УДК: 519.8

# Построение агрегированного отношения предпочтения на основе нагруженного мажоритарного графа

С. О. Смерчинская, Н. П. Яшина

**Аннотация**

Задачи выбора возникают на этапах проектирования и создания современных образцов ракетно-космической техники, при проведении сравнительного анализа технических средств, а также при принятии решений в нестандартных условиях управления летательными аппаратами.

Предлагается алгоритм принятия решений на основе задания экспертных оценок, Агрегированное отношение предпочтения максимально отражает индивидуальные предпочтения экспертов и при этом не содержит противоречий. Метод основывается на построении нагруженного мажоритарного графа и использует оригинальные процедуры разрушения контуров отношений.

**Ключевые слова**

Принятие решений; групповой выбор; мажоритарный граф; отношение предпочтения; ранжирование; агрегированное предпочтение; расстояние Хэмминга; коэффициенты участия экспертов.

Рассмотрим множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$. На множестве $A$ заданы бинарные отношения предпочтения $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$. Будем полагать, что эти отношения – строгие порядки, в частности, строгие ранжирования. Необходимо построить агрегированное отношение предпочтения $\hat{\rho}$, также являющееся строгим порядком, и согласованное с предпочтениями $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$.

Обычно агрегированное отношение предпочтения используется при групповом выборе. В этом случае $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ – индивидуальные предпочтения экспертов. Агрегированное отношение  строится и при индивидуальном выборе, когда на основе различных процедур индивидуального выбора получено несколько различных отношений предпочтения.

Будем полагать, что упорядоченная пара альтернатив из $A$ $< a_i, a_j > \in \rho_t$ (или $a_i \rho_t a_j$), где $t = 1, ..., m$, если элемент $a_i$ менее предпочтителен, чем элемент $a_j$ *. Напомним, что строгим порядком называется транзитивное и асимметричное отношение.

Поставим каждому из отношений $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ в соответствие графы $G_1, G_2, ..., G_m$, причем $G_t = (A, \rho_t)$ – ориентированный граф с множеством вершин–альтернатив $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и множеством дуг $\rho_t$. Множество дуг – это множество упорядоченных пар $< a_i, a_j >$ $(a_i, a_j \in A)$, входящих в отношение $\rho_t$.

Обозначим $R^t = \left\| r_{ij}^t \right\|$ матрицу смежности графа $G_t = (A, \rho_t)$, $t = 1, ..., m$. Построим граф агрегированного предпочтения $\dot{\rho}$ $G = (A, \dot{\rho})$.

Потребуем от агрегированного отношения $\dot{\rho}$, чтобы оно удовлетворяло следующим условиям:

Условие 1: было непротиворечивым;

Условие 2: наиболее полно отражало индивидуальные предпочтения экспертов $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$, т. е. было с ними согласовано.

Формализуем условие 1.

Будем говорить «контуры отношения», имея в виду контуры соответствующего графа.

Определение 1. Отношение строгого порядка $\rho$ называется противоречивым, если оно содержит контуры.

Таким образом, выполнение условия 1 означает, что агрегированное отношение $\dot{\rho}$ не должно содержать контуров. Отсутствие контуров – необходимое условие для осуществления однозначного непустого выбора наилучших альтернатив.

---

* Отношения $\rho_i$ ($i$=1, ..., $m$) можно выбрать и по-другому: $< a_i, a_j > \in \rho \Leftrightarrow$ элемент $a_i$ предпочтительней, чем элемент $a_j$, но стандартные процедуры выбора наилучших альтернатив (ядро, доминирующее подмножество и т. п.) удобнее реализовывать для отношения «менее предпочтителен»

Следующие два примера демонстрируют, что в графе, содержащем контуры, такая стандартная процедура выбора наилучших альтернатив как нахождение ядра графа вообще невозможна для графа, представленного на рис. 1 и неоднозначна для графа на рис. 2.

