

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Денискина Галина Юрьевна

**МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА 3D-ПЕЧАТИ
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ
МАТЕРИАЛОВ**

2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика
(физико-математические науки)

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
Битюков Юрий Иванович
доктор технических наук, доцент

Москва – 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ..... | 4 |
| 1 ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ВЫБОРА СХЕМЫ 3D-ПЕЧАТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ | 13 |
| 1.1 Элементы механики конструкций из композиционных материалов | 14 |
| 1.2 Построение криволинейной системы координат в двумерном случае..... | 23 |
| 1.3 Постановка задачи оптимизации изготовления функциональных объектов методом 3D-печати..... | 33 |
| Выводы по главе 1..... | 35 |
| 2 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА..... | 36 |
| 2.1 Вейвлет-системы на отрезке на основе В-сплайна произвольного порядка..... | 37 |
| 2.2 Вейвлеты на прямоугольнике и их использование в поверхностном моделировании | 41 |
| 2.3 Вейвлеты на n-мерном параллелепипеде | 44 |
| 2.4 Вычислительные алгоритмы для локально-аппроксимационных сплайнов, основанные на вейвлет-преобразовании и свёртке | 46 |
| 2.5 Схемы подразделений | 56 |
| 2.6 Кратномасштабный анализ..... | 59 |
| 2.7 Схема подъёма | 62 |
| 2.8 Ленивые вейвлеты | 62 |
| 2.9 Алгоритм вычисления значений масштабирующих функций..... | 65 |
| 2.10 Примеры вейвлет-систем, полученных с использованием схемы подъёма..... | 68 |
| Выводы по главе 2..... | 72 |
| 3 ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ..... | 73 |
| 3.1 Вейвлеты на триангулируемом пространстве с конечным множеством симплексов..... | 73 |
| 3.2 Построение аппроксимации гомеоморфизма областей в \mathbf{R}^n | 75 |
| 3.3 Алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и вейвлетов на X | 80 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 3.4 | Вейвлет-система на двумерной области | 81 |
| 3.5 | Использование вейвлетов в приближенном решении уравнений в частных производных | 86 |
| 3.6 | Примеры использования вейвлетов в приближенном решении уравнений в частных производных | 87 |
| 3.7 | Применение вейвлетов в задачах теории упругости | 92 |
| 3.7.1 | Элементы теории упругости | 93 |
| 3.7.2 | Решение задач теории упругости | 96 |
| 3.7.3 | Плоская задача теории упругости | 97 |
| 3.8 | Эксперимент. Растяжение прямоугольной пластины с отверстием | 104 |
| | Выводы по главе 3 | 106 |
| 4 | ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА 3D-ПЕЧАТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ..... | 107 |
| 4.1 | Постановка задачи программной реализации | 107 |
| 4.2 | Основные характеристики программного комплекса | 107 |
| 4.3 | Описание классов, составляющих основу программного комплекса..... | 113 |
| 4.3.1 | Класс CKonform..... | 113 |
| 4.3.2 | Класс CDiffeomorphism | 115 |
| 4.3.3 | Класс CWavelets | 115 |
| 4.3.4 | Класс Ccae | 120 |
| | Выводы по главе 4..... | 122 |
| | ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 123 |
| | СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ..... | 126 |
| | СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... | 128 |
| | ПРИЛОЖЕНИЕ А Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD (подсистема CAD) | 137 |
| | ПРИЛОЖЕНИЕ Б Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD (подсистема CAE)..... | 138 |

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования.

Реализация приоритетных направлений развития российской экономики, цифровая трансформация производства, совершенствование и разработка новых конструкций, применяемых на отечественных высокотехнологичных предприятиях авиационной и ракетно-космической отрасли, энергетики, машиностроения и других, в значительной мере связано с использованием полимерных композиционных материалов (КМ), которые, как известно, обеспечивают оптимальные физико-механические характеристики конструкций (функциональных объектов): лёгкость, прочность, антикоррозийность, кислотостойкость и др. При этом требуется разработка проблемно-ориентированных систем управления и оптимизации процессов изготовления таких объектов из КМ методами аддитивного производства (3D-печати).

Армированные композиты неоднородны и состоят из двух или более компонентов, которыми являются: армирующие элементы, обеспечивающие необходимые механические характеристики; матрица (связующее), обеспечивающая совместную работу армирующих элементов.

В качестве армирующих элементов широкое применение находят углеродные волокна, т.к. они обладают большой удельной прочностью. Механические свойства изделий из КМ существенно зависят от направления волокон. Одним из перспективных направлений изготовления объектов из КМ, позволяющим создавать конструкции сложной формы последовательной укладкой, является технология 3D-печати. Применение 3D-печати в технологии композитов в принципе позволяет получать конструкции с пространственным армированием по заданным траекториям. Это связано с тем, что для печати используется полимерный композит, армированный непрерывным углеродным волокном (CFRT), в отличие от полимеров с наполнителем из коротких углеродных частиц (SFRT). При использовании 3D-печати возможен полный контроль над

расположением волокон во время процесса печати, что позволяет располагать 100% волокон в соответствии с требуемыми условиями эксплуатации изделия.

Технология печати CFRT имеет ряд преимуществ, в первую очередь связанных со значительным улучшением механических свойств образцов, с возможностью вторичной переработки, а также сравнительно низкой стоимостью.

Однако практически неисследованными являются вопросы, связанные с оптимизацией процесса 3D-печати функциональных объектов из КМ методом 3D-печати CFRT в части контроля расположения волокон при печати, позволяющих учитывать критерии разрушения композита.

Степень разработанности темы исследования.

Известно, что схема укладки волокна заложена в самих уравнениях механики КМ в виде некоторой (неизвестной) локальной ортогональной системы координат. То есть найти оптимальную схему можно только из решения уравнений с разными локальными системами координат.

Традиционно схемы укладки волокон рассчитываются численными методами, главным недостатком которых является большой объём и трудоёмкость вычислительного процесса. В диссертации предлагается схемы укладки волокон при печати моделировать с помощью аналитических функций, которые находятся из задачи Неймана для уравнения Лапласа. Работа базируется на научно-технологических решениях исследователей Yamanaka Y., Todoroki A., Ueda M., Hirano Y., Matsuzaki R., которые предложили укладывать волокна по линиям тока несжимаемой жидкости [60].

Для выбора оптимальной схемы печати в качестве целевой функции можно взять любой из критериев разрушения композиционного материала.

Краевые условия для задачи Неймана строятся на основе задания углов между волокнами и границей области печати. Сама задача Неймана решается посредством конформного преобразования области печати на круг, которое задаётся с помощью формулы Чизотти. Таким образом, критерий разрушения композита становится функцией от углов, образуемых волокнами с границей области печати. Минимизация целевой функции осуществляется с помощью генетического

алгоритма поиска глобального минимума функции нескольких переменных. Для приближённого решения уравнений механики композиционных материалов в диссертационной работе предлагается использовать вейвлеты, построенные на основе схем подразделений и подъёма. Применению вейвлетов в различных дисциплинах посвящены многочисленные исследования, в первую очередь таких авторов, как Amati G., Вujurke N., Daubechies I., Lepik, U., Mallat S., Micchelli C.A., Stollnitz E.J., Sweldens W. [32, 39, 42 – 55, 63 – 67, 69 –74, 76, 84, 86, 87] и др. Преимущество вейвлетов перед другими базисными функциями состоит в том, что вейвлет-коэффициенты убывают быстро, поэтому достаточно небольшого числа слагаемых в разложениях. Дополнительное преимущество вейвлетов, использующих схемы подразделений и подъёма состоит в возможности управлять формой и гладкостью базисных функций, например, можно обнулять их на выбранной области, что ещё уменьшает число слагаемых в разложении. Эти преимущества оказываются важны, т.к. при минимизации целевой функции требуется многократно решать систему уравнений в частных производных, описывающую напряжённо-деформируемое состояние конструкции.

Общая схема решения задачи выбора оптимальной схемы 3D-печати функциональных объектов из полимерных КМ, армированных непрерывным углеродным волокном, в части контроля расположения волокон представлена на рис. В.1.

Целевая функция = критерий разрушения композита → \min

Углы, которые волокна образуют с границей области печати

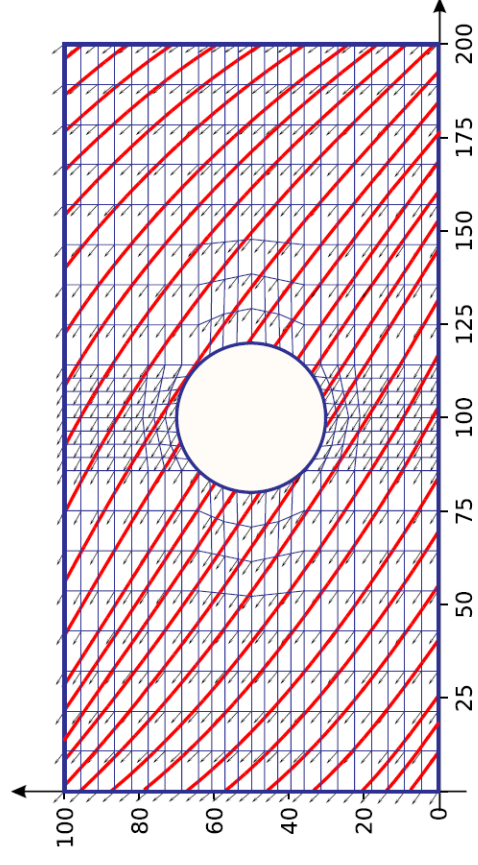
Функция от компонент тензора напряжений (нет возможности минимизировать в таком виде).
Требуете другое представление критерия)

Находятся из уравнений механики тонкостенных композитных систем (25 уравнений, 25 неизвестных), в которых заложена геометрия укладки композитных волокон в виде координатного преобразования $u(x,y), v(x,y)$

Функции $u(x,y), v(x,y)$ будем рассматривать, как действительную и мнимую части аналитической функции в области

Задавать такую функцию будем с помощью условий на границе области, которые представляют собой углы, образуемые волокнами с границей области. Тогда функцию $u(x,y)$ найдем из задачи Неймана для уравнения Лапласа

Итог: целевая функция - это функция определенной на многомерном параллелепипеде (глава 1).
(Есть возможность минимизировать)



Предполагаем, что векторное поле касательных векторов к кривым укладки волокна - гармоническое (потенциальное и соленоидальное). Поэтому аналитическая функция задает координатное преобразование

Решение уравнений теории упругости (главы 2, 3)

Используют метод конечных элементов

Будем использовать МНК или коллокаций, где базисные функции - это вейвлеты, построенные через схемы подразделений и схему подъема

Возможность строить базис в $L_2(X)$ с заданными свойствами

Гладкость на границе функций области

Есть возможность управлять скоростью убывания вейвлет-коэффициентов

Есть возможность управлять количеством слагаемых в разложении

Рис. В.1 – Общая схема решения задачи выбора оптимальной схемы печати

Цели и задачи исследования.

Цель – разработка методов и алгоритмов оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. Достижение поставленной цели предполагает постановку задачи оптимизации с целевой функцией в виде критерия разрушения композиционного материала.

Для достижения цели необходимо решить следующие задачи:

1. Поставить задачу оптимизации нахождения траекторий укладки волокон на основе критерия разрушения композиционного материала.
2. Разработать математическую модель укладки волокон и метод нахождения оптимальной схемы печати.
3. Проанализировать и обобщить подходы к построению биортогональных вейвлет-систем.
4. Разработать численный метод решения уравнений механики композиционных материалов с использованием вейвлетов, построенных на основе схем подъёма и подразделений.
5. Выполнить программную реализацию разработанных методов и алгоритмов оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов.

Объект и предмет исследования.

Объектом исследования является задача оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов с целевой функцией в виде критерия разрушения композиционного материала. Предметом исследования являются методы и алгоритмы решения задачи с использованием вейвлет-систем и уравнений механики композиционных материалов.

Научная новизна исследования.

Научная новизна исследования заключается в разработке специального математического и алгоритмического обеспечения решения задачи оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов из полимерных композиционных материалов.

В процессе исследований получены следующие научные результаты:

1. Поставлена задача оптимизации процесса 3D-печати функционального объекта из полимерного композиционного материала.

2. Разработана математическая модель управления укладкой волокон при 3D-печати объектов из композиционных материалов. В рамках этой модели траектории укладки волокон получаются с помощью аналитических функций, краевые условия для которых – это углы, образуемые волокнами с границей области печати. Предложен метод нахождения оптимальной схемы 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. В оптимизационной задаче критерий разрушения композиционного материала представлен, как функция нескольких переменных, которыми являются углы, образуемые волокнами с границей области печати.

3. Разработан численный метод решения уравнений механики композиционных материалов, описывающих напряжённо-деформированное состояние конструкции, основанный на вейвлетах, построенных с помощью схем подразделений и подъёма. Разработан новый алгоритм вычисления значений таких вейвлетов на основе операции свёртки последовательностей. Данный алгоритм позволяет организовать параллельные вычисления значений базисных функций.

4. Разработаны алгоритмы и программный комплекс управления и оптимизации процесса 3D-печати объекта, в которых реализована возможность нахождения оптимальной схемы печати, диктуемой условиями его эксплуатации.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая значимость. Решена задача оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов, представляющих собой функциональные конструкции из композиционных материалов, с целевой функцией в виде критерия разрушения материала. Разработано математическое обеспечение проблемно-ориентированной системы управления моделированием и нахождением оптимальных траекторий укладки волокон при 3D-печати. Отличительной особенностью предложенного подхода является моделирование траекторий укладки волокон с помощью аналитических функций и использование биортогональных вейвлетов,

построенных на основе схем подъёма и подразделений, в качестве инструмента решения уравнений механики композиционных материалов. Доказаны необходимые теоремы, и формально исследованы свойства разработанных алгоритмов.

Практическая значимость. Разработаны алгоритмы и программное обеспечение, реализующие предложенные методы оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов, в т.ч. направленные также на сокращение объёмов и трудоёмкости вычислительных операций. С практической точки зрения полученные результаты могут быть использованы в авиационной, ракетно-космической и других высокотехнологичных отраслях промышленности в рамках фундаментальной концепции проектирования нового поколения, охватывающей последовательно все стадии процесса проектирования объекта: реверс-инжиниринг, конвергентное моделирование, генеративное проектирование и аддитивное производство.

По результатам выполнения диссертационной работы получены два свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ: «Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD (подсистема CAD)» (Приложение А) и «Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD (подсистема CAE)» (Приложение Б). Результаты диссертационной работы предложено использовать в АО «Национальный центр вертолестроения им. М. Л. Миля и Н.И. Камова» при выполнении проектно-исследовательских работ по созданию вертолетной техники.

Методология и методы исследования.

В диссертационной работе использован математический аппарат теории функций комплексного переменного, теории оптимизации, вейвлет-анализа, механики композиционных материалов, численные методы. Для разработки программного комплекса применялся язык программирования Python© с использованием библиотек TensorFlow©, SciPy©, Matplotlib©.

Положения, выносимые на защиту.

1. Постановка задачи оптимизации процесса 3D-печати функционального объекта из полимерного композиционного материала. Метод и вычислительный алгоритм нахождения значений критерия разрушения композиционного материала по заданным углам, основанный на конформных преобразованиях и вейвлет-преобразовании, как целевой функции задачи оптимизации.

2. Математическая модель управления процессом укладки волокон и метод нахождения оптимальных траекторий укладки при 3D-печати объектов.

3. Обобщение понятия локально-аппроксимационного сплайна, оценки погрешности аппроксимации таким сплайном гладкой функции. Формулы для нахождения значений локально аппроксимационных сплайнов и их производных в узлах сетки, основанные на свёртке.

4. Алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и их частных производных, а также вейвлетов, построенных на основе схем подразделений и подъёма, основанный на преобразовании свёртки.

5. Метод построения биортогональных вейвлет-систем, полученных по схеме подъёма, на триангулируемых пространствах с конечным множеством симплексов. Алгоритм нахождения значений масштабирующих функций, а также их производных, и вейвлетов на триангулируемом пространстве, основанный на преобразовании свёртки.

6. Метод применения биортогональных вейвлет-систем к приближённому решению дифференциальных уравнений в частных производных, в частности применение таких алгоритмов к приближённому решению уравнений теории упругости.

7. Алгоритмы и программный комплекс управления и оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов.

Степень достоверности и апробация результатов.

Разработанные алгоритмы имеют строгое математическое обоснование. Приближённые решения академических примеров, полученные приближёнными

методами, совпадают с аналитическими решениями. Приближённое решение прикладной задачи полностью отвечает физическим представлениям.

Результаты диссертационной работы докладывались на следующих научных конференциях: XLVI Международной молодёжной научной конференции «Гагаринские чтения – 2020» (г. Москва, 2020 г.), 19-й Международной конференции «Авиация и космонавтика» (г. Москва, 2020 г.), 6-й Международной научно-технической конференции (г. Курск, 2018 г.), Международной конференции «Современные проблемы экономики и качества в аэрокосмической промышленности» (г. Москва, 2018 г.), Международной конференции «Современные проблемы экономики и качества в аэрокосмической промышленности» (г. Москва, 2021 г.), научных семинарах кафедры теории вероятностей и компьютерного моделирования ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (2022, 2023 гг., под руководством д.ф.-м.н., профессора Кибзуна А.И.).

Публикации. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, в том числе 10 публикаций в рецензируемых научных изданиях (5 – в изданиях, входящих в МСЦ Scopus, Web of Science; 3 – в изданиях из перечня ВАК; 2 свидетельства о государственной регистрации программы для ЭВМ).

Личный вклад автора. Все выносимые на защиту результаты получены автором лично.

Структура и объём работы.

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка литературы из 95 наименований, 2 Приложений. Работа изложена на 138 страницах, содержит 41 иллюстрацию и 1 таблицу.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности.

Основные результаты, полученные в диссертации, составляющие научную новизну и выносимые на защиту, соответствуют направлениям исследований (п.п. 3, 4, 5, 9) паспорта научной специальности 2.3.1. «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика» (физико-математические науки).

1 ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ ВЫБОРА СХЕМЫ 3D-ПЕЧАТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Как было отмечено во введении актуальным направлением исследований является разработка методов и алгоритмов оптимизации процесса 3D-печати объектов (функциональных конструкционных изделий) из КМ методом 3D-печати в части контроля расположения волокон при печати, позволяющих учитывать критерии разрушения композита.

В 2016 г. учёные Токийского технологического института провели исследовательскую работу о использовании основных концепций и закономерностей разрушения композитов в вычислительном подходе для оптимизации ориентации волокон при проектировании и изготовлении лёгких и прочных пластин из волокнистых полимерных композитов [60, 88]. В этих работах сделан вывод, что траектории укладки нитей следует осуществлять по линиям тока несжимаемой жидкости (рис. 1.1).

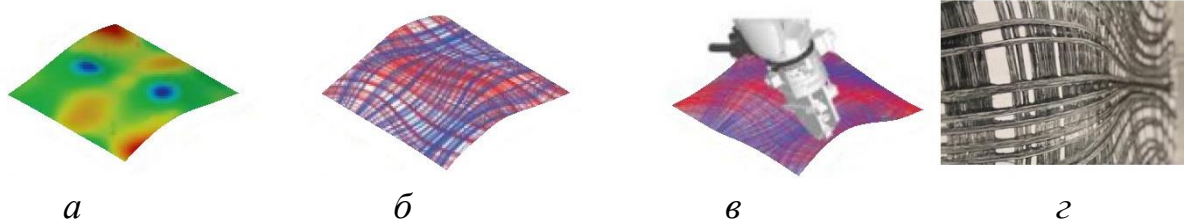


Рис. 1.1 – Этапы нахождения траекторий укладки волокон КМ:
а – расчёт прочности, *б* – расчёт траекторий, *в* – 3D-печать, *г* – результат

В данной главе ставится оптимизационная задача выбора схемы 3D-печати функциональных объектов из термопластичных композиционных материалов, армированных непрерывным углеродным волокном (CFRT – Continuous Fiber Reinforced Thermoplastic, англ.) в рамках разрабатываемой математической модели укладки волокна в процессе печати. Предлагается метод нахождения значений критерия разрушения композиционного материала как целевой функции задачи оптимизации.

1.1 Элементы механики конструкций из композиционных материалов

В разделе представлены уравнения теории упругости ортотропной среды¹, которые позволяют описать напряжённо-деформированное состояние широкого класса композитных систем [6].

Введём декартову систему координат O, x_1, x_2, x_3 и связанную с рассматриваемой средой ортогональную систему криволинейных координат O', v_1, v_2, v_3 . Пусть соответствие между декартовой и криволинейной системами задаётся с помощью преобразования

$$\begin{cases} x_1 = x_1(v_1, v_2, v_3), \\ x_2 = x_2(v_1, v_2, v_3), \\ x_3 = x_3(v_1, v_2, v_3). \end{cases} \quad (1.1)$$

Обратное к (1.1) преобразование пусть задано в виде

$$\begin{cases} v_1 = v_1(x_1, x_2, x_3), \\ v_2 = v_2(x_1, x_2, x_3), \\ v_3 = v_3(x_1, x_2, x_3). \end{cases} \quad (1.2)$$

Обозначим

$$H_i^2 = (\partial_i x_1)^2 + (\partial_i x_2)^2 + (\partial_i x_3)^2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.3)$$

параметры Ламе для принятой системы координат O', v_1, v_2, v_3 .

Напряжённое состояние в какой-либо точке M сплошного трёхмерного тела, как известно, характеризуется тензором напряжений, который определяется девятью компонентами. Из этих компонентов три являются нормальными напряжениями, которые действуют по трём взаимно перпендикулярным

¹ Тело называется изотропным, если его упругие свойства одинаковы по всем направлениям. Такие тела изучаются линейной теорией упругости. Упругое тело называется анизотропным, если его упругие свойства различны в различных направлениях. Если в анизотропном теле его упругие свойства идентичны в любых двух направлениях, симметричных относительно некоторой плоскости, то такая плоскость называется плоскостью упругой симметрии. Тело называется ортотропным, если оно обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями упругой симметрии.

направлениям координатных линий $O'v_i$, $i = 1, 2, 3$ и шесть – касательными напряжениями (рис. 1.2), действующими в трёх взаимно перпендикулярных плоскостях, являющихся касательными плоскостями в точке M к трём взаимно перпендикулярным координатным поверхностям $v_1 = const$, $v_2 = const$, $v_3 = const$.

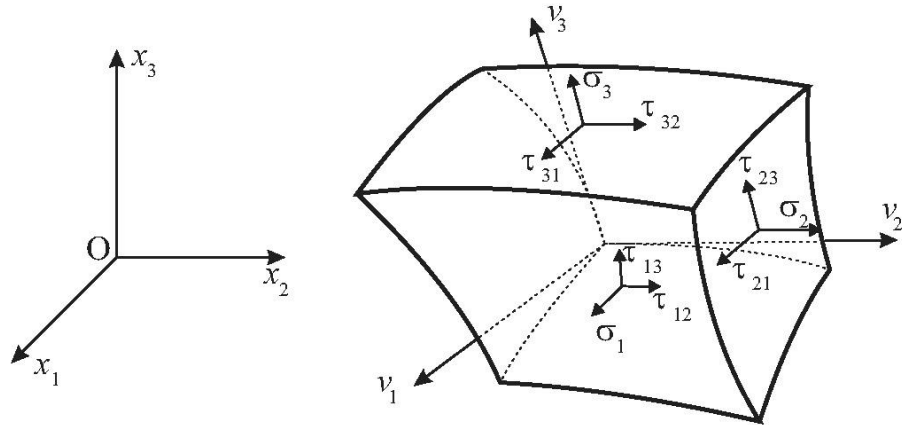


Рис. 1.2 – Элемент сплошной среды, отнесённый к декартовой системе координат O, x_1, x_2, x_3 и криволинейной системе O', v_1, v_2, v_3

Уравнения равновесия, связывающие напряжения, действующие по граням выделенного из среды элемента и объёмные силы

$$F = (F_1(v_1, v_2, v_3) \quad F_2(v_1, v_2, v_3) \quad F_3(v_1, v_2, v_3))$$

имеют вид [6]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_1}(H_2 H_3 \sigma_1) + \frac{\partial}{\partial v_2}(H_1 H_3 \tau_{12}) + \frac{\partial}{\partial v_3}(H_1 H_2 \tau_{13}) - \sigma_2 H_3 \frac{\partial H_2}{\partial v_1} - \\ - \sigma_3 H_2 \frac{\partial H_3}{\partial v_1} + \tau_{12} H_3 \frac{\partial H_1}{\partial v_2} + \tau_{13} H_2 \frac{\partial H_1}{\partial v_3} + F_1 H_1 H_2 H_3 = 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_2}(H_1 H_3 \sigma_2) + \frac{\partial}{\partial v_3}(H_1 H_2 \tau_{23}) + \frac{\partial}{\partial v_1}(H_2 H_3 \tau_{12}) - \sigma_3 H_1 \frac{\partial H_3}{\partial v_2} - \\ - \sigma_1 H_3 \frac{\partial H_1}{\partial v_2} + \tau_{23} H_1 \frac{\partial H_2}{\partial v_3} + \tau_{12} H_3 \frac{\partial H_2}{\partial v_1} + F_2 H_1 H_2 H_3 = 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v_3}(H_1 H_2 \sigma_3) + \frac{\partial}{\partial v_1}(H_3 H_2 \tau_{13}) + \frac{\partial}{\partial v_2}(H_1 H_3 \tau_{23}) - \sigma_1 H_2 \frac{\partial H_1}{\partial v_3} - \\ - \sigma_2 H_1 \frac{\partial H_2}{\partial v_3} + \tau_{13} H_2 \frac{\partial H_3}{\partial v_1} + \tau_{23} H_1 \frac{\partial H_3}{\partial v_2} + F_3 H_1 H_2 H_3 = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Касательные напряжения обладают свойством парности $\tau_{i,k} = \tau_{k,i}$. В криволинейно ортотропной среде, оси которой совпадают с координатными линиями v_1, v_2, v_3 нормальные напряжения вызывают удлинения [6]

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \mu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2} - \mu_{13} \frac{\sigma_3}{E_3}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \mu_{23} \frac{\sigma_3}{E_3} - \mu_{21} \frac{\sigma_1}{E_1}, \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E_3} \sigma_3 - \mu_{31} \frac{\sigma_1}{E_1} - \mu_{32} \frac{\sigma_2}{E_2}, \end{cases} \quad (1.7)$$

а касательные напряжения – деформации сдвига [6]

$$\begin{cases} \varepsilon_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}, \\ \varepsilon_{23} = \frac{\tau_{23}}{G_{23}}, \\ \varepsilon_{31} = \frac{\tau_{31}}{G_{31}}. \end{cases} \quad (1.8)$$

Здесь имеют место условия симметрии упругих постоянных [6]

$$\begin{cases} \mu_{12} E_1 = \mu_{21} E_2; \\ \mu_{23} E_2 = \mu_{32} E_3; \\ \mu_{31} E_3 = \mu_{13} E_1. \end{cases} \quad (1.9)$$

Нормальные и сдвиговые деформации связаны с перемещениями ξ_1, ξ_2, ξ_3 вдоль соответствующих координатных линий геометрическими соотношениями [6]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{1}{H_1} \partial_1 \xi_1 + \partial_2 H_1 \frac{\xi_2}{H_1 H_2} + \partial_3 H_1 \frac{\xi_3}{H_1 H_3}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{H_2} \partial_2 \xi_2 + \partial_3 H_2 \frac{\xi_3}{H_2 H_3} + \partial_1 H_2 \frac{\xi_1}{H_2 H_1}, \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{H_3} \partial_3 \xi_3 + \partial_1 H_3 \frac{\xi_1}{H_3 H_1} + \partial_2 H_3 \frac{\xi_2}{H_3 H_2}, \\ \varepsilon_{12} = \frac{H_1}{H_2} \partial_2 \left(\frac{\xi_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \partial_1 \left(\frac{\xi_2}{H_2} \right), \\ \varepsilon_{23} = \frac{H_2}{H_3} \partial_3 \left(\frac{\xi_2}{H_2} \right) + \frac{H_3}{H_2} \partial_2 \left(\frac{\xi_3}{H_3} \right), \\ \varepsilon_{31} = \frac{H_3}{H_1} \partial_1 \left(\frac{\xi_3}{H_3} \right) + \frac{H_1}{H_3} \partial_3 \left(\frac{\xi_1}{H_1} \right). \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Равенства (1.4) – (1.8) и (1.10) образуют полную систему уравнений теории упругости в ортогональных криволинейных координатах. Решение этих уравнений должно удовлетворять граничным условиям, заданным на поверхности тела. Геометрические граничные условия накладываются непосредственно на перемещения ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Статические граничные условия, определяющие характер нагружения тела поверхностными силами, записываются следующим способом

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 n_1 + \tau_{12} n_2 + \tau_{13} n_3 = F_{n,1}, \\ \sigma_2 n_2 + \tau_{23} n_3 + \tau_{21} n_1 = F_{n,2}, \\ \sigma_3 n_3 + \tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2 = F_{n,3}, \end{array} \right. \quad (1.11)$$

где n – нормаль к границе тела, а n_i – косинус угла между нормалью и осью $O'v_i$.

Уравнения механики тонкостенных композитных систем.

Рассмотрим некоторый элемент слоистого материала отнесённый к ортогональной системе криволинейных координат v_1, v_2, v_3 (рис. 1.3).

