

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи



Доброславский Александр Владимирович

**Исследование усредненных движений КА в ограниченной
задаче трех тел с учетом сил светового давления**

Специальность 01.02.01 —
«Теоретическая механика»

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Красильников Павел Сергеевич

Москва — 2021

Оглавление

	Стр.
Введение	4
Глава 1. Оценка времени пребывания спутника в зоне земной тени при движении в плоскости эклиптики	17
1.1 Определение зоны земной тени	17
1.2 Точка захода спутника в тень	18
1.3 Точка выхода спутника из зоны тени	20
1.4 Время нахождения в тени	21
1.5 Численное моделирование времени пребывания в тени	22
1.6 Заключение	25
Глава 2. Эволюция движений спутника в плоской ограниченной задаче трех тел с учетом светового давления	27
2.1 Возмущающая функция	27
2.2 Световое давление	29
2.3 Гипергеометрические функции	31
2.4 Строгое значение двукратно усреднённой возмущающей функции .	34
2.5 Усреднённые оскулирующие уравнения движения, первые интегралы	37
2.6 Случай Хилла	37
2.7 Качественный анализ	38
2.8 Численный расчет траекторий движения	41
2.9 Заключение	45
Глава 3. Эволюция движений спутника в плоской ограниченной планетной задаче четырех тел с учетом светового давления .	47
3.1 Постановка задачи	47
3.2 Возмущающая функция	49
3.3 Усреднённая возмущающая функция	50
3.4 Первые интегралы уравнений движения	55
3.5 Качественный анализ	55

	Стр.
3.6 Численный расчёт траекторий движения	60
3.7 Заключение	63
Глава 4. Эволюция движений спутника в пространственной круговой ограниченной задаче трех тел	69
4.1 Постановка задачи	69
4.2 Усреднение силовой функции	71
4.3 Численная проверка двукратного усреднения по схеме Гаусса . . .	79
4.4 Усредненные уравнения движений	82
4.5 Качественный анализ	83
4.6 Заключение	99
Заключение по диссертации	101
Список литературы	104
Список рисунков	111
Список таблиц	113
Приложение А. Приближения силовых функций в ограниченной пространственной задаче трех тел	114
A.1 Второе приближение силовой функции	114
A.2 Третье приближение силовой функции	116
A.3 Четвертое приближение силовой функции	118

Введение

Световое давление является важной составляющей при расчете параметров движения небесных объектов с большим отношением площади миделева сечения к массе. Как известно, началом исследования влияния сил светового давления на пассивно гравитирующее тело стала работа Радзиевского [1], в которой ограниченная задача трех тел была обобщена на фотогравитационный случай, благодаря введенному коэффициенту редукции. Интерес к проблеме возрос в связи с исследованием движения спутника Vanguard I, деградация орбиты которого превосходила расчетные значения. В работах Мюзена [2] и Паркинсона и др. [3] было учтено влияние сил светового давления на спутник в первом приближении классической теории возмущений, хотя заход спутника в земную тень не учитывался. В работе Поляховой [4] были рассмотрены резонансы для широкого класса орбит спутников-баллонов, хотя теневой эффект во внимание также не принимался.

Большую роль фактор светового давления сыграл при исследовании движения спутников-баллонов Echo 1, Echo 2 и PAGEOS, чему посвящен целый ряд работ, среди которых следует упомянуть работу Козаи [5], где впервые было решено уравнение тени. Брайант [6], используя идеи метода усреднения, описал явное изменение большой полуоси орбиты за период обращения спутника по орбите с учетом эффекта тени. Он показал также, что в отсутствии тени большая полуось орбиты спутника сохраняет свое невозмущенное значение. В работе Ферраз-Мелло [7] было предложено учитывать заход спутника в тень путем введения теневой функции. В работах С.Н. Вашковьяк [8; 9] было предложено теневую функцию рассчитывать в виде ряда по полиномам Лежандра и выражать через элементы орбиты, в результате чего были получены вековые и долгопериодические возмущения элементов орбиты под влиянием светового давления и сжатия Земли у полюсов. В монографии Аксёнова [10] исследовано влияние светового давления и земной тени на эволюцию кеплеровских элементов орбиты в первом приближении метода малого параметра.

Фотогравитационный эффект исследовался и в некоторых специальных случаях задачи четырёх тел. В работах Кальворидиса [11; 12] исследовались периодические орбиты пассивно гравитирующей точки в фотогравитационной прямолинейной ограниченной задаче четырёх тел. В работе Пападориса и Па-

падакиса [13] исследованы положения относительного равновесия пассивно гравитирующей точки в поле притяжения трёх массивных материальных точек, находящихся в вершинах треугольника Лагранжа, при условии, что одно из тел является источником излучения. В работе Миттала [14] рассматриваются движения спутника под воздействием уже трёх излучающих тел, находящихся в вершинах равностороннего треугольника.

В работе Куницына и Пережогина [15] рассматривалась плоская ограниченная круговая задача трех тел с солнечным давлением, численно исследовалась устойчивость треугольных точек либрации. Как известно из исследований Ляпунова, эти точки строго устойчивы практически во всей области параметров, неустойчивость была обнаружена на резонансной кривой третьего и на большей части резонансной кривой четвертого порядка. В следующей статье Куницына и Турешбаева [16] исследовался вопрос поведения частиц в трехпараметрической ограниченной задаче трех тел под действием солнечного давления в коллинеарных точках либрации системы Земля-Солнце, было получено, что внутренние коллинеарные точки могут быть устойчивы по первому приближению в некоторой области пространства параметров. В работе Степанова и др. [17] рассматривается ограниченная задача четырех тел, где на частицы в окрестности треугольных точек либрации системы Земля-Луна (облака Кордылевского) оказывается фотогравитационное воздействие со стороны Солнца. Численно показывается, что каждая их треугольных точек охватывается устойчивыми периодическими траекториями, из устойчивости которых следует, что пылевое облако при малых возмущениях начальных условий движется в окрестности периодического решения. Учет светового давления приводит к изменению формы периодических траекторий.

Исследование движения объектов большой парусности приобретает особое значение в связи с космическим мусором, движущимся на высоких орбитах. Так, в работе Кривова и др. [18], наряду с возмущениями от зональных гармоник, рассмотрены возмущения от сил светового давления на объекты космического мусора. Эта же задача, но дополненная возмущениями от электромагнитных сил, рассматривается в работе Гамильтона [19].

В августе 2018 года стартовала миссия Parker Solar Probe [20] в чьи задачи входит изучение солнечной короны. Параметры зонда позволяют его отнести к объектам с большим отношением площади миделева сечения к массе.

Пересечение такими объектами зоны земной тени вносит дополнительное возмущение в их движение. При этом исследователи полагали тень Земли цилиндрической: Ферраз-Мелло [7], Лидов [21; 22], Вашковьяк [9], хотя в работе Лидова [22] оговаривалось, что используемый расчетно-аналитический метод годится и для других форм земной тени. При рассмотрении светового давления на спутник находящийся в значительном удалении от Земли в задачах трех [23] и четырех тел [24] эффектом земной тени можно пренебречь. Но, поскольку отсутствует оценка влияния земной тени в этих случаях, требуется обоснование таким математическим моделям.

Для исследования орбит вышеупомянутых объектов на значительных временных промежутках используется, в частности, метод усреднения, впервые примененный при исследовании эволюции орбиты малой планеты Церера в рамках дважды усредненной круговой ограниченной задачи трех тел, которое было проведено К. Гауссом [25]. Приложения метода к классической задаче трех тел были подробно разобраны в статьях Моисеева [26; 27], где наряду со схемой Гаусса были рассмотрены задача Фату, Делоне-Хилла, обобщенная задача Делоне-Хилла в плоском и пространственном случаях. В работе Эша [28] метод двойного усреднения используется для решения ограниченной задачи четырёх тел, в частности, используется техника, впервые применённая Гауссом, следуя которой Луна представляется материальным кольцом, при этом были рассмотрены траектории движения спутника, как находящиеся внутри лунной орбиты, так и вовне.

В более поздних статьях описаны эволюционные эффекты в орбитальном движении спутника в задаче трех тел. Так, хорошо известен эффект Лидова-Козаи [29–31], при котором наклонение орбиты спутника к плоскости орбиты возмущающего тела влияет, в зависимости от значения большой полуоси, на эволюцию эксцентриситета исследуемой орбиты и на диапазон его изменения. В работе Лидова [29], описана эволюция орбиты спутника планеты в рамках эллиптической задачи трех тел для случая Хилла (случай малого отношения большой невозмущенной полуоси орбиты спутника к радиусу орбиты планеты); был описан эффект падения спутника на центральное тело, когда плоскость орбитального движения спутника перпендикулярна плоскости орбиты возмущающего тела. В работе Козаи [31] получено приближенное выражение для дважды усредненной возмущенной силовой функции в астероидной круговой задаче трех тел, вычислены значения критических наклонов орбит. В работе Сидо-

ренко [32] исследуется эксцентрический эффект Козаи-Лидова, который может быть интерпретирован как резонансный эффект. Также представляет интерес случай коорбитального движения, при котором астероид и планета вращаются вокруг Солнца в противоположных направлениях, рассмотренный в работе Сидоренко [33] в контексте пространственной ограниченной круговой задачи трех тел.

Аксёнов [34] получил аналитическое выражение для дважды усредненной возмущенной силовой функции в круговой задаче трех в виде ряда Фурье, коэффициенты которого выражаются через специальные функции, записанные в виде квадратур. В этой же работе дано обоснование методу усреднения Гаусса, заменяющему процедуру усреднения по средней аномалии движения планеты равномерным размазыванием массы планеты по ее орбите в круговой задаче трех тел. Для пространственной задачи трех тел усредненные уравнения движения спутника аналитически исследованы для «внутреннего», хилловского случая [35], при котором расстояние между главными телами (Солнцем и Юпитером) существенно превосходит расстояние от спутника до Солнца, и для «внешнего» хилловского случая [36], когда спутник находится гораздо дальше от Солнца, чем Юпитер. В статье Лидова [35] на основе численного расчета сделан вывод о неустойчивости орбиты фиктивной Луны, в случае, когда орбита Луны почти перпендикулярна плоскости эклиптики. Исследования проведены также для случая малых наклонов орбиты спутника к плоскости эклиптики, для случая близких орбит спутника и возмущающего небесного тела (Юпитера) [37]. Общий случай гамильтониана задачи исследован в статьях Вашковьяка [38–40]: численно построены фазовые портреты усредненной системы для произвольных значений известных интегралов системы для внутренней задачи. То же, но для случая внешней задачи построено в работе [41].

Решение плоской ограниченной эллиптической задачи трёх тел методом двойного усреднения без учёта сил светового давления было получено также в работах Аксёнова [42; 43]: показано, что усреднённые уравнения движения допускают два первых интеграла, исследованы траектории движения спутника, в частности траектории падения спутника на центральное тело. Качественные исследования плоской эллиптической задачи были продолжены в серии работ [44–46], где были подробно рассмотрены случаи циркуляции перицентра орбиты, случай либрации перицентра.

Заметим также, что метод усреднения эффективно используется и в задачах о вращательных движениях спутников на эволюционирующих орбитах: усреднение используется в статьях Тихонова [47;48] при исследовании устойчивости программного вращательного движения спутника вокруг его центра масс на эволюционирующей орбите. Использование метода функций Ляпунова в сочетании с приемом усреднения уравнений вращательного движения спутника эффективно применялось в [48] для обоснования асимптотической устойчивости стабилизируемого движения. В монографии Асланова [49] метод усреднения используется применительно к динамике вращательных движений твердого тела.

Помимо метода усреднения для исследования эволюции орбит в задаче трех тел на длительных промежутках времени используются другие методы, в частности метод аппроксимирующего отображения [50], когда эксцентриситет пассивно гравитирующего тела мал, а большая полуось близка к большой полуоси планеты. Отображение основано на приближении, согласно которому возмущения орбиты пассивно гравитирующего тела локализованы вблизи соединения с планетой. Используется отображение, чтобы подтвердить результат Уиздома [51] о том, что первоначально круговые орбиты тестовых частиц являются хаотическими.

Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию движения спутников с большим отношением площади поперечного сечения к массе (спутника-баллона) в ограниченной задаче трех тел под действием сил светового давления. Поскольку силы светового давления имеют естественный характер (неуправляемые), задача относится к классу фотогравитационных задач. Основным методом исследования был выбран метод усреднения уравнений движения по двум быстрым переменным задачи – средним аномалиям возмущающего тела и спутника.

Диссертация состоит из четырех глав: Глава I. Оценка времени пребывания спутника в зоне земной тени при движении в плоскости эклиптики. Глава II. Эволюция движений спутника в плоской ограниченной задаче трех тел с учетом светового давления. Глава III. Эволюция движений спутника в плоской ограниченной планетной задаче четырех тел с учетом светового давления. Глава IV. Эволюция движений спутника в пространственной круговой ограниченной задаче трех тел с учетом светового давления. Внутренняя задача.

В первой части работы была рассмотрена процедура определения конуса земной тени при движении спутника в плоскости эклиптики. Были найдены гра-

ницы конусной тени и точки ее пересечения с эллиптической орбитой спутника, в том числе установлено, что случай точек пересечения спутником цилиндрической тени является частным случаем конусного варианта тени.

На основе численного моделирования была дана оценка среднему времени пребывания спутника в зоне земной тени в зависимости от параметров его орбиты во внешней сфере гравитационного влияния Земли, в частности установлено, что увеличение большой полуоси спутника a ведет к уменьшению среднего времени нахождения в земной тени. Также установлено, что увеличение эксцентриситета e приводит к увеличению среднего времени нахождения спутника в тени, хотя с приближением к внешней границе сферы гравитационного влияния Земли влияние уменьшается.

Сравнение результатов, полученных при рассмотрении конической формы тени с результатами, полученными для цилиндрической формы показало, что во внутренней сфере гравитационного влияния Земли разница между конусной и цилиндрической моделью тени невелика, однако с увеличением большой полуоси орбиты a цилиндрическая модель тени дает большую погрешность, и в этом случае коническая модель предпочтительнее.

Было также установлено, что относительная длительность пребывания в конической земной тени, при движении спутника в плоскости эклиптики по орбитам, находящимся полностью во внешней сфере Хилла Земли, не превышает 0.62% от периода обращения, что позволяет не учитывать тень при качественном анализе движений спутника.

Во второй части работы была исследована эволюция высоких орбит спутника Земли в ограниченной задаче трех тел, под действием гравитационных возмущений со стороны Солнца и светового давления без учета земной тени, когда невозмущенная траектория спутника – кеплеровский эллипс, принадлежащий плоскости эклиптики. Была представлена возмущающая функция задачи при условии, что спутник является шаром, получено также среднее значение возмущающей функции в отсутствии резонансов между средним невозмущенным движением спутника и средним движением Солнца. Для вывода формул усредненного движения был привлечен аппарат обобщенных гипергеометрических функций.

Показано, что первыми интегралами усредненных оскулирующих уравнений являются большая полуось орбиты спутника a и среднее значение возмущающей функции R^{**} . Был подробно изучен хилловский вариант задачи,

при котором расстояние до спутника много меньше расстояния между Землей и Солнцем: построены фазовые портреты колебаний при разных значениях параметров.

Показано также, что существует три типа эволюционирующих орбит: орбиты либрационного и ротационного типов и орбиты столкновения с Землей. Для орбит первого типа оскулирующие аргумент перицентра и эксцентриситет меняются периодически, но с малыми амплитудами, орбита близка к траектории, сохраняющей значения своих невозмущенных кеплеровских элементов во все время движения.

Особенность семейства орбит второго типа – непрерывно возрастающий аргумент перицентра, и, как следствие, медленное вращение линия апсид оскулирующего эллипса, на которое накладывается медленное периодическое изменение эксцентриситета.

Орбиты столкновения характеризуются оскулирующими эксцентриситетами, близкими к единице. В этом случае расстояние между Землей и перицентром орбиты мало, что ведет к столкновению спутника-баллона с Землей. Заметим, что этот класс орбит требует уточнения, ввиду того, что не была учтена зона земной тени.

Численное моделирование траекторий позволило описать дополнительные эффекты, вызванные световым давлением: смещение ограниченной траектории спутника как целого относительно траектории классической задачи трех тел в область, более удаленную от Солнца.

В третьей части работы была рассмотрена плоская ограниченная планетная задача четырех тел с учётом сил светового давления, когда орбита Земли – кеплеровский эллипс с фокусом в Солнце, орбита Луны – кеплеровский эллипс с фокусом в Земле, спутник Земли – пассивно гравитирующее тело.

Получена усреднённая силовая функция задачи в оскулирующих элементах в нерезонансном случае, когда невозмущённая орбита спутника Земли принадлежит внешней сфере гравитационного влияния Земли, расположенной за лунной сферой Хилла. Показано, что интегралами усреднённых уравнений в оскулирующих элементах являются большая полуось орбиты спутника a и среднее значение силовой функции R^{***} . Исследованы стационарные режимы колебаний, их бифуркация в зависимости от коэффициента светового давления δ и большой полуоси невозмущённой орбиты спутника a . Показано, что при фиксированном параметре большой полуоси, существует два бифуркационных

значения коэффициента светового давления. Бифуркации также наблюдаются при фиксированном значении δ .

Построены фазовые портреты колебаний при разных значениях коэффициента светового давления δ , имеющие гораздо более сложный вид, чем в плоской задаче трех тел.

Показано, что существует два типа эволюционирующих орбит: орбиты либрационного и ротационного типов. Для орбит первого типа оскулирующие аргумент перицентра и эксцентриситет меняются периодически, но с малыми амплитудами, орбита близка к траектории, отвечающей стационарной точке и сохраняющей значения своих невозмущённых кеплеровских элементов во всё время движения.

Орбиты второго типа имеют непрерывно возрастающий аргумент перицентра, и, как следствие, медленное вращение линии апсид оскулирующего эллипса, на которое накладывается медленное периодическое изменение эксцентриситета.

Притяжение спутника Луной сильно осложняет проведение расчётов в окрестности эксцентриситета $e = 1$, так как при этом коэффициенты ряда полученной силовой функции R^{***} быстро возрастают по величине при $e \rightarrow 1$ и ряд расходится. Поэтому, в отличие от плоской ограниченной задачи трёх тел, численный счёт не подтвердил наличие орбит столкновения с Землёй, для которых эксцентриситет близок к единице.

Описаны дополнительные эффекты, вызванные световым давлением: смещение ограниченной траектории спутника как целого относительно траектории классической задачи четырёх тел в область, более удалённую от Солнца.

В четвертой части работы рассмотрена пространственная ограниченная круговая задача трех тел в нерезонансном случае. Предполагается, что пассивно гравитирующее тело (спутник) имеет большую парусность, что делает необходимым учет светового давления. Изучение эволюции орбиты спутника проводится на основе схемы Гаусса: исследуются усредненные уравнения движений в кеплеровом фазовом пространстве, когда в качестве невозмущенной орбиты берется кеплеровский эллипс с фокусом в основном теле (Солнце), находящийся внутри сферы, радиус которой равен радиусу орбиты внешней планеты (внутренняя задача).

Известно, что исследование усредненной модели в классическом случае, когда световым давлением пренебрегают, сталкивается с немалыми трудностями

как при вычислении усредненной силовой функции, так и при анализе эволюционирующих орбит.

Показано, что дважды усредненная силовая функция допускает, на основе применения формулы Парсеваля, явное аналитическое представление через гипергеометрические (обобщенные гипергеометрические) функции, допускающие разложение в сходящиеся степенные ряды. Показано также, что усредненные уравнения движения, учитывающие дополнительное влияние светового давления, интегрируются по Лиувиллю (имеются три независимых первых интеграла в инволюции).

В плоскости кеплеровских элементов (e, ω) построены фазовые портреты колебаний во втором, третьем и четвертом приближениях силовой функции, численно подтверждено наличие кривых неаналитичности силовой функции, вдоль которых ее ряд Фурье расходится. Также численно подтверждено, что ряд Фурье является асимптотическим и, как следствие, расходящийся ряд Фурье можно аппроксимировать аналитической функцией, состоящей из совокупности первых 20-ти членов этого ряда.

Анализ эволюционных движений задачи выявил два бифуркационных параметра для третьего и четвертого приближений силовой функции: большую полуось орбиты спутника a и значение интеграла Лидова-Козаи c_1 . Вместе с тем установлено, что существенного влияния на качественную картину световое давление не оказывает.

Целью данной работы является исследование движения пассивно гравитирующего тела, возмущенного силой светового давления в ограниченной задаче трех и четырех тел в плоской и пространственной постановке методом усреднения.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать влияние зоны земной тени на движение спутника в случае асимптотически большого промежутка времени в фотогравитационной задаче трех тел.
2. Исследовать эволюционные эффекты в плоской ограниченной задаче трех тел на основе двойного усреднения силовой функции задачи.
3. Исследовать эволюционные эффекты в движении спутника-баллона в плоской ограниченной планетной задаче четырех тел с учетом сил све-

тового давления на асимптотически больших промежутках времени на основе троекратного усреднения оскулирующих уравнений движения, записанных в кеплеровских элементах орбиты.

4. Исследовать эволюцию пространственных орбит искусственного спутника Солнца с учетом возмущений от внешней планеты (Юпитера) и от солнечного давления.

Научная новизна:

1. В настоящее время хорошо известны исследования двукратно усредненной классической ограниченной задачи трех тел. Для фотогравитационной задачи трех тел такие исследования являются новыми.
2. Показано наличие новых положений равновесия, а также новых областей осциллирующих движений в плоскости элементов орбиты (e, ω) по сравнению с классической ограниченной задачей трех тел.
3. Показано, что фотогравитационный случай приводит к бифуркации положения равновесия по параметру светового давления на спутник δ и по большой полуоси орбиты спутника a в случае задачи четырех тел.
4. Исследовано влияния конической тени на среднее движение спутника по эллиптической орбите в плоскости эклиптики, ранее такие исследования не производились.
5. Впервые показано, что дважды усредненная силовая функция допускает, на основе применения формулы Парсевалья, явное аналитическое представление через гипергеометрические (обобщенные гипергеометрические) функции, допускающие разложение в сходящиеся степенные ряды.
6. В плоскости кеплеровских элементов (e, ω) пространственной ограниченной задачи трех тел впервые построены фазовые портреты колебаний во втором, третьем и четвертом приближениях силовой функции.

Научная и практическая значимость полученных в диссертационной работе результатов состоит в следующем:

1. Получено уравнение пребывания ИСЗ в зоне земной тени при его движении в плоскости эклиптики. Дана количественная оценка относительного времени пребывания ИСЗ в земной тени в зависимости от элементов орбиты.

2. Получена усредненная возмущающая функция в плоской ограниченной эллиптической задаче трех тел с учетом сил светового давления.
3. Получена усредненная возмущающая функция в плоской ограниченной эллиптической задаче четырех тел с учетом сил светового давления. Определены бифуркационные параметры задачи.
4. Получена усредненная возмущающая функция в пространственной ограниченной круговой фотогравитационной задаче трех тел во внутреннем астероидном варианте. Определены бифуркационные параметры задачи.
5. Получен эффект сдвига траекторий ИСЗ в сторону, более удаленную от Солнца, по сравнению с классической ограниченной задачей трех тел.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе применяется классический для теории дифференциальных уравнений и небесной механики метод усреднения по средним аномалиям объекта и возмущающего тела. Также применяется аппарат гипергеометрических и обобщенных гипергеометрических функций.

Основные положения, выносимые на защиту:

1. Получено уравнение конической тени, для тела, движущегося по эллиптической орбите в плоскости эклиптики.
2. Получена количественная оценка относительного времени пребывания ИСЗ, движущегося в плоскости эклиптики, в земной тени в зависимости от элементов орбиты
3. Описана эволюция высоких орбит в плоской эллиптической задаче трех тел с учетом светового давления: получена усредненная силовая функция задачи, построен фазовый портрет колебаний по эксцентриситету и аргументу перицентра эволюционирующего эллипса в зависимости от коэффициента светового давления δ . Получены орбиты столкновения с Землей.
4. Описана эволюция высоких орбит в плоской эллиптической планетной задаче четырех тел с учетом светового давления: получена усредненная силовая функция задачи, найдены бифуркационные параметры, построены фазовые портреты колебаний по эксцентриситету и аргументу перицентра эволюционирующего эллипса в зависимости от коэффициента светового давления δ .

5. Описана эволюция высоких орбит в пространственной ограниченной круговой задаче трех тел: получена усредненная силовая функция задачи, найдены бифуркационные параметры, построены фазовые портреты колебаний по эксцентриситету и аргументу перицентра эволюционирующего эллипса в хилловском, а также во втором, в третьем и четвертом приближениях.

Достоверность полученных результатов обеспечивается: 1) строгим использованием математического аппарата теоретической и небесной механики, 2) применением классических аналитических и приближенно-аналитических методов исследования, 3) использованием CAS Mathematica 11.3.

Апробация работы. Основные результаты диссертационной работы докладывались и обсуждались на следующих научных конференциях и научных семинарах: 1) Семинаре «Аналитическая механика и теория устойчивости» (Москва, МГУ, 2018, 2020), 2) Семинаре «Динамические системы и механика» кафедр 811 и 802 (Москва, МАИ, 2019, 2020), 3) Международных конференциях по дифференциальным уравнениям и динамическим системам DIFF2018 и DIFF2020 (Суздаль, 2018, 2020), 4) 19-ой международной конференции «Авиация и космонавтика» (Москва, 2020), 5) XII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (Уфа, 2019), 6) IX международной конференции по механике «Поляховские чтения» (Санкт-Петербург, 2021), 7) Международной конференции «Проблемы механики и управления» (Махачкала, 2018), 8) XII и XIII международных конференциях по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (Алушта, 2018, 2020), 9) XXI международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам (Алушта, 2019), 10) XLIII и XLV Академических чтениях по космонавтике (Москва, 2019, 2021).

Личный вклад. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в диссертационной работе. Также автором реализованы используемые аналитические методы компьютерной алгебры в среде Mathematica. Выбор методов анализа, круга рассматриваемых задач, идея применения формулы Парсевалея и вывод формулы (4.15) в главе 4 принадлежат проф. П. С. Красильникову.

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 16 печатных работах, 4 из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК и

индексируемых в WoS и Scopus [23;24;52;53], 2 — в трудах конференций (Scopus) [54; 55], 10 — в тезисах докладов.

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и приложения. Полный объём диссертации составляет 120 страниц, включая 41 рисунок и 1 таблицу. Список литературы содержит 0 наименований.

Глава 1. Оценка времени пребывания спутника в зоне земной тени при движении в плоскости эклиптики

В главе рассматривается процедура определения конуса земной тени при движении спутника в плоскости эклиптики. Исследуется влияние конуса земной на эллиптическое движение спутника на асимптотически больших промежутках времени в сравнении с цилиндрической формой тени. Сравнение орбит производится как во внутренней сфере гравитационного влияния Земли, так и во внешней сфере Хилла [52].

1.1 Определение зоны земной тени

Рассмотрим движение спутника в плоскости эклиптики (см. рис. 1.1). Пусть E – центр Земли, свяжем с ним полярную систему координат (r, θ) , ось которой направим в центр Солнца S . Введем обозначения: пусть R_E – радиус Земли, R_S – радиус Солнца, а $r_S = ES$ – расстояние от Земли до Солнца. Пусть также F – вершина конуса земной тени, а $r_f = EF$ – расстояние от нее до Земли, которое подлежит определению.

Тогда, из подобия треугольников $\triangle FEE_1$ и $\triangle FSS_1$, а также представления кеплеровской орбиты Солнца, как функции истинной аномалии, следует выражение:

$$r_f(\nu_S) = \frac{a_S (1 - e_S^2) R_E}{(1 + e_S \cos \nu_S) (R_S - R_E)}$$

где a_S , e_S , ν_S – соответственно, большая полуось, эксцентриситет и истинная аномалия орбиты Солнца.

Запишем уравнение прямой FS_1 в полярных координатах:

$$r = \frac{R_E}{\cos(\theta - \varphi_1)} \quad (1.1)$$

где R_E – кратчайшее расстояние от центра координат до прямой FS_1 , $\varphi_1 = \angle SEE_1$ – полярный угол отрезка EE_1 , $r = r(\theta)$ – радиус-вектор прямой FS_1 , а θ – свободная переменная. Учитывая, что угол $\varphi_1 = \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ (см. рис. 1.1),

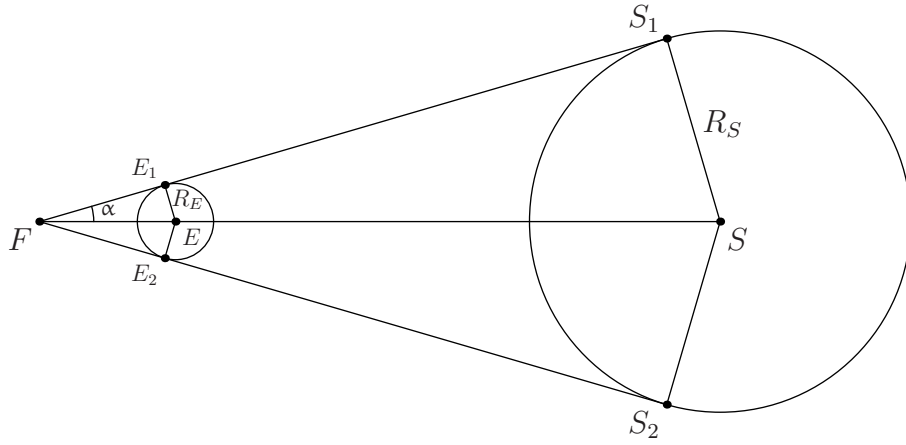


Рисунок 1.1 — Зона земной тени

преобразуем (1.1) следующим образом:

$$r = \frac{R_E}{\cos\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)} = \frac{R_E}{\sin\theta \cos\alpha - \cos\theta \sin\alpha} \quad (1.2)$$

где угол α определяется по формуле:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R_E}{r_f(\nu_S)}\right).$$

Аналогичным образом записывается уравнение прямой FS_2 : пусть φ_2 – полярный угол отрезка EE_2 , тогда его выражение через угол α будет $\varphi_2 = \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ и

$$r = \frac{R_E}{\cos\left(\theta - \left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)\right)} = -\frac{R_E}{\sin\theta \cos\alpha + \cos\theta \sin\alpha}. \quad (1.3)$$

1.2 Точка захода спутника в тень

Введем геоцентрическую полярную систему координат, с центром в точке E (см. рис. 1.2), полярную ось Ex направим в перицентр орбиты Солнца. Пусть эллиптическая орбита спутника расположена в плоскости эклиптики. Здесь, также, как и на рис. 1.1, точка S обозначает Солнце, а F – вершину конуса земной тени. Поскольку средняя линия тени EF составляет угол π с направлением на Солнце ES , уравнение тени (1.2) в выбранной системе координат примет вид:

$$r = \frac{R_E}{\cos\left(\theta - \left(\frac{\pi}{2} + \alpha + \nu_S\right)\right)} = \frac{R_E}{\sin\theta \cos(\alpha + \nu_S) - \cos\theta \sin(\alpha + \nu_S)}, \quad (1.4)$$

где ν_S – истинная аномалия орбиты Солнца.

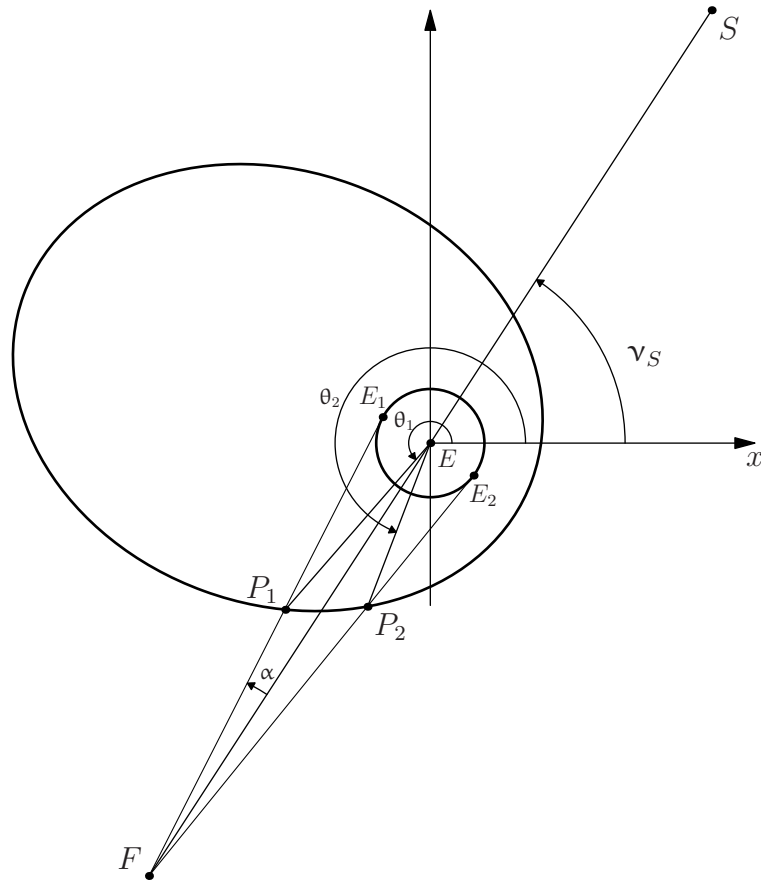


Рисунок 1.2 — Транзит спутника через земную тень

Найдем теперь полярный угол θ_1 точки входа спутника в земную тень P_1 :

$$\frac{R_E}{\sin \theta_1 \cos(\alpha + \nu_S) - \cos \theta_1 \sin(\alpha + \nu_S)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta_1 - \omega)} \quad (1.5)$$

где a , e – большая полуось, эксцентриситет орбиты спутника, а ω – аргумент перигея орбиты, отсчитываемый от полярной оси. Введем обозначение ξ :

$$\xi = \frac{a(1 - e^2)}{R_E}$$

Тогда, с учетом введенного обозначения, уравнение (1.5) можно записать в виде:

$$\xi (\sin \theta_1 \cos(\alpha + \nu_S) - \cos \theta_1 \sin(\alpha + \nu_S)) = 1 + e (\cos \theta_1 \cos \omega + \sin \theta_1 \sin \omega) \quad (1.6)$$

Возведя выражение (1.6) в квадрат и сгруппировав слагаемые, получим квадратное уравнение относительно $\cos \theta_1$:

$$(e^2 + \xi^2 - 2e\xi \sin(\alpha + \nu_S - \omega)) \cos^2 \theta_1 + 2(e \cos \omega + \xi \sin(\alpha + \nu_S)) \cos \theta_1 + 1 - (\xi \cos(\alpha + \nu_S) - e \sin \omega)^2 = 0$$

Разрешив которое получим:

$$\cos \theta_1 = \frac{-\psi_1 \pm \chi_1 \sqrt{\psi_1^2 + \chi_1^2 - 1}}{\psi_1^2 + \chi_1^2} \quad (1.7)$$

И, соответственно,

$$\sin \theta_1 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_1} = \frac{\chi_1 \pm \psi_1 \sqrt{\psi_1^2 + \chi_1^2 - 1}}{\psi_1^2 + \chi_1^2} \quad (1.8)$$

Где функции ψ_1 , χ_1 имеют выражения:

$$\psi_1 = e \cos \omega + \xi \sin(\alpha + \nu_S), \quad \chi_1 = e \sin \omega - \xi \cos(\alpha + \nu_S)$$

Знак в (1.7) и (1.8) берется согласованно, из условия попадания спутника в зону тени: $\theta_1 - \nu_S \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

1.3 Точка выхода спутника из зоны тени

Запишем уравнение границы тени (1.3) в полярной системе координат, введенной на рис. 1.2:

$$r = \frac{R_E}{\cos(\theta - (\frac{3\pi}{2} + \nu_S - \alpha))} = -\frac{R_E}{\sin \theta \cos(\alpha - \nu_S) + \cos \theta \sin(\alpha - \nu_S)}$$

Найдем теперь полярный угол θ_2 точки выхода спутника из земной тени P_2 (см. рис. 1.2):

$$-\frac{R_E}{\sin \theta_2 \cos(\alpha - \nu_S) + \cos \theta_2 \sin(\alpha - \nu_S)} = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta_2 - \omega)} \quad (1.9)$$

Используя то же обозначение, что и в (1.6), перепишем (1.9) в виде:

$$-\xi (\sin \theta_2 \cos(\alpha - \nu_S) + \cos \theta_2 \sin(\alpha - \nu_S)) = 1 + e (\cos \theta_2 \cos \omega + \sin \theta_2 \sin \omega)$$

И, проводя аналогичные (1.6) преобразования, запишем относительно $\cos \theta_2$ квадратное уравнение:

$$(e^2 + \xi^2 + 2e\xi \sin(\alpha - \nu_S + \omega)) \cos^2 \theta_2 + 2(e \cos \omega + \xi \sin(\alpha - \nu_S)) \cos \theta_2 + 1 - (\xi \cos(\alpha - \nu_S) + e \sin \omega)^2 = 0$$

Разрешив которое получим:

$$\cos \theta_2 = \frac{-\psi_2 \pm \chi_2 \sqrt{\psi_2^2 + \chi_2^2 - 1}}{\psi_2^2 + \chi_2^2} \quad (1.10)$$

И, соответственно:

$$\sin \theta_2 = \sqrt{1 - \cos^2 \theta_2} = \frac{\chi_2 \pm \psi_2 \sqrt{\psi_2^2 + \chi_2^2 - 1}}{\psi_2^2 + \chi_2^2} \quad (1.11)$$

Где

$$\psi_2 = e \cos \omega + \xi \sin(\alpha - \nu_S), \quad \chi_2 = e \sin \omega - \xi \cos(\alpha - \nu_S)$$

Знак в (1.10) и (1.11) берется согласованно, из условия попадания спутника в зону тени: $\theta_2 - \nu_S \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Обратим внимание, что при выполнении какого-либо из условий: $\psi_1^2 + \chi_1^2 < 1$ или $\psi_2^2 + \chi_2^2 < 1$ спутник в земную тень не заходит.

