_2A_4A_5)\right.$$

$$\left.+ \frac{3}{16}(A_1^2A_5 + A_4^2A_5) + \cdots\right),$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2A_4\omega_1}{\beta_2\omega_0}\left(\omega_4^{lin}\right)^2$$

$$= \frac{9}{16}\mathrm{A}_4^3 + \frac{3}{4}A_4(\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + \mathrm{A}_3^2) + \frac{3}{8}A_1A_2A_3 + \frac{3}{16}(A_2\mathrm{A}_1^2 + A_2\mathrm{A}_3^2)$$

$$+ \mu\left(\frac{3}{4}A_4\mathrm{A}_5^2 + \frac{3}{8}(A_1A_2A_5 + A_2A_3A_5 + A_3A_4A_5) + \cdots\right),$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2A_5\omega_1}{\beta_2\omega_0}\left(\omega_5^{lin}\right)^2$$

$$= \frac{9}{16}\mathrm{A}_5^3 + \frac{3}{4}A_5(\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{A}_2^2 + \mathrm{A}_3^2 + \mathrm{A}_4^2) + \frac{3}{8}(A_1A_2A_4 + A_2A_3A_4)$$

$$+ \frac{3}{16}(A_1\mathrm{A}_2^2 + A_3\mathrm{A}_1^2 + A_1\mathrm{A}_3^2 + A_3\mathrm{A}_4^2) + \cdots,$$

То есть, при μ = 0 уравнения становятся «трехступенчатыми». Данную задачу можно решить методом рекуррентной последовательности. При μ = 1 система сводится к начальной форме. Для определения оставшихся переменных запишем уравнения [15-19]:

$$\omega_1 = \omega_1^{(0)} + \mu\omega_1^{(1)} + \mu^2\omega_1^{(2)} + \cdots,$$

$$A_j = A_j^{(0)} + \mu A_j^{(1)} + \mu^2 A_j^{(2)} + \cdots, \qquad j = 2,3,4 \ldots.$$

При этом первый член ряда $\omega_1^{(0)}$ определяется из первого уравнения системы из условия отсутствия в решении вековых членов, вызываемых основным тоном колебаний, а все последующие члены $\omega_1^{(j)}$, j = 2,3,4… - из условий отсутствия вековых членов, вызываемых дополнительными резонансными гармониками. Далее мы ограничиваемся в разложении первыми двумя членами.

Решение системы отвечает случаю, когда одновременно реализуются все нечетные гармоники:

$$A_{2i} = 0, i = 1,2,3 \ldots,$$

$$A_3 = 0.014493151 A_1,$$

$$A_5 = 0.000207090 A_1,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots;$$

$$\omega_1 = \frac{0.282688 A_1^2 \beta_2}{\omega_0}.$$

Искомая АЧХ может быть записана в виде:

$$\Omega_i = i\omega_0 \left(1 + 0.282688 \frac{A_1^2 \beta_2}{\omega_0^2} \varepsilon\right) + O(\varepsilon^2), i = 1,3,5 \ldots,$$

где $\omega_0 = \alpha\pi/l$.

Данное уравнение соотносится с условием наложения частотных спектров при $\beta_1 = 0$. Стоит уделить внимание случаю, когда система находится в преддверии состояния резонанса, стремиться его но, не достигает. То есть присутствует расщепление спектра. В этом состоянии переменная β_1 в уравнении приближается к нулю. Тогда общее уравнение запишем в виде:

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \delta\beta_1^* u - \varepsilon\beta_2 u^3 - \frac{M}{h}\delta(x - x_0, y - y_0)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где β_1^*, β_2 - некоторые коэффициенты, $\delta = \beta 1/ \beta_1^*$ - безразмерный малый параметр, характеризующий степень «расстройки», $\delta \to 0$.

Вводим преобразование времени. Решение краевой задачи ищем в виде асимптотических разложений по степеням δ:

$$u = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2 + \cdots,$$

$$\omega = \omega_0 + \delta \omega_1 + \delta^2 \omega_2 + \cdots,$$

члены которых, в свою очередь, представляем рядами:

$$u = u_{00} + \delta u_{01} + \delta^2 u_{02} + \cdots,$$

$$\omega = \omega_{00} + \delta \omega_{01} + \delta^2 \omega_{02} + \cdots,$$

$$u = u_{10} + \delta u_{11} + \delta^2 u_{12} + \cdots,$$

$$\omega = \omega_{10} + \delta \omega_{11} + \delta^2 \omega_{12} + \cdots,$$

где $\omega_0 = \alpha\pi/l$ - собственная частота основного тона колебаний при $\varepsilon = 0$ и $\delta = 0$.