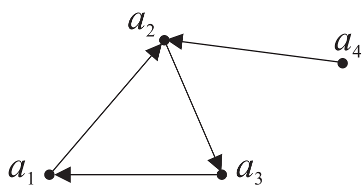

рис. 1

Действительно, граф, представленный на рис. 1 и содержащий контур нечетной длины, имеет максимальные внутренне устойчивые подмножества:

$\{a_1, a_4\}$, $\{a_2\}$, $\{a_3, a_4\}$; а минимальные внешне устойчивые подмножества:

$\{a_1, a_2\}$, $\{a_2, a_3\}$ и $\{a_1, a_4, a_3\}$. Таким образом, не существует подмножества, являющегося одновременно внутренне и внешне устойчивым, т. е. ядра.

Граф на рис. 2, содержит контур четной длины и имеет два ядра:

$$\{a_1, a_3\} \text{ и } \{a_2, a_4\}.$$

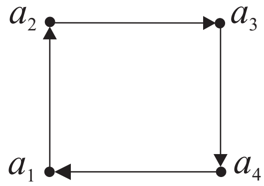

рис. 2

Покажем, что условие 1 будет выполнено, если агрегированное отношение предпочтения является строгим порядком.

Отношение строгого порядка $\rho$, заданного на множестве $A$ не содержит контуров.

Таким образом, отношение строгого порядка является непротиворечивым, т.к. не содержит контуров.

Формализуем условие 2 о согласованности агрегированного предпочтения с индивидуальными предпочтениями экспертов. Для этого введем понятие расстояния между отношениями (между графами).

Расстоянием между двумя отношениями $\rho_k$ и $\rho_t$ назовем величину $d(\rho_k, \rho_t)$ (или $d_{kt}$), равную числу несовпадений элементов $r_{ij}^k$ и $r_{ij}^t$ матриц смежности $R^k$ и $R^t$, где $i, j = 1,..,n$.

Очевидно,

$$d(\rho_k, \rho_t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} | r_{ij}^k - r_{ij}^t |. \tag{1}$$

Введенное таким образом расстояние является расстоянием Хэмминга и, следовательно, удовлетворяет аксиомам метрики:

1. $d(\rho_k, \rho_t) \geq 0$;

2. $d(\rho_k, \rho_t) = d(\rho_t, \rho_k)$;

3. $d(\rho_k, \rho_s) + d(\rho_s, \rho_t) \geq d(\rho_k, \rho_t)$ для любых $\rho_k$, $\rho_t$, $\rho_s$.

Для построения агрегированного отношения, наиболее полно отражающего предпочтения экспертов, т. е. для выполнения условия 2, необходимо, чтобы сумма расстояний между агрегированным отношением $\tilde{\rho}$ и отношениями $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ была минимальной:

$$D(\tilde{\rho}) = \sum_{t=1}^{m} d(\tilde{\rho}, \rho_t) \to \min. \tag{2}$$

При построении искомого агрегированного отношения будем использовать отношение предпочтения, соответствующее классическому мажоритарному графу [1]. Напомним, что мажоритарный граф – это ориентированный граф, вершинами которого являются альтернативы, а ориентированная дуга из вершины $a_i$ в вершину $a_j$ проводится в том и только в том случае, если число экспертов, предпочитающих альтернативу $a_i$ альтернативе $a_j$, превосходит половину общего числа экспертов. Для удобства применения классических процедур на графах изменим ориентацию дуг, а также поставим в соответствие каждой дуге графа вес.

Построим ориентированный нагруженный мажоритарный граф $G = (A, \rho_\Sigma)$ с множеством вершин-альтернатив $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и дугами $\rho_\Sigma = \{< a_i, a_j > | \, a_i, a_j \in A \text{ и } l_{ij} > 0\}$, где $l_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (r_{ij}^k - r_{ji}^k)$. Каждой дуге $< a_i, a_j > \in \rho_\Sigma$ поставим в соответствие вес $l_{ij}$, т. е. число экспертов, для которых альтернатива $a_i$ менее предпочтительна, чем альтернатива $a_j$ минус число экспертов, предпочитающих альтернативу $a_i$ альтернативе $a_j$. Матрицу смежности графа $G = (A, \rho_\Sigma)$ обозначим $R_\Sigma$.