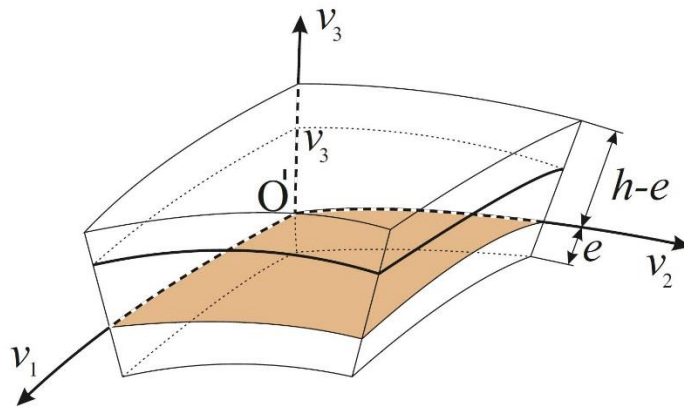


Рис. 1.3 – Элемент слоистого материала

При этом ось $O'v_1$ совпадает с направлением волокна, ось $O'v_3$ ортогональна некоторой заданной начальной поверхности $v_3 = 0$. Обозначим $A_1(v_1, v_2) = H_1(v_1, v_2, 0)$, $A_2(v_1, v_2) = H_2(v_1, v_2, 0)$ – коэффициенты первой квадратичной формы начальной поверхности. Тогда, если R_1, R_2 – главные радиусы кривизны начальной поверхности, тогда коэффициенты Ламе вычисляются по формулам [6]

$$H_i = A_i \left(1 + \frac{v_3}{R_i} \right), \quad H_3 = 1.$$

Будем считать, что материал не деформируется в направлении оси $O'v_3$. Таким образом, изменение толщины h материала не учитывается. Поэтому $\varepsilon_3 = 0$ и $\mu_{31} = \mu_{32} = 0$, $E_3 = \infty$. Следовательно, на основании этой гипотезы, получаем [6]

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E_1} \sigma_1 - \mu_{12} \frac{\sigma_2}{E_2}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E_2} \sigma_2 - \mu_{21} \frac{\sigma_1}{E_1} \end{cases} \quad (1.12)$$

Выражая из (1.12) и (1.8) напряжения, получим

$$\begin{cases} \sigma_1 = a_{11} \varepsilon_1 + a_{12} \varepsilon_2; \\ \sigma_2 = a_{21} \varepsilon_1 + a_{22} \varepsilon_2; \\ \tau_{12} = a_{33} \varepsilon_{12}, \end{cases} \quad (1.13)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{E_1}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; & a_{12} &= \frac{E_1\mu_{12}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; & a_{21} &= \frac{E_2\mu_{21}}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}; \\ a_{22} &= \frac{E_2}{1 - \mu_{12}\mu_{21}}, & a_{33} &= G_{12}. \end{aligned}$$

Уравнения (1.10) примут вид [6]

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \frac{1}{H_1} \partial_1 \xi_1 + \partial_2 H_1 \frac{\xi_2}{H_1 H_2}, \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{H_2} \partial_2 \xi_2 + \partial_1 H_2 \frac{\xi_1}{H_2 H_1}, \\ \varepsilon_3 = \partial_3 \xi_3 = 0, \\ \varepsilon_{12} = \frac{H_1}{H_2} \partial_2 \left(\frac{\xi_1}{H_1} \right) + \frac{H_2}{H_1} \partial_1 \left(\frac{\xi_2}{H_2} \right), \\ \varepsilon_{23} = H_2 \partial_3 \left(\frac{\xi_2}{H_2} \right) + \frac{1}{H_2} \partial_2 (\xi_3), \\ \varepsilon_{31} = \frac{1}{H_1} \partial_1 (\xi_3) + H_1 \partial_3 \left(\frac{\xi_1}{H_1} \right). \end{array} \right. \quad (1.14)$$

Отсюда получаем $\xi_3 = \xi_3(v_1, v_2)$. В равенствах для ε_{23} и ε_{31} осредним деформацию сдвига по толщине материала

$$t_1 = \frac{1}{hA_1} \int_{-e}^{h-e} \varepsilon_{1,3} H_1 dv_3 = \frac{1}{hA_1} \int_{-e}^{h-e} \frac{\tau_{13}}{G_{13}} H_1 dv_3,$$

$$t_2 = \frac{1}{hA_2} \int_{-e}^{h-e} \varepsilon_{2,3} H_2 dv_3 = \frac{1}{hA_2} \int_{-e}^{h-e} \frac{\tau_{23}}{G_{23}} H_2 dv_3.$$

Тогда распределение перемещений по толщине материала выражается следующими формулами

$$\xi_i = \xi_{i,0}(v_1, v_2) + v_3 \theta_i(v_1, v_2), \quad i = 1, 2,$$

где $\theta_i = t_i + \frac{\xi_{i,0}}{R_i} - \frac{1}{A_i} \partial_i \xi_3$,

$\xi_{i,0}(v_1, v_2)$ – перемещения точек начальной поверхности в направлении v_i .

Обозначим

$$N_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \sigma_1 H_2 dv_3, \quad N_2 = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \sigma_2 H_1 dv_3;$$

$$N_{12} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{12} H_2 dv_3, \quad N_{21} = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \tau_{21} H_1 dv_3;$$

$$M_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \sigma_1 H_2 v_3 dv_3, \quad M_2 = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \sigma_2 H_1 v_3 dv_3;$$

$$M_{12} = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{12} H_2 v_3 dv_3, \quad M_{21} = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \tau_{21} H_1 v_3 dv_3.$$

Кроме этого, пусть

$$K_{12} = \frac{A_1 H_2}{A_2 H_1}; \quad K_{21} = \frac{A_2 H_1}{A_1 H_2};$$

$$\begin{aligned} B_{11} &= \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{11} dv_3; & C_{11} &= \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{11} v_3 dv_3; & D_{11} &= \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{11} v_3^2 dv_3; \\ B_{12} = B_{21} &= \int_{-e}^{h-e} a_{12} dv_3; & C_{12} = C_{21} &= \int_{-e}^{h-e} a_{12} v_3 dv_3; & D_{12} = D_{21} &= \int_{-e}^{h-e} a_{12} v_3^2 dv_3; \\ B_{33}^{11} &= \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{33} dv_3; & C_{33}^{11} &= \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{33} v_3 dv_3; & D_{33}^{11} &= \int_{-e}^{h-e} K_{12} a_{33} v_3^2 dv_3; \\ B_{33}^{12} = B_{33}^{21} &= \int_{-e}^{h-e} a_{33} dv_3; & C_{33}^{12} = C_{33}^{21} &= \int_{-e}^{h-e} a_{33} v_3 dv_3; & D_{33}^{12} = D_{33}^{21} &= \int_{-e}^{h-e} a_{33} v_3^2 dv_3; \end{aligned}$$

$$K_1 = \frac{h^2}{\int_{-e}^{h-e} \frac{K_{21}}{G_{13}} dv_3}; \quad K_2 = \frac{h^2}{\int_{-e}^{h-e} \frac{K_{12}}{G_{23}} dv_3}.$$

Эти выражения определяют мембранные B , изгибные D и смешанные C жесткости материала. Пусть

$$Q_1 = \frac{1}{A_2} \int_{-e}^{h-e} \tau_{13} H_2 dv_3; \quad Q_2 = \frac{1}{A_1} \int_{-e}^{h-e} \tau_{23} H_1 dv_3$$

и статические граничные условия на внутренней и внешней поверхностях композитной стенки имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau_{13} &= -p_1; \quad \tau_{23} = -p_2; \quad \sigma_3 = -p, \quad \text{при } v_3 = -e; \\ \tau_{13} &= q_1; \quad \tau_{23} = q_2; \quad \sigma_3 = -q, \quad \text{при } v_3 = h - e. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1 \left(1 - \frac{e}{R_1}\right); \quad B_2 = A_2 \left(1 - \frac{e}{R_2}\right); \\ C_1 &= A_1 \left(1 + \frac{h-e}{R_1}\right); \quad C_2 = A_2 \left(1 + \frac{h-e}{R_2}\right). \end{aligned}$$

$$g_i = \int_{-e}^{h-e} F_i H_1 H_2 dv_3 + B_1 B_2 p_i + C_1 C_2 q_i; \quad i = 1, 2;$$

$$g_3 = \int_{-e}^{h-e} F_3 H_1 H_2 dv_3 + B_1 B_2 p - C_1 C_2 q;$$

$$m_i = \int_{-e}^{h-e} F_i H_1 H_2 v_3 dv_3 - e B_1 B_2 p_i + (h - e) C_1 C_2 q_i, \quad i = 1, 2.$$

Полная система уравнений относительно усилий, моментов, деформаций и перемещений имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \partial_1(A_2 N_1) - N_2 \partial_1(A_2) + \partial_2(A_1 N_{21}) + N_{12} \partial_2(A_1) + \frac{A_1 A_2}{R_1} Q_1 + g_1 &= 0; \\ \partial_2(A_1 N_2) - N_1 \partial_2(A_1) + \partial_1(A_2 N_{12}) + N_{21} \partial_1(A_2) + \frac{A_1 A_2}{R_2} Q_2 + g_2 &= 0; \\ \partial_1(A_2 M_1) - M_2 \partial_1(A_2) + \partial_2(A_1 M_{21}) + M_{12} \partial_2(A_1) - A_1 A_2 Q_1 + m_1 &= 0; \\ \partial_2(A_1 M_2) - M_1 \partial_2(A_1) + \partial_1(A_2 M_{12}) + M_{21} \partial_1(A_2) - A_1 A_2 Q_2 + m_2 &= 0; \\ \partial_1(A_2 Q_1) + \partial_2(A_1 Q_2) - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} \right) + g_3 &= 0 \\ N_1 &= B_{11} \varepsilon_1 + B_{12} \varepsilon_2 + C_{11} \kappa_1 + C_{12} \kappa_2 \\ N_2 &= B_{22} \varepsilon_2 + B_{21} \varepsilon_1 + C_{22} \kappa_2 + C_{21} \kappa_1 \\ M_1 &= C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + D_{11} \kappa_1 + D_{12} \kappa_2 \\ M_2 &= C_{22} \varepsilon_2 + C_{21} \varepsilon_1 + D_{22} \kappa_2 + D_{21} \kappa_1 \\ N_{12} &= B_{33}^{11} \varepsilon_{12} + B_{33}^{12} \varepsilon_{21} + C_{33}^{11} \kappa_{12} + C_{33}^{12} \kappa_{21} \\ N_{21} &= B_{33}^{21} \varepsilon_{21} + B_{33}^{22} \varepsilon_{12} + C_{33}^{21} \kappa_{21} + C_{33}^{22} \kappa_{12} \\ M_{12} &= C_{33}^{11} \varepsilon_{12} + C_{33}^{12} \varepsilon_{21} + D_{33}^{11} \kappa_{12} + D_{33}^{12} \kappa_{21} \\ M_{21} &= C_{33}^{21} \varepsilon_{21} + C_{33}^{22} \varepsilon_{12} + D_{33}^{21} \kappa_{21} + D_{33}^{22} \kappa_{12} \\ Q_1 &= K_1 t_1; \quad Q_2 = K_2 t_2 \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{1,0} + \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_2(A_1) + \frac{\xi_3}{R_1}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{2,0} + \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_1(A_2) + \frac{\xi_3}{R_2}; \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{2,0} - \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_2(A_1); \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{1,0} - \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_1(A_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_1 + \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_2 + \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_2 - \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_1 - \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \\ t_1 &= \theta_1 - \frac{\xi_{1,0}}{R_1} + \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_3, \quad t_2 = \theta_2 - \frac{\xi_{2,0}}{R_2} + \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_3.\end{aligned}$$

Будем рассматривать случай $R_i = +\infty$.

В этом случае $H_1 = A_1$, $H_2 = A_2$, $H_3 = 1$, а также $K_{12} = K_{21} = 1$ и $B_1 = C_1 = A_1$, $B_2 = C_2 = A_2$.

Уравнения примут вид [6]

$$\partial_1 (A_2 N_1) - N_2 \partial_1 (A_2) + \partial_2 (A_1 N_{21}) + N_{12} \partial_2 (A_1) + g_1 = 0; \quad (1.15)$$

$$\partial_2 (A_1 N_2) - N_1 \partial_2 (A_1) + \partial_1 (A_2 N_{12}) + N_{21} \partial_1 (A_2) + g_2 = 0; \quad (1.16)$$

$$\partial_1 (A_2 M_1) - M_2 \partial_1 (A_2) + \partial_2 (A_1 M_{21}) + M_{12} \partial_2 (A_1) - A_1 A_2 Q_1 + m_1 = 0; \quad (1.17)$$

$$\partial_2 (A_1 M_2) - M_1 \partial_2 (A_1) + \partial_1 (A_2 M_{12}) + M_{21} \partial_1 (A_2) - A_1 A_2 Q_2 + m_2 = 0; \quad (1.18)$$

$$\partial_1 (A_2 Q_1) + \partial_2 (A_1 Q_2) + g_3 = 0 \quad (1.19)$$

$$N_1 = B_{11} \varepsilon_1 + B_{12} \varepsilon_2 + C_{11} \kappa_1 + C_{12} \kappa_2 \quad (1.20)$$

$$N_2 = B_{22} \varepsilon_2 + B_{21} \varepsilon_1 + C_{22} \kappa_2 + C_{21} \kappa_1 \quad (1.21)$$

$$M_1 = C_{11} \varepsilon_1 + C_{12} \varepsilon_2 + D_{11} \kappa_1 + D_{12} \kappa_2 \quad (1.22)$$

$$M_2 = C_{22} \varepsilon_2 + C_{21} \varepsilon_1 + D_{22} \kappa_2 + D_{21} \kappa_1 \quad (1.23)$$

$$N_{12} = B_{33}^{11} \varepsilon_{12} + B_{33}^{12} \varepsilon_{21} + C_{33}^{11} \kappa_{12} + C_{33}^{12} \kappa_{21} \quad (1.24)$$

$$N_{21} = B_{33}^{11} \varepsilon_{21} + B_{33}^{21} \varepsilon_{12} + C_{33}^{11} \kappa_{21} + C_{33}^{21} \kappa_{12} \quad (1.25)$$

$$M_{12} = C_{33}^{11} \varepsilon_{12} + C_{33}^{12} \varepsilon_{21} + D_{33}^{11} \kappa_{12} + D_{33}^{12} \kappa_{21} \quad (1.26)$$

$$M_{21} = C_{33}^{11} \varepsilon_{21} + C_{33}^{21} \varepsilon_{12} + D_{33}^{11} \kappa_{21} + D_{33}^{21} \kappa_{12} \quad (1.27)$$

$$Q_1 = K_1 t_1; \quad Q_2 = K_2 t_2 \quad (1.28)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{1,0} + \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{2,0} + \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (1.29)$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_{2,0} - \frac{\xi_{1,0}}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1); \quad \varepsilon_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_{1,0} - \frac{\xi_{2,0}}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (1.30)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_1 + \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_2 = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_2 + \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (1.31)$$

$$\kappa_{12} = \frac{1}{A_1} \partial_1 \theta_2 - \frac{\theta_2}{A_1 A_2} \partial_2 (A_1), \quad \kappa_{21} = \frac{1}{A_2} \partial_2 \theta_1 - \frac{\theta_1}{A_1 A_2} \partial_1 (A_2); \quad (1.32)$$

$$t_1 = \theta_1 + \frac{1}{A_1} \partial_1 \xi_3, \quad t_2 = \theta_2 + \frac{1}{A_2} \partial_2 \xi_3. \quad (1.33)$$

В результате имеем 25 уравнений относительно 25 неизвестных.

1.2 Построение криволинейной системы координат в двумерном случае

В двумерном случае преобразования (1.1), (1.2) имеют вид $x_1 = x_1(v_1, v_2)$, $x_2 = x_2(v_1, v_2)$ и $v_1 = v_1(x_1, x_2)$, $v_2 = v_2(x_1, x_2)$. Условимся точки $x = (x_1 \ x_2)^T$ изображать на одной комплексной плоскости, а точки $v = (v_1 \ v_2)^T$ на другой. Тогда указанные преобразования представляют собой преобразование подмножества X плоскости x на подмножество Ω плоскости v . Поскольку

$$\begin{cases} x_1 = x_1(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)); \\ x_2 = x_2(v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2)), \end{cases}$$

то должны выполняться равенства

$$\begin{cases} \partial_1 x_1 \partial_1 v_1 + \partial_2 x_1 \partial_1 v_2 = 1; & \partial_1 x_1 \partial_2 v_1 + \partial_2 x_1 \partial_2 v_2 = 0; \\ \partial_1 x_2 \partial_1 v_1 + \partial_2 x_2 \partial_1 v_2 = 0, & \partial_1 x_2 \partial_2 v_1 + \partial_2 x_2 \partial_2 v_2 = 1. \end{cases}$$

Пусть $\Delta = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(v_1, v_2)}$. Тогда, из полученных систем, находим

$$\partial_1 v_1 = \frac{\partial_2 x_2}{\Delta}, \quad \partial_1 v_2 = -\frac{\partial_1 x_2}{\Delta}; \quad (1.34)$$

$$\partial_2 v_1 = -\frac{\partial_2 x_1}{\Delta}, \quad \partial_2 v_2 = \frac{\partial_1 x_1}{\Delta}. \quad (1.35)$$

Касательные векторы к кривым, по которым укладываются волокна при 3D-печати образуют векторное поле \mathbf{r} в X , которое будем характеризовать комплексным числом $r = r_1 + ir_2$, где $r_1 = r_1(x_1, x_2)$, $r_2 = r_2(x_1, x_2)$. Будем считать это поле гармоническим, т.е. соленоидальным и потенциальным [15]. Такое поле не имеет источников и вихрей. Кроме того, обозначим \tilde{X} односвязную область, содержащей множество X , и поле будем рассматривать в этой односвязной области (рис. 1.4).