Заметим, что цилиндрическая земная тень является частным случаем конической тени, если в выражениях (1.7), (1.8) и (1.10), (1.11) положить $\alpha \rightarrow 0$.

1.4 Время нахождения в тени

Как известно, интеграл площадей в полярной системе координат, имеет вид:

$$r^2 \dot{\theta} = \sigma \quad (1.12)$$

где σ – константа площади, имеющая следующее выражение через период вращения спутника T , а также большую a и малую b полуоси эллиптической орбиты спутника:

$$\sigma = \frac{2\pi}{T} ab \quad (1.13)$$

Разделив переменные в (1.12) и проинтегрировав по интервалу прохождения полярного угла в тени, будем иметь:

$$\int_{t_1}^{t_2} dt = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{r^2}{\sigma} d\theta = \frac{(a(1-e^2))^2}{\sigma} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{(1+e \cos(\theta - \omega))^2}$$

Используя (1.13) получаем:

$$\tau(\theta_1, \theta_2, \omega) = t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{a^3}{fm_E}} \left(2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \left(\frac{\sin(\theta - \omega)}{1 + \cos(\theta - \omega)} \right) \right) - \frac{e\sqrt{1-e^2} \sin(\theta - \omega)}{1 + e \cos(\theta - \omega)} \right)_{\theta_1}^{\theta_2} \quad (1.14)$$

Где f – гравитационная постоянная, m_E – масса Земли, $\tau = \tau(\theta_1, \theta_2, \omega)$ – время пребывания спутника в земной тени за один виток, а θ_1 и θ_2 определяются из (1.7), (1.8), (1.10), (1.11).

1.5 Численное моделирование времени пребывания в тени

Для оценки влияния земной тени на спутник определим относительное время пребывания спутника в зоне земной тени на временном промежутке, равном солнечному году T_S , принимая, что за время транзита спутника по зоне тени, истинная аномалия Солнца ν_S изменяется на малую величину. Выпишем выражение для центра зоны тени:

$$\nu(t) = \nu_S(t) + \pi, \quad (1.15)$$

где ν – истинная аномалия орбиты спутника.

Будем искать моменты времени t , удовлетворяющие соотношению (1.15). Для численного решения возьмем шаг в 1 секунду. На каждом шаге, положив $t_0 = 0$, следует вычислять средние аномалии спутника M и Солнца M_S :

$$M = M_0 + n(t - t_0), \quad M_S = M_{S0} + n_S(t - t_0)$$

Здесь n , n_S – средние движения спутника и Солнца соответственно. Для простоты M_0 и M_{S0} (соответственно, средние аномалии на эпоху t_0 для спутника и Солнца) положены равными нулю. Далее, решив уравнения Кеплера, определим эксцентрические аномалии спутника E и Солнца E_S :

$$E - e \sin E = M, \quad E_S - e_S \sin E_S = M_S$$

Для решения используем известное соотношение [56], где $J_k(x)$ – функция Бесселя:

$$E = M + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke)}{k} \sin kM$$

Подставим эксцентрические аномалии в выражения:

$$\operatorname{tg} \frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\nu_S}{2} = \sqrt{\frac{1+e_S}{1-e_S}} \operatorname{tg} \frac{E_S}{2}$$

и получим истинные аномалии ν , ν_S . Подставив их в (1.15) определим искомые моменты времени $t^{(1)}, \dots, t^{(N)}$. Тогда относительное время пребывания спутника в земной тени \hat{t} :

$$\hat{t}(e, a, \omega) = \frac{1}{T_S} \sum_{i=1}^N \tau \left(\theta_1 \left(\nu_S^{(i)} \right), \theta_2 \left(\nu_S^{(i)} \right), \omega \right)$$

где $\nu_S^{(i)} = \nu_S(t^{(i)})$. Однако, как показали расчеты, среднее время пребывания в земной тени существенно зависит от аргумента перицентра спутника ω . Для компенсации этой зависимости следует вычислять среднее значение и по ω :

$$\bar{t}(e, a) = \frac{1}{T_S} \sum_{i=1}^N \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L \tau \left(\theta_1 \left(\nu_S^{(i)} \right), \theta_2 \left(\nu_S^{(i)} \right), \omega_j \right) \quad (1.16)$$

где L – количество рассматриваемых значений аргумента перицентра спутника ω .

Ввиду того, что выражение (1.14) содержит разрывы второго рода, при попадании θ_1 и θ_2 на разные ветви, всякий раз в вычислительной процедуре были сделаны переходы к следующей ветви.

Используя (1.16) было проведено численное моделирование со следующими параметрами: $a \in \{3.5 \times 10^8, 4 \times 10^8, \dots, 9 \times 10^8\}$ м, $e \in \{0, 0.3, 0.5, 0.7\}$, $\omega = \{0, \pi/6, \dots, 11\pi/6\}$. Результаты представлены на рис. 1.3, 1.4, 1.5. Вертикальной штриховой линией на рис. 1.3 и 1.4 отмечена внутренняя граница внешней сферы гравитационного влияния Земли.

Как можно видеть на рис. 1.3, увеличение большой полуоси орбиты спутника a приводит к уменьшению среднего времени нахождения в земной тени. Так, если в начале внешней сферы гравитационного влияния, при $a = 3.5 \times 10^8$ м спутник находится в тени от 0.4% (при $e = 0$) до 0.62% (при $e = 0.7$) за виток; то на внешней границе сферы, при $a = 9 \times 10^8$ м, всего от 0.05% ($e = 0$) до

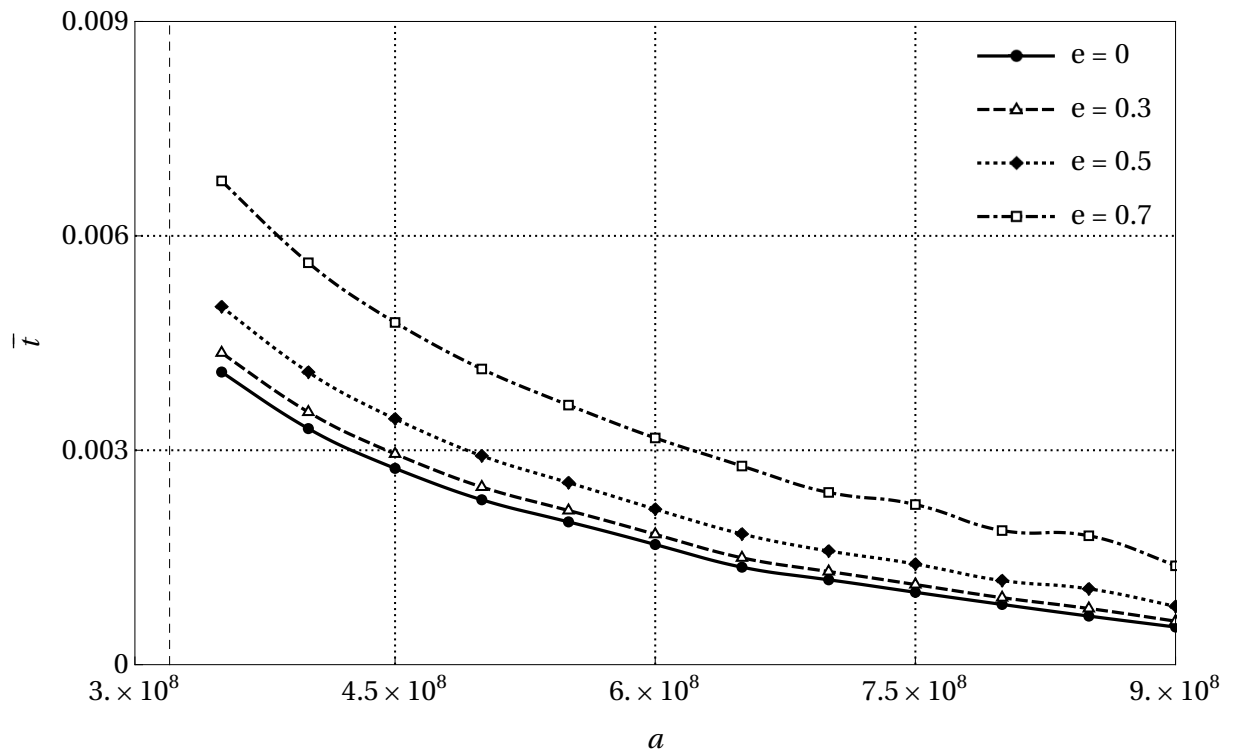


Рисунок 1.3 — Случай конической тени

0.14% ($e = 0.7$). Также заметно воздействие эксцентриситета e : его увеличение приводит к увеличению среднего времени нахождения спутника в тени \bar{t} , хотя с приближением к внешней границе сферы гравитационного влияния Земли это воздействие уменьшается.

Таким образом, максимальное значение относительного времени пребывания спутника в области земной тени в случае внешней сферы гравитационного влияния Земли составляет 0.62% (при $e = 0.7$, $a = 3.5 \times 10^8$ м), что позволяет не учитывать земную тень при проведении качественных исследований в ограниченной задаче трех [23] и четырех [24] тел.

При расчете тем же методом цилиндрической модели тени (при $\alpha = 0$) рис. 1.4, сохраняется характер зависимости \bar{t} от большой полуоси a : при $a = 3.5 \times 10^8$ м спутник находится в тени от 0.55% (при $e = 0$) до 0.82% (при $e = 0.7$) за виток; на внешней границе сферы, при $a = 9 \times 10^8$ м, от 0.15% ($e = 0$) до 0.23% ($e = 0.7$). Характер зависимости от эксцентриситета также сохраняется.

При сравнении конической и цилиндрической моделей тени (рис. 1.5) можно заметить, что если вблизи с внутренней границей внешней сферы гравитационного влияния Земли относительная погрешность не превышает 50%, то с ростом большой полуоси орбиты погрешность возрастает от 71% при $e = 0.7$, до 187% при $e = 0$. Таким образом, погрешность цилиндрической модели неве-

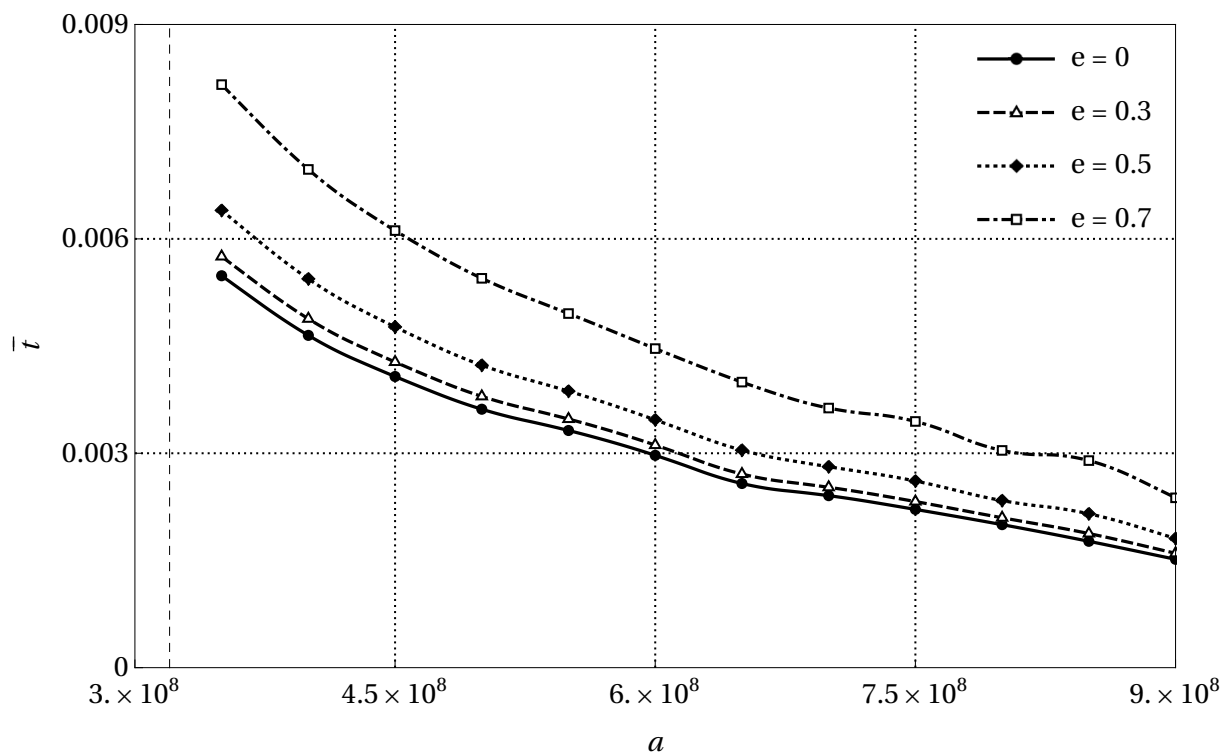


Рисунок 1.4 — Случай цилиндрической тени

лика во внутренней сфере гравитационного влияния Земли. Но при переходе во внешнюю сферу коническая модель на наш взгляд предпочтительней.

1.6 Заключение

Исследовано влияние зоны земной тени орбиты спутников, находящиеся в плоскости эклиптики во внешней сфере гравитационного влияния Земли. Были найдены границы конусной тени и точки ее пересечения с эллиптической орбитой спутника. В частности установлено, что точки пересечения в случае цилиндрической тени являются частным случаем конусной. Было дано выражение для относительного времени пребывания спутника в зоне земной тени.

В результате численного моделирования было установлено, что увеличение большой полуоси орбиты спутника a влечет к уменьшению среднего времени нахождения в земной тени. Также установлено влияние эксцентриситета e : его увеличение приводит к увеличению среднего времени нахождения спутника в тени, хотя с приближением к внешней границе сферы гравитационного влияния Земли влияние уменьшается.

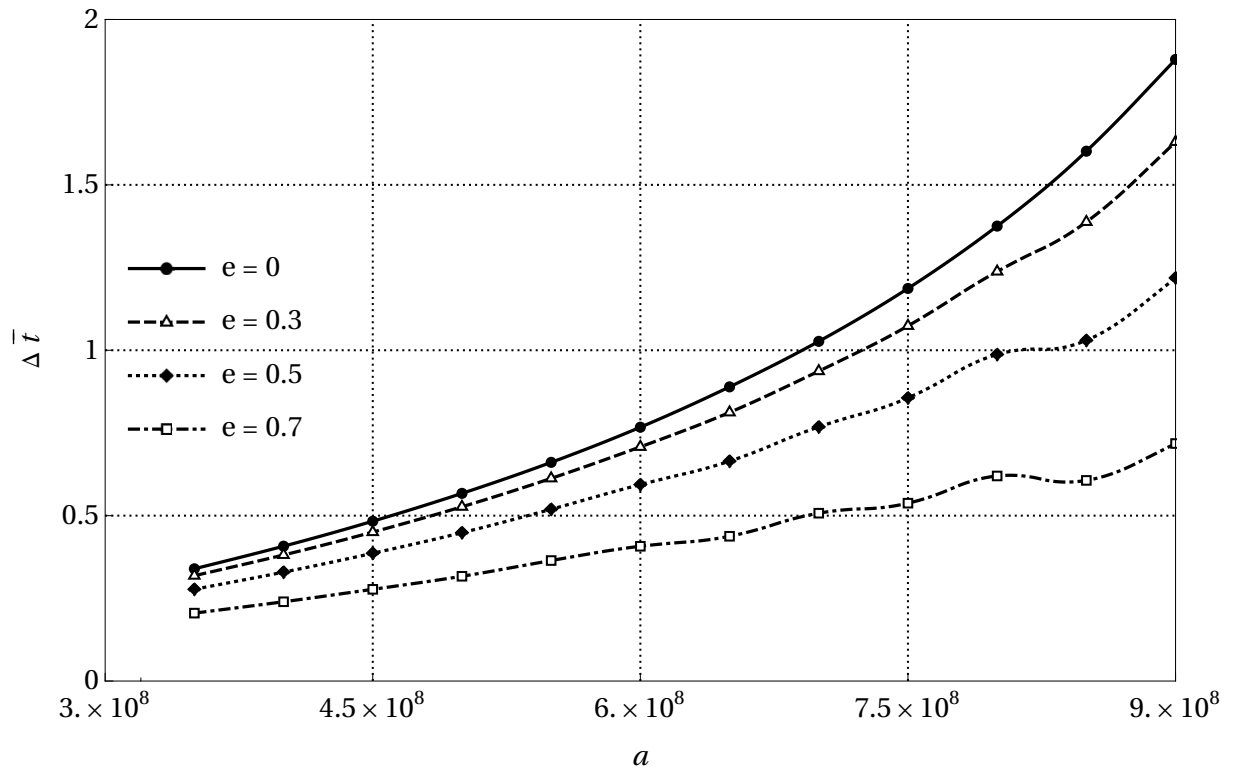


Рисунок 1.5 — Относительная погрешность

Максимальное значение относительного времени пребывания спутника в области земной тени в случае внешней сферы гравитационного влияния Земли составляет 0.62% (при $e = 0.7$), что позволяет не учитывать земную тень при проведении качественных исследований.

Сравнение с цилиндрической моделью тени показало, что во внутренней сфере гравитационного влияния Земли разница между конусной и цилиндрической моделью тени невелика, однако с увеличением большой полуоси орбиты a цилиндрическая модель тени дает большую погрешность, и в этом случае должна использоваться уже коническая модель.

Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в данной главе. Также автором выполнены все аналитические и численные расчёты с использованием упомянутых в главе методов.

Глава 2. Эволюция движений спутника в плоской ограниченной задаче трех тел с учетом светового давления

В главе рассматривается эволюция высоких орбит спутника Земли в ограниченной задаче трех тел, под действием гравитационных возмущений со стороны Солнца и светового давления без учета земной тени, когда невозмущенная траектория спутника – кеплеровский эллипс, принадлежащий плоскости эклиптики. Была получена усредненная возмущающая функция при условии отсутствия резонансов между средними невозмущенными движениями спутника и Солнца. Для вывода формул усредненного движения используется аппарат гипергеометрических и обобщенных гипергеометрических функций.

Определяются первые интегралы, подробно изучен хилловский вариант задачи, при котором расстояние до спутника много меньше расстояния между Землей и Солнцем: строятся фазовые портреты колебаний при разных значениях параметров.

2.1 Возмущающая функция

Будем считать, что все тела движутся в одной плоскости, при этом тело P_1 (Солнце) массы m_1 обращается вокруг тела P_0 массы m_0 (Земля) по эллиптической орбите. Считаем также, что невозмущенная орбита пассивно-гравитирующего тела P (спутника-баллона) есть кеплеровский эллипс с фокусом в точке P_0 . На спутник действуют гравитационные силы со стороны массивных тел P_0 и P_1 . Помимо этого, будем учитывать силу \vec{F} светового давления со стороны тела P_1 , считая, что спутник имеет значительную площадь миделева сечения при небольшой массе. Будем считать также, что полуось орбиты спутника велика (высокие орбиты, $a \approx 10^9$ м), но сохраняется малость отношения r/r_1 , где r – расстояние между Землей и спутником, а r_1 – расстояние между Солнцем и Землей. В этом случае можно пренебречь эффектом земной тени, так как, согласно проведенным расчетам, максимальное время пребывания в конусе земной тени спутника составляет менее 0.62% при эксцентриситете $e = 0.7$.

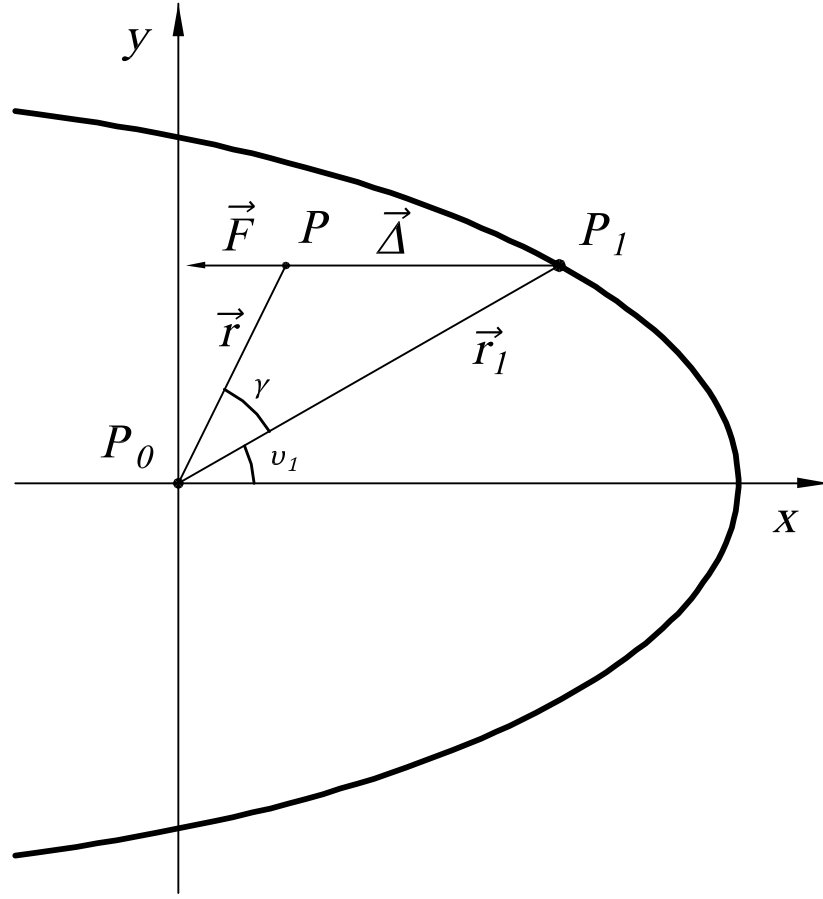


Рисунок 2.1 — Задача трех тел с учетом светового давления

Введем, в плоскости движения основных тел, прямоугольную систему координат с центром в точке P_0 такую, что ось P_0x направлена в перицентр орбиты тела P_1 (см. рис. 2.1). В этой системе осей точки P_1 и P имеют координаты (x_1, y_1, z_1) и (x, y, z) соответственно.

Угол между векторами \vec{r} и \vec{r}_1 равен γ . Связь между углом γ и истинными аномалиями тел P и P_1 имеет следующий вид:

$$\gamma = \nu + \omega - \nu_1 \quad (2.1)$$

Здесь ω — аргумент перицентра тела P .

Согласно монографии [56], возмущающая функция гравитационного воздействия на тело P со стороны тела P_1 будет иметь вид:

$$R_g = fm_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{r_1^3} \right), \quad \Delta = r_1 \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r}{r_1} \right) \cos \gamma + \left(\frac{r}{r_1} \right)^2},$$

$$r_1 = \frac{a_1 (1 - e_1^2)}{1 + e_1 \cos \nu_1}$$

Здесь f — гравитационная постоянная. Тогда, разложив в ряд по степеням отношения $r/r_1 < 1$ и отбросив члены разложения, не зависящие от координат тела

P , получим выражение для возмущающей функции от гравитационного воздействия на тело P со стороны тела P_1 :

$$R_g = \frac{fm_1}{r_1} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^k P_k(\cos \gamma) \quad (2.2)$$

Здесь P_k – полином Лежандра степени k .

2.2 Световое давление

Согласно квантовой теории [10], фотон обладает энергией $h\nu$ и импульсом

$$\frac{h\nu}{c},$$

где h – постоянная Планка, ν – частота, а c – скорость света в вакууме.

Пусть на единичную поверхность, нормальную к световому потоку, за единицу времени падает N фотонов, тогда мощность светового потока E и суммарный импульс p , сообщаемый единичной площадке, будут равны:

$$E = Nh\nu, \quad p = N \frac{h\nu}{c}.$$

Исключая отсюда N , находим:

$$p = \frac{E}{c}.$$

Пусть поверхность полностью поглощает световую энергию, тогда, очевидно, суммарный импульс p и есть световое давление на нормальную поверхность. Если световой поток падает на поверхность под углом α к ее нормали, то на единицу поверхности попадает $N \cos \alpha$ фотонов, и сила светового давления составляет:

$$p = \frac{E \cos \alpha}{c}.$$

Сила светового давления на всю поверхность освещаемого тела будет определяться интегралом по поверхности (S):

$$F = \int_{(S)} \frac{E \cos \alpha}{c} dS.$$

Обозначим через E_0 мощность солнечной радиации на поверхности Земли, тогда на расстоянии Δ тела от Солнца мощность светового потока будет составлять:

$$E = E_0 \left(\frac{r_0}{\Delta} \right)^2,$$

где r_0 – среднее расстояние от Земли до Солнца и можно записать:

$$F = \frac{E_0}{c} \left(\frac{r_0}{\Delta} \right)^2 \int_{(S)} \cos \alpha dS.$$

Величина E_0 называется *солнечной постоянной*. Ее численное значение приблизительно равно 1367 Вт/м^2 . Для шара радиуса ρ интеграл в правой части равен $\pi\rho^2$, то есть площади миделева сечения. Таким образом, величина ускорения, сообщаемого шару световым давлением, будет:

$$F = \frac{\pi\rho^2 E_0}{mc} \left(\frac{r_0}{\Delta} \right)^2,$$

где m – масса тела. Обозначим:

$$\delta = \frac{\varkappa\pi\rho^2 E_0}{mc} \quad (2.3)$$

параметр спутника, зависящий от его массы, радиуса и формы и отражающей поверхности. Здесь \varkappa – коэффициент отражения поверхности, равный 1 для полного поглощения или полного отражения света, и 1.44 для диффузного отражения. В дальнейшем будем считать δ малым параметром: $\delta \ll 1$.

Согласно (2.3) значение δ для спутников-баллонов типа Echo 1, Echo 2 и PAGESOS, при полном отражении света, массе тела 45 кг и радиусе миделева сечения 50 м, составляет:

$$\delta = \frac{\varkappa\pi\rho^2 E_0}{mc} = \frac{1 \times 3.1416 \times 2500 \times 1367}{45 \times 299792458} \approx 7.96 \times 10^{-4}$$

Направляющие косинусы возмущающего ускорения относительно осей координат будут равны:

$$\frac{x - x_1}{\Delta}, \quad \frac{y - y_1}{\Delta}, \quad \frac{z - z_1}{\Delta}$$

Для проекций возмущающего ускорения находим:

$$\delta r_0^2 \frac{x - x_1}{\Delta^3}, \quad \delta r_0^2 \frac{y - y_1}{\Delta^3}, \quad \delta r_0^2 \frac{z - z_1}{\Delta^3}$$

Следовательно, если ввести функцию

$$R_\lambda = -\frac{\delta r_0^2}{\Delta},$$

то она будет возмущающей, так как ее частные производные по координатам, соответственно, равны проекциям возмущающего ускорения на координатные оси.

Тогда возмущающая функция воздействия излучения на тело будет иметь вид:

$$R_\lambda = -\frac{\delta r_0^2}{\Delta} = -\delta r_0^2 \frac{1}{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k P_k(\cos \gamma) \quad (2.4)$$

С учетом (2.2) и (2.4) результирующая возмущающая силовая функция задачи приводится к виду (отбрасываем члены, не зависящие от координат тела P):

$$R \stackrel{\text{def}}{=} R_g + R_\lambda = -\delta r_0^2 \frac{r}{r_1^2} \cos \gamma + \frac{1}{r_1} (f m_1 - \delta r_0^2) \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1}\right)^k P_k(\cos \gamma) \quad (2.5)$$

Малыми параметрами задачи являются величины δ и $1/a_1$, где a_1 – большая полуось орбиты тела P_1 (Солнца).

2.3 Гипергеометрические функции

Известно [57], что гипергеометрическая функция определяется как решение гипергеометрического дифференциального уравнения:

$$z(1-z)u'' + (c - (a+b+1)z)u' - abu = 0, \quad (2.6)$$

где $a \in Z$, $b \in Z$ и $c \in Z$ – постоянные, которые будем называть параметрами уравнения. Введем символ Похгаммера следующим образом:

$$(z)_n = \frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)},$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Тогда, если $c \neq 0, -1, -2, \dots$, то ряд

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!} \equiv F_{2,1}(a, b; c; z) \quad (2.7)$$

является решением уравнения (2.6), регулярным в точке $z = 0$. Ряд (2.7) при этом называется гипергеометрическим рядом.

Если $\operatorname{Re}(c) > \operatorname{Re}(b) > 0$, то имеет место результат Эйлера, дающий следующее интегральное представление для гипергеометрической функции:

$$F_{2,1}(a, b; c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 \frac{t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}}{(1-tz)^a} dt. \quad (2.8)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (2.8) является однозначной аналитической функцией от z в области $|\arg(1-z)| < \pi$. Таким образом, интеграл (2.8) дает аналитическое продолжение для гипергеометрического ряда. Особыми точками аналитического продолжения являются $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$.

Обобщенная гипергеометрическая функция по определению [58] – любая аналитическая функция комплексного переменного, определенная в окрестности начала координат следующим степенным рядом:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

отношение двух последовательных коэффициентов a_n которого является рациональной функцией индекса n :

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{A_0 n^p + A_1 n^{p-1} + \dots + A_p}{B_0 n^{q+1} + B_1 n^q + \dots + B_{q+1}},$$

при этом $A_j \in Z$, $B_k \in Z$ не зависят от n . Выражая многочлены $P(n)$, $Q(n)$ через их корни, можно записать обобщенную функцию в канонической форме:

$$F_{p,q}(\alpha_1, \dots, \alpha_p; \beta_1, \dots, \beta_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n z^n}{(\beta_1)_n \dots (\beta_q)_n n!},$$

в предположении, что ни одно β не является целым отрицательным числом. Если $p > q + 1$, то обобщенный гипергеометрический ряд сходится в единственной точке $z = 0$. Если $p = q + 1$, то ряд сходится внутри круга $|z| < 1$. Если $p < q + 1$, то ряд сходится во всей комплексной плоскости и определяет целую функцию от z .

Число q носит название порядка обобщенной гипергеометрической функции, а число $q + 1 - p$ класса. Функция нулевого класса (т.е. если $q = p + 1$) носит название полной функции.

Многие обобщенные гипергеометрические функции начальных порядков носят собственные имена, в частности полная функция $F_{3,2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z)$

имеет название функции Клаузена [58]. Для нее можно записать обобщенный гипергеометрический ряд:

$$F_{3,2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n (\alpha_3)_n z^n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n n!}, \quad (2.9)$$

Ни одно из чисел β_1, β_2 не должно обращаться в ноль или быть целым отрицательным числом, так как в этом случае $\Gamma(\beta_i) = \infty$. Такие числа являются полюсами первого порядка для гамма-функции. Если какой-то из параметров β_1 или β_2 принимает нулевое или отрицательное целое значение, то проводится процедура регуляризации функции:

$$F_{3,2}^{reg}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z) = \frac{1}{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)} F_{3,2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z)$$

Область сходимости ряда (2.9) $|z| < 1$, на границе круга $|z| = 1$ ряд расходится в случае, если

$$s \equiv \beta_1 + \beta_2 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 \leq 0 \quad (2.10)$$

Коэффициент a_n общего члена ряда (2.9) может обращаться в бесконечность, быть неопределенным числом типа $0/0$, либо нулем в следующих случаях:

- 1) Если β_1 или β_2 являются нулем или целым отрицательным числом, тогда $a_n = \infty$. В этом случае требуется провести процедуру регуляризации.
- 2) Если хотя бы одно из чисел β_1, β_2 , а также хотя бы одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ является нулем, либо целым отрицательным, тогда $a_n = 0/0$.
- 3) Если среди чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ есть последовательности из нулей или целых отрицательных чисел, то все $a_n = 0$ за исключением некоторого набора из ряда $n = 0, 1, 2, \dots$, тогда функция Клаузена сводится к конечному многочлену по z .

Обобщенный гипергеометрический ряд (2.9) – лишь одно из возможных представлений функции $F_{3,2}$, ограниченное областью сходимости этого ряда. Другое представление – рассматривать $F_{3,2}$ как частное решение линейного уравнения с переменными коэффициентами:

$$z^2(1-z)u''' + (1 + \beta_1 + \beta_2 - (3 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)z)zu'' + (\beta_1\beta_2 - (1 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)z)u' - \alpha_1\alpha_2\alpha_3u = 0 \quad (2.11)$$

Функция $F_{3,2}^{reg}$ также удовлетворяет этому уравнению. Таким образом, функция Клаузена $F_{3,2}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; \beta_1, \beta_2; z)$ есть аналитическое продолжение ряда (2.9) и определена как многозначная комплексная функция всюду на комплексной плоскости C . Исключение – особые точки $z = 0$, $z = 1$, $z = \infty$, при обходе которых в комплексной плоскости C происходит переход с ветви на ветвь функции Клаузена.

2.4 Строгое значение двукратно усреднённой возмущающей функции

Осредним возмущающую функцию (2.5) по средней аномалии M тела P :

$$R^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R_g + R_\lambda) dM \quad (2.12)$$

Учитывая, что

$$dM = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} d\nu,$$

где a и e – большая полуось и эксцентриситет орбиты тела P , получим:

$$R^* = -\frac{\delta r_0^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^3 \cos \gamma}{r_1^2 a^2 \sqrt{1-e^2}} d\nu + \\ + \frac{1}{r_1} (fm_1 - \delta r_0^2) \frac{1}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{k=2}^{\infty} r_1^{-k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+2} P_k(\cos \gamma) d\nu$$

Принимая во внимание формулу (2.1) и представление орбиты r через истинную аномалию ν , получим представление первого интеграла в следующем виде:

$$-\frac{\delta r_0^2}{2\pi r_1^2} \int_0^{2\pi} \frac{r^3 (\cos \nu \cos(\omega - \nu_1) + \sin \nu \sin(\omega - \nu_1))}{a^2 \sqrt{1-e^2}} d\nu = \frac{3}{2} \frac{\delta r_0^2}{r_1^2} ea \cos(\omega - \nu_1) \quad (2.13)$$

Введем обозначение:

$$R_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+2} P_k(\cos \gamma) d\nu \quad (2.14)$$

Разложим в ряд Фурье функцию $r^n(\nu)$ ($n > 0$):

$$r^n = \left(\frac{p}{1 + e \cos \nu} \right)^n = p^n \left(A_{n,0} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{n,k} \cos k\nu \right) \quad (2.15)$$

Где коэффициенты ряда имеют выражение:

$$A_{n,0} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{1 + e \cos \nu} \right)^n d\nu = \frac{1}{(1-e)^n} F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, n; 1; \frac{2e}{e-1} \right)$$

$$A_{n,k} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos k\nu}{(1 + e \cos \nu)^n} d\nu = \frac{2}{(1-e)^n} F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, n; 1-k, 1+k; \frac{2e}{e-1} \right)$$

Здесь $F_{2,1}$ – гипергеометрическая функция, а $F_{3,2}^{reg}$ – функция Клаузена (обобщенная регуляризованная гипергеометрическая функция).

Для полинома Лежандра можно записать [59]:

$$P_k(\cos \gamma) = \left(P_k^{(0)}(0) \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^k \frac{(k-i)!}{(k+i)!} \left(P_k^{(i)}(0) \right)^2 \cos(i\gamma) \quad (2.16)$$

Здесь $P_k^{(i)}(0)$ – присоединенные функции Лежандра в нуле:

$$P_k^{(i)}(0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k-i}{2}} \frac{(k+i)!}{2^k \left(\frac{k-i}{2}\right)! \left(\frac{k+i}{2}\right)!}, & (k-i) = 2m, m \in \mathbb{Z} \\ 0, & (k-i) = 2m+1, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Подставим разложение (2.15) (случай $n = k+2$) и ряд (2.16), с учетом (2.1), в интеграл (2.14). При перемножении рядов (2.15) и (2.16) в подынтегральном выражении учитываем, что нечетная функция $\cos k\nu \sin i\nu$ имеет среднее значение равное нулю, а среднее от функции $\cos k\nu \cos i\nu$ отлично от нуля и равно $1/2$ только при $k = i$. Имеем

$$R_k = p^{k+2} \left(A_{(k+2),0} \left(P_k^{(0)}(0) \right)^2 + \sum_{i=1}^k A_{(k+2),i} \frac{(k-i)!}{(k+i)!} \left(P_k^{(i)}(0) \right)^2 \cos i(\omega - \nu_1) \right) \quad (2.17)$$

В итоге осредненная функция R^* примет вид

$$R^* = \frac{3}{2} \frac{\delta r_0^2}{r_1^2} e a \cos(\omega - \nu_1) + \frac{1}{r_1} (f m_1 - \delta r_0^2) \frac{1}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{k=2}^{\infty} r_1^{-k} R_k \quad (2.18)$$

при условии, что R_k вычисляется по формуле (2.17).