Расщепляя исходную краевую задачу по степеням δ и ε, получаем следующую последовательность линейных уравнений:

$$a^2 \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial x^2} - \omega_{00}^2 \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial t^2} = 0,$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial x^2} - \omega_{00}^2 \frac{\partial^2 u_{01}}{\partial t^2} = 2\omega_{00}\omega_{01} \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial t^2} + \beta_2 u_{00}^3,$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2} - \omega_{00}^2 \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial t^2} = 2\omega_{00}\omega_{10} \frac{\partial^2 u_{00}}{\partial t^2} + \beta_2{}^* u_{00},$$

$$a^2\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial x^2}-\omega_{00}^2\frac{\partial^2 u_{11}}{\partial t^2}$$

$$=2\omega_{00}\omega_{10}\frac{\partial^2 u_{01}}{\partial t^2}+{\beta_1}^* u_{01}+2(\omega_{01}\omega_{10}+\omega_{00}\omega_{11})\frac{\partial^2 u_{00}}{\partial t^2}$$

$$+2\omega_{00}\omega_{01}\frac{\partial^2 u_{10}}{\partial t^2}+3\beta_2 u_{00}^2 u_{10,}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;$$

Граничные условия и условия периодичности запишутся в виде:

$$u_{ij}\big|_{x=0,l}=0,$$

$$u_{ij}(x,\tau)=u_{ij}(x,\tau+2\pi),\qquad i,j=0,1,2,\dots.$$

Первое уравнение последовательности с условиями позволяет определить u_{00}:

$$u_{00}=\sum_{i=1}^{\infty}A_i\sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right)\sin(i\tau).$$

Следующее приближение u_{01} может быть найдено из краевой задачи. Для предотвращения появления в разложении вековых членов, в правой части уравнения коэффициенты при членах вида $\sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right)\sin(i\tau), i=1,2,3\dots$ приравниваем нулю. Получаем бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2A_1}{\beta_2}\omega_{00}\omega_{01}$$

$$=\frac{9}{16}A_1^3+\frac{3}{4}A_1(A_2^2+A_3^2+A_4^2+A_5^2)$$

$$+\frac{3}{8}(A_1A_2A_4+A_2A_3A_4+A_1A_3A_5+A_2A_4A_5)+\frac{3}{16}(A_1^2A_3+A_2^2A_3)+\cdots,$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{8A_2}{\beta_2}\omega_{00}\omega_{01}$$

$$=\frac{9}{16}\mathrm{A}_2^3+\frac{3}{4}A_2(\mathrm{A}_1^2+\mathrm{A}_3^2+\mathrm{A}_4^2+\mathrm{A}_5^2)$$

$$+\frac{3}{8}(A_1A_2A_3+A_1A_3A_4+A_1A_2A_5+A_1A_4A_5+A_3A_4A_5)$$

$$+\frac{3}{16}(A_1^2A_4+A_3^2A_4)+\cdots,$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{18\ \mathrm{A}_3}{\beta_2}\omega_{00}\omega_{01}$$

$$=\frac{1}{16}\mathrm{A}_1^3+\frac{9}{16}\mathrm{A}_3^3+\frac{3}{4}\mathrm{A}_3(\mathrm{A}_1^2+\mathrm{A}_2^2+\mathrm{A}_4^2+\mathrm{A}_5^2)$$

$$+\frac{3}{8}(A_1A_2A_3+A_2A_3A_4+A_1A_3A_5+A_2A_4A_5)$$

$$+\frac{3}{16}(A_2^2A_1+A_1^2A_5+A_4^2A_5)\ \ldots,$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{32\ \mathrm{A}_4}{\beta_2}\omega_{00}\omega_{01}$$

$$=\frac{9}{16}\mathrm{A}_4^3+\frac{3}{4}\mathrm{A}_4(\mathrm{A}_1^2+\mathrm{A}_2^2+\mathrm{A}_3^2+\mathrm{A}_5^2)$$

$$+\frac{3}{8}(A_1A_2A_3+A_1A_2A_5+A_2A_3A_5+A_3A_4A_5)+\frac{3}{16}(A_1^2A_2+A_3^2A_2)\ \ldots,$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{50\ \mathrm{A}_5}{\beta_2}\omega_{00}\omega_{01}$$