Введем матрицу весов $C = \|c_{ij}\|$ – квадратная матрица порядка *n*, где *n* – число альтернатив, причем

$$c_{ij} = \begin{cases} l_{ij}, \text{ если } \exists \text{дуга} < a_i, a_j > \in \rho_\Sigma, \\ \infty, \qquad \text{иначе.} \end{cases}$$

Пограничную ситуацию $l_{ij} = 0$ желательно избегать, взяв нечетное число отношений $m$.

Причем мы не оговариваем, что дуга графа $< a_i, a_j > \in \rho_\Sigma$ существует только в том случае, когда число экспертов, предпочитающих альтернативу $a_i$ альтернативе $a_j$ больше половины всех экспертов. Но это обязательно будет так, если индивидуальные предпочтения экспертов – строгие ранжирования, и число экспертов нечетное.

Введем матрицу предпочтений $P_{n\times n} = \|p_{ij}\|$, где $p_{ij} = \sum_{k=1}^{m} r_{ij}^k$. С ее помощью удобно находить матрицу весов *C*:

$$c_{ij} = \begin{cases} p_{ij} - p_{ji}, & \text{если } \exists \text{дуга} < a_i, a_j > \in \rho_\Sigma, \\ \infty, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Приведем пример построения матрицы смежности $R_\Sigma$ отношения $\rho_\Sigma$.

Пример 1.

Рассмотрим случай трехэлементного множества альтернатив и профиль предпочтений 3-х экспертов – строгое ранжирование (нижняя строка содержит наименее предпочтительные альтернативы).

| $\rho_1$ | $\rho_2$ | $\rho_3$ |
|---|---|---|
| $a_2$ | $a_1$ | $a_2$ |
| $a_3$ | $a_2$ | $a_1$ |
| $a_1$ | $a_3$ | $a_3$ |

Этим отношениям соответствуют матрицы смежности

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица предпочтений имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Составим матрицу весов *C*:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty \\ 1 & 3 & \infty \end{pmatrix}.$$

В этом случае матрица смежности отношения $\rho_\Sigma$:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий граф изображен на рис. 3.

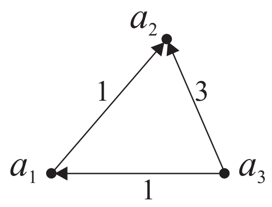


рис. 3 ■

По построению мажоритарный граф асимметричен, но пример, приведенный выше, показывает, что он может быть не транзитивен и содержать контуры.

Для построения агрегированного отношения, являющегося строгим порядком, т. е. асимметричного и транзитивного, нам понадобится следующее утверждение.

Утверждение 1. Если граф $G = (A, \rho)$ отношения $\rho$, заданного на множестве $A$, не имеет контуров, в частности петель, то транзитивное замыкание $\rho$ (Tr $\rho$) – строгий порядок. (Tr $\rho$ – это наименьшее транзитивное отношение, которое содержит $\rho$.)

*Доказательство*. Транзитивность выполняется по определению Tr $\rho$. Докажем, что Tr $\rho$ – асимметрично. Предположим, что это не так. Тогда существуют $a_i, a_j \in A$ ($i \neq j$, т. к. граф без петель), такие, что $< a_i, a_j > \in \mathrm{Tr}\,\rho$ и $< a_j, a_i > \in \mathrm{Tr}\,\rho$. $< a_i, a_j > \in \mathrm{Tr}\,\rho$, следовательно, существует путь $a_i, a_{k_1}, ..., a_{k_p}, a_j$. Аналогично, $< a_j, a_i > \in \mathrm{Tr}\,\rho$, следовательно, существует путь $a_j, a_{s_1}, ..., a_{s_q}, a_i$. А значит в графе $G$ есть контур $a_i, a_{k_1}, ..., a_{k_p}, a_j, a_{s_1}, ..., a_{s_q}, a_i$, что противоречит условию, что граф без контуров. ▲

Для построения агрегированного отношения строгого порядка $\hat{\rho}$ на $A$ построим вначале отношение $\rho$, разрушив контуры отношения $\rho_\Sigma$. Тогда, по утверждению 1, $\hat{\rho} = \mathrm{Tr}\,\rho_\Sigma$ – строгий порядок.