Усредним R^* по M_1 (средней аномалии тела P_1) предполагая, что средние движения n, n_1 тел P, P_1 не резонируют. Обозначим через R^{**} двукратно усредненное значение возмущающей функции:

$$R^{**} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^* dM_1, \quad dM_1 = \frac{r_1^2}{a_1^2 \sqrt{1-e_1^2}} d\nu_1$$

Тогда

$$R^{**} = I_1 + I_2 \quad (2.19)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{a_1^2 \sqrt{1-e_1^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_1^2 \frac{3}{2} \frac{\delta r_0^2}{r_1^2} ea \cos(\omega - \nu_1) d\nu_1 = 0$$

$$I_2 = \frac{1}{a_1^2 \sqrt{1-e_1^2}} \frac{1}{a_1^2 \sqrt{1-e_1^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (fm_1 - \delta r_0^2) \sum_{k=2}^{\infty} r_1^{1-k} R_k d\nu_1$$

Вычислим интеграл I_2 , введя следующее обозначение:

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} r_1^{1-k} R_k d\nu_1 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=2}^{\infty} p_1^{1-k} \left(\check{A}_{(1-k),0} + \sum_{s=1}^{\infty} \check{A}_{(1-k),s} \cos s\nu_1 \right) R_k d\nu_1 \end{aligned}$$

Учитывая (2.17), описывающую функцию R_k , и проводя интегрирование по ν_1 , получим

$$\begin{aligned} \zeta &= \sum_{k=2}^{\infty} p^{k+2} p_1^{1-k} \left(\check{A}_{(1-k),0} A_{(k+2),0} \left(P_k^{(0)}(0) \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \check{A}_{(1-k),i} A_{(k+2),i} \frac{(k-i)!}{(k+i)!} \left(P_k^{(i)}(0) \right)^2 \cos i\omega \right) \quad (2.20) \end{aligned}$$

Здесь $\check{A}_{n,0}, \check{A}_{n,s}$ коэффициенты разложения в ряд Фурье (2.15) функции $r_1^n (n < 0)$, имеющие следующие выражения

$$\begin{aligned} \check{A}_{n,0} &= (1-e_1)^n F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, -n; 1; \frac{2e_1}{e_1-1} \right), \\ \check{A}_{n,s} &= 2(1-e_1)^n F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, -n; 1-s, 1+s; \frac{2e_1}{e_1-1} \right) \end{aligned}$$

Тогда строгое выражение для осредненной силовой функции задачи, с учетом (2.20), можно записать в виде:

$$R^{**}(e, \omega) = \frac{1}{a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \frac{1}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} (fm_1 - \delta r_0^2) \zeta \quad (2.21)$$

2.5 Усреднённые оскулирующие уравнения движения, первые интегралы

В случае плоского движения усреднённые оскулирующие уравнения Лагранжа имеют вид [59]:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R^{**}}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1 - e^2}{ena^2} \frac{\partial R^{**}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1 - e^2}}{ena^2} \frac{\partial R^{**}}{\partial \omega} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1 - e^2}}{ena^2} \frac{\partial R^{**}}{\partial e} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{2}{na} \frac{\partial R^{**}}{\partial a} - \frac{1 - e^2}{ena^2} \frac{\partial R^{**}}{\partial e} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Где n — среднее движение возмущающего тела P_1 . Осредненная функция R^{**} не зависит от M , поэтому

$$\frac{da}{dt} = 0$$

Кроме того, уравнения по e , ω имеют канонический вид с автономной функцией Гамильтона R^{**} , поэтому допускают два первых интеграла:

$$a = const, \quad R^{**}(e, \omega) = const$$

2.6 Случай Хилла

Рассмотрим случай Хилла ($r/r_1 \ll 1$) и пренебрежем в разложении (2.18) членами порядка $(r/r_1)^4$ и выше, что приводит к выражению:

$$R^* = \frac{3r_0^2}{2r_1^2} \delta e a \cos(\omega - \nu_1) + (fm_1 - \delta r_0^2) \frac{1}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} (r_1^{-3} R_2 + r_1^{-4} R_3) \quad (2.23)$$

Здесь

$$R_2 = \frac{p^4}{8} (2A_{4,0} + 3A_{4,2} \cos(2\omega - 2\nu_1)),$$

$$R_3 = \frac{p^5}{16} (3A_{5,1} \cos(\omega - \nu_1) + 5A_{5,3} \cos(3\omega - 3\nu_1))$$

Подставляя эти выражение в (2.23) и осредняя по M_1 , получим:

$$R^{**} = \frac{1}{a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \frac{1}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} (fm_1 - \delta r_0^2) \left(\frac{1}{4} \frac{p^4}{p_1} A_{4,0} + \frac{3}{16} \frac{p^5}{p_1^2} e_1 A_{5,1} \cos \omega \right) \quad (2.24)$$

Учитывая, что:

$$A_{4,0} = \frac{(2 + 3e^2)}{(1 - e^2)^{7/2}}, \quad A_{5,1} = -\frac{5(4e + 3e^3)}{4(1 - e^2)^{9/2}}, \quad p = a(1 - e^2), \quad p_1 = a_1(1 - e_1^2)$$

упростим выражение (2.24):

$$R^{**} = \frac{(fm_1 - \delta r_0^2) C_1^3 C_2^3}{4a} \left(2 + 3e^2 - \frac{15}{16} C_1 C_2^2 e_1 e (4 + 3e^2) \cos \omega \right) \quad (2.25)$$

Здесь

$$C_1 = \frac{a}{a_1}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - e_1^2}}$$

Заметим, что при отсутствии светового давления ($\delta = 0$) выражение (2.25) совпадает с усредненной возмущающей функцией плоской ограниченной задачи трех тел [42].

2.7 Качественный анализ

Найдем стационарные точки уравнений эволюционного движения по e и ω , используя уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \frac{R^{**}(e, \omega)}{\partial e} = \frac{(fm_1 - \delta r_0^2) C_1^3 C_2^3}{4a} \left(6e - \frac{15}{16} C_1 C_2^2 e_1 (4 + 9e^2) \cos \omega \right) = 0 \\ \frac{R^{**}(e, \omega)}{\partial \omega} = \frac{15 (fm_1 - \delta r_0^2) C_1^4 C_2^5}{64a} e_1 e (4 + 3e^2) \sin \omega = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Решая эту систему относительно ω и e , получаем следующие пары решений $N_m = (\omega^{(m)}, e^{(m)})$:

$$N_{1,2} = \left(2\pi k, \frac{16 \pm \sqrt{\Delta}}{45 C_1 C_2^2 e_1} \right), \quad N_{3,4} = \left((2k + 1)\pi, -\frac{16 \pm \sqrt{\Delta}}{45 C_1 C_2^2 e_1} \right), \quad N_5 = \left(\frac{\pi}{2} + \pi k, 0 \right)$$

Здесь $\Delta = 256 - 900C_1^2C_2^4e_1^2$, $k \in \mathbb{Z}$, первый нижний индекс при N соответствует знаку "+" при $\sqrt{\Delta}$. Отметим что, как показывают расчеты, $\Delta > 0$ при $|a| < a_1$.

Исследуем стационарные значения $e^{(m)}$ на предмет принадлежности их интервалу $(0,1)$. Несложно показать, что функции

$$e^{(1)} = \frac{16 + \sqrt{\Delta}}{45C_1C_2^2e_1}, \quad e^{(2)} = \frac{16 - \sqrt{\Delta}}{45C_1C_2^2e_1}, \quad e^{(3)} = \frac{-16 + \sqrt{\Delta}}{45C_1C_2^2e_1}, \quad e^{(4)} = \frac{-16 - \sqrt{\Delta}}{45C_1C_2^2e_1}$$

меняются монотонно, поэтому минимальные и максимальные их значения принадлежат границе замкнутой области $D = \{a \in [1, a_1]\}$. Результаты вычислений $e(a)$ на границе области D представлены в таблице 1. Непустое пересечение с

Таблица 1 – Значения $e^{(m)}$ на границе области D

	1	a_1
$e^{(1)}$	6.364×10^{12}	42.5306
$e^{(2)}$	0	0.01045
$e^{(3)}$	0	-0.01045
$e^{(4)}$	-6.364×10^{12}	-42.5306

интервалом $(0,1)$ имеет место только для точки $e^{(2)}$.

Итак, действительными стационарными решениями $N_m = (\omega^{(m)}, e^{(m)}(a))$, $0 \leq e^{(m)}(a) \leq 1$ уравнений (2.26) являются решения N_2, N_5 . Исследуем вопрос о поведении усредненной силовой функции в точках N_2, N_5 . Гессиан осредненной функции $R^{**}(e, \omega)$ имеет вид

$$\text{Hess}(R^{**}(e, \omega)) = AC - B^2,$$

где

$$A = \frac{3}{2} \frac{(fm_1 - \delta r_0^2) C_1^3 C_2^3}{a} \left(1 - \frac{45}{16} C_1 C_2^2 e e_1 \cos \omega \right),$$

$$B = \frac{15}{64} \frac{(fm_1 - \delta r_0^2) C_1^4 C_2^5}{a} e_1 (4 + 9e^2) \sin \omega,$$

$$C = \frac{15}{64} \frac{(fm_1 - \delta r_0^2) C_1^4 C_2^5}{a} e_1 e (4 + 3e^2) \cos \omega$$

Отсюда следует, что в точке N_5 имеем $C = 0$, гессиан меньше нуля, откуда следует, что N_5 – седловая точка (неустойчивое стационарное решение). В точке N_2 имеем $B = 0$, при этом $AC > 0$, поэтому N_2 – точка минимума, либо

максимума и, следовательно, точка является эллиптической (устойчивым стационарным решением).

На рис. 2.2 изображен фазовый портрет системы при значениях параметров $a = 10^9$ м, $\delta = 0.000796$ м/с². Случай $a = 2 \times 10^9$ м, $\delta = 0.008$ м/с² представлен на рис. 2.3.

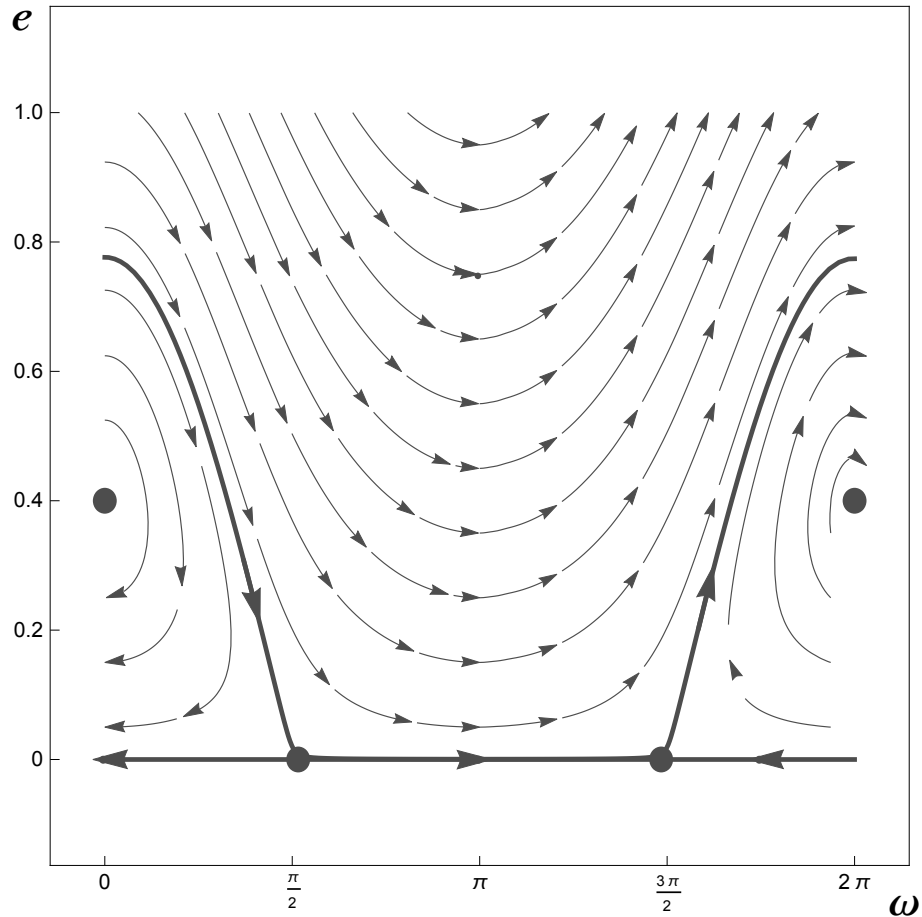


Рисунок 2.2 — Фазовый портрет колебаний с одним устойчивым стационарным решением $(0, e^{(2)})$ на цилиндре $S^1 \times R^1$

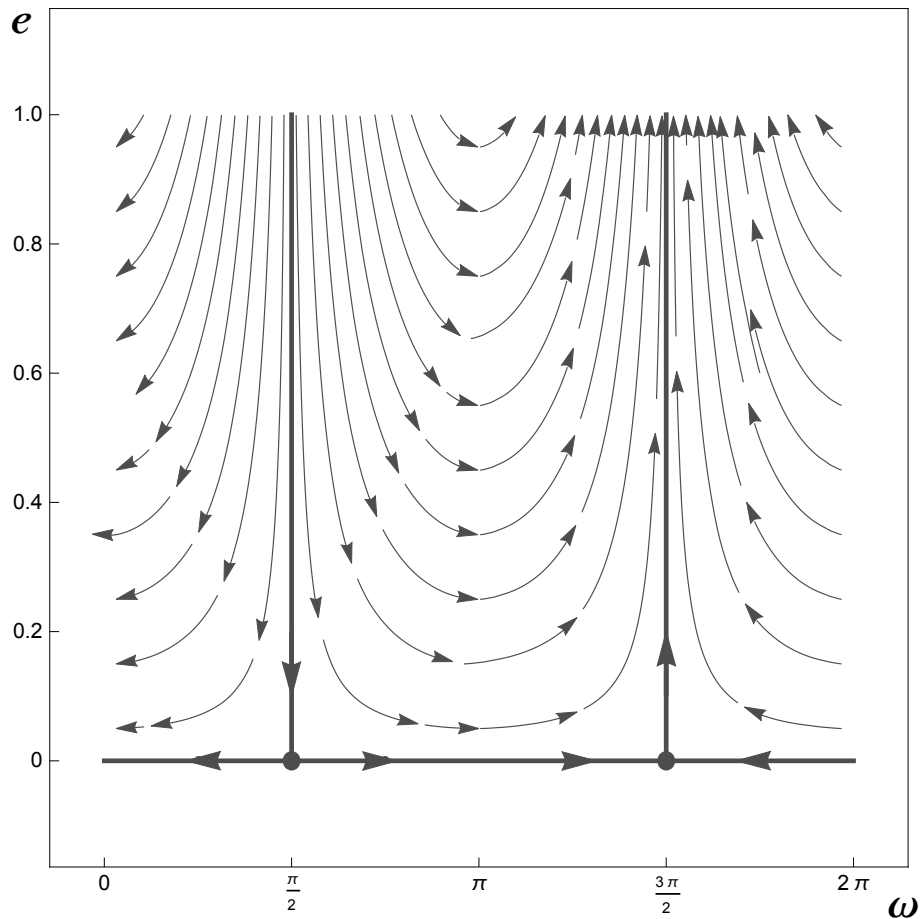


Рисунок 2.3 — Фазовый портрет колебаний в отсутствии устойчивого стационарного решения

2.8 Численный расчет траекторий движения

Подставляя в (2.22) частные производные усредненной силовой функции, получим

$$\begin{aligned}
 \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na} \left(\frac{15 (fm_1 - \delta r_0^2) C_1^4 C_2^5}{64a} e_1 e (4 + 3e^2) \sin \omega \right) \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena} \left(\frac{(fm_1 - \delta r_0^2) C_1^3 C_2^3}{4a} \left(6e - \frac{15}{16} C_1 C_2^2 e_1 (4 + 9e^2) \cos \omega \right) \right) \\
 \frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{ena} \left(\frac{(fm_1 - \delta r_0^2) C_1^3 C_2^3}{4a} \left(6e - \frac{15}{16} C_1 C_2^2 e_1 (4 + 9e^2) \cos \omega \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.27}$$

Для построения оскулирующего эллипса в декартовых координатах воспользуемся параметризацией с помощью полярных координат:

$$x = r(t) \cos \theta(t), \quad y = r(t) \sin \theta(t), \quad r(t) = a(1 - e \cos E) \quad (2.28)$$

где θ – полярный угол, E – эксцентрическая аномалия, при этом

$$E = M(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke(t))}{k} \sin kM(t),$$

$$\theta = \nu + \omega, \quad \nu = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right) \quad (2.29)$$

Здесь J_k – функция Бесселя, M – средняя аномалия, ω – аргумент перицентра орбиты спутника.

Считаем, что в начальный момент времени $\omega = 0$. Используя известные формулы для $\cos \nu$ и $\sin \nu$

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin \nu = \frac{\sin E \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E},$$

получим

$$x = a \left(\cos \omega (\cos E - e) - \sin \omega \sin E \sqrt{1 - e^2} \right)$$

$$y = a \left(\cos \omega \sin E \sqrt{1 - e^2} + \sin \omega (\cos E - e) \right) \quad (2.30)$$

Рассмотрим фазовые траектории в случае существования устойчивого стационарного решения $(0, e^{(2)})$ (см. рис. 2.2). Для этого случая проведем численное моделирование траекторий движения, задав параметры $\delta = 0.000796$, $a = 10^9$ для разных начальных значений фазовых переменных уравнений (2.27). Так, в окрестности стационарной точки $(0, e^{(2)})$ можем положить $\omega(0) = 0$, $e(0) = 0.3$, при этом считаем $M(0) = 0$. Интегрируя систему (2.27) численно на промежутке времени $t = [0, 10^8]$ сек. получим возмущенные траектории „либрационного“ типа (см. рис. 2.4) как для случая чисто гравитационных возмущений от Солнца (пунктирные кривые), так и с учетом совместного влияния светового и гравитационного воздействий (сплошные кривые). Поскольку оскулирующие аргумент перицентра и эксцентриситет меняются слабо, возмущенная орбита (сплошная кривая) близка к „стационарной орбите“, отвечающей стационарной точке фазового портрета. Заметим, что „стационарная орбита“ сохраняет

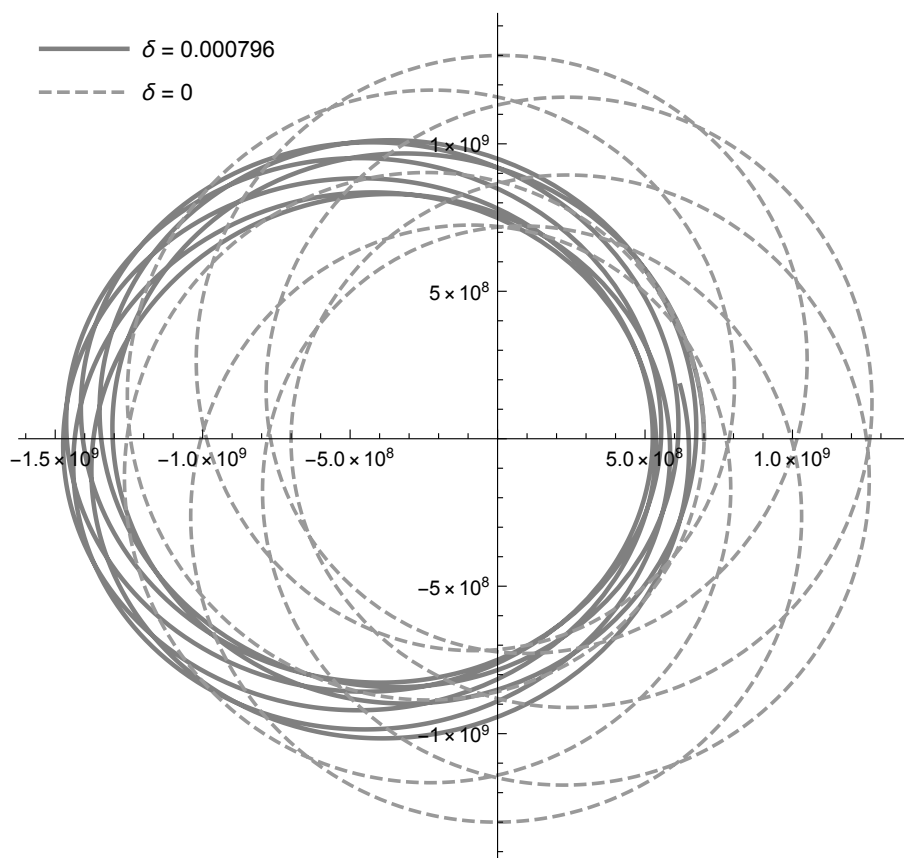


Рисунок 2.4 — Траектории либрационного типа

значения своих кеплеровских элементов $a = 10^9$, $\omega = 0$, $e = 0.387424$ во все время движения.

Для начальных значений $\omega(0) = 0$, $e(0) = 0.9$, $M(0) = 0$, отвечающих случаю вековых возмущений по ω , имеем траектории ротационного типа, представленные на рис. 2.5 как для случая чисто гравитационных возмущений от Солнца (пунктирные кривые), так и с учетом совместного влияния светового и гравитационного воздействий (сплошные кривые). Особенность такого семейства орбит – непрерывно меняющийся эксцентриситет орбиты и непрерывно возрастающий аргумент перицентра, как следствие, линия апсид оскулирующего эллипса медленно вращается в одну сторону и оскулирующая орбита сильно отличается от „стационарной орбиты“.

На рис. 2.6 представлены вырожденные траектории, отвечающие падению спутника на Землю, так как им соответствуют фазовые траектории рис. 2.2, на которых эксцентриситет достигает (и превышает) значение 1. Расчеты проводились при следующих значениях начальных условий: $\omega(0) = 0.2$, $e(0) = 0.99$, $M(0) = 0$ и соответствуют интервалу времени 10^8 сек. Отсутствие в расчетах функции тени позволяет рассматривать полученные траектории только как

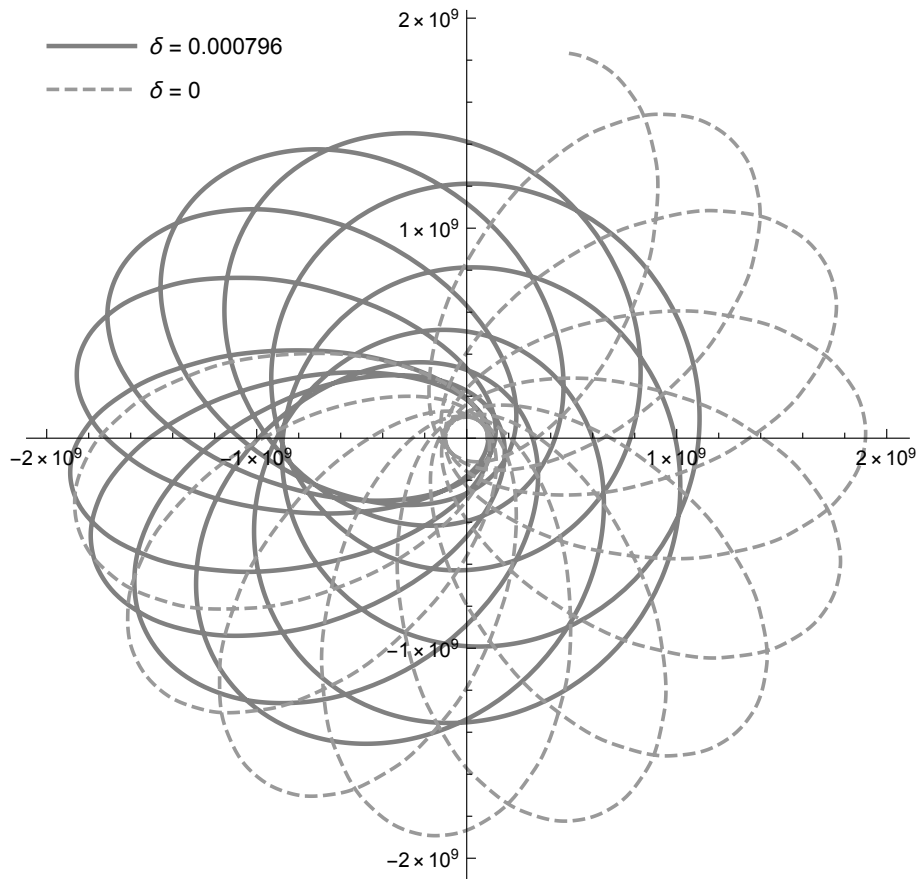


Рисунок 2.5 — Траектории ротационного типа

упрощенное приближение истинных орбит столкновения, так как тень играет важную роль в этом случае.

В заключении отметим, что точность, с которой решения усредненной системы приближают решения строгих уравнений движения спутника-баллона, определяется на основе обобщенной теоремы Боголюбова Н. Н. [60;61], поскольку строгие уравнения движения содержат два независимых малых параметра: δ и $\varepsilon = 1/a_1$. Из указанных работ следует, что метод усреднения с двумя независимыми малыми параметрами гарантирует точность приближения первого порядка малости по малым параметрам на асимптотически большем промежутке времени, то есть для любых малых величин $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ существуют константы $\gamma_1(\sigma_1, \sigma_2) > 0$, $\gamma_2(\sigma_1, \sigma_2) > 0$ такие, что

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \gamma_1(\sigma_1, \sigma_2)\delta + \gamma_2(\sigma_1, \sigma_2)\varepsilon$$

когда $t \sim 1/\|(\delta, \varepsilon)\|$, $0 \leq \delta \leq \sigma_1$, $0 \leq \varepsilon \leq \sigma_2$. Здесь $u(t) = (x(t), y(t))$ – вектор строгих решений уравнений движений, рассчитанный на основе формул (2.30) и интегрирования точных уравнений в оскулирующих элементах, $v(t) = (\hat{x}(t), \hat{y}(t))$ – вектор приближенных решений, рассчитанный на основе

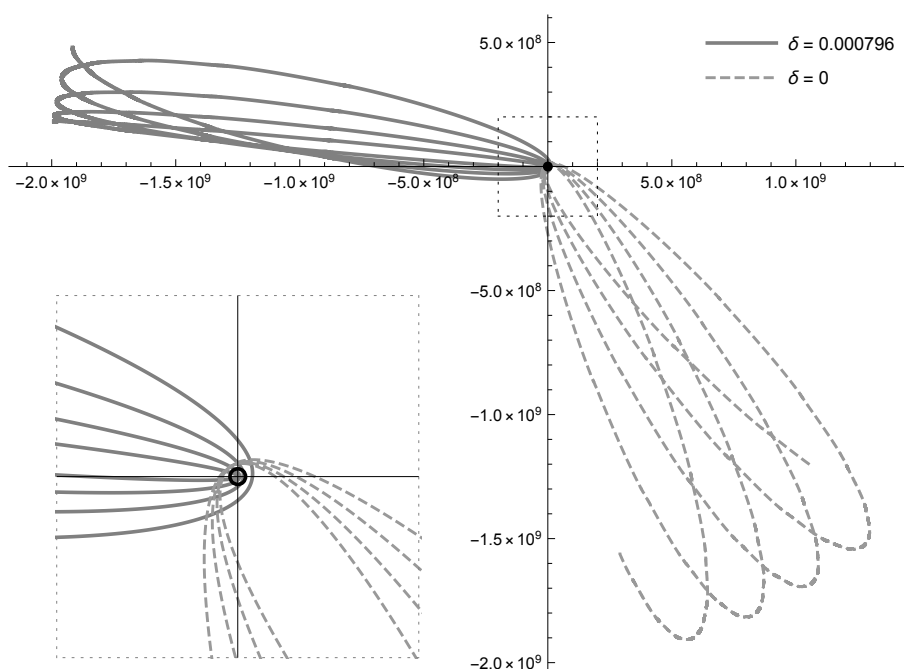


Рисунок 2.6 — Траектории столкновения

формул (2.30) и интегрирования усредненных уравнений в оскулирующих элементах (2.27).

2.9 Заключение

Исследована эволюция высоких орбит спутника Земли, принадлежащих плоскости эклиптики, под действием гравитационных возмущений от Солнца и светового давления. Показано, что существует три типа эволюционирующих орбит: орбиты либрационного и ротационного типов и орбиты столкновения с Землей. Для орбит первого типа оскулирующие аргумент перигелия и эксцентриситет меняются периодически, но с малыми амплитудами, орбита близка к траектории, сохраняющей значения своих невозмущенных кеплеровских элементов во все время движения.

Особенность семейства орбит второго типа – непрерывно возрастающий аргумент перигелия, и, как следствие, медленное вращение линия апсид оскулирующего эллипса, на которое накладывается медленное периодическое изменение эксцентриситета.

Орбиты столкновения характеризуются оскулирующими эксцентриситетами, близкими к единице. В этом случае расстояние между Землей и перигелием

орбиты мало, что ведет к столкновению спутника-баллона с Землей. Заметим, что этот класс орбит требует уточнения, так как не учитывается зона земной тени.

Описаны дополнительные эффекты, вызванные световым давлением: смещение ограниченной траектории спутника как целого относительно траектории классической задачи трех тел в область, более удаленную от Солнца (на рис. 2.4 и рис. 2.5 Солнце находится в правой полуплоскости).

Постановка задачи и выбор метода исследования принадлежит проф. Красильникову П.С. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в данной главе. Также автором выполнены все аналитические и численные расчёты с использованием упомянутых в главе методов.

Глава 3. Эволюция движений спутника в плоской ограниченной планетной задаче четырех тел с учетом светового давления

В главе рассматривается плоская ограниченная планетная задача четырёх тел с учётом сил светового давления, когда орбита Земли – кеплеровский эллипс с фокусом в Солнце, орбита Луны – кеплеровский эллипс с фокусом в Земле, спутник Земли – пассивно гравитирующее тело.

Определяется усреднённая силовая функция задачи в оскулирующих элементах в нерезонансном случае, когда невозмущённая орбита спутника Земли принадлежит внешней сфере гравитационного влияния Земли, расположенной за лунной сферой Хилла. В главе находятся первые интегралы, исследуются стационарные режимы колебаний, их бифуркация в зависимости от коэффициента светового давления δ и большой полуоси невозмущённой орбиты спутника a . Показывается, что при фиксированном параметре большой полуоси, существует два бифуркационных значения коэффициента светового давления. Бифуркации также наблюдаются при фиксированном значении δ .

Строятся фазовые портреты колебаний при разных значениях коэффициента светового давления δ .

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим движение спутника-баллона большой парусности на асимптотически больших промежутках времени, когда орбиты спутника находятся во внешней сфере гравитационного влияния Земли, расположенной за лунной сферой Хилла.

Поскольку орбита Луны составляет малый угол с плоскостью эклиптики, будем считать, что все тела движутся в одной плоскости (рис. 3.1). Введем декартову неинерциальную систему координат, с центром в P_0 (Земле) и осью P_0x , направленной в перицентр орбиты Солнца, при этом тело P_1 массы m_1 (Солнце) обращается вокруг тела P_0 по эллиптической орбите с заданными большой полуосью a_1 и эксцентриситетом e_1 . Тело P_2 массы m_2 (Луна), также движется по эллиптической орбите вокруг P_0 с заданной большой полуосью a_2 , эксцен-

триситетом e_2 и аргументом перицентра ω_2 . Считаем также, что невозмущённая орбита пассивно-гравитирующего тела P (спутника-баллона) есть кеплеровский эллипс с фокусом в точке P_0 , большой полуосью a и эксцентриситетом e . На спутник действуют гравитационные силы со стороны массивных тел P_0 , P_1 (вектор $\vec{\Delta}_1$) и P_2 (вектор $\vec{\Delta}_2$). Помимо этого, будем учитывать силу светового давления \vec{F} со стороны тела P_1 , считая, что спутник имеет значительную площадь миделева сечения при небольшой массе. Будем считать также, что большая полуось орбиты спутника существенно превосходит радиус лунной орбиты ($a \approx 6.15 \times 10^{-3}$ а.е.). В этом случае можно пренебречь эффектом земной тени, как было показано в главе 1.

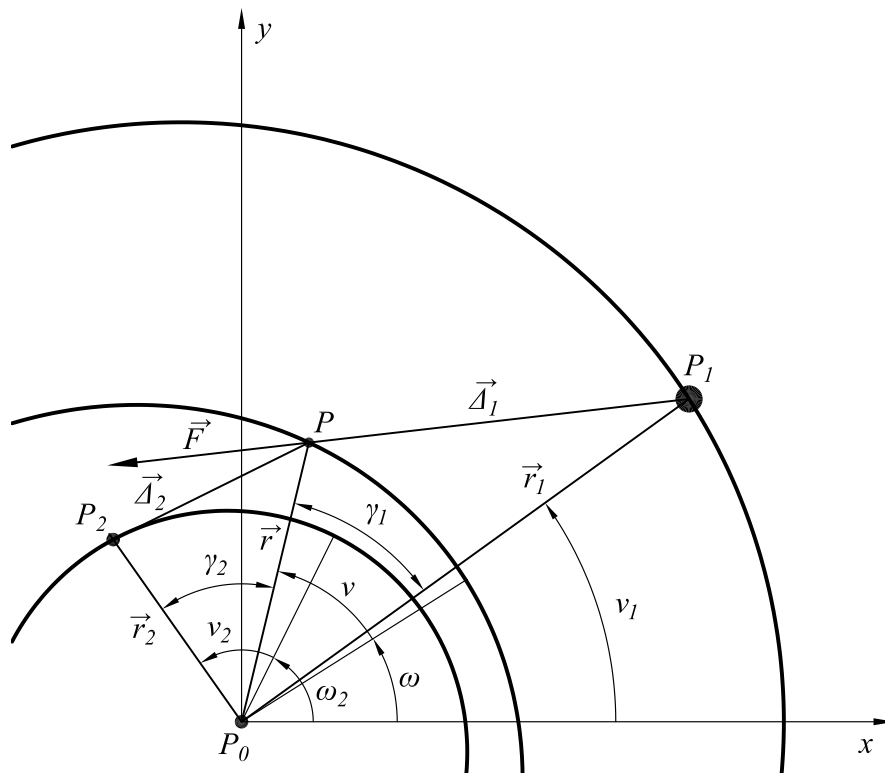


Рисунок 3.1 — Задача четырех тел с учетом светового давления

Отметим, что в силу постановки задачи траектории возмущающих тел P_1 , P_2 рассматриваются как кеплеровские эллипсы. Такое допущение вполне оправдано, так как спутник находится на значительном удалении как от P_1 , так и от P_2 , поэтому возмущения в кеплеровских элементах орбит этих тел дают пренебрежимо малый вклад в силовую функцию задачи.

Пусть γ_1 — угол между векторами \vec{r} и \vec{r}_1 , имеющий выражение через параметры орбитального движения:

$$\gamma_1 = \nu + \omega - \nu_1. \quad (3.1)$$

Здесь ν , ω – соответственно, истинная аномалия и аргумент перицентра тела P , а ν_1 – истинная аномалия орбиты тела P_1 . Обозначим γ_2 угол между векторами \vec{r} и \vec{r}_2 , тогда:

$$\gamma_2 = \nu_2 + \omega_2 - \nu - \omega, \quad (3.2)$$

где ν_2 , ω_2 – истинная аномалия и аргумент перицентра тела P_2 .

На рис. 3.2 приведены сферы влияния гравитационного поля Земли, Луны и Солнца. От точки E_1 до точки M_1 (≈ 0.0021257 а.е.) – внутренняя сфера влияния Земли, от точки M_1 до точки M_2 (≈ 0.00300806 а.е.) – сфера влияния Луны, от точки M_2 до точки E_2 (≈ 0.00620998 а.е.) располагается внешняя сфера влияния Земли, за точкой E_2 начинается сфера гравитационного влияния Солнца.

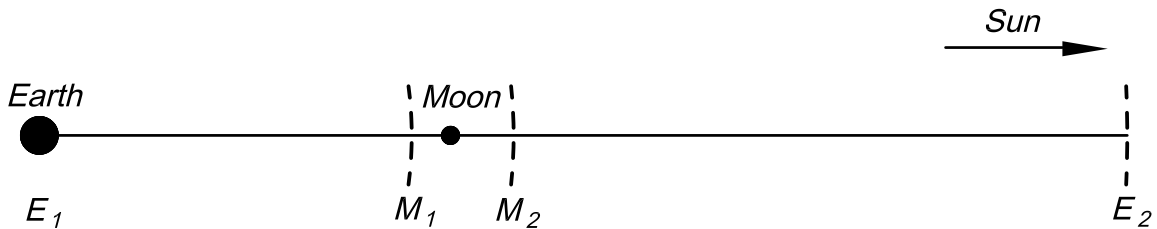


Рисунок 3.2 – Сферы гравитационного влияния

3.2 Возмущающая функция

Выражение для возмущающей силовой функции представим в виде:

$$R = R_1 + R_\lambda + R_2. \quad (3.3)$$

Здесь R_1 – силовая функция гравитационного возмущения от Солнца, имеющая вид

$$R_1 = \frac{fm_1}{r_1} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^k P_k(\cos \gamma_1),$$

f – гравитационная постоянная, P_k – полиномы Лежандра.

R_λ – возмущённая функция светового давления на спутник:

$$R_\lambda = -\delta \left(\frac{r_0^2}{r_1^2} r \cos \gamma_1 + \frac{r_0^2}{r_1} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_1} \right)^k P_k(\cos \gamma_1) \right),$$

где r_0 – среднее расстояние от Земли до Солнца, δ – коэффициент светового давления на сферический спутник:

$$\delta = \frac{\varkappa \pi \rho^2 E_0}{mc} \quad (3.4)$$

Здесь ρ – радиус спутника, m – его масса, \varkappa – коэффициент поверхности спутника, равный 1 для полного поглощения/отражения света, и 1.44 для диффузного рассеивания, E_0 – солнечная постоянная, определённая как мощность светового потока на поверхности Земли без учёта поглощения в атмосфере (приблизительно 1367 Вт/м²), c – скорость света в вакууме.

Далее, R_2 – силовая функция гравитационного возмущения со стороны тела P_2 (Луны), которая, для случая внешней сферы гравитационного влияния Земли, находящейся за сферой Хилла Луны, имеет вид [56]:

$$R_2 = fm_2 \left(\frac{1}{r} + \frac{r_2^3 - r^3}{r^2 r_2^2} \cos \gamma_2 + \frac{1}{r} \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r} \right)^k P_k(\cos \gamma_2) \right) \quad (3.5)$$

Здесь $r_2 < r$, $3 \times 10^{-3} < r < 6.21 \times 10^{-3}$ а.е.