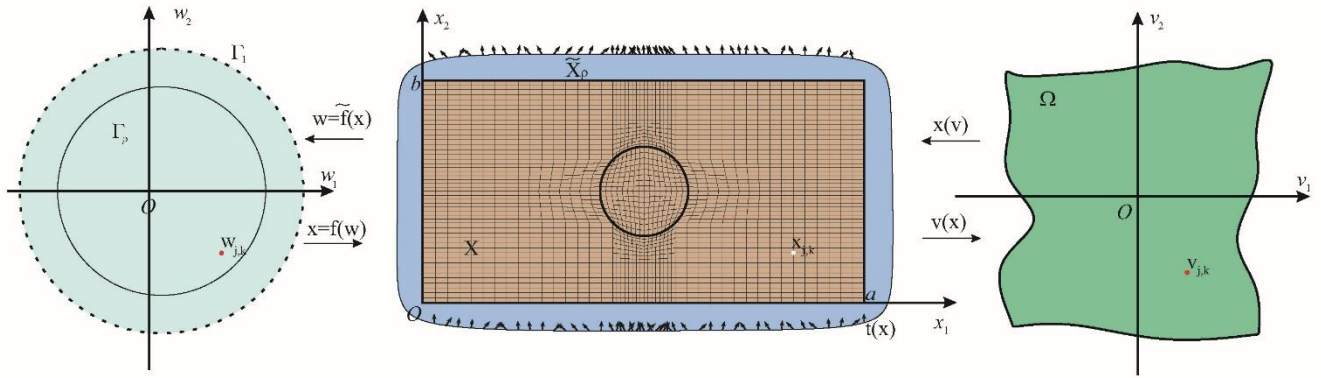


Рис. 1.4 – Преобразование множества X

Следовательно,

$$\operatorname{div} r = \partial_1 r_1 + \partial_2 r_2 = 0.$$

Значит, $-r_2 dx_1 + r_1 dx_2$ есть полный дифференциал некоторой функции v_2 , определенной на X . Эта функция называется функцией тока. Таким образом, $r_2 = -\partial_1 v_2$ и $r_1 = \partial_2 v_2$. Поскольку поле потенциально, имеем

$$\operatorname{rot} r = 0.$$

Отсюда $\partial_1 r_2 - \partial_2 r_1 = 0$. Таким образом, выражение $r_1 dx_1 + r_2 dx_2$ есть полный дифференциал некоторой функции $v_1(x_1, x_2)$, которая называется потенциалом поля. Итак, $r_1 = \partial_1 v_1$, $r_2 = \partial_2 v_1$. Кроме того, выполняются соотношения Коши-Римана

$$\partial_1 v_1 = \partial_2 v_2, \quad \partial_2 v_1 = -\partial_1 v_2.$$

Таким образом, функция тока $v_2(x_1, x_2)$ и потенциал поля $v_1(x_1, x_2)$ являются сопряженными гармоническими функциями. Следовательно, линии тока и линии равного потенциала образуют ортогональное семейство. Аналитическая функция

$$v_1(x_1, x_2) + i v_2(x_1, x_2), \quad x_1 + i x_2 \in X \tag{1.36}$$

называется комплексным потенциалом поля [16]. Таким образом, любая аналитическая функция в области \tilde{X} даёт нам и схему укладки волокон и локальную криволинейную систему координат в $X \subset \tilde{X}$. Сеть линий уровня $v_1(x_1, x_2) = \text{const}$,

$v_2(x_1, x_2) = \text{const}$ называется изотермической сетью. Кривые, по которым укладываются волокна, определяются параметрическими представлениями

$$\begin{aligned} \gamma_{\alpha,1}: r_{\alpha,1}(v_1) &= x_1(v_1, \alpha) + ix_2(v_1, \alpha), \quad v_1 \in T_{\alpha,1}, \\ \gamma_{\beta,2}: r_{\beta,2}(v_2) &= x_1(\beta, v_2) + ix_2(\beta, v_2), \quad v_2 \in T_{\beta,2}. \end{aligned}$$

где $T_{\alpha,1}, T_{\beta,2}$ – некоторые промежутки, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ и $T_{\alpha,1} \times \{\alpha\}, \{\beta\} \times T_{\beta,2} \subset \Omega$.

Пусть $\Gamma_\rho = \{w = w_1 + iw_2: w_1^2 + w_2^2 < \rho\}$ и $x = f(w) = f_1(w_1, w_2) + if_2(w_1, w_2)$ – конформное отображение круга Γ_1 на область \tilde{X} , а $w = \tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x_1, x_2) + i\tilde{f}_2(x_1, x_2)$ – преобразование обратное к $x = f(w)$. Для $\rho \in (0; 1)$ обозначим $\tilde{X}_\rho = f(\Gamma_\rho)$.

Зададим на границе области \tilde{X}_ρ ориентацию волокна. Пусть $n = n_1 + in_2$ – внешняя единичная нормаль к границе \tilde{X}_ρ и направление волокна в точке $x \in \partial\tilde{X}_\rho$ задаётся вектором

$$t(x) = \partial_1 x_1|_{v(x)} + i \partial_1 x_2|_{v(x)}. \quad (1.37)$$

С учётом равенств (1.34) и (1.35) и соотношений Коши-Римана, формулу (1.37) можно переписать в виде

$$t(x) = \Delta \cdot \partial_2 v_2(x) - i\Delta \cdot \partial_1 v_2(x) = \Delta \cdot \partial_1 v_1(x) + i\Delta \cdot \partial_2 v_1(x).$$

Итак функцию $v_1(x_1, x_2)$ на \tilde{X}_ρ можно искать из задачи Неймана

$$\begin{cases} \partial^{(2,0)}v_1 + \partial^{(0,2)}v_1 = 0; \\ \frac{\partial v_1}{\partial n}(x) = \partial_1 v_1(x)n_1(x) + \partial_2 v_1(x)n_2(x) = a(x)\cos\theta(x), \quad x \in \partial\tilde{X}_\rho, \end{cases} \quad (1.38)$$

где $\theta(x)$ – угол между $n(x)$ и $t(x)$.

Обозначим $\eta(x) = a(x)\cos\theta(x)$. Известно, что должно выполняться условие

$$\int_{\partial\tilde{X}_\rho} \frac{\partial v_1(x)}{\partial n} ds = \int_{\partial\tilde{X}_\rho} \frac{\partial v_2(x)}{\partial s} ds = \int_{\partial\tilde{X}_\rho} d v_2 = 0,$$

где $\frac{\partial v_2(x)}{\partial s}$ – производная по направлению касательной к границе области. Функция $a(x)$ в примерах, представленных в диссертации, выбиралась следующим образом

$$a(x) = \begin{cases} \frac{1}{\int_{\cos\theta(x)>0} \cos\theta(x) ds}, & \text{если } \cos\theta(x) > 0; \\ -\frac{1}{\int_{\cos\theta(x)<0} \cos\theta(x) ds}, & \text{если } \cos\theta(x) < 0. \end{cases} \quad (1.39)$$

Из соотношений Коши-Римана и гармоничности функций $f_1(w_1, w_2)$, $f_2(w_1, w_2)$ следует, что функция $z(w) = v_1(f(w))$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{1,1}z + \partial_{2,2}z = 0.$$

Рассмотрим, какому краевому условию удовлетворяет функция $z(w)$.

Пусть $w \in \partial\Gamma_\rho$ и m – единичная нормаль к границе круга Γ_ρ . Тогда $m = \frac{w_1}{\rho} + i\frac{w_2}{\rho}$.

Следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial m}(w) = \partial_1 z(w) \frac{w_1}{\rho} + \partial_2 z(w) \frac{w_2}{\rho} = \partial_1 v_1(f(w)) \frac{\partial f_1}{\partial m}(w) + \partial_2 v_1(f(w)) \frac{\partial f_2}{\partial m}(w).$$

Рассмотрим кривую $\partial\Gamma_\rho$ и кривую с параметрическими представлениями

$$\gamma_w: r_w(t) = w_1 t + i w_2 t, \quad t \in [0; 1].$$

Они перпендикулярны в точке $t = 1$, а их образы при конформном отображении $x = f(w)$ представляют собой кривую $\partial\tilde{X}_\rho$ и кривую

$$\gamma_{f(w)}: r_{f(w)}(\tau) = f_1(w_1 \tau, w_2 \tau) + i f_2(w_1 \tau, w_2 \tau), \quad \tau \in [0; 1].$$

Так как конформное отображение сохраняет углы между кривыми, то вектор нормали к границе $\partial\tilde{X}_\rho$ коллинеарен касательному вектору кривой $\gamma_{f(w)}$. С учётом того, что

$$|r'_{f(w)}(1)| = \rho |\nabla f_1(w)| = \rho \sqrt{(\partial_1 f_1(w))^2 + (\partial_2 f_1(w))^2},$$

получаем

$$n = \frac{r'_{f(w)}(1)}{|r'_{f(w)}(1)|} = \frac{\frac{\partial f_1}{\partial m}(w) + i \frac{\partial f_2}{\partial m}(w)}{|\nabla f_1(w)|}.$$

Следовательно, функция z является решением следующей задачи Неймана для круга Γ_ρ

$$\partial_{1,1}z + \partial_{2,2}z = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial m}(w) = \eta(f(w))|\nabla f_1(w)|, \quad w \in \partial\Gamma_\rho.$$

Как известно [16], решение такой задачи может быть найдено по формуле Дини

$$\begin{aligned} z(w_1, w_2) = & -\frac{\rho}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \\ & \cdot \ln \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2}{\rho^2} d\tau + z_0, \end{aligned} \quad (1.40)$$

где $z_0 \in \mathbf{C}$ – произвольная константа.

Для дальнейших приложений необходимы ещё формулы для частных производных $\partial_i z$, $\partial^{(i,s)} z$, $i, s = 0, 1, 2$, $i + s \leq 2$. Дифференцированием интеграла по параметру получаем

$$\begin{aligned} \partial_1 z(w_1, w_2) = & -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \\ & \cdot \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)}{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2} d\tau; \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \partial_2 z(w_1, w_2) = & -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \\ & \cdot \frac{(w_2 - \rho \sin \tau)}{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2} d\tau; \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \partial^{(2,0)} z(w_1, w_2) = & -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \\ & \cdot \frac{(w_2 - \rho \sin \tau)^2 - (w_1 - \rho \cos \tau)^2}{((w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2)^2} d\tau; \end{aligned} \quad (1.43)$$

$$\begin{aligned} \partial^{(0,2)} z(w_1, w_2) = & -\frac{\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \\ & \cdot \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)^2 - (w_2 - \rho \sin \tau)^2}{((w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2)^2} d\tau; \end{aligned} \quad (1.44)$$

$$\begin{aligned} \partial^{(1,1)} z(w_1, w_2) = & \frac{2\rho}{\pi} \int_0^{2\pi} \eta(f(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)) |\nabla f_1(\rho \cos \tau, \rho \sin \tau)| \cdot \\ & \cdot \frac{(w_1 - \rho \cos \tau)(w_2 - \rho \sin \tau)}{((w_1 - \rho \cos \tau)^2 + (w_2 - \rho \sin \tau)^2)^2} d\tau. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Отсюда решение исходной задачи Неймана имеет вид $v_1(x) = z(f^{-1}(x))$.

Обозначим $\nu(t)$ – угол наклона касательной к $\partial\tilde{X}$ в точке x , соответствующей точке $w = w_1 + iw_2 \in \partial\Gamma$ при конформном отображении $x = f(w)$. Тогда конформное преобразование единичного круга на область \tilde{X} может быть найдено по формуле Чизотти [16]

$$x = f_1(w_1, w_2) + if_2(w_1, w_2) = i \int_{w_{1,0} + iw_{2,0}}^{w_1 + iw_2} \frac{e^{i\zeta(y)}}{(1-y)^2} dy + x_0, \quad (1.46)$$

где

$$\zeta(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{e^{it} + y}{e^{it} - y} dt + iA, \quad (1.47)$$

A – некоторая действительная постоянная, $x_0 \in \tilde{X}$, $w_{0,1} + iw_{0,2} \in \Gamma$ – заданные точки.

Имеем

$$\zeta(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{\cos t + isint + y_1 + iy_2}{\cos t - y_1 + i(\sin t - y_2)} dt + iA = \zeta_1(y_1, y_2) + i\zeta_2(y_1, y_2),$$

где

$$\zeta_1(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(t) \frac{1 - y_1^2 - y_2^2}{1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t} dt, \quad (1.48)$$

$$\zeta_2(y_1, y_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t) \frac{y_2 \cos t - y_1 \sin t}{1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t} dt + A. \quad (1.49)$$

Пусть $w_{1,0} + iw_{2,0} = 0$, $x_0 = x_{1,0} + ix_{2,0}$ а кривая интегрирования – это отрезок прямой с параметрическим представлением $w = w_1 t + iw_2 t$, $t \in [0; 1]$. Тогда

$$f_1(w_1, w_2) = \text{Ref} = - \int_0^1 e^{-\zeta_2(w_1 t, w_2 t)} \left[\sin \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_1 b_1(t) - w_2 b_2(t)) + \right. \\ \left. + \cos \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_2 b_1(t) + w_1 b_2(t)) \right] dt + x_{1,0}; \quad (1.50)$$

$$f_2(w_1, w_2) = \text{Imf} = \int_0^1 e^{-\zeta_2(w_1 t, w_2 t)} \left[\cos \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_1 b_1(t) - w_2 b_2(t)) - \right. \\ \left. - \sin \zeta_1(tw_1, tw_2) (w_2 b_1(t) + w_1 b_2(t)) \right] dt + x_{2,0}, \quad (1.51)$$

где

$$b_1(t) = \frac{1 - 2tu_1 + t^2(u_1^2 - u_2^2)}{(1 - 2tu_1 + t^2(u_1^2 + u_2^2))^2}, \quad (1.52)$$

$$b_2(t) = \frac{2tu_2(1 - tu_1)}{(1 - 2tu_1 + t^2(u_1^2 + u_2^2))^2}. \quad (1.53)$$

Нам потребуются формулы для частных производных $\partial_i \tilde{f}_k$, $\partial^{(\lambda, \mu)} \tilde{f}_k$, $i, k = 1, 2$, $\lambda, \mu = 0, 1, 2$, $\lambda + \mu \leq 2$. Для начала найдем частные производные $\partial_i \zeta_s$, $i, s = 1, 2$. Дифференцированием интеграла по параметру находим

$$\partial_1 \zeta_2(y_1, y_2) = -\partial_2 \zeta_1(y_1, y_2) = \\ = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v(t) \frac{(1 + y_2^2 - y_1^2) \sin t - 2y_2 + 2y_1 y_2 \cos t}{(1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t)^2} dt, \quad (1.54)$$

$$\begin{aligned} \partial_1 \zeta_1(y_1, y_2) &= \partial_2 \zeta_2(y_1, y_2) = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \nu(t) \frac{(1 + y_1^2 - y_2^2) \cos t - 2y_1 + 2y_1 y_2 \sin t}{(1 + y_1^2 + y_2^2 - 2y_1 \cos t - 2y_2 \sin t)^2} dt. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Из формулы Чизотти находим

$$(\partial_1 f_1 + i \partial_1 f_2)(w) = i \frac{e^{i\zeta(w)}}{(1-w)^2}.$$

Отсюда, обозначая

$$I_1(w) = ((1 - w_1)^2 - w_2^2) \sin \zeta_1(w) + 2w_2(1 - w_1) \cos \zeta_1(w);$$

$$I_2(w) = (1 - w_1)^2 + w_2^2;$$

$$I_3(w) = ((1 - w_1)^2 - w_2^2) \cos \zeta_1(w) - 2w_2(1 - w_1) \sin \zeta_1(w),$$