Напомним, что $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ – отношения строгого порядка и, следовательно, по утверждению 1 не содержат контуров, т. е. являются непротиворечивыми.

**Алгоритм построения отношения $\rho$ без контуров по $\rho_\Sigma$.**

1. Проверяем граф $G = (A, \rho_\Sigma)$ на наличие контуров. Если контуров нет, то граф $G = (A, \rho_\Sigma)$ без весов на дугах и есть искомый граф $G = (A, \rho)$. Если контуры есть, переходим к п. 2.

2. Из графа $G = (A, \rho_\Sigma)$ удаляем все дуги, которые принадлежат какому-либо контуру и имеют наименьший вес. Переходим к п. 1.

Замечание. Данный алгоритм позволяет построить единственное отношение $\rho$ по $\rho_{\Sigma}$, т. к. на каждой итерации из контуров удаляются все дуги одного (наименьшего) веса.

В процессе работы алгоритма матрица смежности $R_{\Sigma}$ изменяется, поэтому рекомендуем переписать ее в рабочую матрицу.

Будем рассматривать матрицы смежности как элементы булевой алгебры. Введем на множестве матриц операцию конъюнкцию "&":

$$R^k \ \& \ R^t = \left\| r_{ij}^k \ \& \ r_{ij}^t \right\|$$

(т. е. поэлементное умножение матриц).

Опишем алгоритм нахождения $K$ – матрицы смежности графа отношения $\rho_k$, в которой 1 соответствует дуге, входящей в какой-либо контур отношения $\rho_{\Sigma}$.

1°. Ищем контуры с помощью матрицы связности ненагруженного графа $G = (A, \rho_{\Sigma})$. Матрицу односторонней связности $S$ находим по матрице смежности $R_{\Sigma}$ [3].

2°. Находим матрицу сильной связности $\overline{S}$ по формуле

$$S \ \& \ S^{\mathrm{T}} = \overline{S} .$$

3°. Находим матрицу смежности контуров $K$:

$$\overline{S} \ \& \ R_{\Sigma} = K ,$$

единицы этой матрицы соответствуют дугам, входящим в какой-либо контур графа $G = (A, \rho_{\Sigma})$.

При программной реализации алгоритма число альтернатив и экспертов практически ничем не ограничивается.

Зададим правило подсчета для $\rho_{\Sigma}$ величины $d$ из формулы (2).

$R_{\Sigma} = \left\| r_{\Sigma ij} \right\|$ – матрица смежности отношения предпочтения $\rho_{\Sigma}$.

Тогда

$$D(\rho_{\Sigma}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} , \qquad (3)$$

где

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} p_{ij}, \ \text{если} \ r_{\Sigma ij} = 0, \\ m - p_{ij}, \ \text{если} \ r_{\Sigma ij} = 1 \end{cases}$$

($p_{ij}$ – элементы матрицы предпочтений $P_{n \times n} = \left\| p_{ij} \right\|$).

Для строгого ранжирования можно сократить расчет:

$D(\rho_{\Sigma}) = 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{i}\Delta_{ij}$ .

Отношение $\rho_{\Sigma}$ соответствует мажоритарному графу и, следовательно, $D(\rho_{\Sigma})$ рассчитывается для мажоритарного графа.

Сравним значения величин, полученных по формуле (3) для различных агрегированных отношений.

В работах [1], [2] приводятся следующие варианты построения агрегированного отношения.

1. Построение мажоритарного графа [1], т. е. построение отношения $\rho_{\Sigma}$. В этом случае в графе $G = (A, \rho_{\Sigma})$ могут быть контуры, и тогда выбор наилучших альтернатив затруднен (выше мы уже писали об этом).

2. Построение агрегированного отношения $r_a = \mathrm{Tr}\ r'$ [2], где отношение $r' = \rho_{\Sigma} \setminus \rho_k$, где $\rho_k$ – отношение, состоящее из дуг, входящих в какой-либо контур $\rho_{\Sigma}$. Таким образом, контуры из $\rho_{\Sigma}$ удаляются полностью. В этом случае мы можем удалить слишком много элементов $\rho_{\Sigma}$, вплоть до того, что $r' = \varnothing$.