3.3 Усреднённая возмущающая функция

Возмущающую функцию (3.3) усредним по M – средней аномалии тела P при $r_2 < r$:

$$R^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R_1 + R_\lambda + R_2) dM$$

Учитывая, что:

$$dM = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} d\nu,$$

где a и e – большая полуось и эксцентриситет орбиты тела P , и подставляя выражения для R_1 , R_2 , R_λ , получим:

$$\begin{aligned}
R^* = & -\frac{\delta r_0^2}{r_1^2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^3 \cos \gamma_1}{a^2 \sqrt{1-e^2}} d\nu + \\
& + \frac{f m_1 - \delta r_0^2}{r_1} \frac{1}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{k=2}^{\infty} r_1^{-k} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^{k+2} P_k(\cos \gamma_1) d\nu + \\
& + \frac{f m_2}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} \left(r + \frac{r_2^3 - r^3}{r_2^2} \cos \gamma_2 + r \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{r_2}{r} \right)^k P_k(\cos \gamma_2) \right) d\nu \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение функцию:

$$R_{m,k}^*(\xi) = \frac{1}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^m P_k(\cos(\nu - \xi)) d\nu \quad (3.7)$$

Имеем [59]:

$$P_k(\cos(\nu - \xi)) = \left(P_k^{(0)}(0) \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^k \frac{(k-i)!}{(k+i)!} \left(P_k^{(i)}(0) \right)^2 \cos i(\nu - \xi) \quad (3.8)$$

Здесь $P_k^{(i)}(0)$ – присоединенные функции Лежандра в нуле:

$$P_k^{(i)}(0) = \begin{cases} (-1)^{(k-i)/2} \frac{(k+i)!}{2^k \left(\frac{k-i}{2}\right)! \left(\frac{k+i}{2}\right)!}, & k-i = 2m, m \in \mathbb{Z} \\ 0, & k-i = 2m+1, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Подставим (3.8) и $r = a(1-e^2)/(1+e \cos \nu)$ в функцию (3.7) и проинтегрируем:

$$\begin{aligned}
R_{m,k}^*(\xi) = & \frac{a^m (1+e)^m}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \left(F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, m; 1; \frac{2e}{e-1} \right) \left(P_k^{(0)}(0) \right)^2 + \right. \\
& \left. 2 \sum_{i=1}^k \frac{(k-i)!}{(k+i)!} \left(P_k^{(i)}(0) \right)^2 F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, m; 1-i, 1+i; \frac{2e}{e-1} \right) \cos i\xi \right) \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Здесь $F_{2,1}$ – гипергеометрическая функция, $F_{3,2}^{reg}$ – обобщенная регуляризованная гипергеометрическая функция. Заметим, что

$$F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, m; 1 - i, 1 + i; \frac{2e}{e-1} \right)_{i=0} = F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, m; 1, 1; \frac{2e}{e-1} \right) = \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + n)}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{\Gamma(m + n)}{\Gamma(m)} \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1 + n)} \left(\frac{2e}{e-1} \right)^n \frac{1}{n!} = F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, m; 1; \frac{2e}{e-1} \right)$$

В итоге усредненная функция R^* примет вид:

$$R^* = \frac{3r_0^2}{2r_1^2} \delta e a \cos(\omega - \nu_1) + \frac{fm_1 - \delta r_0^2}{r_1} \sum_{k=2}^{\infty} r_1^{-k} R_{k+2,k}^*(\nu_1 - \omega) + \\ fm_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{3ea}{2r_2^2} \cos(\nu_2 + \omega_2 - \omega) + \sum_{k=2}^{\infty} r_2^k R_{1-k,k}^*(\nu_2 + \omega_2 - \omega) \right) \quad (3.10)$$

при условии, что $R_{m,k}^*(\xi)$ вычисляется по формуле (3.9).

Усредним R^* по M_1 (средней аномалии тела P_1) предполагая, что средние движения n , n_1 тел P , P_1 не резонируют:

$$R^{**} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^* dM_1, \quad dM_1 = \frac{r_1^2}{a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} d\nu_1$$

Учитывая, что третье слагаемое, входящее в формулу (3.10), не зависит от M_1 , усредняем только первые два слагаемых:

$$I_1^{**} = \frac{1}{a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3r_0^2}{2} \delta e a \cos(\omega - \nu_1) d\nu_1 = 0 \\ I_2^{**} = \frac{1}{a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (fm_1 - \delta r_0^2) \sum_{k=2}^{\infty} r_1^{1-k} R_{k+2,k}^*(\omega - \nu_1) d\nu_1$$

Для вычисления интеграла I_2^{**} введем функцию:

$$R_{s,m,k}^{**}(\eta) = \frac{1}{a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_1^s R_{m,k}^*(\eta - \nu_1) d\nu_1 \quad (3.11)$$

Учитывая $r_1 = a_1(1 - e_1^2)/(1 + e_1 \cos \nu_1)$ и почленно проинтегрировав (3.9), получим:

$$R_{s,m,k}^{**}(\eta) = \frac{a_1^s(1 + e_1)^s a^m(1 + e)^m}{a_1^2 \sqrt{1 - e_1^2} a^2 \sqrt{1 - e^2}} \times \\ \left(F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, s; 1; \frac{2e_1}{e_1 - 1} \right) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, m; 1; \frac{2e}{e - 1} \right) \left(P_k^{(0)}(0) \right)^2 + \right. \\ \left. 2 \sum_{i=1}^k \frac{(k - i)!}{(k + i)!} \left(P_k^{(i)}(0) \right)^2 F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, s; 1 - i, 1 + i; \frac{2e_1}{e_1 - 1} \right) \times \right. \\ \left. F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, m; 1 - i, 1 + i; \frac{2e}{e - 1} \right) \cos i\eta \right) \quad (3.12)$$

Тогда интеграл I_2^{**} предстанет в виде:

$$I_2^{**} = (fm_1 - \delta r_0^2) \sum_{k=2}^{\infty} R_{1-k,k+2,k}^{**}(\omega) \quad (3.13)$$

Результат усреднения по M_1 запишем в виде:

$$R^{**} = (fm_1 - \delta r_0^2) \sum_{k=2}^{\infty} R_{1-k,k+2,k}^{**}(\omega) + \\ fm_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{3ea}{2r_2^2} \cos(\omega - \nu_2 - \omega_2) + \sum_{k=2}^{\infty} r_2^k R_{1-k,k}^*(\omega - \nu_2 - \omega_2) \right) \quad (3.14)$$

Усредним R^{**} по M_2 (средней аномалии тела P_2), предполагая, что средние движения n, n_2 тел P, P_2 не резонируют. Обозначим через R^{***} трёхкратно усредненное значение возмущающей функции:

$$R^{***} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^{**} dM_2, \quad dM_2 = \frac{r_2^2}{a_2^2 \sqrt{1 - e_2^2}} d\nu_2$$

Усредним в (3.14) слагаемые, зависящие от M_2 :

$$I_1^{***} = \frac{3}{2} \frac{fm_2 ea}{a_2^2 \sqrt{1 - e_2^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\omega - \nu_2 - \omega_2) d\nu_2 = 0 \\ I_2^{***} = \frac{1}{a_2^2 \sqrt{1 - e_2^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=2}^{\infty} r_2^{k+2} R_{1-k,k}^*(\omega - \nu_2 - \omega_2) \right) d\nu_2$$

Для вычисления I_2^{***} введем функцию:

$$R_{t,m,k}^{***}(\zeta) = \frac{1}{a_2^2 \sqrt{1-e_2^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_2^t R_{m,k}^*(\zeta - \nu_2) d\nu_2 \quad (3.15)$$

Раскрывая функцию (3.9) и учитывая, что $r_2 = a_2(1 - e_2^2)/(1 + e_2 \cos \nu_2)$, получим:

$$\begin{aligned} R_{t,m,k}^{***}(\zeta) &= \frac{1}{a_2^2 \sqrt{1-e_2^2}} \times \\ &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_2(1-e_2^2)}{1+e_2 \cos \nu_2} \right)^t \frac{a^m(1+e)^m}{a^2 \sqrt{1-e^2}} \left(F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, m; 1; \frac{2e}{e-1} \right) \left(P_k^{(0)}(0) \right)^2 + \right. \\ &\left. 2 \sum_{i=1}^k \frac{(k-i)!}{(k+i)!} \left(P_k^{(i)}(0) \right)^2 F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, m; 1-i, 1+i; \frac{2e}{e-1} \right) \cos i(\zeta - \nu_2) \right) d\nu_2 \end{aligned}$$

После почленного интегрирования ряда выражение для функции $R_{t,m,k}^{***}$ примет вид:

$$\begin{aligned} R_{t,m,k}^{***}(\zeta) &= \frac{a_2^t(1+e_2)^t a^m(1+e)^m}{a_2^2 \sqrt{1-e_2^2} a^2 \sqrt{1-e^2}} \times \\ &\left(F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, t; 1; \frac{2e_2}{e_2-1} \right) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, m; 1; \frac{2e}{e-1} \right) \left(P_k^{(0)}(0) \right)^2 + \right. \\ &2 \sum_{i=1}^k \frac{(k-i)!}{(k+i)!} F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, t; 1-i, 1+i; \frac{2e_2}{e_2-1} \right) \times \\ &\left. F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, m; 1-i, 1+i; \frac{2e}{e-1} \right) \left(P_k^{(i)}(0) \right)^2 \cos i\zeta \right) \quad (3.16) \end{aligned}$$

Таким образом, с учетом (3.16), трижды осредненная функция возмущения задачи R^{***} имеет вид:

$$\begin{aligned} R^{***} &= (fm_1 - \delta r_0^2) \sum_{k=2}^{\infty} R_{1-k, k+2, k}^{**}(\omega) + \\ &+ fm_2 \left(\frac{1}{a} + \sum_{k=2}^{\infty} R_{k+2, 1-k, k}^{***}(\omega - \omega_2) \right) \quad (3.17) \end{aligned}$$

3.4 Первые интегралы уравнений движения

В случае плоского движения с учетом того, что в результате усреднения функция возмущения R^{***} не зависит от средней аномалии M , осредненные оскулирующие уравнения Лагранжа имеют вид [56]:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= 0 \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R^{***}}{\partial \omega} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{ena^2} \frac{\partial R^{***}}{\partial e} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{ena^2} \frac{\partial R^{***}}{\partial e}\end{aligned}\quad (3.18)$$

Где n — среднее движение возмущаемого тела P . Уравнения по e , ω имеют канонический вид с автономной функцией Гамильтона R^{***} , поэтому система допускает два первых интеграла:

$$a = const, \quad R^{***}(e, \omega) = const$$

3.5 Качественный анализ

Для проведения качественного анализа рассмотрим усечённый ряд (3.17), в котором ограничимся первыми тремя членами, взятыми для гравитационного возмущения со стороны Солнца (поскольку $r/r_1 \ll 1$) и со стороны Луны ($r_2/r \ll 1$). Тогда, после преобразований, получим следующее выражение для усеченной силовой функции:

$$\begin{aligned}R^{(3,3)} &= (fm_1 - \delta r_0^2) \left(\frac{a^2 (3e^2 + 2)}{8a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}} - \frac{15e_1 a^3 (3e^3 + 4e)}{64a_1^4 (1 - e_1^2)^{5/2}} \cos \omega \right) + \\ &f m_2 \left(\frac{1}{a} + \frac{a_2^2 (3e_2^2 + 2)}{8a^3 (1 - e^2)^{3/2}} - \frac{15ee_2 a_2^3 (3e_2^2 + 4)}{64a^4 (1 - e^2)^{5/2}} \cos(\omega - \omega_2) \right)\end{aligned}\quad (3.19)$$

Найдем стационарные точки уравнений эволюционного движения (3.18) по e и ω , используя условия равновесия:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial R^{(3,3)}}{\partial e} = (fm_1 - \delta r_0^2) \left(\frac{3}{4} \frac{ea^2}{a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}} - \frac{15}{64} \frac{e_1 a^3 (9e^2 + 4)}{a_1^4 (1 - e_1^2)^{5/2}} \cos \omega \right) + \\ \quad + fm_2 \left(\frac{3}{8} \frac{ea_2^2 (3e_2^2 + 2)}{a^3 (1 - e^2)^{5/2}} - \right. \\ \quad \left. - \frac{15}{64} \frac{a_2^3 e_2 (4e^2 + 1) (3e_2^2 + 4)}{a^4 (1 - e^2)^{7/2}} \cos(\omega - \omega_2) \right) = 0 \\ \frac{\partial R^{(3,3)}}{\partial \omega} = (fm_1 - \delta r_0^2) \frac{15e_1 a^3 (3e^3 + 4e)}{64a_1^4 (1 - e_1^2)^{5/2}} \sin \omega + \\ \quad + fm_2 \frac{15}{64} \frac{a_2^3 e e_2 (3e_2^2 + 4)}{a^4 (1 - e^2)^{5/2}} \sin(\omega - \omega_2) = 0 \end{array} \right. \quad (3.20)$$

Одним из решений второго уравнение в системе (3.20) является $e = 0$. Более того, из системы уравнений (3.18) следует, что одномерное многообразие $e = 0$ является интегральным, при этом ω его локальная координата (ω теряет физический смысл как угол, задающий положение перигея оскулирующего эллипса в плоскости P_0xy).

Подставив $e = 0$ в первое уравнение системы (3.20), получим выражение для нахождения ω :

$$\frac{a^3 e_1 (fm_1 - \delta r_0^2)}{a_1^4 (1 - e_1^2)^{5/2}} \cos \omega + \frac{fm_2 a_2^3 e_2 (3e_2^2 + 4)}{4a^4} \cos(\omega - \omega_2) = 0$$

Отсюда находим значения стационарных точек $\omega = \omega_*$ на интервале $[0, 2\pi)$: $\omega_* = \{\pi/2, 3\pi/2\}$ при $\omega_2 = \{0, \pi\}$ и, если аргумент перицентра орбиты Луны отличен от πm , имеем два значения ω_* , как функции параметров задачи (их явные выражения опускаем). Одна из стационарных точек устойчива, вторая неустойчива на многообразии $e = 0$. Нестационарный режим $(0, \omega(t))$ описывает асимптотическое стремление к устойчивой точке.

Таким образом, круговая невозмущённая орбита спутника-баллона сохраняет свою форму под действием возмущений от Солнца, Луны и светового давления, но при этом угловая скорость движения спутника по орбите меняется на малую величину $\dot{\omega}$, зависящую от времени и параметров возмущений. Влияние Луны проявляет себя в том, что возмущения $\omega(t)$ в полярном угле $\nu + \omega$ радиус-вектора спутника имеют предельный режим $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(t) = \omega_*$, отличный от $\pi/2, 3\pi/2$ при $\omega_2 \neq \pi m$.

Для исследования движений спутника при значениях $e \neq 0$ заметим, что система (3.20) линейна относительно $\sin \omega$ и $\cos \omega$. Из второго уравнения и тождества $\sin^2 \omega + \cos^2 \omega = 1$ выразим $\sin \omega$ и $\cos \omega$:

$$\sin \omega = \pm \frac{M(e,a) \sin \omega_2}{Q(e,a,\delta,\omega_2)}, \quad \cos \omega = \pm \frac{M(e,a) \cos \omega_2 + S(e,a,\delta)}{Q(e,a,\delta,\omega_2)} \quad (3.21)$$

где знаки перед выражением следует брать согласованно. Здесь:

$$S(e,a,\delta) = (fm_1 - \delta r_0^2) \frac{5e_1 a^3 (3e^2 + 4)}{16a_1^4 (1 - e_1^2)^{5/2}}, \quad M(e,a) = fm_2 \frac{5e_2 a_2^3 (3e_2^2 + 4)}{16a^4 (1 - e^2)^{5/2}},$$

$$Q(e,a,\delta,\omega_2) = \left(M^2(e,a) + S^2(e,a,\delta) + 2M(e,a)S(e,a,\delta) \cos \omega_2 \right)^{1/2}$$

Подставив (3.21) в первое уравнение системы (3.20) исключим ω , получив выражение относительно эксцентриситета e :

$$\begin{aligned} \frac{a^2 (fm_1 - \delta r_0^2)}{a_1^3 (1 - e_1^2)^{3/2}} \left(e \mp \frac{5ae_1(9e^2 + 4)}{16a_1(1 - e_1^2)} \left(\frac{M(e,a) \cos \omega_2 + S(e,a,\delta)}{Q(e,a,\delta,\omega_2)} \right) \right) + \\ fm_2 \left(\frac{a_2^2 e (3e_2^2 + 2)}{2a^3 (1 - e^2)^{5/2}} \mp \frac{5a_2^3 e_2 (4e^2 + 1) (3e_2^2 + 4)}{16a^4 (1 - e^2)^{7/2}} \times \right. \\ \left. \left(\frac{M(e,a) + S(e,a,\delta) \cos \omega_2}{Q(e,a,\delta,\omega_2)} \right) \right) = 0 \quad (3.22) \end{aligned}$$

Уравнение (3.22) исследуем численно для системы Земля-Луна-Солнце: $a = 6.02 \times 10^{-3}$ а.е., $a_1 = 1$ а.е., $a_2 = 2.57 \times 10^{-3}$ а.е., $e_1 = 0.01671123$, $e_2 = 0.0549$, $\omega_2 = 0$, рассматривая δ как независимый параметр. На рис. 3.3 изображены кривые равновесий в координатах (δ, e) , где непрерывной линией отмечены устойчивые, а штриховой – неустойчивые положения равновесия. На левой ветви кривой равновесия, соответствующей знаку минус в уравнении (3.22), отмечена точка бифуркации (1) с координатами $(\delta_*^{(1)}, e_*^{(1)}) = (4.57941 \times 10^{-4}, 0.896625)$. На правой ветви расположена точка бифуркации (2) с координатами $(\delta_*^{(2)}, e_*^{(2)}) = (3.07792 \times 10^{-4}, 0.159413)$, соответствующей плюсу в уравнении (3.22).

Исследуем уравнение (3.22) при фиксированном $\delta = 5 \times 10^{-4}$, рассматривая теперь a как независимый параметр. На рис. 3.4 представлена кривая равновесия в координатах (a, e) , где непрерывной линией отмечены устойчивые, а штриховой – неустойчивые положения равновесия. Вертикальными штриховыми линиями на рисунке отмечена лунная сфера Хилла. Точка бифуркации имеет координаты $(a_*, e_*) = (5.515555 \times 10^{-3}, 0.887115)$.

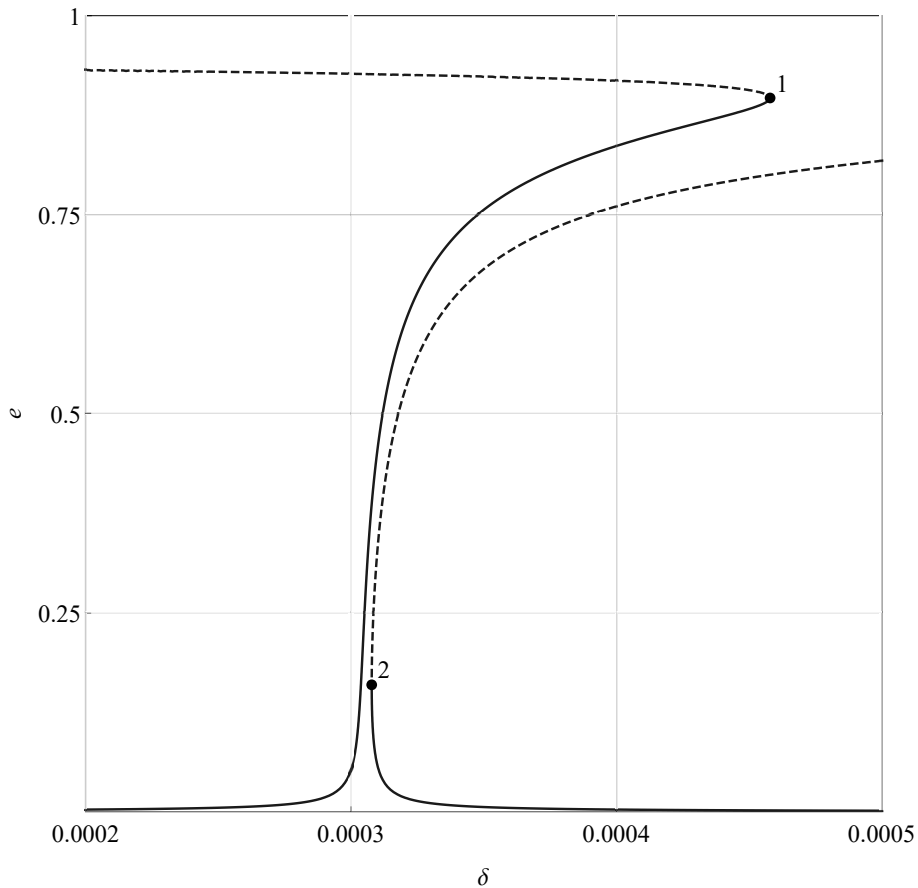
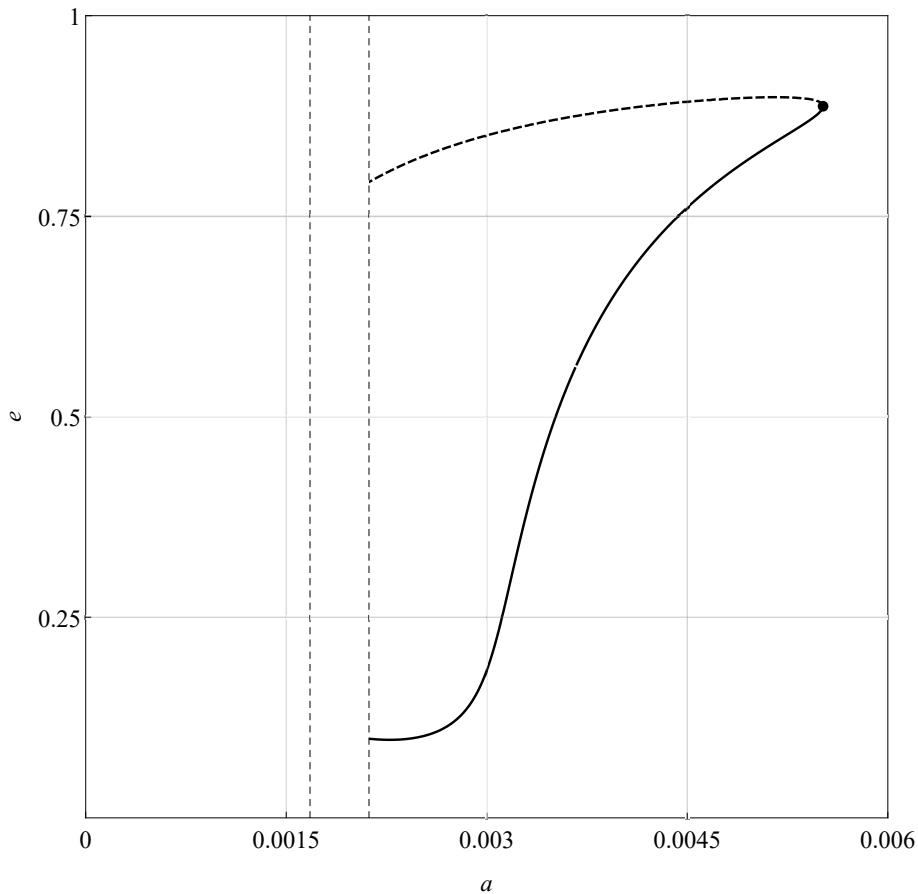


Рисунок 3.3 – Бифуркационная диаграмма $e(\delta)$

Построим фазовые портреты колебаний по (ω, e) , используя прежние значения параметров. На рис. 3.5 представлен фазовый портрет при $\delta = 3.06 \times 10^{-4}$ (случай $\delta < \delta_*^{(2)}$). Здесь видим область ограниченных колебаний A с гетероклиническими границами. Фазовые кривые внутри области B охватывают цилиндр $S^1 \times R^1 = [0, 1) \times [-\pi, \pi)$, сохраняя значение $e < 1$, тогда как в областях C и D они покидают область $e < 1$. Заметим, что ряды для усреднённой силовой функции задачи расходятся при $e = 1$, поэтому достоверность расчётов в окрестности $e = 1$ низкая.

При бифуркационном значении $\delta = \delta_*^{(2)}$ появляется дополнительная неустойчивая стационарная точка возвратного типа, принадлежащая гомоклинической кривой, охватывающей цилиндр (рис. 3.6).

Наиболее интересная картина колебаний отвечает случаю $\delta \in (\delta_*^{(2)}, \delta_*^{(1)})$, приведённому на рис. 3.7 (фазовый портрет построен при $\delta = 3.1 \times 10^{-4}$). Здесь имеем четыре стационарные точки, а фазовый портрет состоит из областей либрационных движений A и C в окрестности устойчивых равновесий, области ротационных колебаний и областей неограниченных движений E и F , когда фазовая точка выходит на траектории параболического типа, преодолевая значе-

Рисунок 3.4 — Бифуркационная диаграмма $e(a)$

ния $e = 1$. Указанные области разделены сепаратрисами, при этом сепаратрисы, ограничивающие области E и F , асимптотически сливаются в бесконечно удалённой точке при $t \rightarrow \pm\infty$.

Ещё раз подчеркнём, что в малой окрестности $e = 1$ достоверность расчётов падает в силу расходимости рядов. Так удержание большего числа членов ряда (3.17) (до 10-ти включительно) показало, что решение задачи Коши в малой окрестности $e = 1$ некорректно: существенно меняется поведение траектории спутника в осях P_0xy при появлении новых членов ряда и недопустимо быстро возрастает скорость колебаний по эксцентриситету орбиты спутника. Высокая точность расчётов гарантируется для $e \leq 0.8$.

Рисунки 3.8 и 3.9 описывают колебания при $\delta \in [\delta_*^{(1)}, +\infty)$. Видно, что область либрации C (см. рис. 3.7) сжимается в точку равновесия при $\delta = \delta_*^{(1)}$ на рис. 3.8 и полностью исчезает при $\delta > \delta_*^{(1)}$ на рис. 3.9 (для построения фазового портрета использовалось значение $\delta = 5 \times 10^{-4}$).

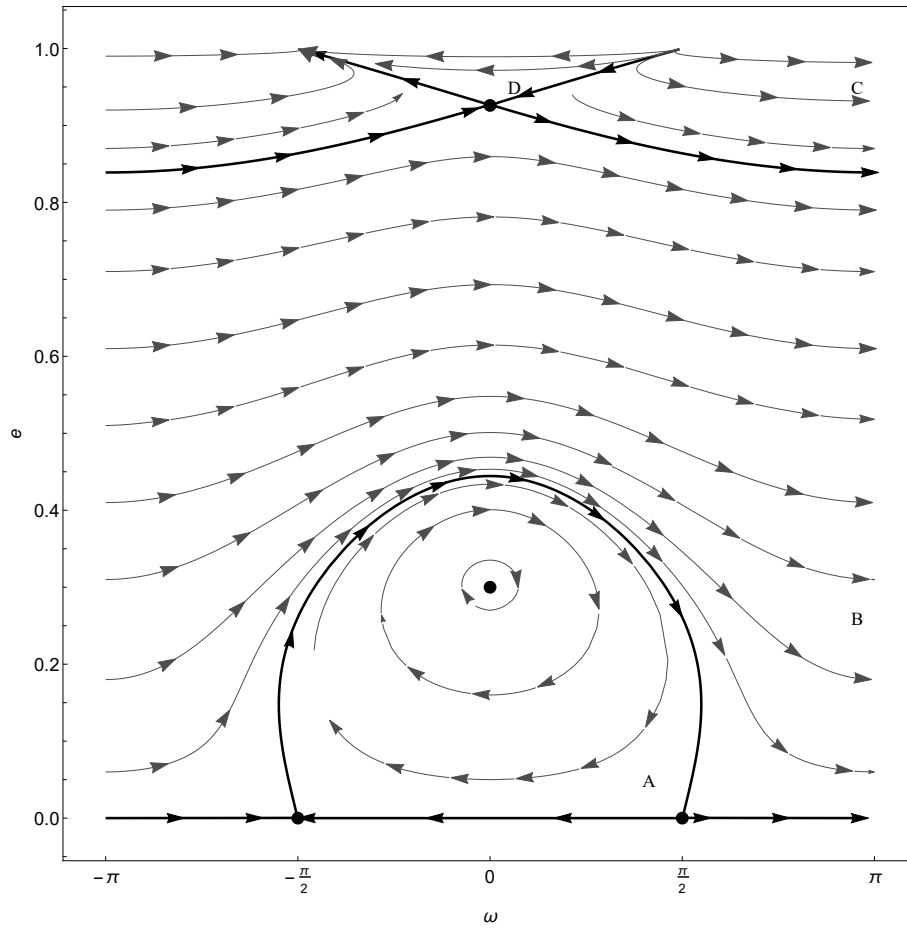


Рисунок 3.5 — Фазовый портрет при $\delta = 3.06 \times 10^{-4}$

3.6 Численный расчёт траекторий движения

Для построения оскулирующего эллипса в декартовых координатах воспользуемся следующей параметризацией:

$$x = r(t) \cos \theta(t), \quad y = r(t) \sin \theta(t), \quad r(t) = a(1 - e \cos E) \quad (3.23)$$

Здесь θ – полярный угол, получаемый из соотношений:

$$\theta = \nu + \omega, \quad \nu = 2 \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right)$$

E – эксцентрическая аномалия, представимая рядом Фурье [56]:

$$E = M(t) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_k(ke(t))}{k} \sin kM(t)$$

Здесь J_k – функция Бесселя, M – средняя аномалия.

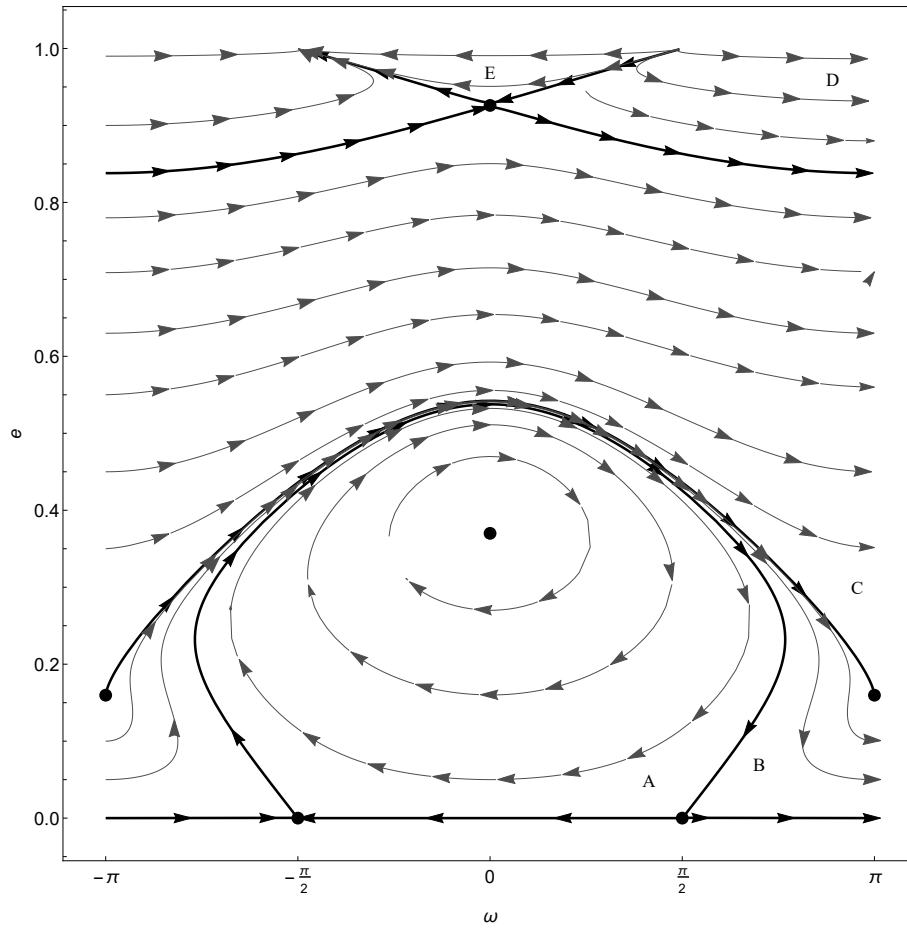


Рисунок 3.6 — Фазовый портрет при $\delta = \delta_*^{(2)}$

Подставив в (3.23) известные выражения для $\cos \nu$ и $\sin \nu$ через эксцентриситет e и эксцентриситет E

$$\cos \nu = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E}, \quad \sin \nu = \frac{\sin E \sqrt{1 - e^2}}{1 - e \cos E}$$

получим:

$$\begin{aligned} x &= a \left(\cos \omega (\cos E - e) - \sin \omega \sin E \sqrt{1 - e^2} \right) \\ y &= a \left(\cos \omega \sin E \sqrt{1 - e^2} + \sin \omega (\cos E - e) \right) \end{aligned}$$

Далее, численно интегрируя систему (3.18), с учётом усечённой силовой функции (3.19), получим $e(t)$, $\omega(t)$ и $M(t)$.

Рассмотрим фазовые траектории в области A (рис. 3.5). Для этого случая проведем численное моделирование траекторий движения, задав параметры $\delta = 3.06 \times 10^{-4} < \delta_*^{(2)}$, $a = 6.02 \times 10^{-3}$ а.е., $\omega_2 = \pi$ и начальные значения фазовых переменных $e(0) = 0.35$, $\omega(0) = 0$, $M(0) = 10^5$. Интегрируя систему (3.18) на промежутке времени в 3650 дней получим возмущённые траектории

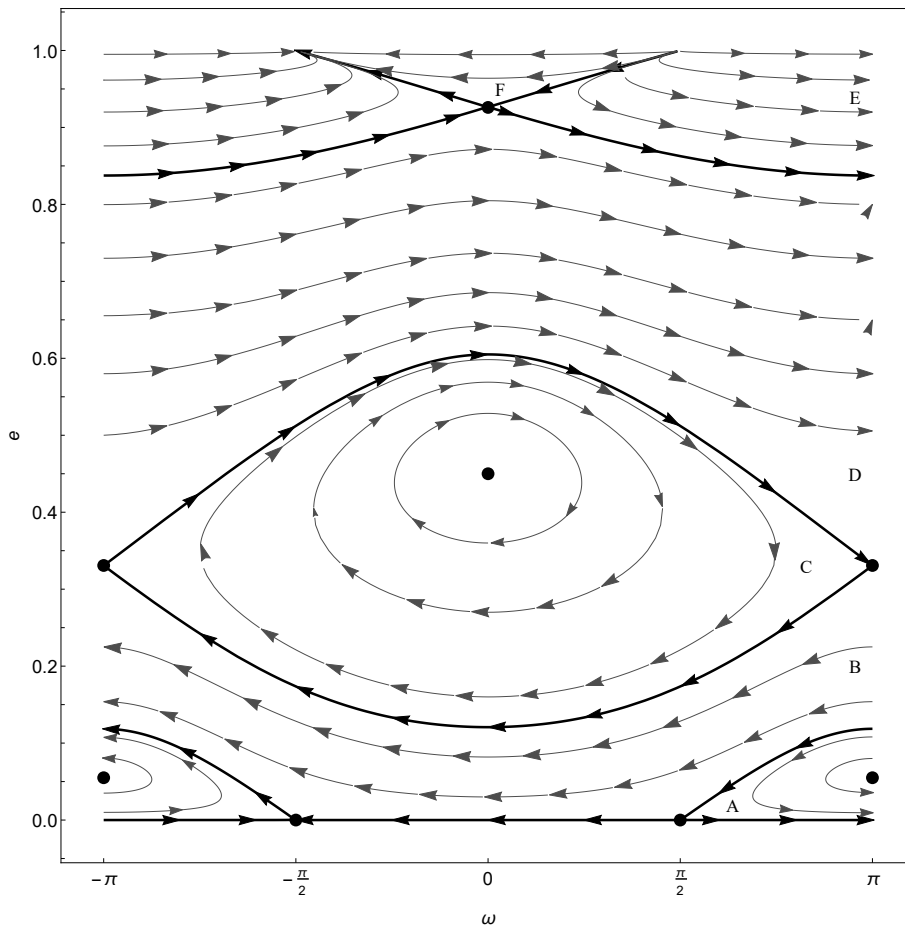


Рисунок 3.7 — Фазовый портрет при $\delta = 3.1 \times 10^{-4}$

"либрационного" типа (рис. 3.10) как для случая чисто гравитационных возмущений от Солнца и Луны (траектории, отвечающие $\delta = 0$), так и с учётом совместного влияния светового и гравитационного воздействий (траектории, отвечающие $\delta = 3.06 \times 10^{-4}$). Поскольку оскулирующие аргумент перигея и эксцентриситет меняются слабо, возмущённая орбита близка к "стационарной орбите" отвечающей стационарной точке фазового портрета. Заметим, что "стационарная орбита" сохраняет значения своих кеплеровских элементов $a = 6.02 \times 10^{-3}$, $e = 0.301$, $\omega = 0$ во всё время движения.

Для начальных значений $e(0) = 0.8$, $\omega(0) = 0$, $M(0) = 10^5$, отвечающих случаю вековых возмущений по ω , имеем траектории ротационного типа, представленные на рис. 3.11. Для расчётов использовался промежуток времени 3600 дней. Этим траекториям отвечает область B на фазовом портрете системы (см. рис. 3.5).