и, вычисляя частные производные этих функций

$$\begin{aligned} \partial_1 I_1(w) &= -2(1 - w_1) \sin \zeta_1(w) + ((1 - w_1)^2 - w_2^2) \partial_1 \zeta_1(w) \cos \zeta_1(w) - \\ &- 2w_2 \cos \zeta_1(w) - 2w_2(1 - w_1) \partial_1 \zeta_1(w) \sin \zeta_1(w), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2 I_1(w) &= -2w_2 \sin \zeta_1(w) + ((1 - w_1)^2 - w_2^2) \partial_2 \zeta_1(w) \cos \zeta_1(w) + \\ &+ 2(1 - w_1) \cos \zeta_1(w) - 2w_2(1 - w_1) \partial_2 \zeta_1(w) \sin \zeta_1(w), \end{aligned}$$

$$\partial_1 I_2(w) = -2(1 - w_1), \quad \partial_2 I_2(w) = 2w_2,$$

получаем

$$\partial_1 f_1(w) = \partial_2 f_2(w) = -e^{-\zeta_2(w)} \frac{I_1(w)}{(I_2(w))^2}; \quad (1.56)$$

$$\partial_2 f_1(w) = -\partial_1 f_2(w) = -e^{-\zeta_2(w)} \frac{I_3(w)}{(I_2(w))^2}; \quad (1.57)$$

$$\begin{aligned} \partial^{(2,0)} f_1(w) &= e^{-\zeta_2(w)} \partial_1 \zeta_2(w) \frac{I_1(w)}{(I_2(w))^2} - e^{-\zeta_2(w)} \frac{\partial_1 I_1(w)}{(I_2(w))^2} + \\ &+ 2e^{-\zeta_2(w)} \frac{I_1(w) \partial_1 I_2(w)}{(I_2(w))^3}; \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\partial^{(1,1)} f_1(w) = e^{-\zeta_2(w)} \partial_2 \zeta_2(w) \frac{I_1(w)}{(I_2(w))^2} - e^{-\zeta_2(w)} \frac{\partial_2 I_1(w)}{(I_2(w))^2} + \quad (1.59)$$

$$+ 2e^{-\zeta_2(w)} \frac{I_1(w) \partial_2 I_2(w)}{(I_2(w))^3};$$

$$\partial^{(0,2)} f_1(w) = -\partial^{(2,0)} f_1(w); \quad (1.60)$$

$$\partial^{(2,0)} f_2(w) = -\partial^{(1,1)} f_1(w); \quad \partial^{(0,2)} f_2(w) = \partial^{(1,1)} f_1(w); \quad (1.61)$$

$$\partial^{(1,1)} f_2(w) = \partial^{(2,0)} f_1(w). \quad (1.62)$$

Теперь значения $\partial_i \tilde{f}_k$, $\partial^{(\lambda,\mu)} \tilde{f}_k$, $i, k = 1, 2$, $\lambda, \mu = 0, 1, 2$, $\lambda + \mu \leq 2$ можно найти по формулам (3.6) – (3.13), представленным в главе 3.

Диффеоморфизмы $x_\theta(v) = (x_1(v_1, v_2) \quad x_2(v_1, v_2))^T$, определяющие криволинейные системы координат на X , найдём через их обратные

$$v_\theta(x) = (v_1(x_1, x_2) \quad v_2(x_1, x_2))^T.$$

Как далее увидим, функция $v_2(x_1, x_2)$ не потребуется. Для решения задач теории упругости достаточно иметь только функцию v_1 и соотношения Коши-Римана.

Функция $\theta(x)$ задаётся в дискретном множестве точек границы $\partial \tilde{X}_\rho$. Выбор углов $\theta(x_i)$, где $x_i \in \partial \tilde{X}_\rho$ для приближённого вычисления (1.40), производится следующим образом. Как было отмечено выше, должно выполняться условие $\int_{\partial \tilde{X}_\rho} a(x) \cos \theta(x) ds = 0$. Таким образом, из (1.39) следует, что должны быть участки границы, на которых $\theta(x_i) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, и должны быть участки границы, на которых $\theta(x_i) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому выберем произвольное разбиение кривой s на дуги $[x_{i_s}, x_{i_{s+1}})$, $s = 0, 1, \dots, \tilde{N} - 1$, $i_0 = 0 < i_1 < \dots < i_{\tilde{N}}$ и зафиксируем его. Пусть

$$I_{\tilde{N}} = \{e = (e_1 \quad e_2 \quad \dots \quad e_{\tilde{N}})^T: e_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, \dots, \tilde{N} \text{ и } \exists i_1, i_2, e_{i_1} \cdot e_{i_2} = -1\}.$$

На каждой из дуг $[x_{i_s}, x_{i_{s+1}})$

$$\theta(x_i) = \frac{\pi}{2} - e_{s+1} \cdot \theta_i \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \theta_i \in (0; 1], \quad i = i_s, i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1.$$

Таким образом, если $e_{s+1} = 1$, то $\theta(x_i) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, $i = i_s, i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1$, если $e_{s+1} = -1$, то $\theta(x_i) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, $i = i_s, i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1$ и, если $e_{s+1} = 0$, то $\theta(x_i) = \frac{\pi}{2}$, $i = i_s, i_s + 1, \dots, i_{s+1} - 1$. При этом обязательно есть две дуги такие, что на одной $\theta(x_i) \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, а на другой $\theta(x_i) \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

На рис. 1.5 показано конформное преобразование круга на многоугольник и его ограничения на круги $\Gamma_{0,95}$ и $\Gamma_{0,75}$. На рис. 1.6 и рис. 1.7 показано векторное поле, образованное касательными векторами к кривым $v_1(x_1, x_2) = \text{const}$ и $v_2(x_1, x_2) = \text{const}$, построенное для случаев $e = (-1, 1, 1, 1)^T$ и $e = (-1, 1, -1, 1)^T$ соответственно.

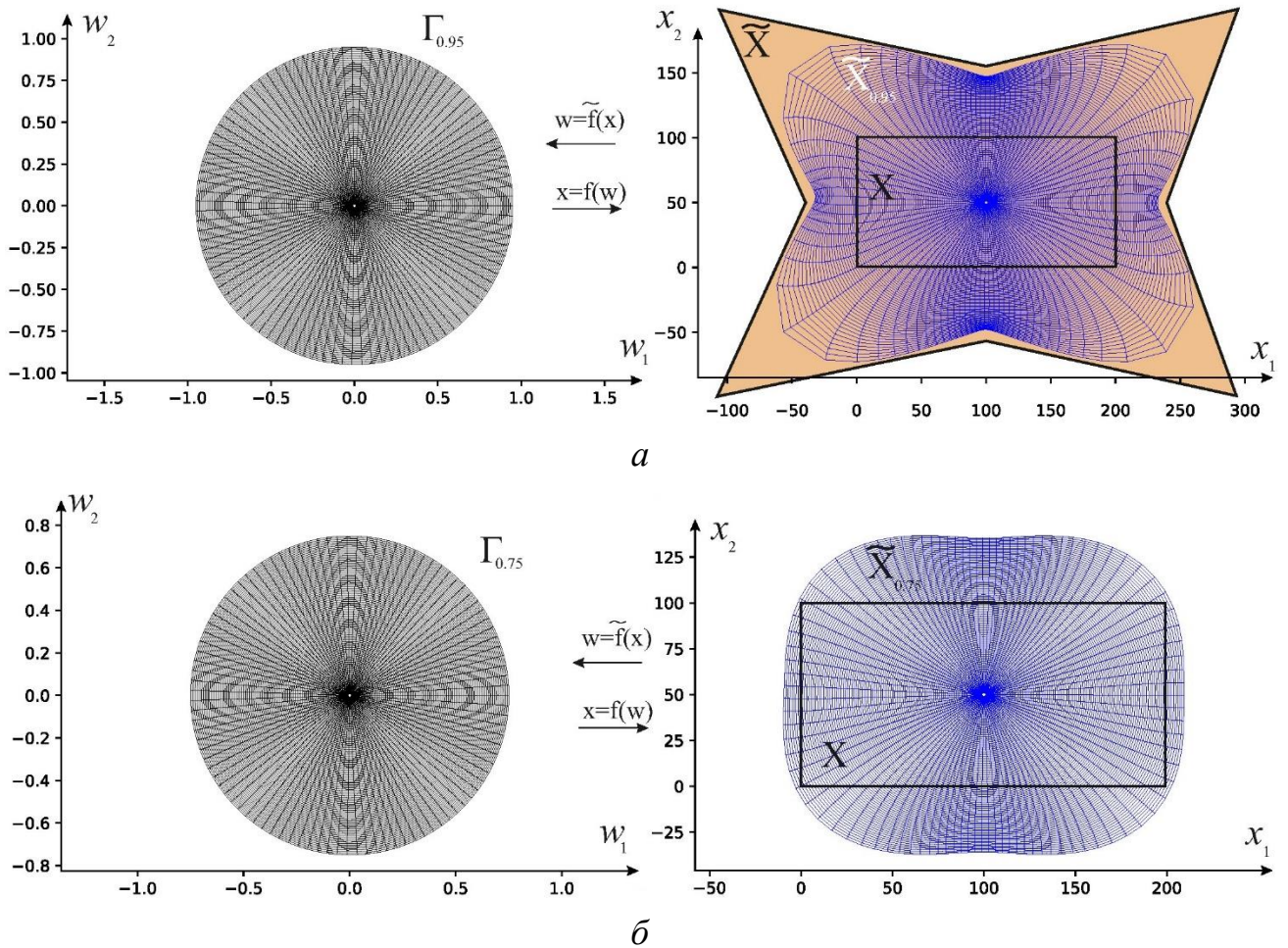


Рис. 1.5 – Конформное преобразование круга на многоугольник и его ограничения на круги:

a – круг $\Gamma_{0,95}$, b – круг $\Gamma_{0,75}$

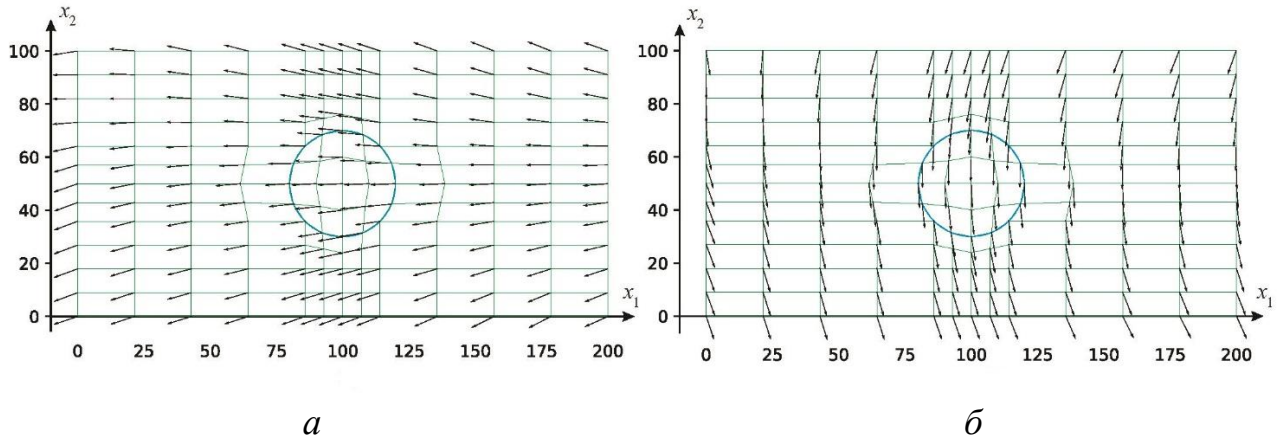


Рис. 1.6 – Касательные векторы к кривым для случая $e = (-1, 1, 1, 1)^T$:
 a – кривая $v_1(x_1, x_2) = \text{const}$, b – кривая $v_2(x_1, x_2) = \text{const}$

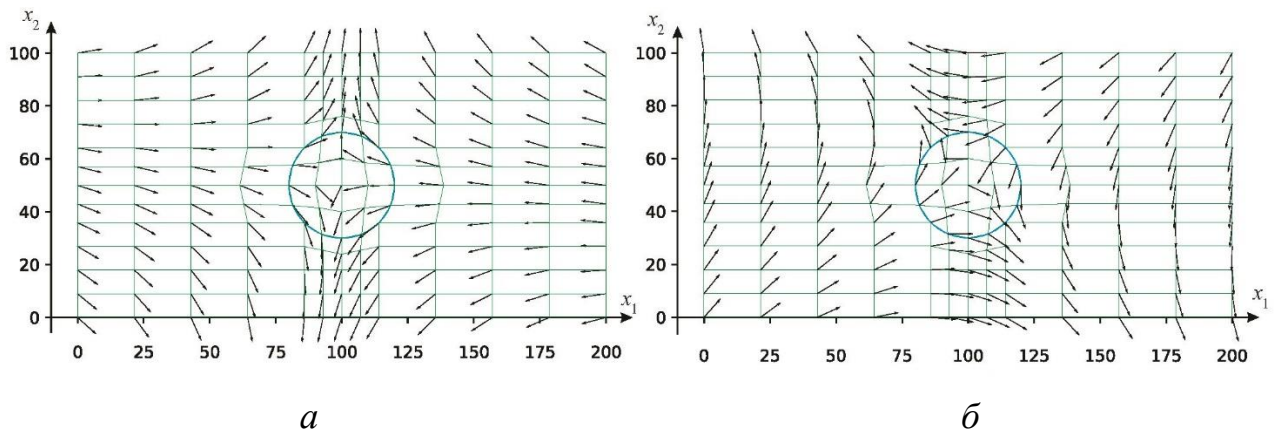


Рис. 1.7 – Касательные векторы к кривым для случая $e = (-1, 1, -1, 1)^T$:
 a – кривая $v_1(x_1, x_2) = \text{const}$, b – кривая $v_2(x_1, x_2) = \text{const}$

1.3 Постановка задачи оптимизации изготовления функциональных объектов методом 3D-печати

В разделе ставится задача нахождения оптимальных траекторий укладки волокон при 3D-печати функциональных объектов (конструкций из композиционных материалов, армированных непрерывными волокнами).

Пусть $\sigma_1^\pm, \sigma_2^\pm$ – пределы прочности при растяжении и сжатии вдоль и поперёк волокон, а \hat{t}_{12} – предел прочности при сдвиге в плоскости слоя. В качестве целевой функции будет использован критерии максимальных напряжений [6]

$$R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) = \max \left(\frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}} \right), \quad (1.70)$$

где

$$m_1(\sigma_1) = \begin{cases} \sigma_1^+, & \text{если } \sigma_1 > 0; \\ \sigma_1^-, & \text{если } \sigma_1 < 0, \end{cases} \quad m_2(\sigma_2) = \begin{cases} \sigma_2^+, & \text{если } \sigma_2 > 0; \\ \sigma_2^-, & \text{если } \sigma_2 < 0. \end{cases}$$

Как было отмечено выше $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ могут быть найдены из уравнений (1.15) – (1.33), если задать преобразование $v(x)$, которое можно найти из уравнения (1.38). Краевые условия к этому уравнению получаем заданием углов $\theta(x_i)$, $x_i \in \partial X$, которые волокна образуют с внешней нормалью к границе множества X . Следовательно, целевая функция, на самом деле, является функция этих углов θ

$$\theta|_{\partial X} \mapsto v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}) \mapsto \max \left(\frac{\sigma_1}{m_1(\sigma_1)}, \frac{\sigma_2}{m_2(\sigma_2)}, \frac{\tau_{12}}{\hat{\tau}_{12}} \right).$$

Соответствие $(v_1(x), v_2(x)) \mapsto (\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$ осуществляется с помощью метода, описанного в настоящей главе, путём приближённого решения уравнений механики композиционных материалов. Минимизировать функцию R предлагается с помощью метода, представленного в работе [85] и реализованного в библиотеке SciPy© для языка программирования Python©.