В предложенном нами алгоритме контуры не удаляются полностью, а только разрушаются. При этом в первую очередь убираем из контуров $\rho_k$ дуги с наименьшим весом, т. е. с наименьшей разницей в предпочтениях между двумя альтернативами.

Утверждение 2. Пусть $D = \sum_{i=1}^{m} d(\rho_*, \rho_i)$, где $\rho_*$ – произвольное отношение на множестве *A*, отличное от $\rho_{\Sigma}$. Тогда

$D(\rho_{\Sigma}) \le D$.

Доказательство. Если из мажоритарного графа удалить дугу $< a_i, a_j >$, то $r_{\Sigma ij} = 0$ и в формуле (3) $\Delta_{ij}$ заменяется с $m - p_{ij}$ на $p_{ij}$. Но $m - p_{ij} < p_{ij}$. ▲

Из утв. 2 следует

$D(\rho_{\Sigma}) \le D_{A} \le D_{K}$,

где $D_{A}$ – рассчитывается для графа с применением нашего алгоритма; $D_{K}$ – рассчитывается для графа со всеми удаленными контурами. Но в мажоритарном графе могут содержаться контуры, т. е. условие 1 о непротиворечивости не выполняется.

Можно ли построить агрегированное отношение предпочтения не содержащее контуров и с меньшей величиной $D(\hat{\rho}) = \sum_{i=1}^{m} d(\hat{\rho}, \rho_i)$ ? Ответ утвердительный. Можно удалять в контуре не все дуги с наименьшим весом, а столько, сколько необходимо для разрушения контуров. Но в этом случае агрегированное отношение предпочтения будет строиться неоднозначно, т. е. можно получить несколько отношений без контуров с одним и тем же значением $D(\hat{\rho})$. Таким образом, не выполнится одно из основных условий – однозначный выбор наилучших альтернатив.

Заметим, если мажоритарный граф не содержит контуров, то агрегированное отношение получается одинаковым по алгоритму, предложенному в данной работе и по алгоритмам, описанным в работах [2], а агрегированное отношение, полученное с помощью мажоритарного графа, отличается только взятием транзитивного замыкания.

Пример 2.

Пусть множество альтернатив $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Задан профиль предпочтений экспертов при $m = 5$:

| $\rho_1$ | $\rho_2$ | $\rho_3$ | $\rho_4$ | $\rho_5$ |
|---|---|---|---|---|
| $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_2$ | $a_3$ |
| $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $a_3$ | $a_4$ | $a_1$ | $a_4$ | $a_1$ |
| $a_4$ | $a_1$ | $a_2$ | $a_1$ | $a_2$ |

Матрицы смежности соответствующих графов имеют вид:

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \; R^4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$R^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу предпочтений графа:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Затем с ее помощью вычислим матрицу весов:

$$C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 3 & 3 \\ 1 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 5 & \infty \end{pmatrix}$$

(соответствующий граф изображен на рис. 4). Матрица смежности отношения $\rho_\Sigma$ имеет вид:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

По алгоритму: все дуги входят в какой-либо контур. Выбрасываем дуги с весом 1, получаем (см. рис. 5):

ядро: $\{a_2, a_3\}$ – наилучшие варианты.

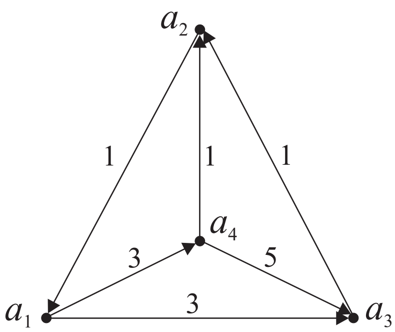


рис. 4

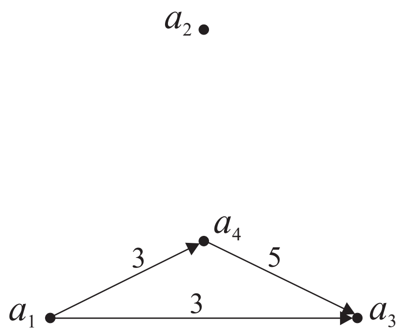


рис. 5

Найдем ядро мажоритарного графа.