В заключение отметим, что точность, с которой решения усреднённой системы приближают решения строгих уравнений движения спутника-баллона, определяется на основе обобщённой теоремы Н.Н. Боголюбова [61;62] поскольку

ку строгие уравнения движения содержат три независимых малых параметра: δ , $\varepsilon = (r/r_1)^2 \approx a^2$ (здесь $r_1 \approx 1$) и $\mu = m_2$ ($m_1 = 1$). Метод усреднения с тремя независимыми малыми параметрами гарантирует точность приближения первого порядка малости по малым параметрам на асимптотически большом промежутке времени в нерезонансном случае. Это значит, что для любых малых величин $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, $\sigma_3 > 0$ существуют три константы $\gamma_i(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) > 0$ такие, что

$$\|u(t) - v(t)\| \leq \gamma_1 \delta + \gamma_2 \varepsilon + \gamma_3 \mu,$$

когда $t \sim 1/\|\delta, \varepsilon, \mu\|$, $0 \leq \delta \leq \sigma_1$, $0 \leq \varepsilon \leq \sigma_2$, $0 \leq \mu \leq \sigma_3$. Здесь $u(t)$ – вектор строгих решений уравнений движения, $v(t)$ – вектор усреднённых уравнений.

3.7 Заключение

Исследована эволюция высоких орбит спутника Земли, принадлежащих плоскости эклиптики, под действием гравитационных возмущений от Солнца, Луны и светового давления. Из анализа нерезонансных усреднённых уравнений движения в оскулирующих элементах следует, что большая полуось a не эволюционирует, эволюция по e и ω описывается интегралом энергии. В отличие от задачи трёх тел, когда пренебрегают притяжением Луны [23], здесь существуют (при фиксированных параметрах $a = 6.02 \times 10^{-3}$ а.е., $a_1 = 1$ а.е., $a_2 = 2.57 \times 10^{-3}$ а.е., $e_1 = 0.01671123$, $e_2 = 0.0549$, $\omega_2 = \pi$) два бифуркационных значения $\delta_*^{(1)} = 4.57941 \times 10^{-4}$, $\delta_*^{(2)} = 3.07792 \times 10^{-4}$ коэффициента светового давления δ . При $\delta \in [0, \delta_*^{(2)}) \cup (\delta_*^{(1)}, +\infty)$ имеем два положения равновесия, на интервале $\delta \in (\delta_*^{(2)}, \delta_*^{(1)})$ – четыре равновесия, в точках бифуркации – три равновесия. Бифуркация равновесий наблюдается также в плоскости параметров (a, e) при фиксированном $\delta = 5 \times 10^{-4}$ (рис. 3.4). Поэтому фазовые портреты колебаний (рис. 3.5 – 3.9) имеют гораздо более сложный вид, чем в задаче трёх тел.

Показано, что существует два типа эволюционирующих орбит: орбиты либрационного и ротационного типов. Для орбит первого типа оскулирующие аргумент перигентра и эксцентриситет меняются периодически, но с малыми амплитудами, орбита близка к траектории, отвечающей стационарной точке и

сохраняющей значения своих невозмущённых кеплеровских элементов во всё время движения.

Орбиты второго типа имеют непрерывно возрастающий аргумент перицентра, и, как следствие, медленное вращение линии апсид оскулирующего эллипса, на которое накладывается медленное периодическое изменение эксцентриситета.

Притяжение спутника точкой P_2 массы m_2 (Луной) сильно осложняет проведение расчётов в окрестности $e = 1$, так как коэффициенты ряда (3.17) быстро возрастают по величине при $e \rightarrow 1$ (см. (3.22)) и ряд расходится. Поэтому численный счёт не подтвердил наличие орбит столкновения с Землёй, для которых эксцентриситет близок к единице.

Описаны дополнительные эффекты, вызванные световым давлением: смещение ограниченной траектории спутника как целого относительно траектории классической задачи четырёх тел в область, более удалённую от Солнца (на рис. 3.10 и рис. 3.11 Солнце находится в правой полуплоскости).

Постановка задачи и выбор метода исследования принадлежит проф. Красильникову П.С. Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в данной главе. Также автором выполнены все аналитические и численные расчёты с использованием упомянутых в главе методов.

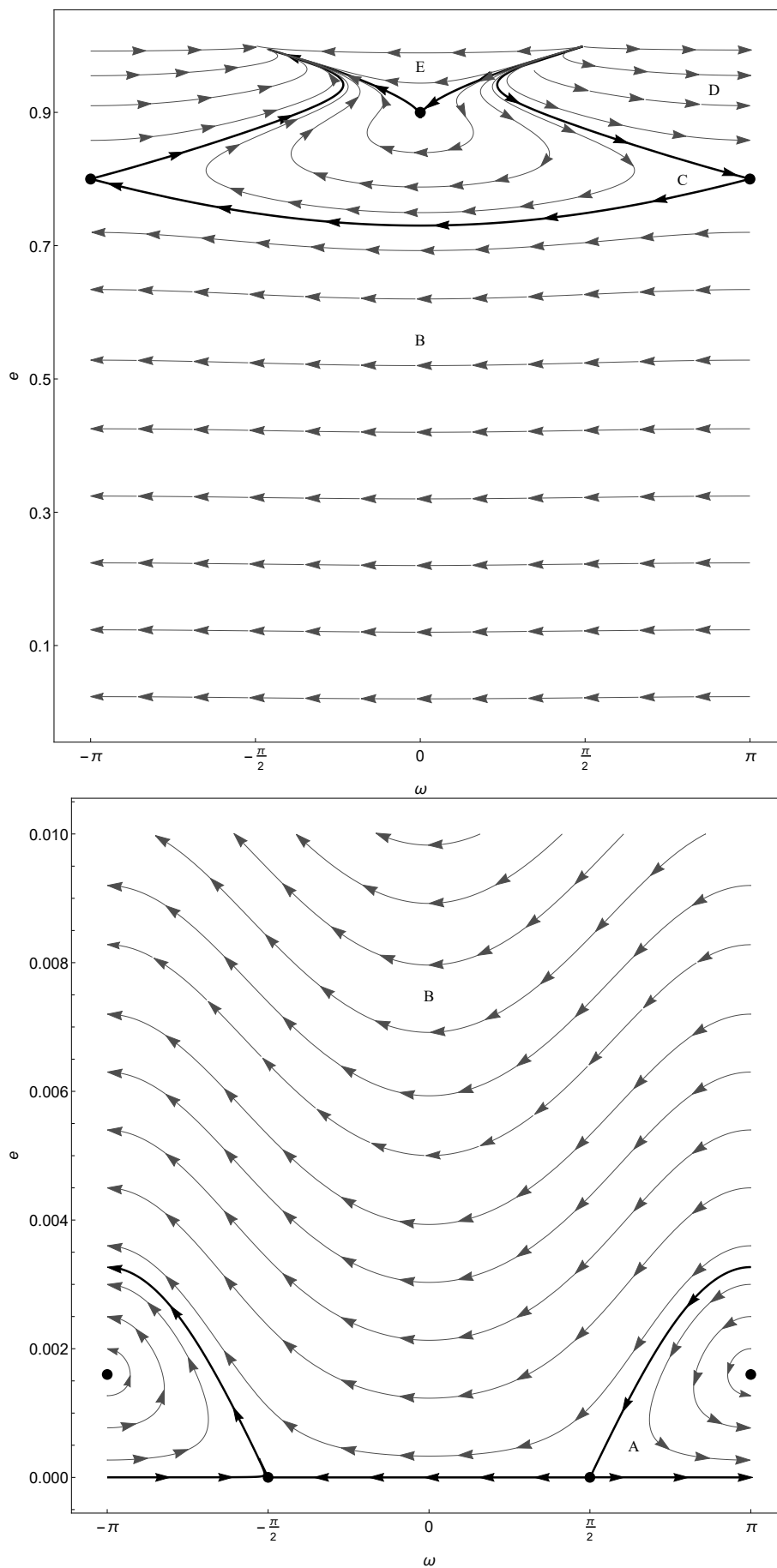


Рисунок 3.8 — Фазовый портрет при $\delta = \delta_*^{(1)}$

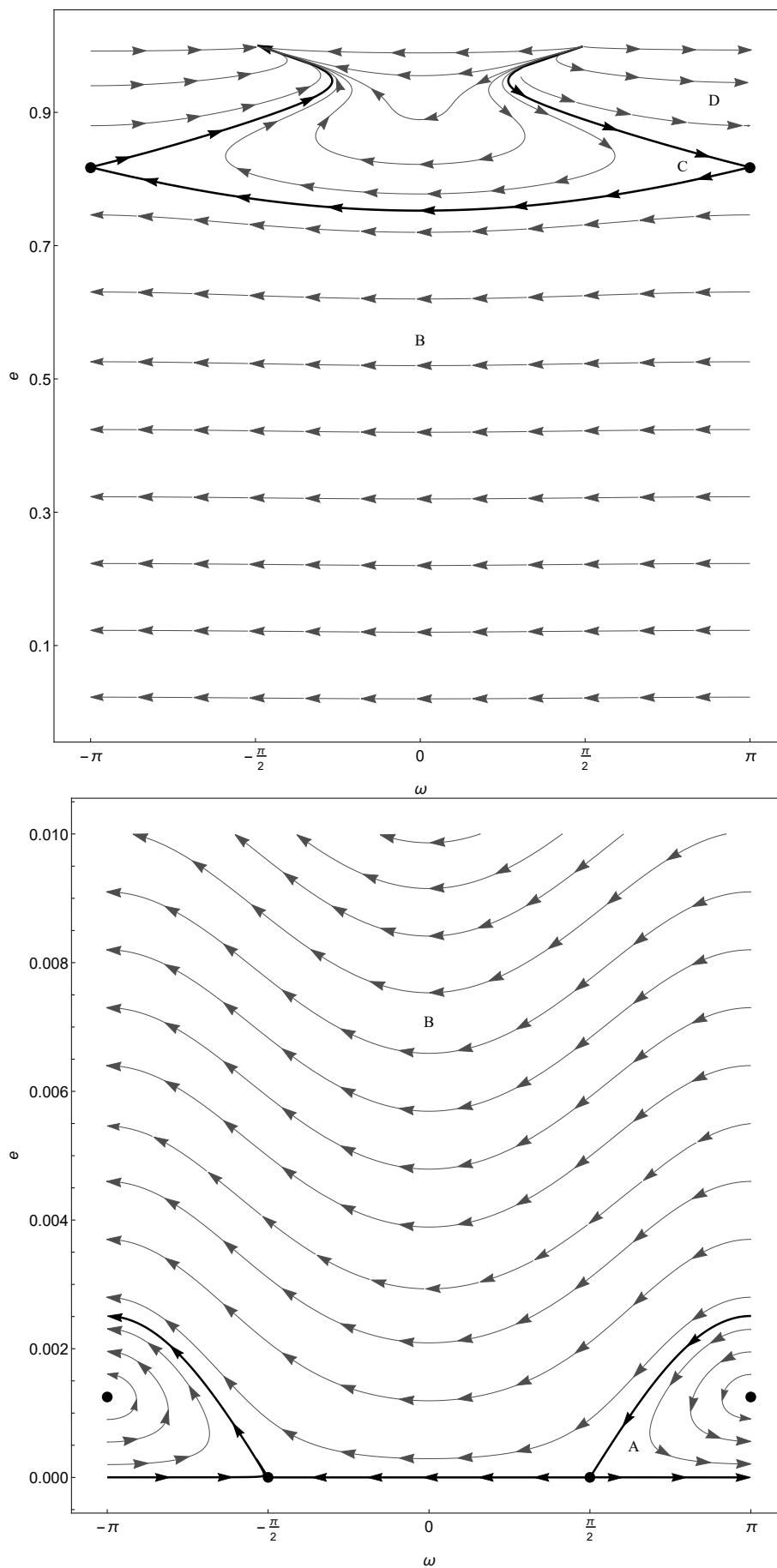


Рисунок 3.9 — Фазовый портрет при $\delta = 5 \times 10^{-4}$

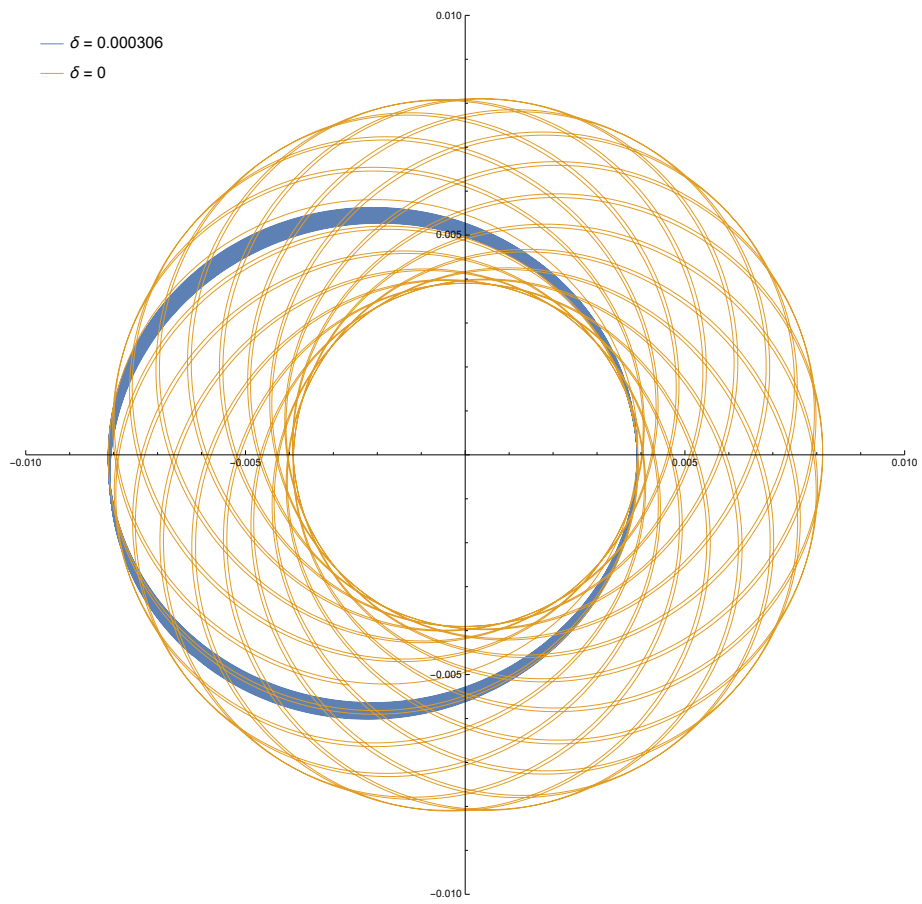


Рисунок 3.10 — Траектории либрационного типа

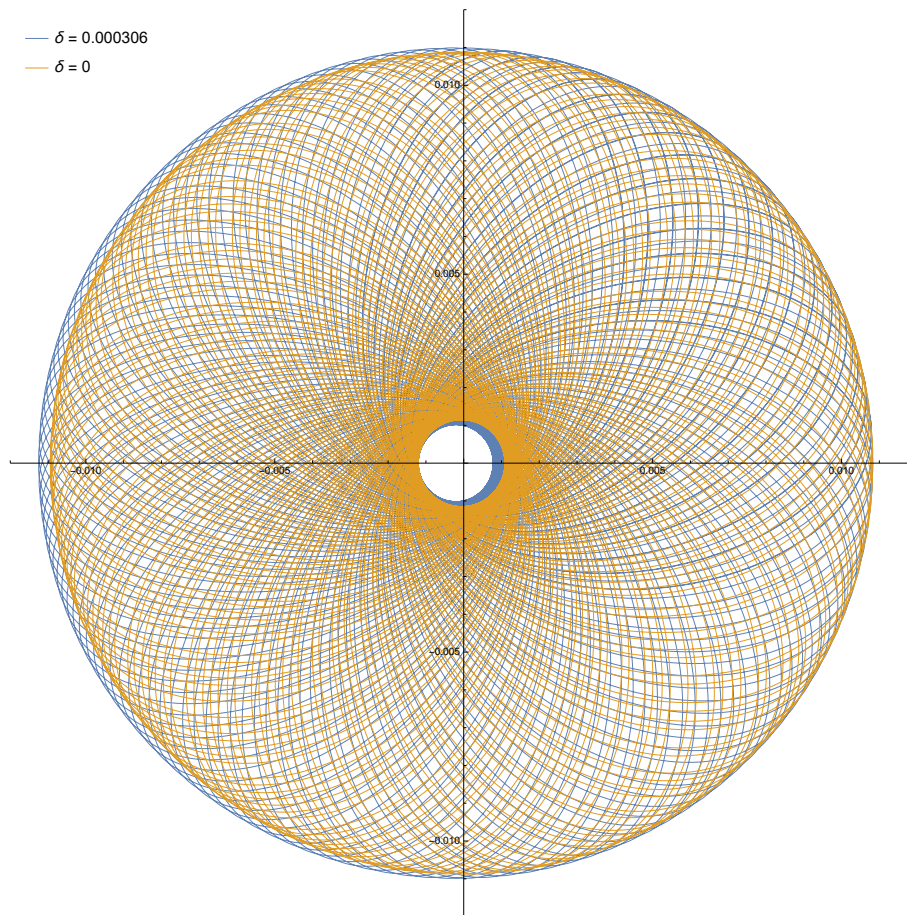


Рисунок 3.11 — Траектории ротационного типа

Глава 4. Эволюция движений спутника в пространственной круговой ограниченной задаче трех тел

В данной главе рассматривается пространственная ограниченная круговая задача трех тел в нерезонансном случае. Предполагается, что тело имеет большую парусность, вследствие чего учитывается световое давление. Изучение эволюции орбиты спутника проводится на основе схемы Гаусса: исследуются усредненные уравнения движений в кеплеровом фазовом пространстве, когда в качестве невозмущенной орбиты берется кеплеровский эллипс с фокусом в Солнце, находящийся внутри сферы, радиус которой равен радиусу орбиты внешней планеты (внутренняя задача).

4.1 Постановка задачи

Рассмотрим круговую пространственную ограниченную задачу трех тел с учетом сил светового давления \mathbf{F}_λ . Предположим, что пассивно гравитирующее тело (спутник) P , имея большое отношение площади поверхности к собственной массе, находится в гравитационном поле двух массивных тел, движущихся друг относительно друга по круговой орбите радиуса r_J ; центральное тело S (Солнце) имеет массу m_S и воздействует на спутник с силой \mathbf{F}_S , второе тело J (Юпитер) массы m_J оказывает возмущающее действие с силой \mathbf{F}_J . Считаем, что невозмущенная траектория спутника есть кеплеровский эллипс с фокусом в S , плоскость которого Π образует с плоскостью движения Π_0 притягивающих тел угол i (рис. 4.1). Заметим, что в классическом случае, когда световое давление на спутник пренебрежимо мало, задача подробно исследована в статье [38].

Введем гелиоцентрическую систему координат с центром в S . Ось Sx направим в точку весеннего равноденствия, SN – линия узлов орбиты спутника, остальные оси, образующие правую систему координат, на рис. 4.1 не указаны. Пусть \mathbf{r} – радиус-вектор тела P , \mathbf{r}_J – радиус вектор тела J .

Пусть Ω – долгота восходящего узла невозмущенной орбиты спутника на плоскости Π_0 , e , ω – эксцентриситет и аргумент перицентра этой орбиты, λ_J – долгота тела J , а λ – долгота тела P в плоскости Π_0 .

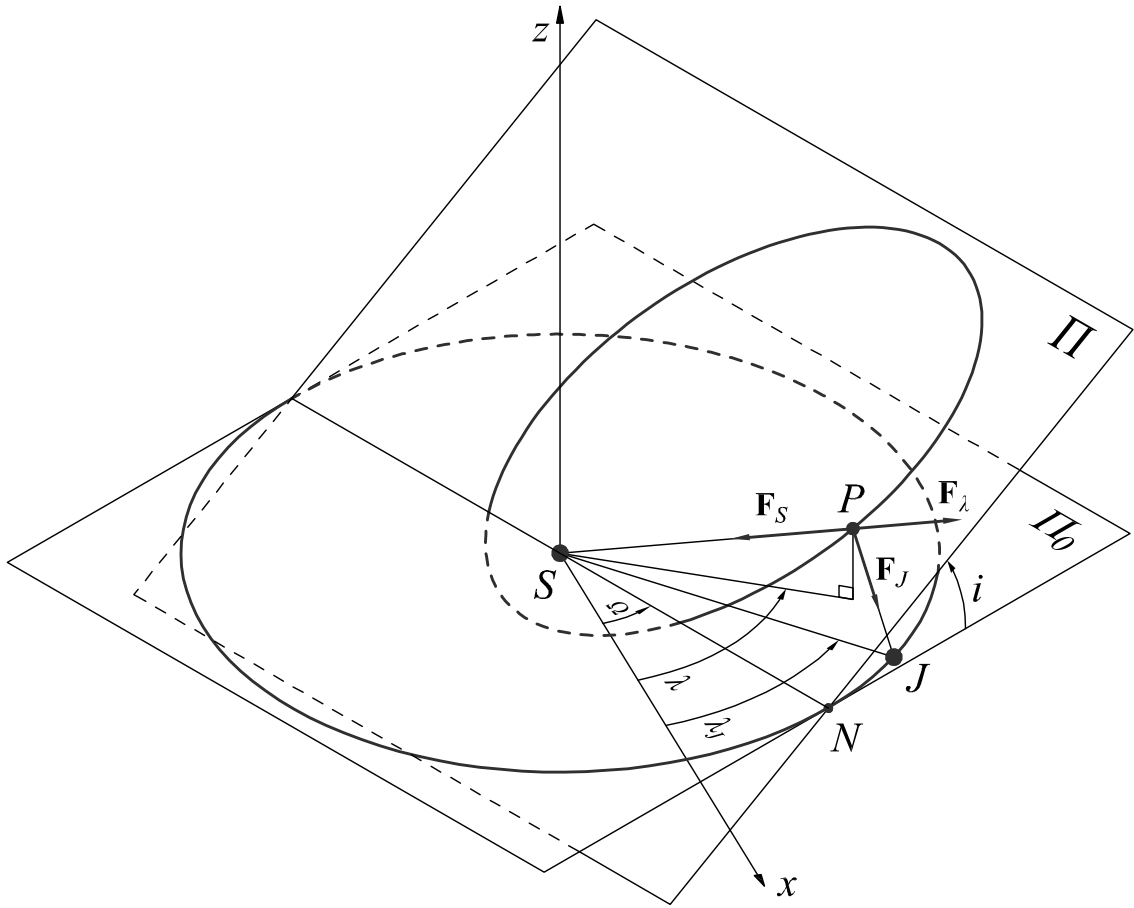


Рисунок 4.1 – Невозмущенные траектории небесных тел. Угловые переменные.

Рассмотрим «внутренний» вариант задачи трех тел, когда движение тела P происходит внутри сферы радиуса r_J :

$$a(1 + e) < r_J.$$

Здесь a – большая полуось невозмущенной орбиты спутника.

Запишем выражение для возмущенной силовой функции задачи:

$$R = R_J + R_S. \quad (4.1)$$

Здесь R_J – силовая функция гравитационного воздействия со стороны тела J , имеющая вид

$$R_J = fm_J \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{(\mathbf{r}_J, \mathbf{r})}{r_J^3} \right), \quad (4.2)$$

$$\Delta = r_J \sqrt{1 - 2 \left(\frac{r}{r_J} \right) \cos \gamma + \left(\frac{r}{r_J} \right)^2},$$

где f – постоянная тяготения, γ – угол между \mathbf{r}_J и \mathbf{r} ,

$$\cos \gamma = \cos (\lambda_J - \Omega) \cos (\omega + \nu) + \sin (\lambda_J - \Omega) \sin (\omega + \nu) \cos i, \quad (4.3)$$

ν – истинная аномалия в движении спутника вдоль невозмущенной орбиты.

Функция (4.2) может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра с точностью до членов, не зависящих от координат тела P :

$$R_J = \frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma),$$

Силовая функция светового давления на сферический спутник, находящийся на круговой орбите, может быть представлена в виде

$$R_S = -\frac{\delta r_0^2}{r}.$$

Здесь $\delta > 0$ – коэффициент светового давления [10]

$$\delta = \frac{\varkappa \pi \rho^2 E_0}{mc}, \quad (4.4)$$

ρ – радиус поверхности спутника, m – его масса, \varkappa – коэффициент отражения поверхности спутника, равный 1 для полного поглощения или отражения света, и 1.44 для диффузного рассеивания. E_0 – солнечная постоянная, определенная как мощность светового потока на расстоянии r_0 (1 а.е.) от Солнца (приблизительно 1367 Вт/м²), c – скорость света в вакууме.

Тогда, с учетом выражений для R_J и R_S , силовая функция задачи принимает вид:

$$R = -\frac{\delta r_0^2}{r} + \frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma). \quad (4.5)$$

4.2 Усреднение силовой функции

Известно, что долгота λ тела P в плоскости эклиптики описывается формулами [34]

$$\cos \lambda = \frac{\cos(\nu + \omega)}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2(\nu + \omega)}}, \quad \sin \lambda = \frac{\sin(\nu + \omega) \cos i}{\sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2(\nu + \omega)}}.$$

Тогда (4.3) можно переписать в виде

$$\cos \gamma = \cos(\lambda_J - \Omega - \lambda) \sqrt{1 - \sin^2 i \sin^2(\nu + \omega)}. \quad (4.6)$$

Для преобразования выражения (4.5) к удобному для усреднения виду воспользуемся теоремой сложения для полиномов Лежандра. С учетом (4.6), будем иметь

$$P_n(\cos \gamma) = P_n(0)P_n(\sin i \sin(\nu + \omega)) + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^{(k)}(0) P_n^{(k)}(\sin i \sin(\nu + \omega)) \cos k(\lambda_J - \Omega - \lambda). \quad (4.7)$$

Здесь $P_n^{(k)}$ – присоединенные функции Лежандра, представимые в нуле следующим образом:

$$P_n^{(k)}(0) = \begin{cases} (-1)^{(n-k)/2} \frac{(n+k)!}{2^n \left(\frac{n-k}{2}\right)! \left(\frac{n+k}{2}\right)!}, & n-k = 2m, m \in \mathbb{Z}, \\ 0, & n-k = 2m+1, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Далее считаем, что частота $\dot{\lambda}_J$ не резонирует с частотой n невозмущенного движения спутника. Проводя усреднение (4.5) по долготе λ_J тела J , получим, с учетом (4.3), (4.7) и равенства $P_{2n+1}(0) = 0$, однократно усредненную силовую функцию R^* задачи

$$R^* = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\delta r_0^2}{r} + \frac{f m_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J}\right)^n P_n(\cos \gamma) \right] d\lambda_J = -\frac{\delta r_0^2}{r} + \frac{f m_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J}\right)^{2n} P_{2n}(0) P_{2n}[\sin i \sin(\nu + \omega)]. \quad (4.8)$$

Выражение (4.8) совпадает с точностью до члена, учитывающего световое давление, с силовой функцией кольца Гаусса [63], что было впервые установлено в работе Аксёнова [34].

Усредним теперь полученное выражение (4.8) по средней долготе λ тела P :

$$R^{**} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^* d\lambda$$

Для удобства перейдем от средней долготы λ к истинной аномалии ν под знаком интеграла по известной формуле:

$$d\lambda = \frac{r^2}{a^2 \sqrt{1-e^2}} d\nu \quad (4.9)$$

Тогда

$$R^{**} = \frac{1}{2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}} \int_0^{2\pi} r^2 R^* d\nu \quad (4.10)$$

Запишем выражение для r через истинную аномалию ν , используя формулы невозмущенного движения, и подставим в (4.10). Вычисления показывают, что функция R^* содержит под знаком суммы произведение двух периодических по ν функций: $(1 + e \cos \nu)^{-2n-2}$ и $P_{2n}(\sin i \cos \theta)$, где $\theta = \nu + \omega - \pi/2$. Основная техническая проблема исследований – подсчитать среднее от этого произведения. Современные программные комплексы, такие как Wolfram Mathematica и Maple, с этой задачей не справляются. Для этого воспользуемся формулой Парсеваля [64; 65], описывающей главный (секулярный) член произведения двух рядов Фурье:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \nu)^{-2n-2} P_{2n}(\sin i \cos \theta) d\nu = \frac{a_0 \alpha_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \alpha_m + b_m \beta_m). \quad (4.11)$$

Здесь $\{a_0, a_m, b_m\}$ – коэффициенты Фурье функции $(1 + e \cos \nu)^{-2n-2}$, $\{\alpha_0, \alpha_m, \beta_m\}$ – коэффициенты Фурье функции $P_{2n}(\sin i \cos \theta)$. Выражения для этих коэффициентов имеют вид:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \nu)^{-2n-2} d\nu = \frac{2}{(1-e)^{2n+2}} F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right),$$

$$a_m = \frac{2}{(1-e)^{2n+2}} F_{3,2}^{\text{reg}} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1} \right), \quad b_m = 0,$$

Здесь $F_{2,1}$ – гипергеометрическая функция, а $F_{3,2}^{\text{reg}}$ – регуляризованная функция Клаузена (обобщенная регуляризованная гипергеометрическая функция). Если взять функцию Клаузена с полученными параметрами и подставить в формулу (2.10), то получим:

$$s = 2 - \frac{1}{2} - 1 - 2n - 2 = -\frac{3}{2} - 2n < 0$$

Отсюда следует, что обобщенный гипергеометрический ряд расходится на границе $|z| = 1$, т.е. при $e = 1/3$. Однако, как показано в параграфе 2.3 настоящей работы, в этом случае нужно использовать функцию Клаузена, которая является

аналитическим продолжением обобщенного гипергеометрического ряда и имеет особенности только в точках 0, 1 и ∞ .

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{2n}(\sin i \cos \theta) d\nu = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(P_{2n}(0)P_{2n}(\cos i) + 2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n-k)!}{(2n+k)!} P_{2n}^{(k)}(0)P_{2n}^{(k)}(\cos i) \cos ku \right) du = 2P_{2n}(0)P_{2n}(\cos i), \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{2n}(\sin i \cos u) \cos m\nu d\nu = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{2n}(\sin i \cos u) \cos \left(mu + \frac{m\pi}{2} - m\omega \right) d\nu = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} P_{2n}(\sin i \cos u) \left(\cos mu \cos \left(\frac{m\pi}{2} - m\omega \right) - \sin mu \sin \left(\frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \right) du = \\ &= \frac{1}{\pi} \cos \left(\frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \int_0^{2\pi} P_{2n}(\sin i \cos u) \cos mu du \end{aligned}$$

Продолжаем вычислять α_m :

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{1}{\pi} \cos \left(\frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \int_0^{2\pi} P_{2n}(0)P_{2n}(\cos i) \cos mu du + \\ &+ \frac{1}{\pi} \cos \left(\frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \int_0^{2\pi} \left(2 \sum_{k=1}^{2n} \frac{(2n-k)!}{(2n+k)!} P_{2n}^{(k)}(0)P_{2n}^{(k)}(\cos i) \cos ku \right) \cos mu du \end{aligned}$$

Первый интеграл равен нулю, второй интеграл принимает различные значения в зависимости от значений m (здесь n фиксировано):

$$\alpha_m = \begin{cases} 2 \cos \left(\frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0)P_{2n}^{(m)}(\cos i), & m \leq 2n, \\ 0, & m > 2n, \end{cases}$$

$$\beta_m = 0.$$

В итоге дважды усредненная возмущенная силовая функция принимает вид

$$\begin{aligned}
 R^{**} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} R^* d\lambda = \\
 &= -\frac{\delta r_0^2}{a} + \frac{f m_J}{r_J a^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a(1-e^2))^{2n+2}}{r_J^{2n}} P_{2n}(0) I_{2n}(i, e, \omega). \quad (4.13)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 I_{2n}(i, e, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \nu)^{-2n-2} P_{2n}(\sin i \cos \theta) d\nu = \\
 &= \frac{1}{(1-e)^{2n+2}} \left[P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + 2 \sum_{m=1}^{2n} F_{3,2}^{\text{reg}} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1} \right) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \cos \left(\frac{m\pi}{2} - m\omega \right) \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0) P_{2n}^{(m)}(\cos i) \right], \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Как можно видеть, в выражении (4.13) член, зависящий от коэффициента светового давления, представляет собой константу. Следовательно, можно сделать вывод, что световое давление сколь-нибудь значительного влияния на дважды усредненную силовую функцию задачи не оказывает. Поэтому далее будем рассматривать классическую задачу, без учета константного члена.

Достоверность формулы (4.14) была подтверждена численным интегрированием выражения $(1 + e \cos \nu)^{-2n-2} P_{2n}(\sin i \cos \theta)$ – результаты вычислений левой и правой частей формулы совпадают по всем значащим цифрам для следующего декартового произведения значений параметров: e от 0 до 1 с шагом 0.1, ω от 0 до 2π с шагом $\pi/6$, i от $-\pi/2$ до $\pi/2$ с шагом $\pi/6$ и n от 1 до 15 с шагом 1.

Выражение для усредненной силовой функции можно разложить в ряд Фурье по ω , с этой целью преобразуем формулы (4.13), (4.14)

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J\sqrt{1-e^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_J}\right)^{2n} (1+e)^{2n+2} P_{2n}(0) \left[P_{2n}(0) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1}\right) + \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^{2n} F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1}\right) \cos\left(\frac{m\pi}{2} - m\omega\right) \times \right. \\ \left. \times \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0) P_{2n}^{(m)}(\cos i) \right]$$

Перепишем выражение, стоящее под знаком внутренней суммы, в виде:

$$\sum_{m=1}^{2n} A_m^{(2n)} \cos\left(\frac{m\pi}{2} - m\omega\right),$$

где

$$A_m^{(2n)} = F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-m, 1+m; \frac{2e}{e-1}\right) \times \\ \times \frac{(2n-m)!}{(2n+m)!} P_{2n}^{(m)}(0) P_{2n}^{(m)}(\cos i) \quad (m \leq 2n).$$

Тогда, после представления этой суммы в виде

$$\sum_{m=1}^{2n} A_m^{(2n)} \cos\left(\frac{m\pi}{2} - m\omega\right) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{2k+1}^{(2n)} \sin(2k+1)\omega + \sum_{k=1}^n (-1)^k A_{2k}^{(2n)} \cos 2k\omega,$$

имеем

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J\sqrt{1-e^2}} \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \left[P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1}\right) + \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{2k+1}^{(2n)} \sin(2k+1)\omega + \sum_{k=1}^n (-1)^k A_{2k}^{(2n)} \cos 2k\omega \right],$$

здесь

$$B_{2n} = \left(\frac{a}{r_J}\right)^{2n} (1+e)^{2n+2} P_{2n}(0).$$

Теперь заметим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k A_{2k+1}^{(2n)} \sin(2k+1)\omega = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} B_{2n} A_{2k+1}^{(2n)} \right) \sin(2k+1)\omega \\ \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^k A_{2k}^{(2n)} \cos 2k\omega = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\sum_{n=k}^{\infty} B_{2n} A_{2k}^{(2n)} \right) \cos 2k\omega$$

Гармоники с $\sin(2k+1)\omega$ пропадают в силу равенства $P_{2n}^{(2k+1)}(0) = 0$. Поменяем индексы $n \rightarrow k$, $k \rightarrow n$ в последнем равенстве, тогда получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_{2n} \sum_{k=1}^n (-1)^k A_{2k}^{(2n)} \cos 2k\omega = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} B_{2k} A_{2n}^{(2k)} \right) \cos 2n\omega$$

Получили выражение для R^{**} в виде ряда Фурье по косинусам:

$$R^{**} = \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \left[a_0(e, \cos i) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(e, \cos i) \cos 2n\omega \right] \quad (4.15)$$

где

$$a_0(e, \cos i) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{2n}(e) P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right),$$

$$a_n(e, \cos i) = (-1)^n \left(\sum_{k=n}^{\infty} B_{2k}(e) A_{2n}^{(2k)}(e, \cos i) \right).$$

Здесь следует отметить, что аналитическое представление дважды усредненной силовой функции задачи в виде ряда Фурье по ω впервые получено в работе Аксёнова [34]. Коэффициенты этого ряда автор статьи выразил через некоторые не имеющие широкой известности специальные функции, представимые в виде квадратур. К сожалению, квадратуры не были разложены в сходящиеся ряды, автор ограничился описанием рекуррентных соотношений для квадратур. Поэтому использовать результаты статьи Е.П. Аксёнова в аналитических исследованиях крайне затруднительно. В работе Ласкара [66] также представлено усреднение возмущающей функции в ограниченной задаче трех тел. Коэффициенты ряда выражаются через функции Тиссерана и Хансена и имеют громоздкий вид, как следствие, отсутствует описание общего члена ряда, а сам ряд можно использовать только в усеченном виде.

Исследуем поведение коэффициентов ряда Фурье, для чего выпишем значение коэффициентов общего члена ряда (4.15), полученных в виде гипергеометрической функции, для случая $n = 1$, $k = 1, 2$:

$$a_0(e, \cos i) = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2} (e+1)^{5/2} (3e^2+2) (3 \cos 2i + 1)}{32r_J^2}$$

$$a_1(e, \cos i) = \frac{3a^2 e^2 \sqrt{1-e^2}}{32768r_J^4} \left(1925a^2 (7(e^2+2)(e^2+8)e^2+32) \cos 2i + \right. \\ \left. + 1375a^2 (7(e^2+2)(e^2+8)e^2+32) + 10752(e^2+2)r_J^2 \right) \sin^2 i$$

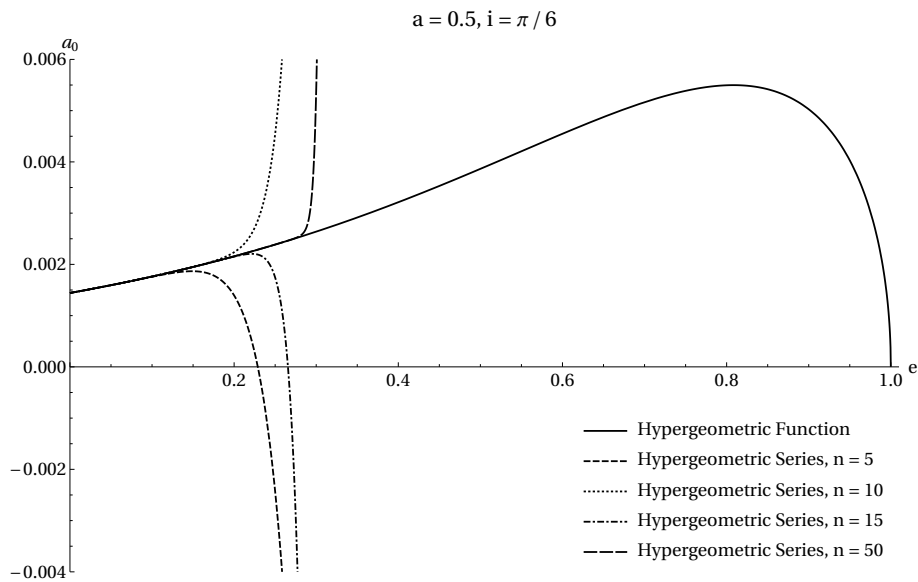


Рисунок 4.2 — Коэффициент $a_0(e)$ при $e \in (0,1)$.