С учётом обозначений предыдущего раздела оптимальные траектории укладки волокон можно найти из решения оптимизационной задачи

$$\left(e^*, \theta_{i_0}^*, \dots, \theta_{i_{\bar{N}-1}}^* \right) = \underset{e \in I_{\bar{N}}}{\operatorname{argmin}} \min_{\theta_{i_0}, \dots, \theta_{i_{\bar{N}-1}} \in (0;1]} R \left(\frac{\pi}{2} - e_1 \cdot \theta_{i_0} \cdot \frac{\pi}{2}, \dots, \frac{\pi}{2} - e_{\bar{N}} \cdot \theta_{i_{\bar{N}-1}} \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

Также будет найдено координатное преобразование $v^*(x)$, которое и задаёт траектории укладки волокон.

Выводы по главе 1

В первой главе получены следующие результаты:

- 1) Применительно к предмету исследования проанализированы основные сведения из механики композиционных материалов. Показано, что схема укладки волокна заложена в самих уравнениях механики композиционных материалов в виде некоторой (неизвестной) локальной ортогональной системы координат. Поэтому найти оптимальную схему можно только из уравнений путём их решения с разными локальными системами координат.
- 2) Разработана математическая модель укладки волокон при 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. Траектории укладки волокон получаются с помощью аналитических функций, краевые условия для которых – это углы, образуемые волокнами с границей области печати.
- 3) В рамках модели предложен метод нахождения оптимальной схемы укладки волокон при печати, диктуемой условиями эксплуатации объекта. Критерий разрушения композиционного материала представлен как функция углов, которые волокна образуют с границей области печати. Разработан вычислительный алгоритм нахождения значения критерия разрушения по заданным углам, основанный на конформных преобразованиях.
- 4) Поставлена задача оптимизации для нахождения траекторий укладки волокон при 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. Предложен метод нахождения значений критерия разрушения композиционного материала как целевой функции задачи оптимизации.

2 ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА

В первой главе критерий разрушения КМ был представлен как функция, определённая на многомерном промежутке. Для вычисления её значений требуется решать систему из 25 дифференциальных уравнений. В этой и последующих главах разработан метод решения такой системы, основанный на применении вейвлетов.

В последнее время вейвлет-анализ привлекает большое внимание исследователей в различных дисциплинах. Есть несколько причин, по которым вейвлеты успешно применяются в обработке сигналов, сжатии информации, приближенных методах решения дифференциальных и интегральных уравнений [39, 63 – 67, 69 – 74, 77, 78, 83, 89 – 93, 95], компьютерной геометрии [26, 34, 37, 42, 54, 61, 62, 68, 75, 84], в системах автоматизированного проектирования [2, 4, 37]. К таким причинам можно отнести следующие. Во-первых, большая скорость убывания вейвлет-коэффициентов. Это позволяет, ограничиваясь небольшим количеством слагаемых в разложении, получать достаточно точные приближения функции. Во-вторых, наличие быстрых каскадных алгоритмов нахождения коэффициентов разложения функции по вейвлетам. В-третьих, многие из часто применяемых вейвлетов, например, сплайн-вейвлеты, вейвлеты Добеши имеют компактный носитель [12, 13, 30, 43 – 53, 55].

В работах [86, 87] представлена схема подъёма, посредством которой можно получать биортогональные вейвлеты с заданными свойствами: гладкость, симметричность, компактность носителя и т.д. Достижение желаемых свойств вейвлетов напрямую связано со стационарными схемами подразделения [40, 76]. Задав маску, приводящую к нужным свойствам предельной функции, получают масштабирующие функции с нужными свойствами. Так, например, в работе [86] получены масштабирующие функции Deslauriers-Dubuc, определённые на прямой, являющиеся симметричными, гладкими и имеющие компактный носитель. В работе [81] схема подъёма использована в построении биортогональных вейвлетов на сфере и показано применение их в задаче сжатия климатических и топографических данных.

В данной главе представлены основные сведения их вейвлет-анализа, даётся алгоритм построения вейвлет-систем на отрезке, прямоугольнике и на n -мерном промежутке. Кроме того, разрабатывается алгоритм вычисления значений масштабирующих функций и вейвлетов, а также их частных производных, основанный на свёртке последовательностей. Данный алгоритм позволяет в дальнейшем распараллелить процедуру построения вейвлет-системы на заданном множестве в \mathbf{R}^n .

2.1 Вейвлет-системы на отрезке на основе В-сплайна произвольного порядка

В разделе рассматривается общая методика построения вейвлет-систем на отрезке числовой прямой, представленная в работах [26, 61]. Рассмотрим действительные пространства $L_2(\mathbf{R})$ и $L_2[a; b]$. Пусть функция $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ удовлетворяет масштабному соотношению [19]

$$\varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbf{Z}} u_k \varphi(2x - k), u_k \in \mathbf{R}$$

и имеет компактный носитель. Обозначим $\varphi_{jk}(x) = \varphi(2^j x - k)$, $x \in [a; b]$, $j, k \in \mathbf{Z}$. Ясно, что для каждого j отличными от нуля на отрезке $[a; b]$ будет лишь конечное число таких функций. Пусть для определенности это будут функции $\varphi_{j,0}, \varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,n_j-1}$.

Рассмотрим [61] последовательность $V_0 \subset V_1 \subset \dots$ подпространств пространства $L_2[a; b]$

$$V_j = \text{lin}\{\varphi_{j,0}, \varphi_{j,1}, \dots, \varphi_{j,n_j-1}\} = \left\{ \sum_{s=0}^{n_j-1} a_s \varphi_{j,s} : a_s \in \mathbf{R}, s = 0, 1, \dots, n_j - 1 \right\}.$$

Поскольку $V_{j-1} \subset V_j$, то $\varphi_{j-1,k} = \sum_{s=0}^{n_{j-1}-1} p_{s,k}^j \varphi_{j,s}$. Введём обозначения [61]

$$\Phi_j(x) = \left(\varphi_{j,0}(x) \quad \varphi_{j,1}(x) \quad \dots \quad \varphi_{j,n_j-1}(x) \right), P_j = (p_{s,k}^j)_{s=0, k=0}^{n_j-1, n_{j-1}-1}$$

Тогда $\Phi_{j-1} = \Phi_j P_j$. Обозначим W_{j-1} ортогональное дополнение к пространству V_{j-1} в пространстве V_j . Поскольку $V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$ и $W_{j-1} \subset V_j$, то W_{j-1} конечномерное пространство. Если

$$W_j = \text{lin}\{\psi_{j,0}, \psi_{j,1}, \dots, \psi_{j,m_{j-1}}\}, \dim W_j = m_j,$$

то $\psi_{j-1,k} = \sum_{s=0}^{n_{j-1}-1} q_{s,k}^j \varphi_{j,s}$. Функции $\psi_{j,k}$ называются вейвлетами, а пространства W_j называются вейвлет-пространствами [23]. Введём в рассмотрение матрицы [61]

$$\Psi_j(x) = \begin{pmatrix} \psi_{j,0}(x) & \psi_{j,1}(x) & \dots & \psi_{j,m_{j-1}}(x) \end{pmatrix}, Q_j = (q_{s,k}^j)_{s=0,k=0}^{n_{j-1}-1, m_{j-1}-1}.$$

Тогда $\Psi_{j-1} = \Phi_j Q_j$. Следует заметить, что $n_j + m_j = n_{j+1}$.

Пусть $f \in L_2[a;b]$ и $\Pi_j : L_2[a;b] \rightarrow V_j$, $\Pi_j^W : L_2[a;b] \rightarrow W_j$ – проекторы.

Тогда приближение $\Pi_j f$ можно разложить на более грубое приближение $\Pi_{j-1} f$ и уточняющее слагаемое $\Pi_{j-1}^W f$

$$\Pi_j f = \sum_{k=0}^{n_{j-1}-1} c_{j,k} \varphi_{j,k} = \Pi_{j-1} f + \Pi_{j-1}^W f = \sum_{k=0}^{n_{j-1}-1} c_{j-1,k} \varphi_{j-1,k} + \sum_{k=0}^{m_{j-1}-1} d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}.$$

Введём в рассмотрение два вектора коэффициентов:

$$C_j = (c_{j,0} \quad \dots \quad c_{j,n_{j-1}})^T, D_j = (d_{j,0} \quad \dots \quad d_{j,m_{j-1}})^T.$$

Первый вектор описывает приближение функции f , а второй вектор представляет собой вейвлет-коэффициенты, которые характеризуют отклонение $\Pi_{j-1} f$ от $\Pi_j f$. Как показано в [61]

$$C_j = P_j C_{j-1} + Q_j D_{j-1}.$$

По данному равенству можно восстановить приближение $\Pi_j f$ по более грубому приближению $\Pi_{j-1} f$ и вейвлет-коэффициентам. Поскольку линейные операторы (проекторы) $V_j \rightarrow V_{j-1}$, $V_j \rightarrow W_{j-1}$ определяются некоторыми матрицами A_j, B_j , то $C_{j-1} = A_j C_j$, $D_{j-1} = B_j C_j$. Под вейвлет-преобразованием функции f будем

понимать нахождение векторов $C_0, D_0, D_1, \dots, D_{j-1}$. Известна [61] связь между матрицами A_j, B_j и P_j, Q_j :

$$\begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = (P_j \quad Q_j)^{-1}. \quad (2.1)$$

Матрица Q_j в статье [61] определяется из однородной системы линейных уравнений $T_j Q_j = 0$, где

$$T_j = P_j^T [(\Phi_j, \Phi_j)], \quad [(\Phi_j, \Phi_j)] = ((\varphi_{j,i}, \varphi_{j,s}))_{i,s=0}^{n_j-1}.$$

Матрицы Q_j и P_j известны как фильтры синтеза. Матрицы A_j и B_j известны как фильтры анализа. Множество $\{P_j, Q_j, A_j, B_j\}$ называется банком фильтров.

Описанный выше подход к построению вейвлет-системы на отрезке применён к случаю, когда в качестве функции $\varphi(x)$ выбран В-сплайн произвольного порядка n [4]. Кратко отметим основные результаты, полученные в работе [4]. Определим В-сплайны порядка n как свёртку [23]

$$N_n = N_{n-1} * N_0, \quad N_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0; 1); \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1). \end{cases}$$

Отметим некоторые известные свойства В-сплайнов [23]. Во-первых, $N_n(x) \geq 0, \forall x$. Во-вторых, $\text{supp } N_n(x) = [0; n+1]$. Как показано в [30], функция $N_n(x)$ удовлетворяет масштабному соотношению

$$N_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{p_k}{2^n} N_n(2x - k), \quad p_k = C_{n+1}^k = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \quad (2.2)$$

Кроме этого, функция $N_n(x)$ удовлетворяет соотношению [23]

$$N_n(x) = \frac{x}{n} N_{n-1}(x) + \frac{n+1-x}{n} N_{n-1}(x-1) \quad (2.3)$$

и справедливо равенство

$$N'_{n+1}(x) = N_n(x) - N_n(x-1). \quad (2.4)$$

Построения, представленные в работе [4], можно подытожить в виде следующих двух лемм.

Лемма 2.1. Функция $\varphi(x) = N_n(x)$ определяет последовательность подпространств $V_{\alpha,-n} \subset V_{\alpha,-n+1} \subset \dots, V_{\alpha,j} = \text{lin}\{\varphi_{j,-n}, \varphi_{j,-n+1}, \dots, \varphi_{j,2^j\alpha(n+1)-1}\}$, пространства $L_2[0; \alpha(n+1)]$, $\alpha = 1, 2, \dots$ такую, что

$$\overline{\bigcup_{j=0}^{+\infty} V_{\alpha,j}} = L_2[0; \alpha(n+1)].$$

Пусть $\lambda_{m,k} = \int_k^{k+1} N_n(z)N_n(z-m) dz$, $m = -n, \dots, n$, $k = 0, 1, \dots, n$ и $\omega_{i,k} = \omega_{k,i} = \sum_{s=n-i+1}^n \lambda_{k-i,s}$, $\theta_{i,k} = \theta_{k,i} = \sum_{s=0}^{n-k} \lambda_{i-k,s}$, $1 \leq i \leq k \leq n$. Обозначим $q_k = \sum_{s=k}^n \lambda_{k,s}$, $k = 0, 1, \dots, n$ и введём в рассмотрение вектор $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^{2^j\alpha(n+1)+n}$

$$\mathbf{p} = \begin{cases} (p_0 \ p_1 \dots p_k \ p_k \dots p_1 \ p_0 \ 0 \dots 0)^T, & \text{если } n=2k; \\ (p_0 \ p_1 \dots p_k \ p_{k+1} \ p_k \dots p_1 \ p_0 \ 0 \dots 0)^T, & \text{если } n=2k+1. \end{cases}$$

Определим оператор сдвига $R_s: \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ следующим правилом

$$R_s \mathbf{a} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & a_1 \dots a_{m-s} \\ s \end{pmatrix}^T, & \text{если } m > s \geq 0; \\ \begin{pmatrix} a_{|s|+1} \dots a_m & 0 \dots 0 \end{pmatrix}^T, & \text{если } -m < s < 0, \end{cases} \quad \mathbf{a} = (a_1 \ \dots \ a_m)^T.$$

Если $|s| \geq m$, то $R_s \mathbf{a} = 0$.