$$=\frac{9}{16}\mathrm{A}_5^3+\frac{3}{4}\mathrm{A}_5(\mathrm{A}_1^2+\mathrm{A}_2^2+\mathrm{A}_3^2+\mathrm{A}_4^2)+\frac{3}{8}(A_1A_2A_4+A_2A_3A_4)$$

$$+\frac{3}{16}(A_2^2A_1+A_1^2A_3+A_3^2A_1+A_4^2A_3)\ \ldots,$$

…………………………………………………………………………………

Определяя неизвестные описанных уравнений с учетом способа гомотопической переменной, получаем:

$$\mathrm{A}_{2i} = 0, i = 1,2,3 \ldots,$$

$$A_3 = 0.014493151A_1,$$

$$A_5 = 0.000207090A_1$$

…………………..;

$$\omega_{01} = \frac{0.282688A_1^2\beta_2}{\omega_{00}}.$$

Функцию u_{01} можно представить в виде:

$$u_{01} = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x)\left(C_i^{(1)}\sin(i\tau) + C_i^{(2)}\cos\ (i\tau)\right),$$

где $f_i(x), C_i^{(1)}, C_i^{(2)}$ – некоторые функции и коэффициенты.

Определение граничного уравнения даёт возможность вычислить параметр u_{10}.

Условие отсутствия вековых членов в разложении требует, чтобы в правой части уравнения коэффициенты при членах вида $sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right)\sin(i\pi), i = 1,2,3, \ldots$ были приравнены нулю. Тогда уравнение примет вид:

$$\omega_{10} = \frac{\beta_1^*}{2\omega_{00}i^2},$$

$$u_{10} = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \sin\left(\frac{\pi i}{l}x\right)\sin(i\pi).$$

Стоит заметить, что дополнение ω_{10} к сущности всех i – х гармоник определяется её номером i.

Переменная u_{11} вычисляется из граничных условий. В текущей работе, в соответствии с вычисленными параметрами u_{01} характер отсутствия в уравнениях

Член u_{11} определяется из краевой задачи. В данном случае, с учетом определения вековых параметров находим бесконечную систему уравнений, линейных по отношению к ω_{11} и B_i, i=1,2,3…:

$$\frac{4M}{M_0}\frac{2}{3\beta_2}(\omega_{01}\omega_{10}A_1+\omega_{00}\omega_{11}A_1+\omega_{00}\omega_{01}B_1)$$
$$=\left(\frac{9}{16}A_1^2+\frac{1}{4}(A_2^2+A_3^2+A_4^2+A_5^2)+\frac{1}{8}(A_1A_3+A_2A_4+A_3A_5)\right)B_1$$
$$+\left(\frac{1}{2}A_1A_2+\frac{1}{8}(A_2A_3+A_1A_4+A_3A_4+A_2A_5+A_4A_5)\right)B_2$$
$$+\left(\frac{1}{16}(A_1^2+A_2^2)\frac{1}{2}A_1A_3+\frac{1}{8}(A_2A_4+A_1A_5+A_3A_5)\right)B_3$$
$$+\left(\frac{1}{2}A_1A_4+\frac{1}{8}(A_1A_2+A_2A_3+A_2A_5)\right)B_4$$
$$+\left(\frac{1}{16}(A_2^2+A_3^2)+\frac{1}{2}A_1A_5+\frac{1}{8}(A_1A_3+A_2A_4)\right)B_5+\cdots,$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{8}{3\beta_2}(\omega_{01}\omega_{10}A_2+\omega_{00}\omega_{11}A_2+\omega_{00}\omega_{01}B_2)$$

$$=\left(\frac{1}{2}A_1A_2+\frac{1}{8}(A_2A_3+A_1A_4+A_3A_4+A_2A_5+A_4A_5)\right)B_1$$

$$+\left(\frac{9}{16}A_2^2+\frac{1}{4}(A_1^2+A_3^2+A_4^2+A_5^2)+\frac{1}{8}(A_1A_3+A_1A_5)\right)B_2$$

$$+\left(\frac{1}{2}A_2A_3+\frac{1}{8}(A_1A_2+A_1A_4+A_3A_4+A_4A_5)\right)B_3$$

$$+\left(\frac{1}{16}(A_1^2+A_3^2)+\frac{1}{2}A_2A_4+\frac{1}{8}(A_1A_3+A_1A_5+A_3A_5)\right)B_4$$