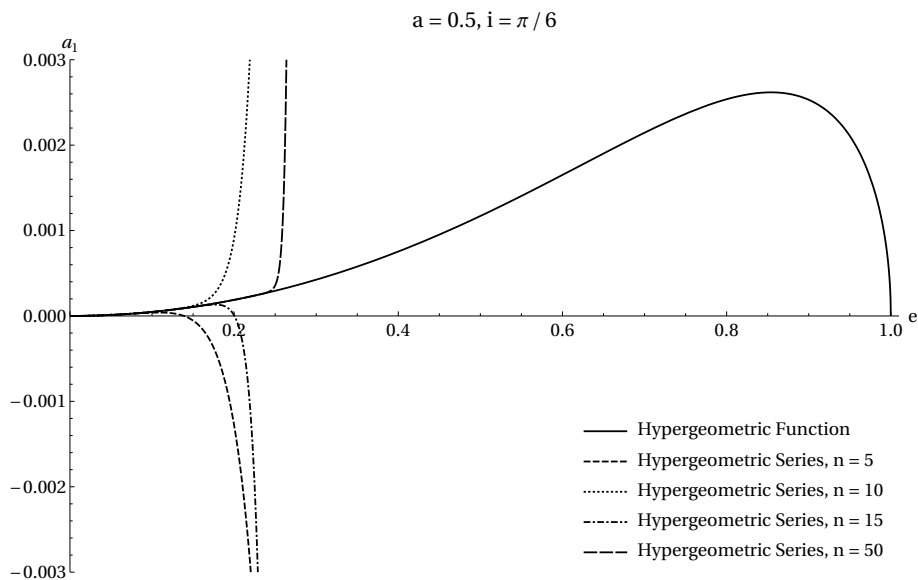


Рисунок 4.3 — Коэффициент $a_1(e)$ при $e \in (0,1)$.

Будем сравнивать полученное представление функции $F_{3,2}^{reg}$ с представлением в виде гипергеометрического ряда (2.7), где количество суммируемых членов равно 5, 10, 15, 50. Построим численную зависимость коэффициентов a_0 (рис. 4.2) и a_1 (рис. 4.3) от параметра e на промежутке $e \in (0,1)$. Были использованы следующие значения параметров: большая полуось орбиты $a = 0.5$ а.е., угол наклона $i = \pi/6$.

Как уже было сказано в параграфе 2.3, функция $F_{3,2}^{reg}$ является аналитическим продолжением гипергеометрического ряда, на рис. 4.2, 4.3 показаны результаты численного счета коэффициентов в случае использования аналитического продолжения и гипергеометрического ряда. Легко убедиться, что

гипергеометрический ряд расходится, тогда как аналитическое продолжение проходит без труда через точку расходимости ряда, иллюстрируя преимущество использования аналитических продолжений в виде решений линейного уравнения третьего порядка.

4.3 Численная проверка двукратного усреднения по схеме Гаусса

Сравним формулу (4.15) для вычисления силовой функции задачи с результатами, получаемыми при численном усреднении $R^{(int)}$:

$$R^{(int)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right] d\lambda_J d\lambda, \quad (4.16)$$

где $P_n(\cos \gamma)$ вычисляется по формуле (4.7), а переход от $d\lambda$ к $d\nu$ осуществляется заменой (4.9). С этой целью возьмем следующие параметры для численного расчета: $e = 0.2$, $i = -\pi/6$, $\omega = 0$, $a/r_J = 0.85$, $\Omega = \pi/12$.

Будем строить значения силовой функции R , учитывая все большее количество членов n при разложении в ряд Фурье и при численном интегрировании ряда (4.16) силовой функции.

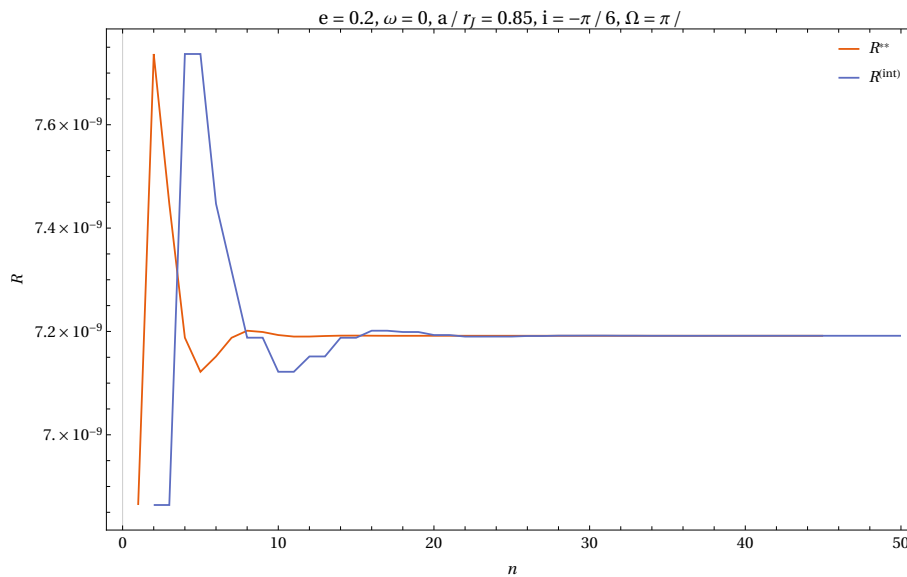


Рисунок 4.4 — Сравнение рядов (4.15) и (4.16).

Как можно видеть на рис. 4.4, функция R^{**} выходит на стационарный режим начиная с частичной суммы 20 членов ряда, в то время как результат

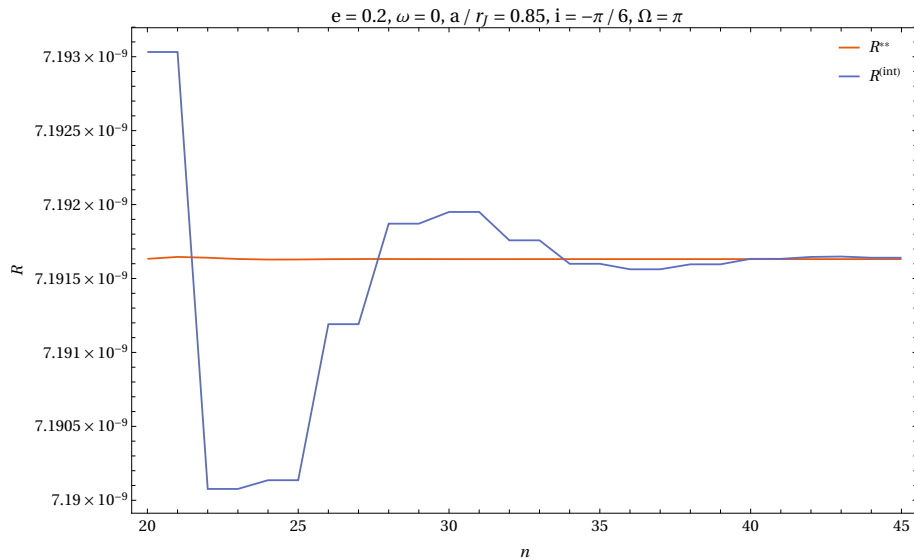


Рисунок 4.5 — Сравнение рядов (4.15) и (4.16) при $n \in [20, 45]$.

численного интегрирования ряда (4.16) совершает колебания вплоть до частичной суммы 45 членов разложения (рис. 4.5). Таким образом, для данного набора параметров, можно утверждать, что для расчета точных значений силовой функции в точке достаточно взять частичную сумму 20 членов ряда Фурье.

В заключении проведенного численного анализа следует указать, что ряд Фурье (4.15) расходится на кривых неаналитичности

$$f_1(a, e, \omega) = a(1 - e^2) - 1 + e \cos \omega = 0,$$

$$f_2(a, e, \omega) = a(1 - e^2) - 1 - e \cos \omega = 0,$$

исследованных в статье Зиглина [37] и Вашковьяка [38].

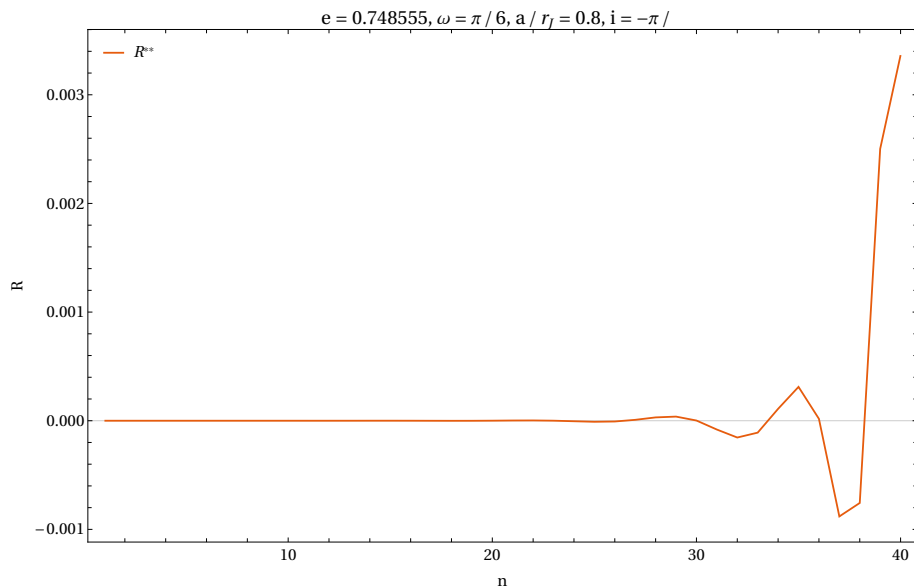


Рисунок 4.6 — Расхождение ряда (4.15) на кривой неаналитичности f_1 .

На рис. 4.6 можно видеть зависимость значения силовой функции в фиксированной точке кеплеровского фазового пространства от количества учитываемых членов ряда (4.15). Параметры, использованные для построения рисунка, связаны функциональной зависимостью f_1 , их значения $e = 0.748555$, $\omega = \pi/6$, $a/r_J = 0.8$, $i = -\pi/3$. Частичная сумма первых 26 членов ряда (4.15) хорошо приближает силовую функцию задачи R , и только удержание большего количества членов ряда приводит к его расходимости. Такое поведение характерно для асимптотических рядов, впервые описанных А. Пуанкаре [67] (см. также [62]). Асимптотичность ряда означает, что неаналитическая (вдоль кривых $f_1 = 0$, $f_2 = 0$) силовая функция допускает высокий порядок аппроксимации аналитической функцией, состоящей из первых 26-ти членов. Расходимость ряда ведет к тому, что увеличение точности аппроксимации невозможно.

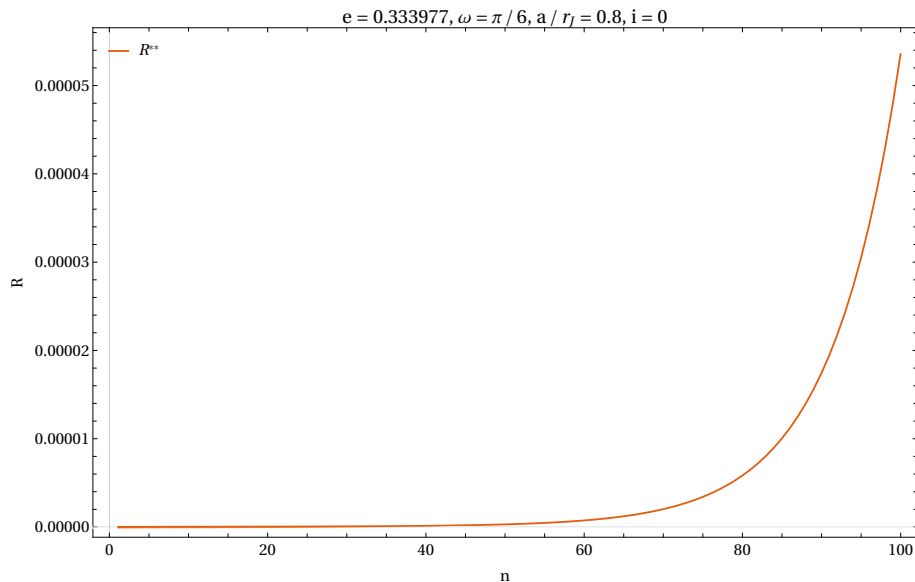


Рисунок 4.7 — Расхождение ряда (4.15) на кривой неаналитичности f_1 .

Рассмотрим рис. 4.7, построенный для параметров $e = 0.333977$, $\omega = \pi/6$, $a/r_J = 0.8$, $i = 0$, также связанных при помощи f_1 . Частичные суммы ряда на графике начинают монотонно расти, начиная с 40 членов, что позволяет аппроксимировать силовую функцию R первыми 39 членами ряда Фурье.

Другую картину можно наблюдать на рис. 4.8, построенном для параметров $e = 0.134237$, $\omega = \pi/3$, $a/r_J = 0.95$, $i = -\pi/3$, связанных f_1 . Имеем небольшие колебания по амплитуде при удержании первых 40 членов ряда (4.15), растущие с удержанием большего количества членов.

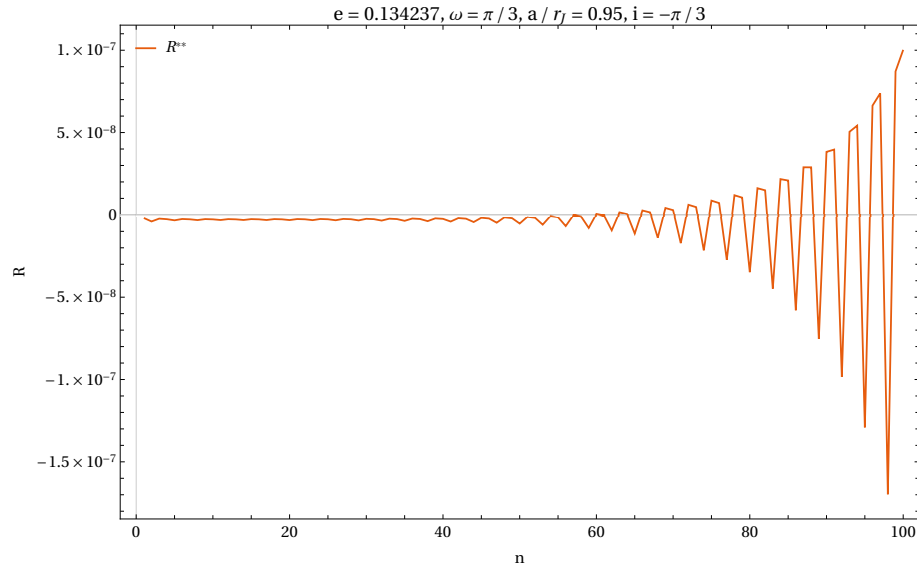


Рисунок 4.8 — Расхождение ряда (4.15) на кривой неаналитичности f_1 .

4.4 Усредненные уравнения движений

Уравнения в оскулирующих элементах (уравнения Лагранжа) в случае усреднения по средней аномалии имеют вид [59]:

$$\begin{aligned}
 \frac{da}{dt} &= 0, \\
 \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R^{**}}{\partial \omega}, \\
 \frac{di}{dt} &= \frac{\text{ctg } i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R^{**}}{\partial \omega}, \\
 \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\text{cosec } i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R^{**}}{\partial i}, \\
 \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R^{**}}{\partial e} - \frac{\text{ctg } i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R^{**}}{\partial i}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Выражая $\frac{\partial R^{**}}{\partial \omega}$ из второго и подставляя в третье уравнение системы (4.17), получаем:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{\text{ctg } i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{na^2e}{\sqrt{1-e^2}} \frac{de}{dt}$$

После элементарных преобразований переменные в уравнении разделяются:

$$\text{tg } i \, di = -\frac{e}{1-e^2} de$$

Решая получившееся дифференциальное уравнение получаем:

$$\frac{c_1}{\cos^2 i} = (1 - e^2)$$

Таким образом, два первых интеграла системы описываются равенствами

$$a = c_0, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1 \quad (4.18)$$

Второй из этих интегралов часто называют интегралом Лидова–Козаи. Однако заметим, что впервые интеграл был получен в работе фон Цейпеля [68] в 1910 году, и позже – в статье Моисеева [27] в 1945. С его помощью исключаем угол i :

$$i = \arccos \left(\pm \sqrt{\frac{c_1}{1 - e^2}} \right),$$

из усредненной силовой функции R^{**} , получаем редуцированную систему уравнений с одной степенью свободы [38]:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e}. \quad (4.19)$$

Силовая функция $\hat{R} = \hat{R}(e, \omega)$ – результат исключения угла i . Очевидно, что интеграл энергии уравнений (4.19) имеет вид $\hat{R}(e, \omega) = c_2$.

Из второго интеграла (4.18) следует ограничение на область изменения оскулирующего эксцентриситета орбиты: $0 \leq e \leq \sqrt{1 - c_1}$.

4.5 Качественный анализ

Для проведения качественного анализа отметим прежде всего, что многообразия $e = 0$, $e = \sqrt{1 - c_1}$ являются интегральными в редуцированной системе уравнений (4.19). Действительно, производная от \hat{R} по ω имеет вид

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega} = -\frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n \left(\sum_{k=n}^{\infty} B_{2k}(e) A_{2n}^{(2k)}(e, \cos i) \right) \sin 2n\omega.$$

Она обращается в ноль при $e = \sqrt{1 - c_1}$, так как при этом $\cos i = \pm 1$, а $A_{2n}^{(2k)}(e, \pm 1) = 0$. Интегральность многообразия $e = 0$ следует из разложения

этой производной в ряд по e :

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega} = -\frac{fm_J}{r_J} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 4n \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{a}{r_J} \right)^{2k} \frac{(2k-2n)!}{(2k+2n)!} P_{2k}(0) P_{2k}^{(2n)}(0) P_{2k}^{(2n)}(\cos i) \times \right. \\ \left. \times \left[\frac{1}{\Gamma(1-2n)\Gamma(1+2n)} + \left(\frac{2k}{\Gamma(1-2n)\Gamma(1+2n)} - \frac{2k}{\Gamma(2-2n)\Gamma(2+2n)} \right) e + O(e^2) \right] \right\}$$

Действительно, коэффициенты при e^0 , e^1 обращаются в ноль, так как целые числа $m = 0, -1, -2, \dots$ являются полюсами первого порядка гамма-функции $\Gamma(z)$. Как следствие, производная равна нулю при $e = 0$.

Отсюда получаем

$$\frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega} \sim e^2 \sin 2\omega.$$

Отметим, что ранее это отношение было получено в работе Зиглина [69] с помощью специального преобразования усредненной силовой функции, не имеющей явного описания в конечном виде, и представленной в виде квадратуры по средней долготе точки P .

Рассмотрим хилловское приближение силовой функции (4.15), для чего возьмем один член при суммировании по n и один член при суммировании по k . Так что:

$$R_h^{**} = \frac{fm_1}{r_J \sqrt{1-e^2}} \left[B_2 P_2(0) P_2(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) - B_2 A_2^{(2)} \cos 2\omega \right]$$

Где

$$A_2^{(2)} = 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 4; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{0!}{4!} P_2^{(2)}(\cos i),$$

$$B_2 = \left(\frac{a}{r_J} \right)^2 (1+e)^4 P_2(0),$$

$$P_2(0) = -\frac{1}{2}, \quad P_2(\cos i) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 i - 1),$$

$$P_2^{(2)}(0) = 3, \quad P_2^{(2)}(\cos i) = -3 (\cos^2 i - 1),$$

$$F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) = \frac{(2+3e^2)(1-e)^{1/2}}{2(1+e)^{7/2}},$$

$$F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 4; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) = \frac{5}{2} e^2 \frac{(1-e)^{1/2}}{(1+e)^{7/2}}.$$

Подставляя вышеперечисленное в выражение для R_h^{**} и упрощая получаем:

$$\begin{aligned} R_h^{**} &= \frac{fm_J a^2}{32r_J^3} \left((2 + 3e^2) (1 + 3 \cos 2i) + 30e^2 \cos 2\omega \sin^2 i \right) = \\ &= \frac{6fm_J a^2}{32r_J^3} \left((2 + 3e^2) \left(\frac{3}{2} - \sin^2 i \right) + 5e^2 \cos 2\omega \sin^2 i \right) = \\ &= \frac{3fm_J a^2}{16r_J^3} \left(\frac{4}{3} + 2e^2 - (2 + 3e^2) \sin^2 i + 5e^2 \cos 2\omega \sin^2 i \right) \quad (4.20) \end{aligned}$$

Заметим, что данный результат был получен ранее в работах Лидова [29; 30], Козаи [31] и подробно рассмотрен в монографии Емельянова [70]. Заметим также, что результат получается независимым образом и в случае выделения вековых слагаемых возмущающей функции из ее полного классического выражения. Формула послужила основой для многих исследований эволюции орбит, а её адекватность подтверждена как численным интегрированием строгих уравнений движения, так и существующими в природе особенностями орбитальной эволюции реальных спутников и астероидов, в частности, ω -либрацией.

Редуцируем силовую функцию, подставляя в хилловское приближение силовой функции задачи (4.20) выражение для $\sin^2 i$:

$$\sin^2 i = 1 - \frac{c_1}{1 - e^2} = \frac{1 - e^2 - c_1}{1 - e^2},$$

получим

$$\hat{R}_h = \frac{3fm_J a^2 \left((c_1 + \frac{1}{3}e^2 - \frac{1}{3}) (2 + 3e^2) + 5e^2 (1 - e^2 - c_1) \cos 2\omega \right)}{16r_J^3 (1 - e^2)}. \quad (4.21)$$

Исследуем критическое множество для редуцированного хилловского приближения (4.21):

$$\begin{cases} \frac{\partial \hat{R}_h}{\partial e} = \frac{3fm_J a^2 e \left(5c_1 - (1 - e^2)^2 - 5 \left(c_1 - (1 - e^2)^2 \right) \cos 2\omega \right)}{8r_J^3 (1 - e^2)^2} = 0 \\ \frac{\partial \hat{R}_h}{\partial \omega} = \frac{15fm_J a^2 e^2 (1 - e^2 - c_1) \sin 2\omega}{8r_J^3 (1 - e^2)} = 0 \end{cases}$$

Решениями системы являются следующие точки:

$$\begin{aligned}
 & e_1^* = 0, \\
 & \left\{ e_2^* = -\sqrt{1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_1}, \omega_2^* = -\frac{\pi}{2} \right\}, \left\{ e_3^* = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_1}, \omega_3^* = -\frac{\pi}{2} \right\}, \\
 & \left\{ e_4^* = -\sqrt{1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_1}, \omega_4^* = \frac{\pi}{2} \right\}, \left\{ e_5^* = \sqrt{1 + \sqrt{\frac{5}{3}}c_1}, \omega_5^* = \frac{\pi}{2} \right\}, \\
 & \left\{ e_6^* = -\sqrt{1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_1}, \omega_6^* = -\frac{\pi}{2} \right\}, \left\{ e_7^* = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_1}, \omega_7^* = -\frac{\pi}{2} \right\}, \\
 & \left\{ e_8^* = -\sqrt{1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_1}, \omega_8^* = \frac{\pi}{2} \right\}, \left\{ e_9^* = \sqrt{1 - \sqrt{\frac{5}{3}}c_1}, \omega_9^* = \frac{\pi}{2} \right\}, \\
 & \left\{ e_{10}^* = -\sqrt{1 - c_1}, \omega_{10}^* = -\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{c_1 - 5}{5(c_1 - 1)} \right) \right\}, \\
 & \left\{ e_{11}^* = \sqrt{1 - c_1}, \omega_{11}^* = -\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{c_1 - 5}{5(c_1 - 1)} \right) \right\}, \\
 & \left\{ e_{12}^* = -\sqrt{1 - c_1}, \omega_{12}^* = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{c_1 - 5}{5(c_1 - 1)} \right) \right\}, \\
 & \left\{ e_{13}^* = \sqrt{1 - c_1}, \omega_{13}^* = \frac{1}{2} \arccos \left(\frac{c_1 - 5}{5(c_1 - 1)} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Заметим, что, в силу ограничения, накладываемого на эксцентриситет эллиптической орбиты $0 \leq e < 1$, корни e_2^* , e_4^* , e_6^* , e_8^* , e_{10}^* , e_{12}^* не подходят. Заметим также, что в случае $c_1 \in [0, 1]$ единственное действительное значение функции

$$\left(\frac{1}{2} \arccos \left(\frac{c_1 - 5}{5(c_1 - 1)} \right) \right)_{c_1=0} = 0$$

достигается при значении $c_1 = 0$. Этому значению параметра c_1 соответствуют корни $e_{11}^* = 1$ и $e_{13}^* = 1$, которые также не подходят в силу ограничения $0 \leq e < 1$. Построим бифуркационную диаграмму $e(c_1)$ для случая $\omega^* = -\pi/2$, на которой отразим корни e_3^* и e_7^* :

На рис. 4.9 видно, что параметрическая кривая $e_3^*(c_1)$ целиком расположена в области $e > 1$. В силу ограничения на эксцентриситет эллиптической орбиты этот корень также необходимо отбросить.

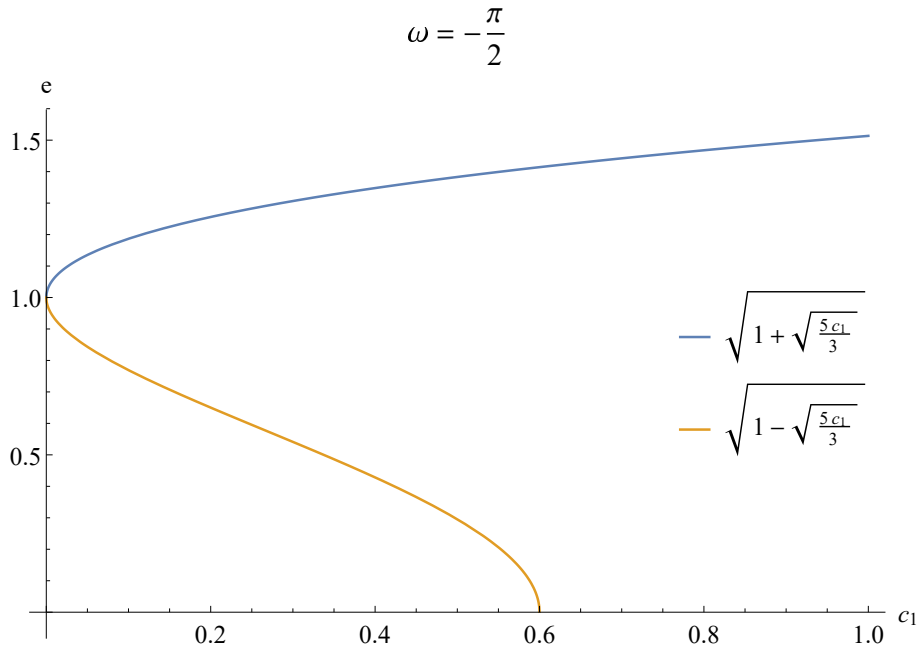


Рисунок 4.9 — Параметрические кривые $e^*(c_1)$ в хилловском приближении в случае $\omega^* = -\frac{\pi}{2}$.

График параметрических кривых $e^*(c_1)$ для случая $\omega^* = \pi/2$ выглядит аналогично рис. 4.9 и проведя соответствующие рассуждения, оставляем только следующие точки: e_1^* , $\{e_7^*, \omega_7^*\}$ и $\{e_9^*, \omega_9^*\}$.

Характер кривой равновесия на рис. 4.9 в интервале $e \in (0,1)$ не подразумевает наличие точек бифуркации, поскольку кривая монотонно убывает с ростом параметра c_1 . Множество стационарных решений имеет вид $e = e(c_1)$, $\omega = \{-\pi/2, \pi/2\}$.

Построим численно фазовый портрет в пространстве переменных (ω, e) редуцированной системы (4.19) для хилловского приближения силовой функции \hat{R}_h . Для этого воспользуемся следующими значениями параметров: $a/r_J = 0.8$, $c_1 = 0.1$.

Здесь и далее в данной главе результаты численного построения фазовых портретов были подтверждены построением линий уровня интеграла \hat{R} . И, поскольку ряд Фурье для \hat{R} содержит только четные гармоники $\cos 2n\omega$, интегральные кривые $\hat{R} = h$ симметричны относительно $\omega = \pi/2$, что позволяет строить фазовые портреты на цилиндре $S^1 \times R^1 = [0, 1) \times [0, \pi)$.

Построенный фазовый портрет качественно совпадает с фазовым портретом, полученным в статье Лидова [29] (см. также [38]). На портрете (рис. 4.10) можно видеть область A , характеризующуюся либрационными колебаниями в гетероклинических границах. Фазовые переменные (ω, e) остаются в окрест-

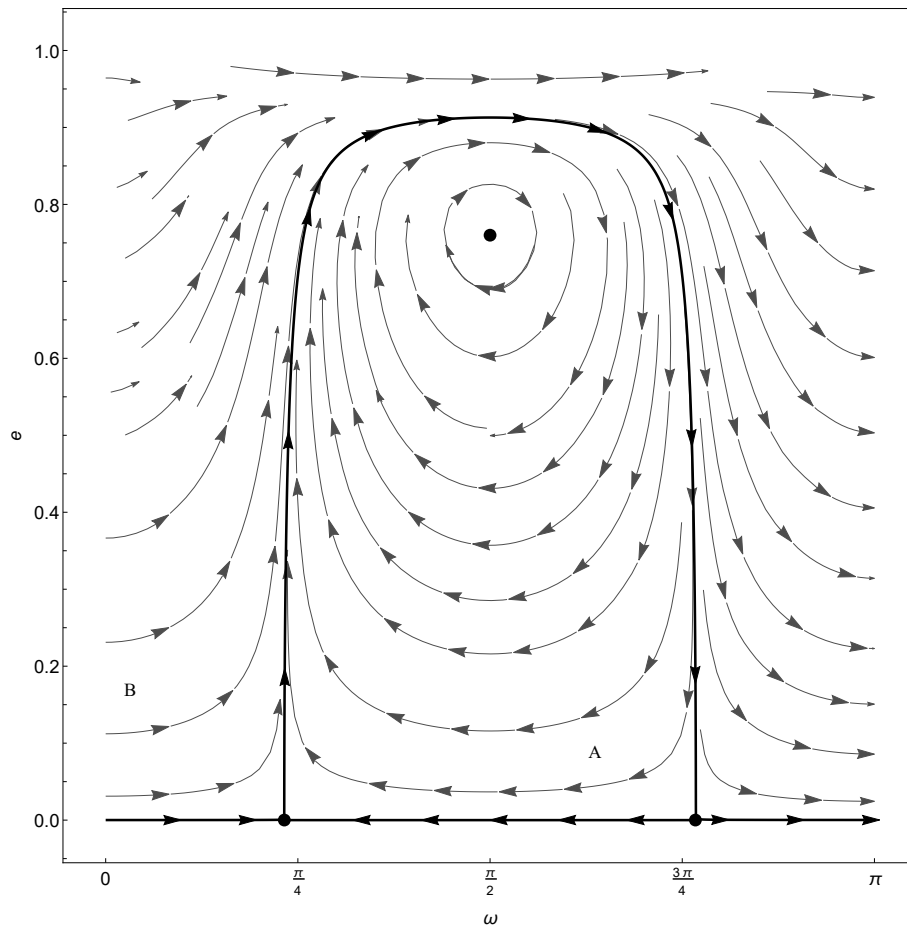


Рисунок 4.10 — Фазовый портрет в случае хилловского приближения силовой функции \hat{R}_h

ности стационарной точки типа «центр», имеющей координаты $(\pi/2, 0.769)$. Фазовые кривые в области B охватывают цилиндр $S^1 \times R^1 = [0, 1) \times [0, \pi)$, сохраняя значение $e < 1$ при неограниченном росте значения ω .

Для стационарных значений ω , e долгота восходящего угла Ω находится квадратурой из соответствующего уравнения системы (4.17). Видно, что

$$\Omega = \Omega_0 - \frac{2\sqrt{c_1}}{na^2} \text{sign}(\cos i) \frac{\partial \hat{R}}{\partial c_1} t.$$

Таким образом, стационарным решениям уравнений (4.19) отвечают эллиптические орбиты с фокусом в основном притягивающем теле, имеющие постоянный угол наклона i по отношению к плоскости движения основных тел, медленно и равномерно прецессирующие вокруг нормали к этой плоскости. При этом большая полуось орбиты во все время движений совпадает с линией узлов SN (случай $\omega = 0$) или перпендикулярна ей (случай $\omega = \pi/2$).

Исследуем следующее приближение силовой функции (4.15), в котором удержим члены при $(a/r_J)^2$ и $(a/r_J)^4$ (промежуточные расчеты представлены

в приложении A.1):

$$\begin{aligned} \hat{R}_2 = \frac{fm_J a^2}{4096 (e^2 - 1)^2 r_J^5} & \left(45a^2 c_1 (-28 (e^2 + 2) e^2 (7c_1 + 8e^2 - 8) \cos 2\omega + \right. \\ & + 147e^4 (c_1 + 2e^2 - 2) \cos 4\omega + (15e^4 + 40e^2 + 8) (7c_1 + 6e^2 - 6)) + \\ & + 9a^2 (e^2 - 1)^2 ((735e^4 \cos 4\omega + 45e^4 + 120e^2 + 24) - \\ & - 140e^2 (e^2 + 2) \cos 2\omega) + 256r_J^2 (3c_1 (e^2 - 1) (5e^2 \cos 2\omega - 3e^2 - 2) + \\ & \left. + e^2 (-3e^4 + 15 (e^2 - 1)^2 \cos 2\omega + 4e^2 + 1)) - 512r_J^2 \right) \quad (4.22) \end{aligned}$$

Численно построим критическое множество для редуцированного второго приближения (4.22), задав значение аргумента перицентра $\omega = \pi/2$.

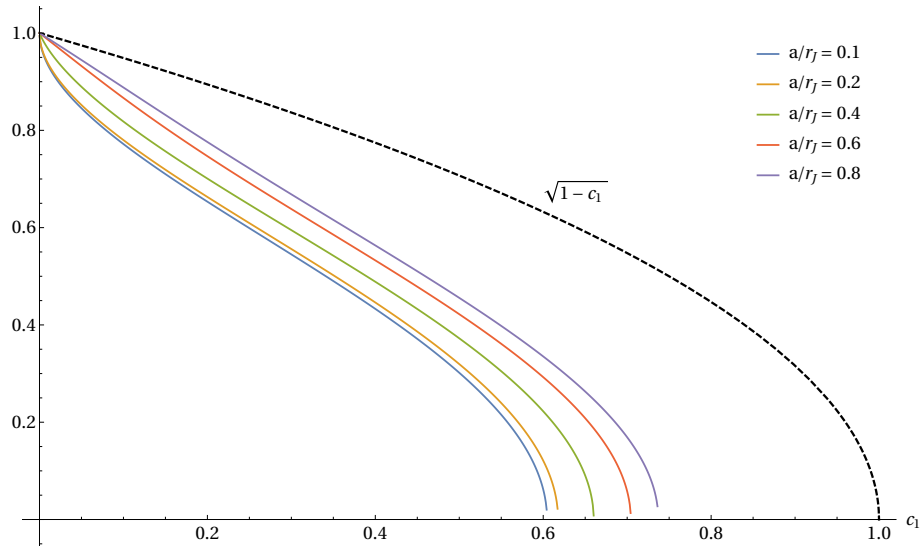


Рисунок 4.11 — Параметрические кривые $e^*(c_1)$ для второго приближения в случае $\omega^* = \frac{\pi}{2}$.

Как можно видеть, критическое множество силовой функции во втором приближении (рис. 4.11) качественно повторяет критическое множество в хилловском приближении (рис. 4.9). Отличие состоит в том, что кривая равновесия зависит от значения большой полуоси орбиты спутника a : на рис. 4.12, построенном для случая круговой орбиты $e = 0$, можно видеть, что характер зависимости близок к линейной, монотонно возрастающей функции.

Построим фазовый портрет в пространстве переменных (ω, e) для редуцированной силовой функции (4.22). При этом воспользуемся следующими значениями параметров: $a/r_J = 0.8$, $c_1 = 0.1$.