Лемма 2.2. Матрицы \mathbf{P}_j и $[(\Phi_j, \Phi_j)]$ для последовательности подпространств $V_{\alpha,0} \subset V_{\alpha,1} \subset \dots$ имеют вид

$$\mathbf{P}_j = \frac{1}{2^n} \begin{pmatrix} R_{-n} \mathbf{p} & R_{-n+2} \mathbf{p} & \dots & R_{-2+2^j\alpha(n+1)} \mathbf{p} \end{pmatrix},$$

$$[(\Phi_j, \Phi_j)] = \frac{1}{2^j} \begin{pmatrix} d_1 \dots d_n & \mathbf{q} & R_1 \mathbf{q} \dots R_{2^j\alpha(n+1)-n-1} \mathbf{q} & \mathbf{u}_1 \dots \mathbf{u}_n \end{pmatrix}^T,$$

где $\mathbf{d}_s = (\omega_{1,s}, \omega_{2,s}, \dots, \omega_{n,s}, q_{n-s+1}, \dots, q_n, 0, \dots, 0)^T$,

$$\mathbf{u}_s = (0, \dots, 0, q_n, \dots, q_s, \theta_{1,s}, \dots, \theta_{n,s})^T,$$

$$q = (q_n, q_{n-1}, \dots, q_1, q_0, q_1, \dots, q_{n-1}, q_n, 0, \dots, 0)^T \in \mathbf{R}^{2^j \alpha(n+1)+n}.$$

Матрица, транспонированная к $T_j = P_j^T [(\Phi_j, \Phi_j)] = 2^{-j} (t_{i,s})_{i=1,s=1}^{2^{j-1} \alpha(n+1)+n, 2^j \alpha(n+1)+n}$

имеет вид

$$T_j^T = \frac{1}{2^j} (L_1, \dots, L_n, w, R_2 w, \dots, R_{2^j \alpha(n+1)-2n-2} w, L_{2^{j-1} \alpha(n+1)+1}, \dots, L_{2^j \alpha(n+1)+n}),$$

$$\text{где } w = (p^T R_{-2n} q \quad p^T R_{-2n+1} q \dots p^T R_{n+1} q \quad 0 \dots 0)^T \in \mathbf{R}^{2^j \alpha(n+1)+n},$$

$$L_i = ((R_{-n+2i-2} p)^T d_1 \dots (R_{-n+2i-2} p)^T d_n \quad 0 \dots 0)^T + (R_n \circ R_{-3n+2i-2}) w,$$

$$i = 1, \dots, n,$$

$$L_{i+1} = (0 \dots 0 \quad (R_{-n+2i} p)^T u_1 \dots (R_{-n+2i} p)^T u_n)^T + (R_{-n} \circ R_{-n+2i}) w,$$

$$i = 2^{j-1} \alpha(n+1), \dots, n-1 + 2^{j-1} \alpha(n+1).$$

С использованием леммы 2.2 в работе [4] были найдены $2^{j-1} \alpha(n+1)$

линейно независимых решений $h_s = (h_{1,s} \quad h_{2,s} \dots h_{2^j \alpha(n+1)+n,s})^T$ системы линейных

уравнений $T_j h_s = 0$. Эти решения и представляют собой столбцы матрицы

$Q_j = (h_1 \quad \dots \quad h_{2^{j-1} \alpha(n+1)})$. Найдены они были из условия, чтобы функции

$\psi_{j,s}(x) = \Phi_j(x) h_s$ по возможности представляли собой сдвинутые версии одной

функции, т.е. имели бы одну форму (за исключением, конечно, граничных

вейвлетов). В работах [3, 36] полученные сплайн-вейвлеты были применены к

разработке алгоритма приближённого решения линейных дифференциальных

уравнений и систем.

2.2 Вейвлеты на прямоугольнике и их использование в поверхностном моделировании

Рассмотрим применение вейвлет-систем на отрезке к построению двумерных вейвлетов на прямоугольной области. Пусть даны последовательности $V_{0,i} \subset V_{1,i} \subset$

... $V_{j,i} \subset$ конечномерных подпространств пространства $L_2[a_i; b_i]$, масштабирующие функции φ^i и банки фильтров $P_{j,i}, Q_{j,i}, A_{j,i}, B_{j,i}, i=1,2$. Стандартным подходом к построению многомерных вейвлет-систем является взятие тензорных произведений базисных функций из $V_{j,i}$ [19]. Определим подпространства $V_j^2 = V_{j,1} \otimes V_{j,2} = \text{lin}\{f_1 \otimes f_2 : f_1 \in V_{j,1}, f_2 \in V_{j,2}\}$, где функция $f_1 \otimes f_2$ определяется равенством $f_1 \otimes f_2(x, y) = f_1(x)f_2(y)$. Кроме того определим пространства W_j^2 следующим образом $V_j^2 = V_{j-1}^2 \oplus W_{j-1}^2$. Тогда, если $f \in L_2([a_1; b_1] \times [a_2; b_2])$ и $\Pi_j : L_2([a_1; b_1] \times [a_2; b_2]) \rightarrow V_j^2$ – проектор, то

$$\begin{aligned}
\Pi_j f &= \sum_{m=0}^{n_{j,1}-1} \sum_{l=0}^{n_{j,2}-1} c_{m,l}^j \varphi_{j,m}^{(1)} \otimes \varphi_{j,l}^{(2)} = \sum_{m=0}^{n_{j,1}-1} \sum_{l=0}^{n_{j,2}-1} \left(\sum_{k=0}^{n_{j-1,1}-1} \sum_{s=0}^{n_{j-1,2}-1} c_{k,s}^{j-1} p_{m,k}^{j,1} p_{l,s}^{j,2} + \right. \\
&+ \sum_{k=0}^{m_{j-1,1}-1} \sum_{s=0}^{m_{j-1,2}-1} r_{k,s}^{j-1} q_{m,k}^{j,1} p_{l,s}^{j,2} + \sum_{k=0}^{n_{j-1,1}-1} \sum_{s=0}^{m_{j-1,2}-1} h_{k,s}^{j-1} p_{m,k}^{j,1} q_{l,s}^{j,2} + \\
&+ \left. \sum_{k=0}^{m_{j-1,1}-1} \sum_{s=0}^{m_{j-1,2}-1} d_{k,s}^{j-1} q_{m,k}^{j,1} q_{l,s}^{j,2} \right) \varphi_{j,m}^{(1)} \otimes \varphi_{j,l}^{(2)}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Если ввести в рассмотрение матрицы:

$$\begin{aligned}
C_j &= (c_{m,l}^j)_{m,l=0}^{n_{j,1}-1, n_{j,2}-1}, R_j = (r_{k,s}^j)_{k,s=0}^{m_{j,1}-1, n_{j,2}-1}, \\
H_j &= (h_{k,s}^j)_{k,s=0}^{n_{j,1}-1, m_{j,2}-1}, D_j = (d_{k,s}^j)_{k,s=0}^{m_{j,1}-1, m_{j,2}-1},
\end{aligned}$$

то из равенства (2.5) получаем [4]

$$C_j = P_{j,1} C_{j-1} P_{j,2}^T + Q_{j,1} R_{j-1} P_{j,2}^T + P_{j,1} H_{j-1} Q_{j,2}^T + Q_{j,1} D_{j-1} Q_{j,2}^T \tag{2.6}$$

Кроме того, очевидно [4], что

$$C_{j-1} = A_{j,1} C_j A_{j,2}^T; R_{j-1} = B_{j,1} C_j A_{j,2}^T; \tag{2.7}$$

$$H_{j-1} = A_{j,1} C_j B_{j,2}^T; D_{j-1} = B_{j,1} C_j B_{j,2}^T. \tag{2.8}$$

Формулы (2.7) и (2.8) дают вейвлет-разложение (дискретное вейвлет-преобразование) аппроксимации $\Pi_j f$ функции двух аргументов, а формула (2.6)

даёт вейвлет-восстановление (обратное дискретное вейвлет-преобразование) этой аппроксимации.

В работе [38] формулы (2.6 – 2.8) были применены к разработке методики уплотнения характеристического многогранника поверхности без изменения самой поверхности (обобщённый алгоритм Чайкина [41]), а в работе [37] – эта методика применена к локальной модификации поверхности вентиляторной лопатки авиационного двигателя при выкладке на неё лент из композиционных материалов. Кратко остановимся на таком преобразовании характеристического многогранника. Пусть $\varphi(x)$ – B-сплайн порядка n и $\{P_j, Q_j, A_j, B_j\}$ – соответствующий банк фильтров. Фиксируем в пространстве \mathbf{R}^3 декартову систему координат $O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Пусть $\mathbf{c} = (x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3$ и $\mathbf{c} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Рассмотрим поверхности с параметрическими представлениями

$$\mathbf{r}_{j,k}(u, v) = \sum_{i=-n}^{2^j \alpha(n+1) - 1} \sum_{s=-m}^{2^k \beta(m+1) - 1} \mathbf{c}_{i,s}^{j,k} \varphi_{j,i}(u) \varphi_{k,s}(v),$$

$$u \in [0; \alpha(n+1)], v \in [0; \beta(m+1)],$$

где $\mathbf{c}_{i,s}^{j,k} = x_{i,s}^{j,k} \mathbf{i} + y_{i,s}^{j,k} \mathbf{j} + z_{i,s}^{j,k} \mathbf{k}$.

Как известно, многогранник с вершинами $\mathbf{c}_{i,s}^{j,k}$ называется характеристическим многогранником поверхности. Если ввести в рассмотрение матрицы $X_{j,k} = (x_{i,s}^{j,k}), Y_{j,k} = (y_{i,s}^{j,k}), Z_{j,k} = (z_{i,s}^{j,k})$, то вектор-функцию $\mathbf{r}_{j,k}$ можно представить в виде

$$\mathbf{r}_{j,k}(u, v) = \Phi_j(u) X_{j,k} \Phi_k(v)^T \mathbf{i} + \Phi_j(u) Y_{j,k} \Phi_k(v)^T \mathbf{j} + \Phi_j(u) Z_{j,k} \Phi_k(v)^T \mathbf{k},$$

т.е. координаты такой вектор-функции принадлежат $V_j \otimes V_k$. Поскольку $\Phi_j = \Phi_{j+1} P_{j+1}$, то вектор-функцию поверхности можно представить в виде

$$\mathbf{r}_{j,k}(u, v) = \Phi_{j+1}(u) P_{j+1} X_{j,k} P_{k+1}^T \Phi_{k+1}(v)^T \mathbf{i} + \Phi_{j+1}(u) P_{j+1} Y_{j,k} P_{k+1}^T \Phi_{k+1}(v)^T \mathbf{j} +$$

$$+ \Phi_{j+1}(u) P_{j+1} Z_{j,k} P_{k+1}^T \Phi_{k+1}(v)^T \mathbf{k}.$$

Следовательно, преобразование

$$\begin{aligned}
X_{j+1,k+1} &= P_{j+1} X_{j,k} P_{k+1}^T, \\
Y_{j+1,k+1} &= P_{j+1} Y_{j,k} P_{k+1}^T, \\
Z_{j+1,k+1} &= P_{j+1} Z_{j,k} P_{k+1}^T
\end{aligned} \tag{2.9}$$

не меняет поверхность, но уплотняет многогранник. Согласно (2.6) это преобразование является частным случаем вейвлет-восстановления. Итак, преобразование (2.9) представляет собой алгоритм вставки дополнительных узлов в характеристический многогранник поверхности, при котором не меняется форма самой поверхности.

2.3 Вейвлеты на n -мерном параллелепипеде

Построим вейвлеты на n -мерном параллелепипеде, а также получим формулы вейвлет-разложения и вейвлет-восстановления. Для краткости будем использовать принятое в литературе обозначение, в котором по повторяющимся индексам в выражениях осуществляется суммирование.

Пусть даны последовательности

$$V_{0,i} \subset V_{1,i} \subset \dots \subset V_{j,i} \subset \dots \subset L_2[a_i; b_i]$$

конечномерных подпространств $L_2[a_i; b_i]$, масштабирующие функции $\varphi^{(i)}$ и банки фильтров $P_{j,i}, Q_{j,i}, A_{j,i}, B_{j,i}$, $i = 1, \dots, n$. Рассмотрим подпространства пространства $L_2(\prod_{i=1}^n [a_i; b_i])$

$$V_j^n = V_{j,1} \otimes \dots \otimes V_{j,n} = \text{lin} \{ f_1 \otimes \dots \otimes f_n : f_i \in V_{j,i}, i = 1, \dots, n \},$$

где функция $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ определяется равенством $f_1 \otimes \dots \otimes f_n(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \dots f_n(x_n)$. Ясно, что функции из пространства V_j^n могут быть представлены в виде

$$f_1 \otimes \dots \otimes f_n(x_1, \dots, x_n) = c_{j,k_1}^{(1)} \dots c_{j,k_n}^{(n)} \varphi_{j,k_1}^{(1)}(x_1) \dots \varphi_{j,k_n}^{(n)}(x_n).$$

Функции $\varphi_{j,k_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{j,k_n}^{(n)}$ образуют базис в пространстве V_j^n . Поскольку, если

$$\begin{aligned} c_{k_1, \dots, k_n} \varphi_{j, k_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{j, k_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \\ = \left(c_{k_1, \dots, k_n} \varphi_{j, k_2}^{(2)}(x_2) \dots \varphi_{j, k_n}^{(n)}(x_n) \right) \varphi_{j, k_1}^{(1)}(x_1) \equiv 0, \end{aligned}$$

то $c_{k_1, \dots, k_n} \varphi_{j, k_2}^{(2)}(x_2) \dots \varphi_{j, k_n}^{(n)}(x_n) \equiv 0, \forall k_1$. Продолжая рассуждение, приходим к выводу, что $c_{k_1, \dots, k_n} = 0, \forall k_1, \dots, k_n$.

Рассмотрим, как связаны между собой базисы пространств V_{j-1}^n и V_j^n .

Имеем

$$\varphi_{j-1, k_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{j-1, k_n}^{(n)} = p_{m_1, k_1}^{j,1} \dots p_{m_n, k_n}^{j,n} \varphi_{j, m_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{j, m_n}^{(n)}.$$

Отсюда $V_{j-1}^n \subset V_j^n$.

Определим пространства W_j^n следующим образом $V_j^n = V_{j-1}^n \oplus W_j^n$.

Поскольку $V_{j,i} = V_{j-1,i} \oplus W_{j-1,i}$, то

$$\begin{aligned} V_j^n &= (V_{j-1,1} \oplus W_{j-1,1}) \otimes \dots \otimes (V_{j-1,n} \oplus W_{j-1,n}) = \\ &= V_{j-1}^n \oplus (W_{j-1,1} \otimes V_{j-1,2} \otimes \dots \otimes V_{j-1,n}) \oplus \dots \oplus (W_{j-1,1} \otimes \dots \otimes W_{j-1,3}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$W_{j-1}^2 = (W_{j-1,1} \otimes V_{j-1,2} \otimes \dots \otimes V_{j-1,n}) \oplus \dots \oplus (W_{j-1,1} \otimes \dots \otimes W_{j-1,3}).$$

Пусть $f \in L_2(\prod_{i=1}^n [a_i; b_i])$ и $\Pi_j^{(n)}: L_2(\prod_{i=1}^n [a_i; b_i]) \rightarrow V_j^n$ – проектор, который определяется равенством $\Pi_j^{(n)} f = \arg \min_{g \in V_j^n} \|f - g\|$. Тогда

$$\begin{aligned} \Pi_j^{(n)} f &= c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^j \varphi_{j, \lambda_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{j, \lambda_n}^{(n)} = c_{k_1, \dots, k_n}^{j-1} \varphi_{j-1, k_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{j-1, k_n}^{(n)} + \\ &+ r_{m_1, \dots, m_n}^{j-1} \psi_{j-1, m_1}^{(1)} \otimes \varphi_{j-1, m_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes \varphi_{j-1, m_n}^{(n)} + \dots + d_{l_1, \dots, l_n}^{j-1} \psi_{j-1, l_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{j-1, l_n}^{(n)} = \\ &= \left(c_{k_1, \dots, k_n}^{j-1} p_{\lambda_1, k_1}^{j,1} \dots p_{\lambda_n, k_n}^{j,n} + r_{m_1, \dots, m_n}^{j-1} q_{\lambda_1, m_1}^{j,1} p_{\lambda_2, m_2}^{j,2} \dots p_{\lambda_n, m_n}^{j,n} + \dots \right. \\ &\left. \dots + d_{l_1, \dots, l_n}^{j-1} q_{\lambda_1, l_1}^{j,1} \dots q_{\lambda_n, l_n}^{j,n} \right) \varphi_{j, \lambda_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{j, \lambda_n}^{(n)}. \end{aligned}$$

Отсюда получаем формулу вейвлет-восстановления более точной аппроксимации функции f по менее точной и вейвлет-коэффициентам.