$$+\left(\frac{1}{2}A_2A_5+\frac{1}{8}(A_1A_2+A_1A_4+A_3A_4)\right)B_5+\cdots,$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{6}{\beta_2}(\omega_{01}\omega_{10}A_3+\omega_{00}\omega_{11}A_3+\omega_{00}\omega_{01}B_3)$$

$$=\left(\frac{1}{16}(A_1^2+A_2^2)+\frac{1}{2}A_1A_3+\frac{1}{8}(A_2A_4+A_1A_5+A_3A_5)\right)B_1$$

$$+\left(\frac{1}{2}A_2A_3+\frac{1}{8}(A_1A_2+A_1A_4+A_3A_4+A_4A_5)\right)B_2$$

$$+\left(\frac{9}{16}A_3^2+\frac{1}{4}(A_1^2+A_2^2+A_4^2+A_5^2)+\frac{1}{8}(A_2A_4+A_1A_5)\right)B_3$$

$$+\left(\frac{1}{2}A_3A_4+\frac{1}{8}(A_1A_2+A_2A_3+A_2A_5+A_4A_5)\right)B_4$$

$$+\left(\frac{1}{16}(A_1^2+A_4^2)+\frac{1}{2}A_3A_5+\frac{1}{8}(A_1A_3+A_2A_4)\right)B_5+\cdots,$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{32}{3\beta_2}(\omega_{01}\omega_{10}A_4+\omega_{00}\omega_{11}A_4+\omega_{00}\omega_{01}B_4)$$

$$=\left(\frac{1}{2}A_4A_1+\frac{1}{8}(A_1A_2+A_2A_3+A_2A_5)\right)B_1$$

$$+\left(\frac{1}{16}(A_1^2+A_3^2)+\frac{1}{2}A_2A_4+\frac{1}{8}(A_1A_3+A_1A_5+A_3A_5)\right)B_2$$

$$+\left(\frac{1}{2}A_3A_4+\frac{1}{8}(A_1A_2+A_2A_3+A_2A_5+A_4A_5)\right)B_3$$

$$+\left(\frac{9}{16}A_4^2+\frac{1}{4}(A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_5^2)+\frac{1}{8}A_3A_5\right)B_4$$

$$+\left(\frac{1}{2}A_4A_5+\frac{1}{8}(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4)\right)B_5+\cdots,$$

$$\frac{4M}{M_0}\frac{50}{3\beta_2}(\omega_{01}\omega_{10}A_5+\omega_{00}\omega_{11}A_5+\omega_{00}\omega_{01}B_5)$$

$$=\left(\frac{1}{16}(A_2^2+A_3^2)+\frac{1}{2}A_1A_5+\frac{1}{8}(A_1A_3+A_2A_4)\right)B_1$$

$$+\left(\frac{1}{2}A_2A_5+\frac{1}{8}(A_1A_2+A_1A_4+A_3A_4)\right)B_2$$

$$+\left(\frac{1}{16}(A_1^2+A_4^2)+\frac{1}{2}A_3A_5+\frac{1}{8}(A_1A_3+A_2A_4)\right)B_3$$

$$+\left(\frac{1}{2}A_4A_5+\frac{1}{8}(A_1A_2+A_2A_3+A_3A_4)\right)B_4$$

$$+\left(\frac{9}{16}A_5^2+\frac{1}{4}(A_1^2+A_2^2+A_3^2+A_4^2)\right)B_5+\cdots,$$

....

Выводы

Получаем:

$$B_{2i} = 0, i = 1,2,3 \ldots,$$

$$B_3 = 0.014493151 B_1,$$

$$B_5 = 0.000207090 B_1$$

…………………..;

$$\omega_{11} = 0.565352 \frac{B_1 A_1 \beta_2}{\omega_{00}} - 0.141344 \frac{\beta_1^* \beta_2 A_1^2}{i^2 \omega_{00}^3}.$$

Опишем итоговое уравнение для вычисления форм и частотных характеристик колебаний:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} (A_i + \delta B_i) \sin\left(\frac{\pi i}{l} x\right) \sin(\Omega_i t) + O(\varepsilon) + O(\varepsilon\delta) + O(\sigma^2),$$

$$\Omega_i = \sqrt{i^2 \omega_{00}^2 + \beta_1^* \delta} + 0.282688 \frac{i^2 \beta_2 A_1^2}{\sqrt{i^2 \omega_{00}^2 + \beta_1^* \delta}} \varepsilon + 0.565352 \frac{i \beta_2 A_1 B_1}{\omega_{00}} \varepsilon\delta + o(\varepsilon)$$

$$+ o(\delta) + o(\varepsilon\delta), i = 1,2,3 \ldots,$$

где $\omega_{00} = \alpha\pi/l$. Полученные в данной работе численные результаты колебаний стержня, несущего присоединенную массу согласуются с имеющимися данными.