На фазовом портрете (рис. 4.13), аналогично хилловскому случаю, можно видеть область A , характеризующуюся либрационными движениями линии

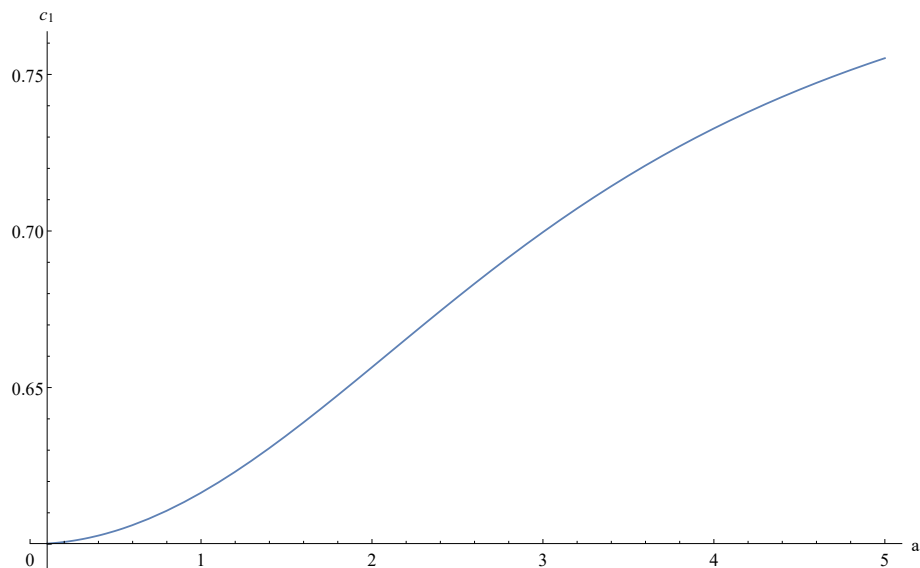


Рисунок 4.12 — Параметрическая кривая $c_1(a)$ для второго приближения в случае $e = 0$.

апсид, в окрестности стационарной точки типа «центр». Отличие области A от хилловского случая состоит в том, что фазовые кривые в окрестности неподвижной точки имеют эллиптическую форму с большой полуосью, направленной в сторону изменения аргумента перицентра. Фазовые переменные (ω, e) остаются в окрестности своих стационарных значений, равных $(\pi/2, 0.888)$. Фазовые кривые в области B охватывают цилиндр $S^1 \times R^1 = [0, 1) \times [0, \pi)$, сохраняя значение $e < 1$ при ротационном движении линии апсид в сторону увеличения аргумента перицентра.

Исследуем теперь следующее приближение силовой функции (4.15). С этой целью в котором удержим члены при $(a/r_J)^2$, $(a/r_J)^4$ и $(a/r_J)^6$ (промежуточные расчеты представлены в приложении A.2):

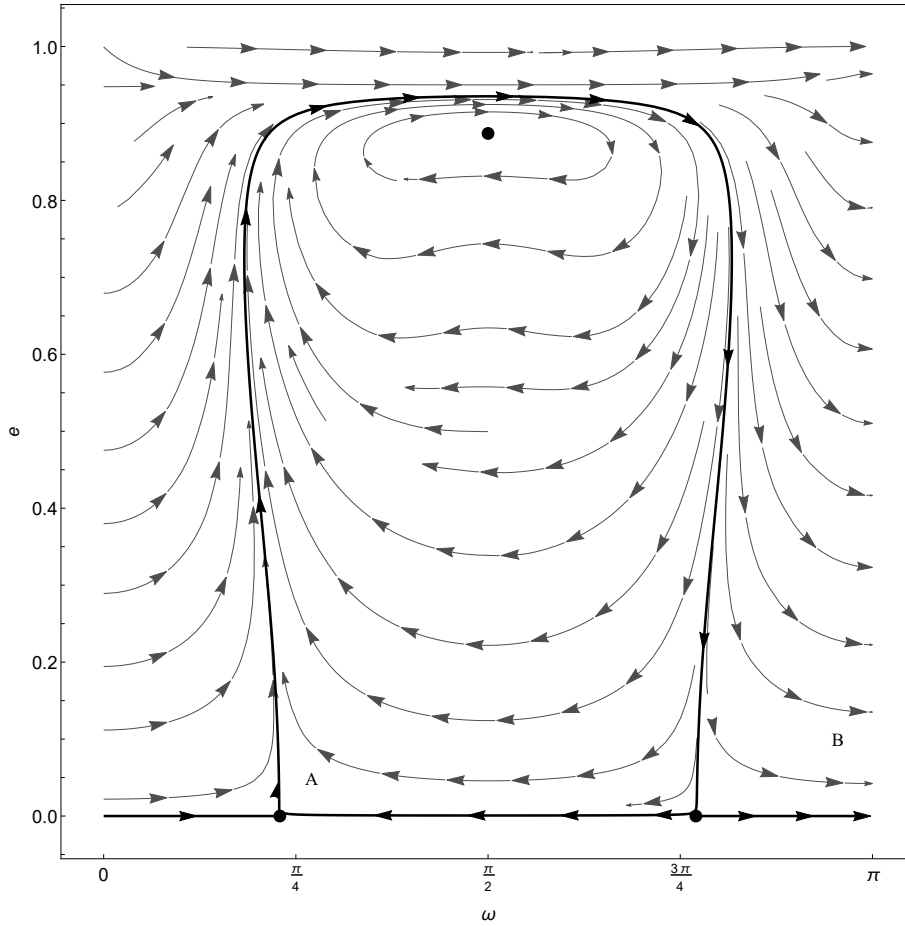


Рисунок 4.13 — Фазовый портрет в случае второго приближения редуцированной силовой функции \hat{R}_2

$$\begin{aligned}
 \hat{R}_3 = & \frac{fm_J}{131072(1-e^2)^3 r_J^7} \left[50a^6 (7(5(e^2+6)e^2+24)e^2+16) \times \right. \\
 & \times \left(21c_1 (15c_1(e^2-1) + 11c_1^2 + 5(e^2-1)^2) + 5(e^2-1)^3 \right) - \\
 & - 495495a^6 e^6 (c_1 + e^2 - 1)^3 \cos 6\omega + 288a^4 (1-e^2) (15e^4 + 40e^2 + 8) \times \\
 & \times \left(5c_1 (7c_1 + 6e^2 - 6) + 3(e^2-1)^2 \right) r_J^2 + 8192a^2 (e^2-1)^2 (3e^2+2) \times \\
 & \times (3c_1 + e^2 - 1) r_J^4 + 1890e^4 (c_1 + e^2 - 1)^2 \cos 4\omega \times \\
 & \times (11a^6 (3e^2 + 10) (11c_1 + e^2 - 1) - 112a^4 (e^2 - 1) r_J^2) + 15a^2 e^2 (-c_1 - e^2 + 1) \times \\
 & \times \cos 2\omega (105a^4 (15e^4 + 80e^2 + 48) (18c_1 (e^2 - 1) + 33c_1^2 + (e^2 - 1)^2) - \\
 & \left. - 2688a^2 (e^4 + e^2 - 2) (7c_1 + e^2 - 1) r_J^2 + 8192 (e^2 - 1)^2 r_J^4 \right] \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Численно построим бифуркационную диаграмму $e(c_1)$ для редуцированного третьего приближения (4.23), задав значение аргумента перицентра $\omega = \pi/2$ и параметр $a/r_J = 0.8$.

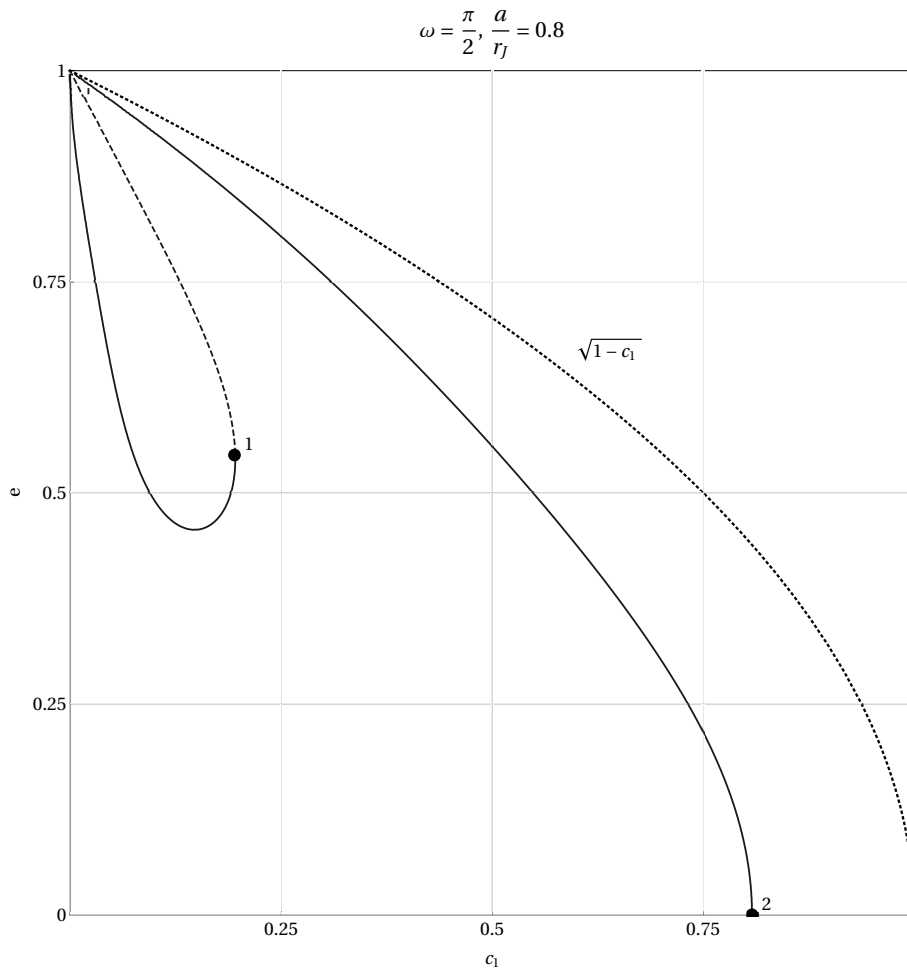


Рисунок 4.14 — Бифуркационная диаграмма $e(c_1)$ для третьего приближения в случае $\omega = \frac{\pi}{2}$.

На рис. 4.14 можно видеть кривую равновесия $e(c_1)$, начинающуюся в точке $(0, 1)$, монотонно убывающую с ростом параметра c_1 и заканчивающуюся в точке 2 с координатами $(c_1^{(2)}, e^{(2)}) = (0.808, 0)$. Данная кривая соответствует, как уже рассмотренной кривой в хилловском случае (см. рис. 4.9), так и кривой, полученной в случае второго приближения функции (см. рис. 4.11).

Кроме того, на рисунке 4.14 можно видеть кривую равновесия, имеющую форму петли, начинающуюся и заканчивающуюся в точке $(0, 1)$. На этой кривой присутствует точка 1, имеющая координаты $(c_1^{(1)}, e^{(1)}) = (0.195, 0.545)$ – данной точке отвечает бифуркация типа «седло-узел». Неустойчивые равновесия на рисунке выделены пунктиром.

Также из рис. 4.14 следует, что на интервале $c_1 \in (0, c_1^{(1)})$ существует два устойчивых и одно неустойчивое положение равновесия. В точке бифуркации 1 устойчивое равновесие сливается с неустойчивым и далее равновесия пропадают. На интервале $c_1 \in (c_1^{(1)}, c_1^{(2)})$ присутствует одно устойчивое положение

равновесия для значения параметра $\omega = \pi/2$, а при $c_1 \in (c_1^{(2)}, +\infty)$ положения равновесия исчезают полностью.

Построим теперь бифуркационную диаграмму $e(a/r_J)$, зафиксировав значения аргумента перицентра $\omega = \pi/2$ и первого интеграла $c_1 = 0.1$.

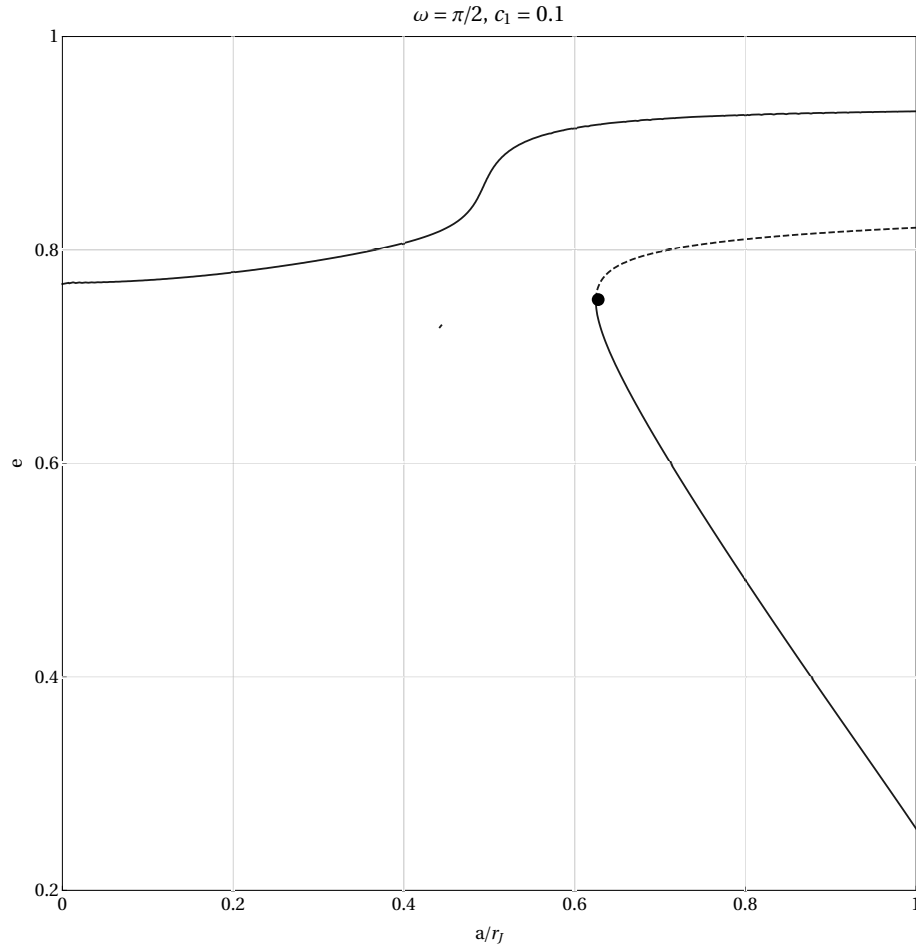


Рисунок 4.15 — Бифуркационная диаграмма $e(a/r_J)$ для третьего приближения в случае $\omega = \frac{\pi}{2}$.

На рис. 4.15 можно видеть две кривые равновесия, одна из которых монотонно возрастает с увеличением параметра a/r_J и существует при всех допустимых его значениях. Вторая кривая имеет точку бифуркации типа «седло-узел» с координатами $(a/r_J, e) = (0.628, 0.754)$. Неустойчивые равновесия на данной кривой отмечены пунктиром.

Из рисунка 4.15 следует, что на интервале изменения параметра $a/r_J \in (0, 0.628)$ присутствует устойчивое положение равновесия, а на интервале $a/r_J \in (0.628, 1)$ к нему добавляются устойчивое и неустойчивое положения равновесия.

Построим фазовый портрет колебаний в пространстве переменных (ω, e) для редуцированной силовой функции (4.23). При этом воспользуемся следующими значениями параметров: $a/r_J = 0.8$, $c_1 = 0.1$.

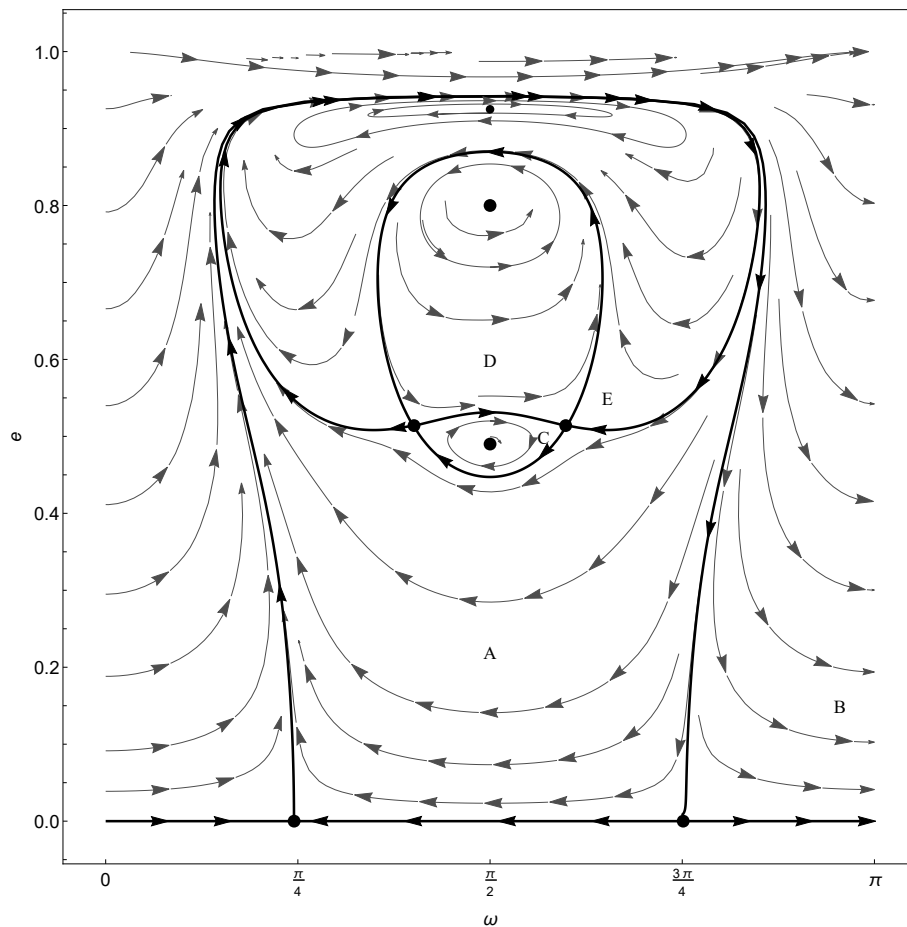


Рисунок 4.16 — Фазовый портрет в случае редуцированной силовой функции \hat{R}_3

Как следует из бифуркационных диаграмм 4.14 и 4.15 для выбранных значений параметров a/r_J и c_1 на прямой $\omega = \pi/2$ должны присутствовать три положения равновесия, что и наблюдается на фазовом портрете 4.16: имеем стационарные точки типа «центр» с координатами $(\pi/2, 0.49)$, $(\pi/2, 0.81)$ и $(\pi/2, 0.927)$. Окрестности этих стационарных точек (области C , D и E), характеризуются либрационными движениями фазовых переменных. Либрационные движения также характерны для области A : фазовые кривые совершают периодические движения, охватывающие области C , D и E . В области B фазовые кривые охватывают цилиндр $S^1 \times R^1 = [0, 1) \times [0, \pi)$, сохраняя значение $e < 1$ при бесконечном возрастании аргумента перицентра ω .

В отличие от фазовых портретов, построенных для хилловского (рис. 4.10) и второго (рис. 4.13) приближений силовой функции, на фазовом портрете, по-

строеном для третьего приближения (рис. 4.16), можно видеть области C , D и E с гетероклиническими границами расположенные целиком внутри области A .

Рассмотрим следующее приближение силовой функции, с этой целью удержим члены при $(a/r_J)^2$, $(a/r_J)^4$, $(a/r_J)^6$ и $(a/r_J)^8$ (промежуточные расчеты представлены в приложении A.3) и получим выражение (A.9). Построим численно бифуркационную диаграмму $e(c_1)$ для четвертого приближения силовой функции задачи (A.9), задав значение аргумента перицентра $\omega = \pi/2$ и безразмерного параметра $a/r_J = 0.8$.

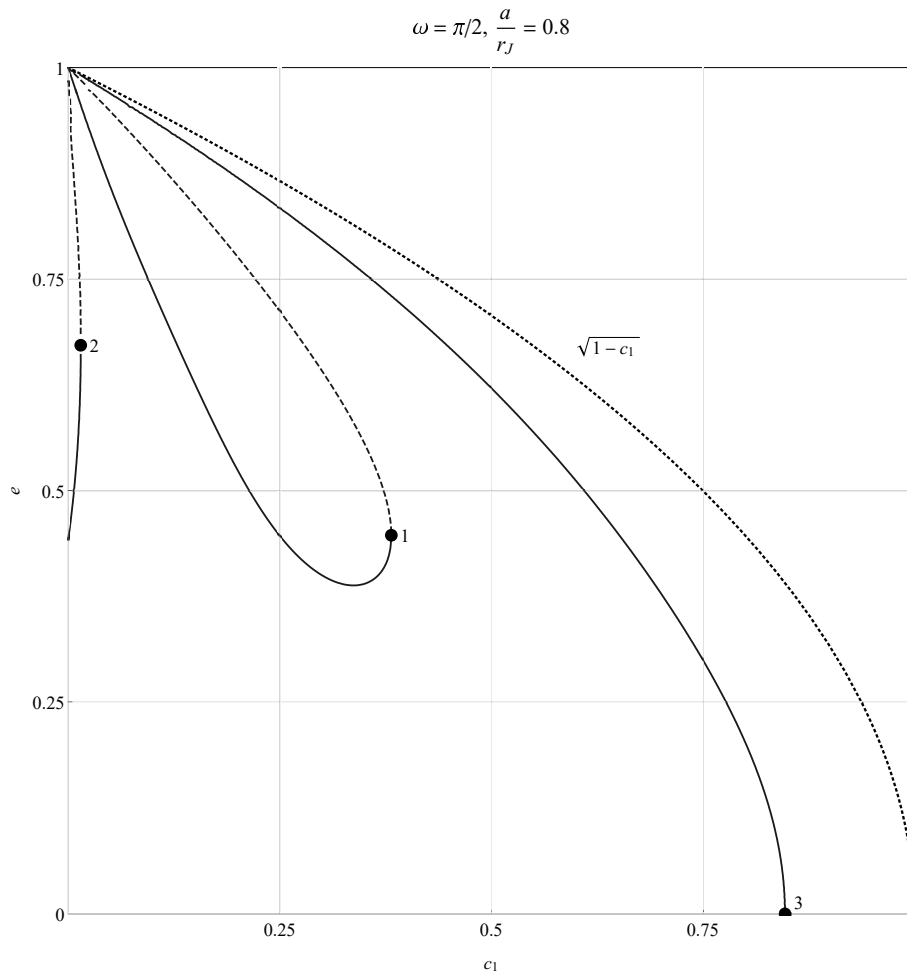


Рисунок 4.17 — Бифуркационная диаграмма $e(c_1)$ для четвертого приближения в случае $\omega = \frac{\pi}{2}$.

На рис. 4.17 можно видеть три кривые равновесия, исходящие из точки с координатами $(c_1, e) = (0,1)$. Первая кривая монотонно убывает и пересекается с осью абсцисс в точке 3 с координатами $(c_1^{(3)}, e^{(3)}) = (0.847, 0)$, которую можно было видеть ранее на рисунках 4.9, 4.11 и 4.14. Вторая кривая имеет петлеобразную форму, на ней расположена точка 1 с координатами $(c_1^{(1)}, e^{(1)}) =$

(0.382, 0.447) – данной точке отвечает бифуркация типа «седло-узел». Аналогичная точка также наблюдается на рис. 4.14. Третья кривая равновесия содержит точку 2 с координатами $(c_1^{(2)}, e^{(2)}) = (0.015, 0.672)$ – данной точке также отвечает бифуркация типа «седло-узел». Неустойчивые равновесия на второй и третьей кривой выделены пунктиром.

Также из рис. 4.17 следует, что на малом интервале $c_1 \in (0, c_1^{(2)})$ расположены пять положений равновесия: три устойчивых и два неустойчивых. В точке бифуркации 2 устойчивое равновесие на третьей кривой сливается с неустойчивым и далее равновесия пропадают. На интервале $c_1 \in (c_1^{(2)}, c_1^{(1)})$ присутствуют два устойчивых и одно неустойчивое положение равновесия. В точке бифуркации 1 устойчивое равновесие на второй кривой сливается с неустойчивым и далее равновесия пропадают. На интервале $c_1 \in (c_1^{(1)}, c_1^{(3)})$ присутствует одно устойчивое положение равновесия для значения параметра $\omega = \pi/2$, а при $c_1 \in (c_1^{(3)}, +\infty)$ положения равновесия полностью пропадают.

Построим теперь бифуркационную диаграмму $e(a/r_J)$, задав значения аргумента перицентра $\omega = \pi/2$ и первого интеграла $c_1 = 0.1$.

На рис. 4.18 можно видеть две кривые равновесия, одна из которых существует при всех допустимых значениях малого параметра a/r_J . Вторая кривая имеет точку бифуркации типа «седло-узел» с координатами $(a/r_J, e) = (0.536, 0.914)$. Неустойчивые равновесия на данной кривой отмечены пунктиром.

Из рисунка 4.18 следует, что на интервале изменения параметра $a/r_J \in (0, 0.536)$ присутствует одно устойчивое положение равновесия, а на интервале $a/r_J \in (0.536, 1)$ наблюдаем два устойчивых и одно неустойчивое положение равновесия.

Построим фазовый портрет колебаний в пространстве переменных (ω, e) для редуцированной силовой функции (A.9). При этом воспользуемся следующими значениями параметров: $a/r_J = 0.8$, $c_1 = 0.1$.

Полученный рисунок 4.19 по своей топологии похож на рассмотренный ранее для случая редуцированной силовой функции \hat{R}_3 (рис. 4.16). Как можно видеть на бифуркационных диаграммах 4.17 и 4.18 для рассматриваемых значений параметров a/r_J и c_1 на прямой $\omega = \pi/2$ присутствуют три положения равновесия. Эти же равновесия можно наблюдать и на фазовом портрете 4.19: имеем стационарные точки типа «центр» с координатами $(\pi/2, 0.737)$, $(\pi/2, 0.894)$ и $(\pi/2, 0.938)$. Окрестности этих стационарных точек (области C , D и E), характеризуются либрационными движениями фазовых переменных.

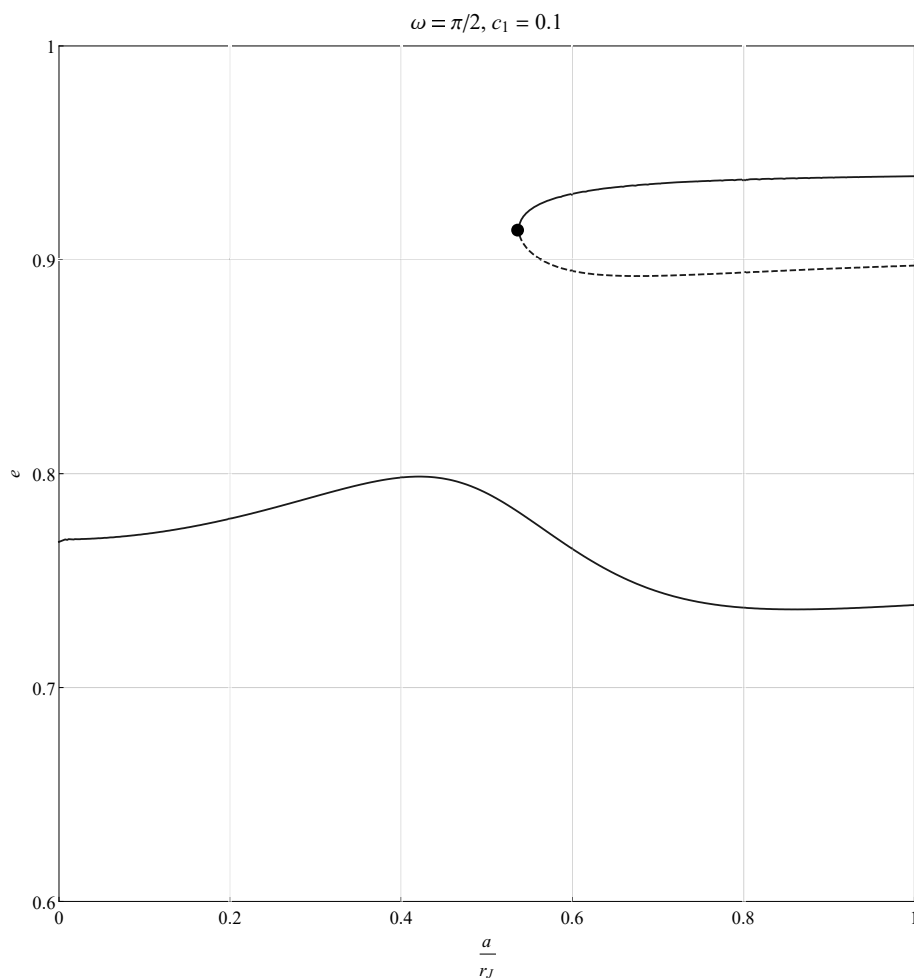


Рисунок 4.18 — Бифуркационная диаграмма $e(a/r_J)$ для четвертого приближения в случае $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Либрационные движения также характерны для области A : фазовые кривые совершают периодические движения, охватывающие области C , D и E . В области B фазовые кривые охватывают цилиндр $S^1 \times R^1 = [0, 1) \times [0, \pi)$, сохраняя значение $e < 1$ при бесконечном возрастании аргумента перицентра ω .

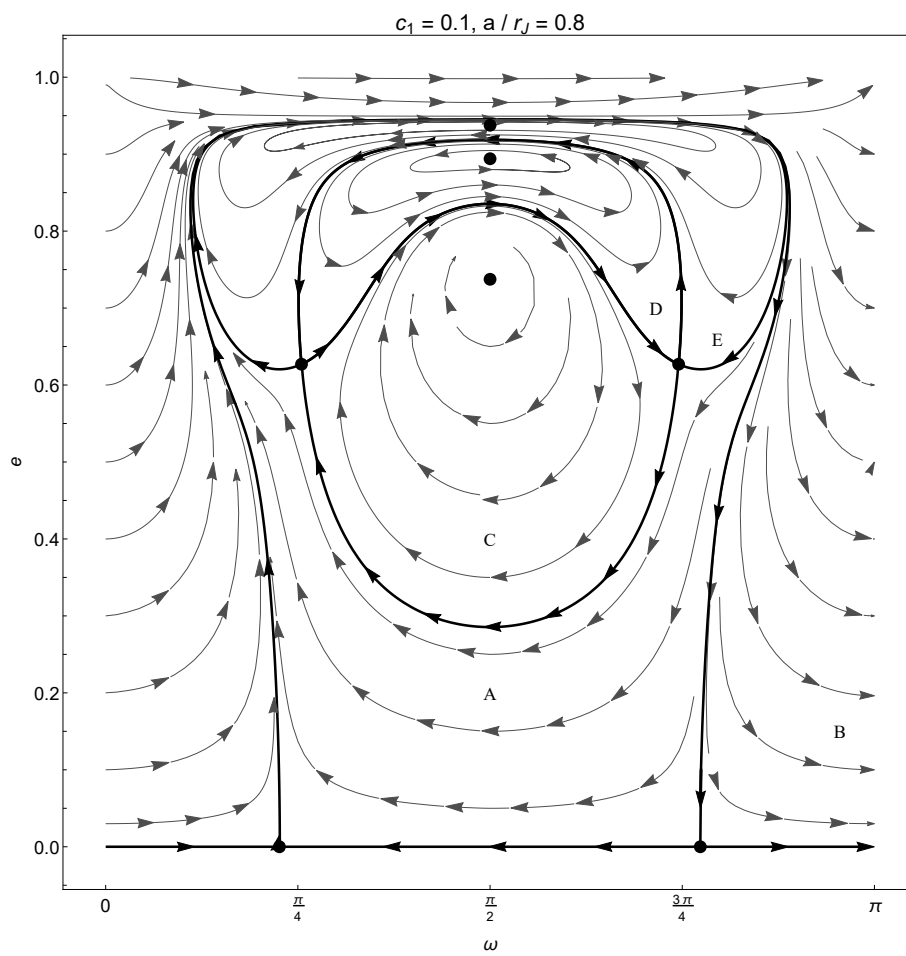


Рисунок 4.19 — Фазовый портрет в случае редуцированной силовой функции \hat{R}_4

4.6 Заключение

Были рассмотрены пространственные оскулирующие эллиптические движения астероида (солнечного зонда) бесконечно малой массы вокруг звезды (Солнца) под действием двух возмущений: гравитационного притяжения со стороны внешней планеты (Юпитера) и солнечного светового давления. Использована схема Гаусса двукратного усреднения возмущенной силовой функции задачи по долготе планеты и долготе невозмущенного движения спутника. Впервые было получено явное аналитическое выражение усредненной силовой функции в виде ряда Фурье, коэффициенты которого выражаются через известные специальные функции. Аналитическое выражение усредненной силовой функции позволяет быстро и эффективно получить любое приближение функции по малому параметру a/r_J , просто доказать интегральность некоторых многообразий, в частности, интегральность многообразия $e = \sqrt{1 - c_1}$ в редуцированной системе, что является новым результатом и в классической задаче трех тел.

Также новыми результатами в классической дважды усредненной задаче трех тел являются: фазовые портреты колебаний во втором, третьем и четвертом приближениях силовой функции, численно подтвержденное наличие кривых неаналитичности силовой функции, вдоль которых ее ряд Фурье расходится. Численно подтверждено, что ряд Фурье является асимптотическим и, как следствие, расходящийся ряд Фурье можно аппроксимировать аналитической функцией, состоящей из совокупности первых 20-ти членов этого ряда. Неаналитичность ряда проявляет себя только при удержании членов, порядок малости которых больше двадцати.

Анализ эволюционных движений задачи выявил два бифуркационных параметра для \hat{R}_3 и \hat{R}_4 : большую полуось орбиты спутника a и значение интеграла Лидова-Козаи c_1 . Вместе с тем установлено, что существенного влияния на качественную картину солнечное давление не оказывает.

Фазовые портреты, построенные для силовых функций \hat{R}_h и \hat{R}_2 качественно повторяют картину, описанную в статье Вашковьяка [38] и монографии Емельянова [70]: имеется область либрационных движений A с соответствующей ей стационарной точкой типа центр и область ротационных движений линии апсид в сторону увеличения аргумента перицентра.

Топология фазовых портретов изменяется в случае силовых функций \hat{R}_3 и \hat{R}_4 : в области либрационных движений A появляется кластер из трех подобластей либрационных колебаний C, D, E с соответствующими им стационарными точками типа «центр» и двумя седловыми точками.

Постановка задачи и выбор метода исследования принадлежат проф. Красильникову П.С., также ему принадлежит идея применения формулы Парсеваля и вывод формулы (4.15). Автору принадлежат формулировки и доказательства основных теоретических результатов, представленных в данной главе. Также автором выполнены все аналитические и численные расчёты с использованием упомянутых в главе методов.

Заключение по диссертации

Исследовано влияние зоны земной тени орбиты спутников, находящиеся в плоскости эклиптики во внешней сфере гравитационного влияния Земли. В результате численного моделирования было установлено, что увеличение большой полуоси орбиты спутника ведет к уменьшению среднего времени нахождения в земной тени. Также установлено влияние эксцентриситета: его увеличение приводит к увеличению среднего времени нахождения спутника в тени, хотя с приближением к внешней границе сферы гравитационного влияния Земли влияние уменьшается. Максимальное значение относительного времени пребывания спутника в области земной тени в случае внешней сферы гравитационного влияния Земли составляет 0.62% (при эксцентриситете 0.7), что позволяет не учитывать земную тень при проведении качественных исследований.

Также была исследована эволюция высоких орбит спутника Земли, принадлежащих плоскости эклиптики, под действием гравитационных возмущений от Солнца и светового давления. Получена возмущающая функция задачи при условии, что спутник является шаром, получено также среднее значение возмущающей функции в отсутствие резонансов между средним невозмущенным движением спутника и средним движением Солнца. Показано, что интегралами осредненных оскулирующих уравнений являются большая полуось орбиты спутника и среднее значение возмущающей функции. Подробно изучен хилловский вариант задачи, при котором расстояние до спутника много меньше расстояния между Землей и Солнцем: построены фазовые портреты колебаний при разных значениях параметров, описаны три типа квазипериодических траекторий спутника – траектории либрационного и ротационного типов, а также траектории столкновения с Землей. Численное моделирование траекторий позволило описать дополнительные эффекты, вызванные световым давлением: смещение ограниченной траектории спутника как целого относительно траектории классической задачи трех тел в область, более удаленную от Солнца.

Рассмотрена плоская ограниченная задача четырёх тел с учётом сил светового давления, когда орбита Земли – кеплеровский эллипс с фокусом в Солнце, орбита Луны – кеплеровский эллипс с фокусом в Земле, спутник-баллон – пассивно гравитирующее тело. Получена усреднённая силовая функция задачи в оскулирующих элементах в нерезонансном случае, когда невозмущённая ор-

бита спутника Земли принадлежит внешней сфере гравитационного влияния Земли, расположенной за лунной сферой Хилла. Показано, что интегралами усреднённых уравнений в оскулирующих элементах являются большая полуось орбиты спутника и среднее значение силовой функции. Исследованы стационарные режимы колебаний, их бифуркация в зависимости от коэффициента светового давления и большой полуоси невозмущённой орбиты спутника. Построены фазовые портреты колебаний при разных значениях коэффициента светового давления, в частности для бифуркационных значений. Проведены расчёты либрационных и ротационных движений спутника в плоскости эклиптики. Показано, что существует два типа эволюционирующих орбит: орбиты либрационного и ротационного типов. Для орбит первого типа оскулирующие аргумент перицентра и эксцентриситет меняются периодически, но с малыми амплитудами, орбита близка к траектории, отвечающей стационарной точке и сохраняющей значения своих невозмущённых кеплеровских элементов во всё время движения. Орбиты второго типа имеют непрерывно возрастающий аргумент перицентра, и, как следствие, медленное вращение линии апсид оскулирующего эллипса, на которое накладывается медленное периодическое изменение эксцентриситета. Притяжение спутника Луной сильно осложняет проведение расчётов в окрестности $e = 1$, поэтому численный счёт не подтвердил наличие орбит столкновения с Землёй, для которых эксцентриситет близок к единице. Описаны дополнительные эффекты, вызванные световым давлением: смещение ограниченной траектории спутника как целого относительно траектории классической задачи четырёх тел в область, более удалённую от Солнца.