Внутренне устойчивые подмножества: $\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_4\}$.

Внешне устойчивые подмножества: $\{a_1,a_2\},\{a_2,a_3\},\{a_2,a_4\}$.

Ядра нет.

Доминирующие подмножества (внешне устойчивые): 3 варианта.

Если убрать все контуры, то ядро: $\{a_1\},\{a_2\},\{a_3\},\{a_4\}$. ■

Модифицируем алгоритм для решения задач, в которых компетентность экспертов различна, и заданы весовые коэффициенты участия каждого эксперта в построении агрегированного отношения: $k_1,...,k_m$. (Например, если эксперты – члены какого-нибудь жюри, то председатель обычно имеет два голоса.) В этом случае каждому отношению предпочтения $\rho_t$ ($t = 1,...,m$) фактически ставится в соответствие нагруженный граф с весом каждой дуги $k_t$. Но для удобства работы алгоритма лучше не вводить соответствующие матрицы весов, а вместо матрицы смежности $R^t$ использовать матрицу $\widetilde{R}^t = k_t \cdot R^t$.

Если в результате работы алгоритма и последующего выбора наилучших альтернатив получен неудовлетворительный результат, например, слишком большое число наилучших альтернатив, предлагается, либо пересмотреть экспертные оценки и затем использовать алгоритм повторно; либо оценить компетентность экспертов на основе полученных от каждого из них отношений предпочтения. Для оценки компетентности экспертов выясним насколько каждое индивидуальное предпочтение $\rho_t$ ($t = 1,...,m$) согласованно с остальными предпочтениями экспертов. Для этого необходимо по формуле (2) найти величины $D(\rho_t)$. В соответствии с ними можно либо вообще удалить из рассмотрения отношения предпочтения, заданные наименее компетентными экспертами, либо ввести коэффициенты участия каждого эксперта, а затем применить алгоритм повторно.

Подробное исследование формирования коэффициентов участия экспертов выходит за рамки данной работы. Но ниже, на достаточно простом примере проиллюстрируем возможности алгоритма при введении коэффициентов участия экспертов в формировании агрегированного отношения предпочтения.

Пример 3.

Множество $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Задан профиль предпочтений экспертов при $m = 3$:

| $\rho_1$ | $\rho_2$ | $\rho_3$ |
|---|---|---|
| $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ |
| $a_3$ | $a_4$ | $a_1$ |
| $a_1$ | $a_1$ | $a_2$ |
| $a_4$ | $a_2$ | $a_3$ |

$$R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\ R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как обычно вычисляем сначала матрицы предпочтений

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

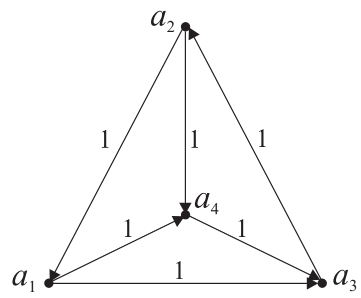

рис. 6

и весов

$$C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 1 & 1 \\ 1 & \infty & \infty & 1 \\ \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1 & \infty \end{pmatrix}$$ (см. граф на рис. 6). Получаем:

$$R_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Данный граф имеет контуры, причем все дуги принадлежат какому-нибудь контуру и имеют одинаковый вес – 1. По алгоритму все дуги выбрасываются и, следовательно, агрегированное отношение предпочтение не содержит ни одного элемента. Таким образом, наилучшими являются все четыре альтернативы. С целью сужения множества наилучших альтернатив найдем весовые коэффициенты участия экспертов.