Библиографический список

1. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. Серия: Механика деформируемого твердого тела. – М.: ВИНИТИ, 1973. Т. 5. – 272 с.

2. Григолюк Э.И. Нелинейные колебания и устойчивость пологих стержней и оболочек // Известия АН СССР. Отд. техн. наук. 1955. № 3. С. 33 - 68.

3. Антуфьев Б.А. Колебания неоднородных тонкостенных конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2011. – 176 с.

4. Сысоев О.Е., Добрышкин А.Ю., Нейн Сит Наинг. Аналитическое и экспериментальное исследование свободных колебаний разомкнутых оболочек из сплава Д19, несущих систему присоединенных масс // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=90079

5. Z. Wang, Q. Han, D.H. Nash, P. Liu. Investigation on inconsistency of theoretical solution of thermal buckling critical temperature rise for cylindrical shell // Thin-Walled Structures, 2017, no. 119, pp. 438 - 446. DOI: 10.1016/j.tws.2017.07.002

6. Sysoev O.E., Dobryshkin A.Y., Nyein Sit Naing, Baenkhaev A.V. Investigation to the location influence of the unified mass on the formed vibrations of a thin containing extended shell // Materials Science Forum, 2019, vol. 945, pp. 885 – 892.

7. Y. Qu, Y. Chen, X. Long, H. Hua, G. Meng. Free and forced vibration analysis of uniform and stepped circular cylindrical shells using a domain decomposition method // Applied Acoustics, 2013, vol. 74, no. 3, pp. 425 – 439.

8. Y. Qu, H. Hua, G. Meng. A domain decomposition approach for vibration analysis of isotropic and composite cylindrical shells with arbitrary boundaries // Composite Structures, 2013, vol. 95, pp. 307 - 321.

9. Y. Xing, B. Liu, T. Xu. Exact solutions for free vibration of circular cylindrical shells with classical boundary conditions // International Journal of Mechanical Sciences, 2013, vol. 75, pp. 178 - 188.

10. M. Chen, K. Xie, W. Jia, K. Xu. Free and forced vibration of ring-stiffened conical–cylindrical shells with arbitrary boundary conditions // Ocean Engineering, 2015, vol. 108, pp. 241 - 256.

11. H. Li, M. Zhu, Z. Xu, Z. Wang, B. Wen. The influence on modal parameters of thin cylindrical shell under bolt looseness boundary // Shock and Vibration, 2016, vol. 2016, Article ID 4709257, 15 p.

12. Foster N., Fernández–Galiano L. Norman Foster in the 21st Century, AV Monografías, 2013, Artes Gráficas Palermo, 163 - 164.

13. Eliseev V.V., Moskalets A.A., Oborin E.A. One-dimensional models in turbine blades dynamics // Lecture Notes in Mechanical Engineering, 2016, vol. 9, pp. 93 - 104.

14. Hautsch N., Okhrin O., Ristig A. Efficient iterative maximum likelihood estimation of highparameterized time series models, Berlin, Humboldt University, 2014, 34 p.

15. Белосточный Г.Н., Мыльцина О.А. Статическое и динамическое поведение пологих оболочек под действием быстропеременных температурно-силовых воздействий // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58524

16. Кузнецова Е.Л., Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В., Медведский А.Л. Воздействие нестационарной распределенной нагрузки на поверхность упругого слоя // Труды МАИ, 2013, № 71. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=46621

17. Demin A.A., Golubeva T.N., Demina A.S. The program complex for research of fluctuations' ranges of plates and shells in magnetic field // 11th Students' Science Conference «Future Information technology solutions», Bedlewo, 3-6 October 2013, pp. 61 - 66.

18. Нуштаев Д.В., Жаворонок С.И., Клышников К.Ю., Овчаренко Е.А. Численно-экспериментальное исследование деформирования и устойчивости цилиндрической оболочки ячеистой структуры при осевом сжатии // Труды МАИ. 2015. № 82. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=58589

19. Грушенкова Е.Д., Могилевич Л.И., Попов В.С., Попова А.А. Продольные и изгибные колебания трехслойной пластины со сжимаемым заполнителем, контактирующей со слоем вязкой жидкости // Труды МАИ. 2019. № 106. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=105618