Были рассмотрены также пространственные оскулирующие эллиптические движения астероида (солнечного зонда) бесконечно малой массы вокруг звезды (Солнца) под действием двух возмущений: гравитационного притяжения со стороны внешней планеты (Юпитера), движущейся по круговой орбите, и солнечного светового давления. Использована схема Гаусса двукратного усреднения возмущенной силовой функции задачи по долготе планеты и истинной аномалии невозмущенного движения спутника. Впервые получено явное аналитическое выражение усредненной силовой функции в виде ряда Фурье, коэффициенты которого выражаются через известные специальные функции. Аналитическое выражение усредненной силовой функции позволяет быстро и эффективно получить любое приближение функции по малому параметру, просто доказать интегральность некоторых многообразий, в частности, инте-

гальность многообразия $e = \sqrt{1 - c_1}$ в редуцированной системе, что является новым результатом и в классической задаче трех тел.

Также новыми результатами в классической дважды усредненной задаче трех тел являются: фазовые портреты колебаний во втором, третьем и четвертом приближениях силовой функции, численно подтвержденное наличие кривых неаналитичности силовой функции, вдоль которых ее ряд Фурье расходится. Численно подтверждено, что ряд Фурье является асимптотическим и, как следствие, расходящийся ряд Фурье можно аппроксимировать аналитической функцией, состоящей из совокупности первых 20-ти членов этого ряда. Неаналитичность ряда проявляет себя только при удержании членов, порядок малости которых больше двадцати.

Качественный анализ задачи выявил два бифуркационных параметра для силовых функций \hat{R}_3 и \hat{R}_4 : большую полуось орбиты спутника a и значение интеграла Лидова-Козаи c_1 , для них наблюдается бифуркация равновесий типа «седло-узел». Вместе с тем было установлено, что существенного влияния на качественную картину солнечное давление не оказывает. Фазовые портреты, построенные для силовых функций \hat{R}_h и \hat{R}_2 качественно повторили картину, описанную в статье Вашковьяка и монографии Емельянова. Топология фазовых портретов претерпела изменения в случае силовых функций \hat{R}_3 и \hat{R}_4 : в области либрационных движений A появился кластер из трех подобластей либрационных колебаний C , D , E с соответствующими им стационарными точками типа «центр» и двумя седловыми точками.

Автор благодарит авторов шаблона *Russian-Phd-LaTeX-Dissertation-Template* за помощь в оформлении диссертации.

Список литературы

1. Радзиевский В. В. Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления // *Астрономический журнал*. — 1950. — Т. 27, № 4. — С. 250–256.
2. Musen P. The Influence of the Solar Radiation Pressure on the Motion of an Artificial Satellite // *Journal Geophysical Research*. — 1960. — Vol. 65, no. 5. — Pp. 1391–1396.
3. Parkinson R. W., Jones H. M., I. Shapiro I. Effects of Solar Radiation Pressure on Earth Satellite Orbits // *Science*. — 1960. — Vol. 131. — Pp. 920–921.
4. Polyakhova Ye. N. Solar Radiation Pressure and the Motion of Earth Satellites // *AIAA Journal*. — 1963. — Vol. 1, no. 12. — Pp. 2893–2909.
5. Kozai Y. Effect of solar radiation pressure on the motion of an artificial satellite // *Smithsonian Astrophys. Obs. Special Rept.* — 1961. — Vol. 56. — Pp. 25–34.
6. Bryant R. W. The Effect of Solar Radiation Pressure on the Motion of an Artificial Satellite // *The Astronomical Journal*. — 1961. — Vol. 66. — Pp. 430–432.
7. Ferraz-Mello S. Analytical study of the Earth's shadowing effects on satellite orbits // *Celestial Mechanics*. — 1972. — Vol. 5. — Pp. 80–101.
8. Вашковьяк С. Н. Функция тени в задаче о влиянии светового давления на движение искусственных спутников Земли // *Вестник Московского Университета*. — 1974. — № 4. — С. 584–590.
9. Вашковьяк С. Н. Изменение орбит спутников-баллонов под действием светового излучения // *Астрономический журнал*. — 1976. — Т. 53. — С. 1085–1094.
10. Аксенов Е. П. Теория движения искусственных спутников Земли. — М.: Наука, 1977. — 360 с.
11. Kalvouridis T. J., Arribas M., Elife A. Parametric evolution of periodic orbits in the restricted four-body problem with radiation pressure // *Planetary and Space Science*. — 2007. — Vol. 55. — Pp. 475–493.

12. *Kalvouridis T. J., Hadjifotinou K. G.* Bifurcations from planar to three-dimensional periodic orbits in the photo-gravitational restricted four-body problem // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2008. — Vol. 18, no. 2. — Pp. 465–479.
13. *Papadouris J. P., Papadakis K. E.* Equilibrium points in the photogravitational restricted four-body problem // *Astrophys Space Sci*. — 2013. — Vol. 344. — Pp. 21–38.
14. On the photo-gravitational restricted four-body problem with variable mass / A. Mittal, R. Agarwal, M. S. Suraj, M. Arora // *Astrophys Space Sci*. — 2018. — Vol. 363. — P. 109.
15. *Kunitsyn A. L., Perezhogin A. A.* On the stability of triangular libration points of the photogravitational restricted circular three-body problem // *Celestial Mechanics*. — 1978. — Vol. 18, no. 4. — Pp. 395–408.
16. *Kunitsyn A. L., Tureshbaev A. T.* On the collinear libration points in the photogravitational three-body problem // *Celestial Mechanics*. — 1985. — Vol. 35, no. 2. — Pp. 105–112.
17. *Stepanov S. Ya., Salnikova T. V., Shuvalova A. I.* Three-Body Problem for the Earth-Moon System Under Photo-Gravitational Influence of the Sun // *Advances in the Astronautical sciences*. — 2018. — Vol. 161. — Pp. 201–208.
18. *Krivov A. V., Sokolov L. L., Dikarev V. V.* Dynamics of Mars-orbiting dust: effect of light pressure and planetary oblateness // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 1996. — Vol. 63. — Pp. 313–339.
19. *Hamilton D. P., Krivov A. V.* Circumplanetary Dust Dynamics: effect of Solar Gravity, Radiation Pressure, Planetary Oblatness and Electromagnetism // *Icarus*. — 1996. — Vol. 123. — Pp. 503–523.
20. *Szabo A.* Flying into the Sun // *Nature Astronomy*. — 2018. — Vol. 2, no. 10. — P. 829.
21. *Лидов М.Л.* Вековые эффекты эволюции орбит под влиянием светового давления // *Космические исследования*. — 1969. — Vol. 7, no. 4. — Pp. 467–484.

22. *Лидов М. Л., Иванова Е. Я.* Метод учета сил светового давления при полуаналитическом расчете движения спутников // Математическое обеспечение космических экспериментов. — М.: Наука, 1978. — С. 149–193.
23. *Доброславский А. В., Красильников П. С.* Об эволюции движений спутника-баллона в плоской ограниченной задаче трех тел с учетом светового давления // *Письма в астрономический журнал.* — 2018. — Т. 44, № 8–9. — С. 618–630.
24. *Доброславский А. В., Красильников П. С.* Об эволюции движений спутника-баллона в плоской ограниченной планетной задаче четырёх тел с учётом светового давления // *Прикладная математика и механика.* — 2020. — Т. 84, № 1. — С. 26–43.
25. *Gauss J. C. F.* *Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium.* — 1809.
26. *Моисеев Н. Д.* О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек. Об осредненных вариантах ограниченной круговой плоской проблемы трех точек // *Труды ГАИШ.* — 1945. — С. 75–99.
27. *Моисеев Н. Д.* О некоторых основных упрощенных схемах небесной механики, получаемых при помощи осреднения ограниченной круговой проблемы трех точек. Об осредненных вариантах пространственной ограниченной круговой проблемы трех точек // *Труды ГАИШ.* — 1945. — С. 100–117.
28. *Ash M. E.* Doubly averaged effect of the Moon and Sun on high altitude Earth satellite orbit // *Celestial Mechanics.* — 1976. — Vol. 14. — Pp. 209–238.
29. *Лидов М. Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел // *Искусственные спутники Земли.* — 1961. — № 8. — С. 5–45.
30. *Lidov M. L.* The evolution of orbits of artificial satellites of planets under the action of gravitational perturbations of external bodies // *Planetary and Space Science.* — 1962. — Vol. 9. — Pp. 719–759.
31. *Kozai Y.* Secular perturbations of asteroids with high inclination and eccentricity // *Astronomical Journal.* — 1962. — Vol. 67, no. 9. — Pp. 591–598.

32. *Sidorenko V. V.* The eccentric Kozai–Lidov effect as a resonance phenomenon // *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. — 2018. — Vol. 130, no. 1. — P. 4.
33. *Sidorenko V. V.* A Perturbative Treatment of the Retrograde Co-orbital Motion // *The Astronomical Journal*. — 2020. — Vol. 160, no. 6. — P. 257.
34. *Аксенов Е. П.* Осредненная ограниченная круговая задача трех тел // *Тр. ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы*. — 1967. — Т. 21. — С. 184–202.
35. *Лидов М. Л.* О приближенном анализе эволюции орбит искусственных спутников // *Сб. «Проблемы движения искусственных тел»*.—М.: Изд. АН СССР. — 1963. — С. 119–134.
36. *Зиглин С. Л.* О вековой эволюции орбиты планеты в системе двойной звезды // *Письма в астрономический журнал*. — 1975. — Т. 1, № 9. — С. 45–47.
37. *Lidov M. L., Ziglin S. L.* The analysis of restricted circular twice-averaged three body problem in the case of close orbits // *Celestial Mechanics*. — 1974. — Vol. 9, no. 2. — Pp. 151–173.
38. *Вашковьяк М. А.* Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. 1. Качественное исследование // *Космические исследования*. — 1981. — Т. 19, № 1. — С. 5–18.
39. *Вашковьяк М. А.* Эволюция орбит в плоской ограниченной эллиптической двукратно осредненной задаче трех тел // *Космические исследования*. — 1982. — Т. 20, № 3. — С. 332–341.
40. *Vashkov'yak M. A.* Some Peculiarities of the Evolution of Orbits in the Satellite Restricted Elliptic Doubly Averaged Three-Body Problem // *Solar System Research*. — 2020. — Vol. 54, no. 1. — Pp. 49–63. — URL: <https://doi.org/10.1134/S0038094620010098>.
41. *Вашковьяк М. А.* Об эволюции орбит во внешнем варианте ограниченной эллиптической двукратно осредненной задачи трех тел // *Астрономический вестник*. — 2020. — Т. 54, № 4. — С. 360–375.
42. *Аксенов Е. П.* Двукратно осредненная эллиптическая ограниченная задача трех тел // *Астрономический журнал*. — 1979. — Т. 56, № 2. — С. 419–426.

43. Аксенов Е. П. Траектории в двукратно осредненной эллиптической ограниченной задаче трех тел // *Астрономический журнал*. — 1979. — Т. 56, № 3. — С. 623–631.
44. Вереш Ф. Качественный анализ плоской усредненной ограниченной задачи трех тел // *Астрономический журнал*. — 1980. — Т. 57, № 1. — С. 182–189.
45. Вереш Ф. Аналитическое решение плоской усредненной ограниченной задачи трех тел в случае циркуляции перицентра орбиты частицы // *Астрономический журнал*. — 1980. — Т. 57, № 4. — С. 824–832.
46. Вереш Ф. Два частных вида решения плоской усредненной ограниченной задачи трех тел // *Астрономический журнал*. — 1980. — Т. 57, № 5. — С. 1070–1077.
47. Electrodynamical compensation of disturbing torque and attitude stabilization of a satellite in J2 perturbed orbit / A. A. Tikhonov, K. A. Antipov, D. G. Korytnikov, D. Yu. Nikitin // *Acta Astronautica*. — 2017. — Vol. 141. — Pp. 219–227.
48. Aleksandrov A. Yu., Tikhonov A. A. Averaging technique in the problem of Lorentz attitude stabilization of an Earth-pointing satellite // *Aerospace Science and Technology*. — 2020. — Vol. 104.
49. Aslanov V. S. Rigid body dynamics for space applications. — Butterworth-Heinemann, 2017. — 420 pp.
50. Duncan M., Quinn T., Tremaine S. The long-term evolution of orbits in the solar system: A mapping approach // *Icarus*. — 1989. — Vol. 82, no. 2. — Pp. 402–418.
51. Wisdom J. The resonance overlap criterion and the onset of stochastic behavior in the restricted three-body problem // *The Astronomical Journal*. — 1980. — Vol. 85. — Pp. 1122–1133.
52. Доброславский А. В. Об оценке среднего времени пребывания ИСЗ в земной тени при движении в плоскости эклиптики // *Космические исследования*. — 2021. — Т. 59, № 3. — С. 1–7.
53. Dobroslavskii A. V., Krasil'nikov P. S. Motion of a Satellite in the Circular Three-Body Problem with Light Pressure // *Journal of Mathematical Sciences*.

- 2021. — Vol. 255, no. 5. — Pp. 616–622. — URL: <https://doi.org/10.1007/s10958-021-05399-y>.
54. *Dobroslavskii A. V., Krasilnikov P. S.* On the averaged balloon satellite motions in a plane restricted four-body problem with light pressure // *AIP Conference Proceedings*. — 2019. — Vol. 2181, no. 1. — P. 020010. — URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5135670>.
55. *Dobroslavskiy A. V., Krasilnikov P. S.* Analysis of balloon satellite motion in the planetary restricted four-body problem taking into consideration light pressure forces // *AIP Conference Proceedings*. — 2019. — Vol. 2171, no. 1. — P. 160004. — URL: <https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5133308>.
56. *Мюррей К., Дермотт С.* Динамика солнечной системы. — М.: Физматлит, 2010. — 556 с.
57. *Бейтмен Г., А. Эрдейи.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. — М., 1965. — 296 с.
58. *Функции математической физики / Ж. К. де Ферье, Р. Кемпбелл, Г. Петью, Т. Фогель.* — М.: Физматгиз, 1963. — 102 с.
59. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. Основные задачи и методы. — М.: Наука, 1968. — 800 с.
60. *Красильников П. С.* Об усреднении дифференциальных уравнений с двумя независимыми малыми параметрами // *Доклады Академии Наук. Механика*. — 2011. — Т. 436, № 3. — С. 332–335.
61. *Красильников П. С.* О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании // *Прикладная математика и механика*. — 2012. — Т. 76, № 1. — С. 36–51.
62. *Красильников П. С.* Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. — Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. — 528 с.
63. *Дубошин Г. Н.* Теория притяжения. — М.: Физматгиз, 1961. — 288 с.

64. Грандиштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: Физматгиз, 1963. — 1100 с.
65. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. — СПб.: Лань, 2009. — Т. 3. — 656 с.
66. Laskar J., Boué G. Explicit expansion of the three-body disturbing function for arbitrary eccentricities and inclinations // *Astronomy & Astrophysics*. — 2010. — Vol. 522. — P. A60.
67. Пуанкаре А. Избранные труды в трех томах. Том I. Новые методы небесной механики. — М.: Наука, 1971. — 771 с.
68. von Zeipel H. Sur l'application des séries de M. Lindstedt à l'étude du mouvement des comètes périodiques // *Astronomische Nachrichten*. — 1910. — Vol. 183, no. 22. — Pp. 345–418.
69. Зиглин Сергей Львович. Исследование предельных случаев осредненной задачи трех тел : дис. ... канд. физ.-мат. наук : 01.02.01. — М., 1976. — 122 с.
70. Емельянов Н. В. Динамика естественных спутников планет на основе наблюдений. — Фрязино: Век 2, 2019. — 575 с.

Список рисунков

1.1	Зона земной тени	18
1.2	Транзит спутника через земную тень	19
1.3	Случай конической тени	24
1.4	Случай цилиндрической тени	25
1.5	Относительная погрешность	26
2.1	Задача трех тел с учетом светового давления	28
2.2	Фазовый портрет колебаний с одним устойчивым стационарным решением $(0, e^{(2)})$ на цилиндре $S^1 \times R^1$	40
2.3	Фазовый портрет колебаний в отсутствие устойчивого стационарного решения	41
2.4	Траектории либрационного типа	43
2.5	Траектории ротационного типа	44
2.6	Траектории столкновения	45
3.1	Задача четырех тел с учетом светового давления	48
3.2	Сферы гравитационного влияния	49
3.3	Бифуркационная диаграмма $e(\delta)$	58
3.4	Бифуркационная диаграмма $e(a)$	59
3.5	Фазовый портрет при $\delta = 3.06 \times 10^{-4}$	60
3.6	Фазовый портрет при $\delta = \delta_*^{(2)}$	61
3.7	Фазовый портрет при $\delta = 3.1 \times 10^{-4}$	62
3.8	Фазовый портрет при $\delta = \delta_*^{(1)}$	65
3.9	Фазовый портрет при $\delta = 5 \times 10^{-4}$	66
3.10	Траектории либрационного типа	67
3.11	Траектории ротационного типа	68
4.1	Невозмущенные траектории небесных тел. Угловые переменные.	70
4.2	Коэффициент $a_0(e)$ при $e \in (0,1)$	78
4.3	Коэффициент $a_1(e)$ при $e \in (0,1)$	78
4.4	Сравнение рядов (4.15) и (4.16).	79
4.5	Сравнение рядов (4.15) и (4.16) при $n \in [20,45]$	80
4.6	Расхождение ряда (4.15) на кривой неаналитичности f_1	80

4.7	Расхождение ряда (4.15) на кривой неаналитичности f_1	81
4.8	Расхождение ряда (4.15) на кривой неаналитичности f_1	82
4.9	Параметрические кривые $e^*(c_1)$ в хилловском приближении в случае $\omega^* = -\frac{\pi}{2}$	87
4.10	Фазовый портрет в случае хилловского приближения силовой функции \hat{R}_h	88
4.11	Параметрические кривые $e^*(c_1)$ для второго приближения в случае $\omega^* = \frac{\pi}{2}$	89
4.12	Параметрическая кривая $c_1(a)$ для второго приближения в случае $e = 0$	90
4.13	Фазовый портрет в случае второго приближения редуцированной силовой функции \hat{R}_2	91
4.14	Бифуркационная диаграмма $e(c_1)$ для третьего приближения в случае $\omega = \frac{\pi}{2}$	92
4.15	Бифуркационная диаграмма $e(a/r_J)$ для третьего приближения в случае $\omega = \frac{\pi}{2}$	93
4.16	Фазовый портрет в случае редуцированной силовой функции \hat{R}_3	94
4.17	Бифуркационная диаграмма $e(c_1)$ для четвертого приближения в случае $\omega = \frac{\pi}{2}$	95
4.18	Бифуркационная диаграмма $e(a/r_J)$ для четвертого приближения в случае $\omega = \frac{\pi}{2}$	97
4.19	Фазовый портрет в случае редуцированной силовой функции \hat{R}_4	98

Список таблиц

1	Значения $e^{(m)}$ на границе области D	39
---	---	----

Приложение А

Приближения силовых функций в ограниченной пространственной задаче трех тел

А.1 Второе приближение силовой функции

Рассмотрим приближение силовой функции (4.15), в котором возьмем два члена при суммировании:

$$R_2^{**} = \frac{fm_J}{r_J\sqrt{1-e^2}} \times \left[B_2 P_2(0) P_2(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) - \left(B_2 A_2^{(2)} + B_4 A_2^{(4)} \right) \cos 2\omega + \right. \\ \left. + B_4 P_4(0) P_4(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 6; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + B_4 A_4^{(4)} \cos 4\omega \right], \quad (\text{A.1})$$

где

$$A_2^{(2)} = 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 4; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{0!}{4!} P_2^{(2)}(\cos i), \\ A_2^{(4)} = 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 6; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{2!}{6!} P_4^{(2)}(0) P_4^{(2)}(\cos i), \\ A_4^{(4)} = 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 6; -3, 5; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{0!}{8!} P_4^{(4)}(0) P_4^{(4)}(\cos i), \\ B_2 = \left(\frac{a}{r_J} \right)^2 (1+e)^4 P_2(0), \quad B_4 = \left(\frac{a}{r_J} \right)^4 (1+e)^6 P_4(0), \\ P_2(0) = -\frac{1}{2}, \quad P_2(\cos i) = \frac{1}{2} (3 \cos^2 i - 1), \\ P_2^{(2)}(0) = 3, \quad P_2^{(2)}(\cos i) = -3 (\cos^2 i - 1), \\ P_4(0) = \frac{3}{8}, \quad P_4(\cos i) = \frac{1}{8} (3 - 30 \cos^2 i + 35 \cos^4 i), \\ P_4^{(2)}(0) = -\frac{15}{2}, \quad P_4^{(2)}(\cos i) = -\frac{15}{2} (\cos^2 i - 1) (7 \cos^2 i - 1), \\ P_4^{(4)}(0) = 105, \quad P_4^{(4)}(\cos i) = 105 (\cos^2 i - 1)^2,$$

$$\begin{aligned}
F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{(2+3e^2)(1-e)^{1/2}}{2(1+e)^{7/2}}, \\
F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 6; 1; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{(8+40e^2+15e^4)(1-e)^{1/2}}{8(1+e)^{11/2}}, \\
F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 4; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{5}{2} e^2 \frac{(1-e)^{1/2}}{(1+e)^{7/2}}, \\
F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 6; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{21e^2(e^2+2)(1-e)^{1/2}}{8(e+1)^{11/2}}, \\
F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 6; -3, 5; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{63e^4(1-e)^{1/2}}{8(1+e)^{11/2}}.
\end{aligned}$$

Подставляя вышеперечисленное в (A.1) и упрощая получаем:

$$\begin{aligned}
R_2^{**} &= \frac{fm_J a^2}{32768 r_J^5} \left[9a^2 (5880e^4 \sin^4 i \cos 4\omega + 560e^2 (e^2 + 2) \sin^2 i \times \right. \\
&\quad \times (7 \cos 2i + 5) \cos 2\omega + (15e^4 + 40e^2 + 8) (20 \cos 2i + 35 \cos 4i + 9)) + \\
&\quad \left. + 1024r_J^2 (30e^2 \sin^2 i \cos 2\omega + (3e^2 + 2) (3 \cos 2i + 1)) \right]. \quad (\text{A.2})
\end{aligned}$$

Редуцируя полученное выражение аналогично Хилловскому случаю, получаем:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_2 &= \frac{fm_J a^2}{4096 (e^2 - 1)^2 r_J^5} \left[45a^2 c_1 (-28 (e^2 + 2) e^2 (7c_1 + 8e^2 - 8) \cos 2\omega + \right. \\
&\quad + 147e^4 (c_1 + 2e^2 - 2) \cos 4\omega + (15e^4 + 40e^2 + 8) (7c_1 + 6e^2 - 6)) + \\
&\quad + 9a^2 (e^2 - 1)^2 ((735e^4 \cos 4\omega + 45e^4 + 120e^2 + 24) - \\
&\quad - 140e^2 (e^2 + 2) \cos 2\omega) + 256r_J^2 (3c_1 (e^2 - 1) (5e^2 \cos 2\omega - 3e^2 - 2) + \\
&\quad \left. + e^2 (-3e^4 + 15 (e^2 - 1)^2 \cos 2\omega + 4e^2 + 1)) - 512r_J^2 \right]. \quad (\text{A.3})
\end{aligned}$$

A.2 Третье приближение силовой функции

Рассмотрим приближение силовой функции (4.15), в котором возьмем три члена при суммировании:

$$\begin{aligned}
 R_3^{**} = \frac{fm_J}{r_J\sqrt{1-e^2}} & \left[B_2 P_2(0) P_2(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) - \right. \\
 & \left. - \left(B_2 A_2^{(2)} + B_4 A_2^{(4)} + B_6 A_2^{(6)} \right) \cos 2\omega + \right. \\
 & + B_4 P_4(0) P_4(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 6; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + \left(B_4 A_4^{(4)} + B_6 A_4^{(6)} \right) \cos 4\omega + \\
 & \left. + B_6 P_6(0) P_6(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 8; 1; \frac{2e}{e-1} \right) - B_6 A_6^{(6)} \cos 6\omega \right], \quad (\text{A.4})
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_2^{(6)} &= 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 8; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{4!}{8!} P_6^{(2)}(0) P_6^{(2)}(\cos i), \\
 A_4^{(6)} &= 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 8; -3, 5; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{2!}{10!} P_6^{(4)}(0) P_6^{(4)}(\cos i), \\
 A_6^{(6)} &= 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 8; -5, 7; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{0!}{12!} P_6^{(6)}(0) P_6^{(6)}(\cos i), \\
 B_6 &= \left(\frac{a}{r_J} \right)^6 (1+e)^8 P_6(0),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_6(0) &= -\frac{5}{16}, & P_6(\cos i) &= \frac{1}{16} (-5 + 105 \cos^2 i - 315 \cos^4 i + 231 \cos^6 i), \\
 P_6^{(2)}(0) &= \frac{105}{8}, & P_6^{(2)}(\cos i) &= -\frac{105}{8} (\cos^2 i - 1) (1 - 18 \cos^2 i + 33 \cos^4 i), \\
 P_6^{(4)}(0) &= -\frac{945}{2}, & P_6^{(4)}(\cos i) &= \frac{945}{2} (\cos^2 i - 1)^2 (11 \cos^2 i - 1), \\
 P_6^{(6)}(0) &= 10395, & P_6^{(6)}(\cos i) &= -10395 (\cos^2 i - 1)^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 8; 1; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{(1-e)^{1/2} (35e^6 + 210e^4 + 168e^2 + 16)}{16(e+1)^{15/2}}, \\
F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 8; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{3e^2 (1-e)^{1/2} (15e^4 + 80e^2 + 48)}{16(e+1)^{15/2}}, \\
F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 8; -3, 5; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{33e^4 (1-e)^{1/2} (3e^2 + 10)}{16(e+1)^{15/2}}, \\
F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 8; -5, 7; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{429e^6 (1-e)^{1/2}}{16(e+1)^{15/2}}.
\end{aligned}$$

Подставляя вышеперечисленное в (A.4) и упрощая получаем:

$$\begin{aligned}
R_3^{**} &= \frac{fm_J}{131072r_J^7} \left[\frac{5}{16} a^6 \left(1585584e^6 \sin^6 i \cos 6\omega + \right. \right. \\
&+ 5 (7 (5 (e^2 + 6) e^2 + 24) e^2 + 16) (105 \cos 2i + 126 \cos 4i + 231 \cos 6i + 50) + \\
&\quad + 33264e^4 (3e^2 + 10) (11 \cos 2i + 9) \sin^4 i \cos 4\omega + \\
&\quad + 630e^2 (15e^4 + 80e^2 + 48) (60 \cos 2i + 33 \cos 4i + 35) \sin^2 i \cos 2\omega \left. \right) + \\
&+ 36a^4 r_J^2 (5880e^4 \sin^4 i \cos 4\omega + 560e^2 (e^2 + 2) (7 \cos 2i + 5) \sin^2 i \cos 2\omega + \\
&\quad + (15e^4 + 40e^2 + 8) (20 \cos 2i + 35 \cos 4i + 9)) + \\
&\quad \left. + 4096a^2 r_J^4 (30e^2 \sin^2 i \cos 2\omega + (3e^2 + 2) (3 \cos(2i) + 1)) \right]. \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

Редуцируя полученное выражение аналогично Хилловскому случаю, получаем:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_3 &= \frac{fm_J}{131072 (1-e^2)^3 r_J^7} \left[50a^6 (7 (5 (e^2 + 6) e^2 + 24) e^2 + 16) \times \right. \\
&\quad \times \left(21c_1 (15c_1 (e^2 - 1) + 11c_1^2 + 5 (e^2 - 1)^2) + 5 (e^2 - 1)^3 \right) - \\
&\quad - 495495a^6 e^6 (c_1 + e^2 - 1)^3 \cos 6\omega + 288a^4 (1-e^2) (15e^4 + 40e^2 + 8) \times \\
&\quad \times \left(5c_1 (7c_1 + 6e^2 - 6) + 3 (e^2 - 1)^2 \right) r_J^2 + 8192a^2 (e^2 - 1)^2 (3e^2 + 2) \times \\
&\quad \times (3c_1 + e^2 - 1) r_J^4 + 1890e^4 (c_1 + e^2 - 1)^2 \cos 4\omega \times \\
&\times (11a^6 (3e^2 + 10) (11c_1 + e^2 - 1) - 112a^4 (e^2 - 1) r_J^2) + 15a^2 e^2 (-c_1 - e^2 + 1) \times \\
&\quad \times \cos 2\omega (105a^4 (15e^4 + 80e^2 + 48) (18c_1 (e^2 - 1) + 33c_1^2 + (e^2 - 1)^2) - \\
&\quad \left. - 2688a^2 (e^4 + e^2 - 2) (7c_1 + e^2 - 1) r_J^2 + 8192 (e^2 - 1)^2 r_J^4 \right). \quad (\text{A.6})
\end{aligned}$$

А.3 Четвертое приближение силовой функции

Рассмотрим приближение силовой функции (4.15), в котором возьмем четыре члена при суммировании:

$$\begin{aligned}
 R_4^{**} = & \frac{fm_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \left[B_2 P_2(0) P_2(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 4; 1; \frac{2e}{e-1} \right) - \right. \\
 & - \left(B_2 A_2^{(2)} + B_4 A_2^{(4)} + B_6 A_2^{(6)} + B_8 A_2^{(8)} \right) \cos 2\omega + \\
 & + B_4 P_4(0) P_4(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 6; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + \left(B_4 A_4^{(4)} + B_6 A_4^{(6)} + B_8 A_4^{(8)} \right) \cos 4\omega + \\
 & + B_6 P_6(0) P_6(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 8; 1; \frac{2e}{e-1} \right) - \left(B_6 A_6^{(6)} + B_8 A_6^{(8)} \right) \cos 6\omega + \\
 & \left. + B_8 P_8(0) P_8(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 10; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + B_8 A_8^{(8)} \cos 8\omega \right], \quad (\text{A.7})
 \end{aligned}$$

где

$$A_2^{(8)} = 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 10; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{6!}{10!} P_8^{(2)}(0) P_8^{(2)}(\cos i),$$

$$A_4^{(8)} = 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 10; -3, 5; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{4!}{12!} P_8^{(4)}(0) P_8^{(4)}(\cos i),$$

$$A_6^{(8)} = 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 10; -5, 7; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{2!}{14!} P_8^{(6)}(0) P_8^{(6)}(\cos i),$$

$$A_8^{(8)} = 2F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 10; -7, 9; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{0!}{16!} P_8^{(8)}(0) P_8^{(8)}(\cos i),$$

$$B_8 = \left(\frac{a}{r_J} \right)^8 (1+e)^{10} P_8(0), \quad P_8(0) = \frac{35}{128},$$

$$P_8(\cos i) = \frac{1}{128} (35 - 1260 \cos^2 i - 6930 \cos^4 i - 12012 \cos^6 i + 6435 \cos^8 i),$$

$$P_8^{(2)}(0) = -\frac{315}{16},$$

$$P_8^{(2)}(\cos i) = \frac{315}{16} (\cos^2 i - 1) (1 - 33 \cos^2 i + 143 \cos^4 i - 143 \cos^6 i),$$

$$P_8^{(4)}(0) = \frac{10375}{8}, \quad P_8^{(4)}(\cos i) = \frac{10375}{8} (\cos^2 i - 1)^2 (1 - 26 \cos^2 i + 65 \cos^4 i),$$

$$P_8^{(6)}(0) = -\frac{135135}{2}, \quad P_8^{(6)}(\cos i) = \frac{135135}{2} (\cos^2 i - 1)^3 (1 - 15 \cos^2 i),$$

$$P_8^{(8)}(0) = 2027025, \quad P_8^{(8)}(\cos i) = 2027025 (\cos^2 i - 1)^4,$$

$$\begin{aligned}
F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 10; 1; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{(1-e)^{1/2} (315e^8 + 3360e^6 + 6048e^4 + 2304e^2 + 128)}{128(e+1)^{19/2}}, \\
F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 10; -1, 3; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{55e^2 (1-e)^{1/2} (7(e^2+2)(e^2+8)e^2+32)}{128(e+1)^{19/2}}, \\
F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 10; -3, 5; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{715e^4 (1-e)^{1/2} (e^4+8e^2+8)}{128(e+1)^{19/2}}, \\
F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 10; -5, 7; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{715e^6 (1-e)^{1/2} (3e^2+14)}{128(e+1)^{19/2}}, \\
F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 10; -7, 9; \frac{2e}{e-1} \right) &= \frac{12155}{128} e^8 \sqrt{\frac{1-e}{(e+1)^{19}}}.
\end{aligned}$$

Подставляя вышеперечисленное в (A.7) и упрощая получаем:

$$\begin{aligned}
R_4^{**} &= \frac{fm_J}{268435456r_J^9} \left[\frac{175}{128} a^8 (2002366080e^8 \sin^8 i \cos 8\omega + \right. \\
&\quad + 110880e^2 (7(e^2+2)(e^2+8)e^2+32) \sin^2 i (385 \cos 2i + 286 \cos 4i + \\
&\quad + 143 \cos 6i + 210) \cos 2\omega + 31409664e^6 (3e^2+14) \sin^6 i (15 \cos 2i + 13) \cos 6\omega + \\
&\quad + 6342336e^4 (e^4+8e^2+8) \sin^4 i (156 \cos 2i + 65 \cos 4i + 99) \cos 4\omega + \\
&\quad + 7 (315e^8 + 3360e^6 + 6048e^4 + 2304e^2 + 128) (2520 \cos 2i + \\
&\quad + 2772 \cos 4i + 3432 \cos 6i + 6435 \cos 8i + 1225)) + \\
&\quad + 128a^2 r_J^2 (5a^4 (1585584e^6 \sin^6 i \cos 6\omega + \\
&\quad + 5 (7 (5 (e^2+6) e^2+24) e^2+16) (105 \cos 2i + 126 \cos 4i + 231 \cos 6i + 50) + \\
&\quad + 33264e^4 (3e^2+10) \sin^4 i (11 \cos 2i + 9) \cos 4\omega + 630e^2 (15e^4 + 80e^2 + 48) \sin^2 i \times \\
&\quad \times (60 \cos 2i + 33 \cos 4i + 35) \cos 2\omega) + 576a^2 r_J^2 (5880e^4 \sin^4 i \cos 4\omega + \\
&\quad + 560e^2 (e^2+2) \sin^2 i (7 \cos 2i + 5) \cos 2\omega + \\
&\quad + (15e^4 + 40e^2 + 8) (20 \cos 2i + 35 \cos 4i + 9)) + \\
&\quad \left. + 65536r_J^4 (30e^2 \sin^2 i \cos 2\omega + (3e^2+2) (3 \cos 2i + 1)) \right]. \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

Редуцируя и упрощая полученное выражение, аналогично хилловскому случаю, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\hat{R}_4 = \frac{fm_J}{268435456 (e^2 - 1)^4 r_J^9} & \left[2737609875a^8 e^8 (c_1 + e^2 - 1)^4 \cos 8\omega + \right. \\
& + 1225a^8 (315e^8 + 3360e^6 + 6048e^4 + 2304e^2 + 128) \times \\
& \times \left(3c_1 \left(11c_1 \left(364c_1 (e^2 - 1) + 195c_1^2 + 210 (e^2 - 1)^2 \right) + 420 (e^2 - 1)^3 \right) + \right. \\
& + 35 (e^2 - 1)^4 \left. \right) + 102400a^6 (1 - e)(e + 1) (7 (5 (e^2 + 6) e^2 + 24) e^2 + 16) \times \\
& \times \left(21c_1 \left(15c_1 (e^2 - 1) + 11c_1^2 + 5 (e^2 - 1)^2 \right) + 5 (e^2 - 1)^3 \right) r_J^2 + \\
& + 589824a^4 (e^2 - 1)^2 (15e^4 + 40e^2 + 8) \left(5c_1 (7c_1 + 6e^2 - 6) + 3 (e^2 - 1)^2 \right) r_J^4 - \\
& - 16777216a^2 (e^2 - 1)^3 (3e^2 + 2) (3c_1 + e^2 - 1) r_J^6 - 1321320e^6 (c_1 + e^2 - 1)^3 \times \\
& \times \cos 6\omega (65a^8 (3e^2 + 14) (15c_1 + e^2 - 1) - 768a^6 (e^2 - 1) r_J^2) + \\
& + 1260e^4 (c_1 + e^2 - 1)^2 \cos 4\omega \left(55055a^8 (e^4 + 8e^2 + 8) \left(26c_1 (e^2 - 1) + \right. \right. \\
& + 65c_1^2 + (e^2 - 1)^2 \left. \right) - 33792a^6 (e^2 - 1) (3e^2 + 10) (11c_1 + e^2 - 1) r_J^2 + \\
& + 344064a^4 (e^2 - 1)^2 r_J^4 \left. \right) + 120a^2 e^2 (-c_1 - e^2 + 1) \cos 2\omega \times \\
& \times \left(40425a^6 (7 (e^2 + 2) (e^2 + 8) e^2 + 32) \times \right. \\
& \times \left(11c_1 \left(13c_1 (c_1 + e^2 - 1) + 3 (e^2 - 1)^2 \right) + (e^2 - 1)^3 \right) - \\
& - 26880a^4 (e^2 - 1) (15e^4 + 80e^2 + 48) \left(3c_1 (11c_1 + 6e^2 - 6) + (e^2 - 1)^2 \right) r_J^2 + \\
& \left. + 688128a^2 (e^2 - 1)^2 (e^2 + 2) (7c_1 + e^2 - 1) r_J^4 - 2097152 (e^2 - 1)^3 r_J^6 \right) \left. \right]. \quad (\text{A.9})
\end{aligned}$$