Для этого найдем предварительно $D(\rho_\Sigma) = \sum_{i=1}^{3} d(\rho_\Sigma, \rho_i) = 6 + 2 + 4 = 12$. Затем для определения коэффициентов участия каждого эксперта вычислим по формуле (2) величины $D(\rho_i)$ ($i$=1, 2, 3), отражающие компетентность экспертов. Для этого предварительно найдем $d(\rho_1, \rho_2) = 8$, $d(\rho_1, \rho_3) = 10$, $d(\rho_2, \rho_3) = 6$. Просуммировав, получим $D(\rho_1) = 18$, $D(\rho_2) = 14$, $D(\rho_3) = 16$. Затем вычислим согласованные с ними весовые коэффициенты участия экспертов, произвольно положив, что они принадлежат отрезку [1, 2]: $k_1 = 1$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1{,}5$. Тогда:

$$\widetilde{R}^1 = R^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \ \widetilde{R}^2 = 2R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \ \widetilde{R}^3 = 1{,}5R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 0 & 0 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}5 & 0 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее, согласно алгоритму

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 3{,}5 \\ 3{,}5 & 0 & 2 & 3{,}5 \\ 1{,}5 & 2{,}5 & 0 & 1{,}5 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \ \widetilde{C} = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 1{,}5 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & \infty & \infty & 2{,}5 \\ \infty & 0{,}5 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 1{,}5 & \infty \end{pmatrix} \text{ (см. граф на рис. 7) и } \widetilde{R}_{\Sigma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

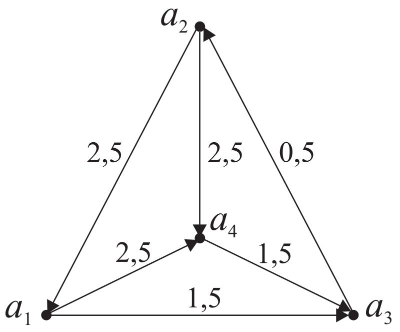


рис. 7

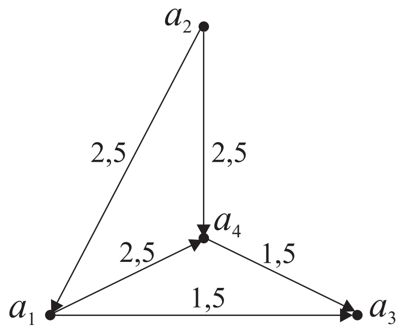


рис. 8

По алгоритму, для разрушения контура убираем дугу с весом 0,5 (рис. 8) и затем построим транзитивное замыкание отношения (см. рис. 9).

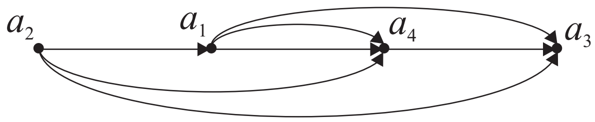


рис. 9

Получим: агрегированное отношение, совпадающее с упорядочением второго эксперта, что вполне естественно, так как величина $D(\rho_2) = 14$, что немного отличается от $D(R_{\Sigma}) = 12$ для мажоритарного графа. Очевидно, что ядро и, следовательно, наилучшая альтернатива – $a_3$.

В завершении отметим, что, выбрав даже небольшой интервал изменения коэффициентов участия экспертов, мы получили значительное изменение матрицы весов, при том что матрица смежности останется прежней, т.е. будет соответствовать мажоритарному графу. Изменение матрицы весов позволил нам разрушить контур графа, удалив всего лишь одну дугу, а именно $< a_3, a_2 >$ с весом 0,5.■

Предложенный в данной работе исходный алгоритм так же, как и модифицированный (с дополнительным вычислением коэффициентов участия экспертов), позволяет осуществлять однозначный выбор наилучших альтернатив, в частности, используя такую распространенную процедуру как нахождение ядра графа. Это обусловлено тем, что построенное с помощью данного алгоритма агрегированное отношение является строгим порядком и, следовательно, отвечает всем условиям однозначного непустого выбора лучших альтернатив:

— отсутствие контуров;

— транзитивность.

Теперь ответим на вопрос: насколько часто классический мажоритарный граф содержит контуры. Для этого приведем вероятностную оценку того, что мажоритарный граф не содержит контуров.

Утверждение 3. Если граф не имеет контуров, то он содержит хотя бы одну вершину $a_i$ такую, что $\Gamma a_i = \varnothing$ (нет исходящих дуг) и хотя бы одну вершину $a_j$ такую, что $\Gamma^{-1} a_j = \varnothing$ (нет входящих дуг).

Доказательство следует из того, что граф без контуров можно разложить на уровни [3]. А по определению уровней графа существуют вершины $a_i$ и $a_j$: $\Gamma a_i = \varnothing$ и $\Gamma^{-1} a_j = \varnothing$. ▲

В мажоритарном графе, построенном для индивидуальных предпочтений экспертов – строгое ранжирование, любые две вершины соединены ровно одной дугой. В этом случае вероятность того, что существует вершина $a_i$ такая, что $\Gamma a_i = \varnothing$ равна $p_{\Gamma} = \frac{n}{2^{n-1}}$ ($n$ – количество вершин). Среди оставшихся вершин вероятность существования $a_j$ такой, что $\Gamma^{-1} a_j = \varnothing$, равна, соответственно, $p_{\Gamma^{-1}} = \frac{n-1}{2^{n-2}}$. По комбинаторному правилу умножения получаем:

$$p = \frac{n}{2^{n-1}} \cdot \frac{n-1}{2^{n-2}}, \qquad n \geq 3. \tag{4}$$

Обозначим $p_{\bar{K}}$ – вероятность того, что мажоритарный граф не содержит контуров. Тогда

$$p_{\bar{K}} \leq p, \tag{5}$$

так как наличие вершин $a_i$ и $a_j$: $\Gamma a_i = \varnothing$ и $\Gamma^{-1} a_j = \varnothing$ есть необходимое, но не достаточное условие отсутствия контуров (см. рис. 10).

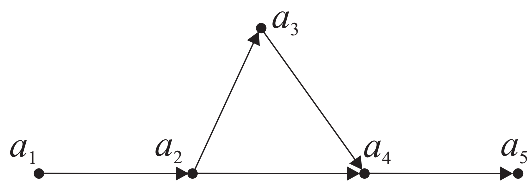


рис. 10

Оценка (5), с учетом формулы (4) показывает, что вероятность существования графа без контуров ничтожно мала.

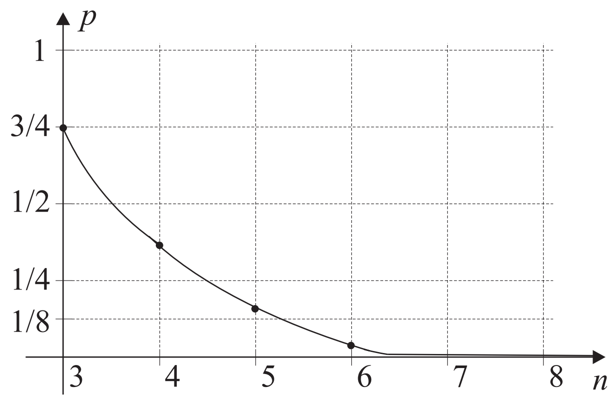


рис. 11

На рис. 11 предложен построенный по формуле (4) график зависимости вероятности того, что мажоритарный граф не содержит контуров, от числа альтернатив. Из графика видно, что вероятность существования мажоритарного графа без контуров ничтожно мала, начиная уже с 7 альтернатив. Конкретно, при $n = 7$ $p \approx 0{,}02$, а при $n = 8$ уже $\approx 0{,}007$. Этот факт усиливает преимущества предложенного в работе алгоритма по сравнению с алгоритмом построения мажоритарного графа.

Таким образом, предложенный в данной работе алгоритм построения агрегированного отношения предпочтения позволяет, максимально учитывая индивидуальные предпочтения экспертов, осуществлять единственный и непустой выбор наилучших альтернатив.

## Библиографический список

1. Миркин Г. Н. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
2. Осипова В. А., Подиновский В. В., Яшина Н. П. О непротиворечивом расширении отношений предпочтения в задачах принятия решений. //Журнал выч. мат. и мат. физики, 1984, №6. с. 831-839.
3. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику. М.: Наука, 1975.

**Сведения об авторах**

Смерчинская Светлана Олеговна, ст. преподаватель, Московский авиационный институт (государственный технический университет) Тел.: (499)158-48-11, mail: dep805@mai.ru.

Яшина Нина Павловна, доцент, Московский авиационный институт (государственный технический университет), к.ф.-м.н. Тел.: (499)158-48-11, mail: dep805@mai.ru.