$$\begin{aligned} c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^j &= c_{k_1, \dots, k_n}^{j-1} p_{\lambda_1, k_1}^{j,1} \dots p_{\lambda_n, k_n}^{j,n} + \\ &+ r_{m_1, \dots, m_n}^{j-1} q_{\lambda_1, m_1}^{j,1} p_{\lambda_2, m_2}^{j,2} \dots p_{\lambda_n, m_n}^{j,n} + \dots + d_{l_1, \dots, l_n}^{j-1} q_{\lambda_1, l_1}^{j,1} \dots q_{\lambda_n, l_n}^{j,n}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Поскольку линейные операторы (проекторы) $\Pi_{j,i}^V: V_{j,i} \rightarrow V_{j-1,i}$, $\Pi_{j,i}^W: V_{j,i} \rightarrow W_{j-1,i}$ определяются матрицами $\mathbf{A}_{j,i} = (a_{km}^{j,i})_{k=0,m=0}^{n_{j-1,i}-1, n_{j,i}-1}$, $\mathbf{B}_{j,i} = (b_{km}^{j,i})_{k=0,m=0}^{n_{j-1,i}-1, n_{j,i}-1}$, то должны иметь место равенства

$$\varphi_{j,k}^{(i)} = a_{s,k}^{j,i} \cdot \varphi_{j-1,s}^{(i)} + b_{l,k}^{j,i} \cdot \psi_{j-1,l}^{(i)}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \Pi_j^{(n)} f &= c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^j \varphi_{j, \lambda_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{j, \lambda_n}^{(n)} = \\ &= c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^j \left(a_{s_1, \lambda_1}^{j,1} \cdot \varphi_{j-1, s_1}^{(1)} + b_{l_1, \lambda_1}^{j,1} \cdot \psi_{j-1, l_1}^{(1)} \right) \otimes \dots \otimes \left(a_{s_n, \lambda_n}^{j,n} \cdot \varphi_{j-1, s_n}^{(n)} + b_{l_n, \lambda_n}^{j,n} \cdot \psi_{j-1, l_n}^{(n)} \right) = \\ &= c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^j a_{s_1, \lambda_1}^{j,1} \dots a_{s_n, \lambda_n}^{j,n} \varphi_{j-1, s_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \varphi_{j-1, s_n}^{(n)} + \\ &+ c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^j b_{l_1, \lambda_1}^{j,1} a_{s_2, \lambda_2}^{j,2} \dots a_{s_n, \lambda_n}^{j,n} \psi_{j-1, l_1}^{(1)} \otimes \varphi_{j-1, s_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes \varphi_{j-1, s_n}^{(n)} + \dots \\ &\dots + c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^j b_{l_1, \lambda_1}^{j,1} \dots b_{l_n, \lambda_n}^{j,n} \psi_{j-1, l_1}^{(1)} \otimes \dots \otimes \psi_{j-1, l_n}^{(n)}. \end{aligned}$$

И получаем формулы вейвлет-разложения:

$$\begin{aligned} c_{s_1, \dots, s_n}^{j-1} &= c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^j a_{s_1, \lambda_1}^{j,1} \dots a_{s_n, \lambda_n}^{j,n}; \\ r_{l_1, s_2, \dots, s_n}^{j-1} &= c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^j b_{l_1, \lambda_1}^{j,1} a_{s_2, \lambda_2}^{j,2} \dots a_{s_n, \lambda_n}^{j,n}; \\ &\dots \\ d_{l_1, \dots, l_n}^{j-1} &= c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^j b_{l_1, \lambda_1}^{j,1} \dots b_{l_n, \lambda_n}^{j,n}. \end{aligned}$$

2.4 Вычислительные алгоритмы для локально-аппроксимационных сплайнов, основанные на вейвлет-преобразовании и свёртке

В этом разделе обобщим понятие локально-аппроксимационного сплайна, данное в работе [14], проанализируем его свойства и получим некоторые вычислительные формулы для нахождения значений локально-аппроксимационного сплайна и его частных производных в узлах сетки, основанные на обратном дискретном вейвлет-преобразовании и свёртке. Полученные формулы в дальнейшем будем использовать в приближённом вычислении частных производных масштабирующих функций и вейвлетов, которые будут построены с помощью схемы подъёма. Это, в свою очередь,

позволит распараллелить процедуру построения вейвлет-системы на заданном подмножестве пространства \mathbf{R}^n . Кроме того, эти формулы будут использованы для нахождения аппроксимации диффеоморфизма плоских областей.

Рассмотрим следующие В-сплайны

$$N_{l,m,i}(x) = N_{m-1}(2^l x + m - i), \quad l, i \in \mathbf{Z}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Отметим некоторые очевидные свойства этих функций.

Лемма 2.3. Имеет место равенство

$$N_{l,m,i}(x) = N_{l,m,m}(x + 2^{-l}(m - i)) \quad (2.11)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} N_{l,m,m}(x + 2^{-l}(m - i)) &= N_{m-1}\left(2^l(x + 2^{-l}(m - i))\right) = N_{m-1}(2^l x + m - i) \\ &= N_{l,m,i}(x). \end{aligned}$$

Лемма 2.4. Имеет место равенство

$$N_{0,m,m}(2^l x + k) = N_{l,m,m-k}(x). \quad (2.12)$$

Доказательство. Имеем

$$N_{l,m,m-k}(x) = N_{m-1}(2^l x + k) = N_{0,m,m}(2^l x + k).$$

Лемма 2.5. Функции $N_{l,m,i}(x)$ удовлетворяют следующему соотношению Кокса-Де Бура [10, 14]

$$\begin{aligned} N_{l,m,i}(x) &= \frac{i - 2^l x}{m - 1} N_{l,m-1,i}(x) + \frac{2^l x - i + m}{m - 1} N_{l,m-1,i-1}(x), \\ N_{l,1,i}(x) &= \begin{cases} 1, & x \in \left[\frac{i-1}{2^l}, \frac{i}{2^l} \right); \\ 0, & x \notin \left[\frac{i-1}{2^l}, \frac{i}{2^l} \right). \end{cases} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Справедливо равенство

$$N'_{l,m,i}(x) = 2^l N_{l,m-1,i-1}(x) - 2^l N_{l,m-1,i}(x). \quad (2.14)$$

Доказательство. Из равенства (2.3) получаем

$$N_{l,m,i}(x) = N_{m-1}(2^l x + m - i) = \frac{2^l x + m - i}{m - 1} N_{m-2}(2^l x + m - i) + \frac{m - (2^l x + m - i)}{m - 1} N_{m-2}(2^l x + m - i - 1).$$

Учитывая, что $N_{m-2}(2^l x + m - i) = N_{l,m-1,i-1}(x)$, $N_{m-2}(2^l x + m - i - 1) = N_{l,m-1,i}(x)$, получаем утверждение леммы. Равенство (2.14) следует из равенства (2.4).

Лемма 2.6. Функция $N_{0,m,m}$ удовлетворяет масштабному соотношению

$$N_{0,m,m}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{p_k}{2^{m-1}} N_{0,m,m}(2x - k), \quad p_k = \frac{m!}{k!(m-k)!}. \quad (2.15)$$

Доказательство. Из (2.2) следует

$$N_{0,m,m}(x) = N_{m-1}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{p_k}{2^{m-1}} N_{m-1}(2x - k) = \sum_{k=0}^m \frac{p_k}{2^{m-1}} N_{1,m,m+k}(x).$$

Из равенства (2.12) получаем $N_{1,m,m+k}(x) = N_{0,m,m}(2x - k)$. \square

Лемма 2.7. Функция $N_{l,m,i}(x)$ удовлетворяет соотношению

$$N_{l,m,i}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{p_k}{2^{m-1}} N_{l+1,m,2i+k-m}(x). \quad (2.16)$$

Доказательство. Из (2.12) следует $N_{l,m,i}(x) = N_{0,m,m}(2^l x + m - i)$. Отсюда на основании (2.15) заключаем

$$\begin{aligned} N_{l,m,i}(x) &= \sum_{k=0}^m \frac{p_k}{2^{m-1}} N_{0,m,m}(2(2^l x + m - i) - k) = \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{p_k}{2^{m-1}} N_{0,m,m}(2^{l+1} x + (2m - 2i - k)) = \\ &= \sum_{k=0}^m \frac{p_k}{2^{m-1}} N_{l+1,m,2i+k-m}(x). \end{aligned}$$

\square

Рассмотрим случай $m = 4$. Тогда соотношение (2.16) примет следующий вид

$$N_{l,4,i}(x) = \frac{1}{8}N_{l+1,4,2i-4}(x) + \frac{1}{2}N_{l+1,4,2i-3}(x) + \frac{3}{4}N_{l+1,4,2i-2}(x) + \\ + \frac{1}{2}N_{l+1,4,2i-1}(x) + \frac{1}{8}N_{l+1,4,2i}(x).$$

На рис. 2.1 показаны эти функции.

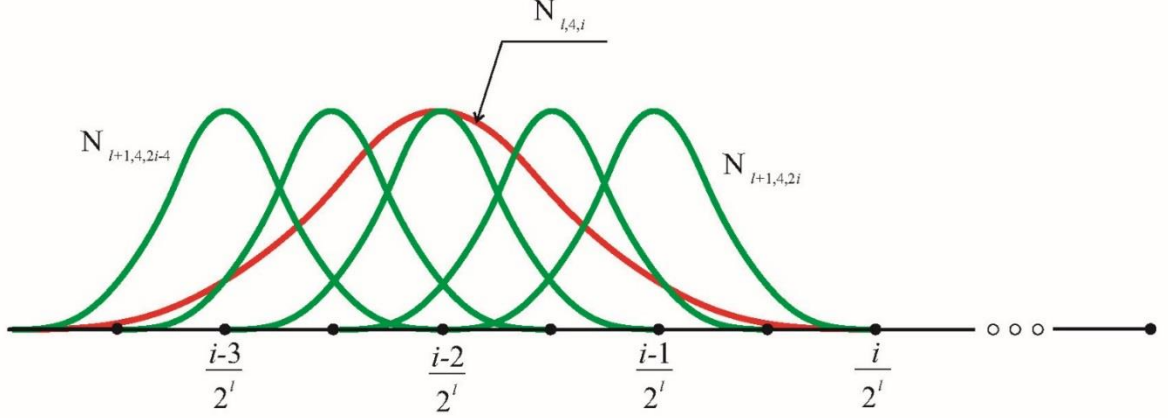


Рис. 2.1 – В-сплайны из масштабного соотношения

Определение 2.1. [14] Пусть $g_\lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda = \lambda_0 - 2, \dots, \lambda_1 + 2$, $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbf{Z}$, $l \in \mathbf{N} \cup \{0\}$.

Локально-аппроксимационный сплайн определим равенством

$$g(t) = \sum_{\lambda=\lambda_0+1}^{\lambda_1+3} \sum_{i=-1}^1 a_i g_{\lambda-2-i} N_{l,4,\lambda}(t), \quad t \in [2^{-l}\lambda_0; 2^{-l}\lambda_1],$$

где $a_{-1} = a_1 = -\frac{1}{6}$, $a_0 = \frac{4}{3}$.

В дальнейшем удобно считать, что $g_\lambda = 0$ для всех $\lambda \neq \lambda_0 - 2, \dots, \lambda_1 + 2$. В этом случае локально-аппроксимационный сплайн можно записать в виде

$$g(t) = \sum_{\lambda \in \mathbf{Z}} \sum_{i=-1}^1 a_i g_{\lambda-2-i} N_{l,4,\lambda}(t).$$

Предположим, что значения $f_{k_1, \dots, k_n} = f(u_{l, k_1, \dots, k_n})$, $k_1, \dots, k_n \in \mathbf{Z}$ функции $f(u_1, \dots, u_n)$ известны в узлах сетки

$$u_{l, k_1, \dots, k_n} = (2^{-l}k_1 \quad \dots \quad 2^{-l}k_n),$$

$$k_1 = k_{l,1,0} - 2, k_{l,1,0} - 1, \dots, k_{l,1,1} + 2; \dots, k_n = k_{l,n,0} - 2, k_{l,n,0} - 1, \dots, k_{l,n,1} + 2.$$

Предполагается, что $k_{l+1,i,s} = 2 \cdot k_{l,i,s}$, $i = 1, 2, \dots, n$, $s = 0, 1$. Нас интересуют значения функции и её частных производных только на множестве $X = \prod_{i=1}^n \left[\frac{k_{l,i,0}}{2^l}; \frac{k_{l,i,1}}{2^l} \right]$. Кроме того, считаем, что $\text{supp } f \subset \prod_{i=1}^n \left[\frac{k_{l,i,0}-2}{2^l}; \frac{k_{l,i,1}+2}{2^l} \right]$.

Определение 2.2. Определим локально-аппроксимационный сплайн от n переменных следующим равенством

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u_1, \dots, u_n) &= \\ &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{Z}} \sum_{i_1, \dots, i_n = -1}^1 a_{i_1} \dots a_{i_n} f_{\lambda_1 - i_1 - 2, \dots, \lambda_n - i_n - 2} N_{l,4,\lambda_1}(u_1) \dots N_{l,4,\lambda_n}(u_n). \end{aligned}$$

Теорема 2.1. Если $f \in C(X)$, то для всех $(u_1, \dots, u_n) \in X$ справедлива оценка

$$|f(u_1, \dots, u_n) - \tilde{f}(u_1, \dots, u_n)| \leq \sum_{i_1, \dots, i_n = -1}^1 |a_{i_1}| \dots |a_{i_n}| \cdot \omega\left(f, \frac{5\sqrt{n}}{2^l}\right).$$

Если $f \in C^1(X)$, то для всех $(u_1, \dots, u_n) \in X$ справедлива оценка

$$|f'_{u_i}(u_1, \dots, u_n) - \tilde{f}'_{u_i}(u_1, \dots, u_n)| \leq \sum_{i_1, \dots, i_n = -1}^1 |a_{i_1}| \dots |a_{i_n}| \cdot \omega\left(f'_{u_i}, \frac{5\sqrt{n}}{2^l}\right).$$

Если $f \in C^2(X)$, то для всех $(u_1, \dots, u_n) \in X$ справедлива оценка

$$|f''_{u_i u_j}(u_1, \dots, u_n) - \tilde{f}''_{u_i u_j}(u_1, \dots, u_n)| \leq 2 \sum_{i_1, \dots, i_n = -1}^1 |a_{i_1}| \dots |a_{i_n}| \cdot \omega\left(f''_{u_i u_j}, \frac{5\sqrt{n}}{2^l}\right).$$

Доказательство. Пусть

$$u_i \in [2^{-l}\mu_i; 2^{-l}(\mu_i + 1)], \quad \mu_i \in \{k_{l,i,0}, k_{l,i,0} + 1, \dots, k_{l,i,1} - 1\} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

В этом случае в выражении для локально-аппроксимационного сплайна отличными от нуля будут только слагаемые с индексами $\lambda_i = \mu_i + 1, \dots, \mu_i + 4$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Так как В-сплайны образуют разбиение единицы, то

$$\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{Z}} \sum_{i_1, \dots, i_n = -1}^1 a_{i_1} \dots a_{i_n} N_{l,4,\lambda_1}(u_1) \dots N_{l,4,\lambda_n}(u_n) \equiv 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
& |f(u_1, \dots, u_n) - \tilde{f}(u_1, \dots, u_n)| = \\
& = \left| \sum_{\lambda_1=\mu_1+1, \dots, \lambda_n=\mu_n+1}^{\mu_1+4, \dots, \mu_n+4} \sum_{i_1, \dots, i_n=-1}^1 a_{i_1} \dots a_{i_n} (f_{\lambda_1-i_1-2, \dots, \lambda_n-i_n-2} - \right. \\
& \left. - f(u_1, \dots, u_n)) \cdot N_{l,4,\lambda_1}(u_1) \dots N_{l,4,\lambda_n}(u_n) \right| \leq \sum_{i_1, \dots, i_n=-1}^1 |a_{i_1}| \dots |a_{i_n}| \cdot \omega\left(f, \frac{5\sqrt{n}}{2^l}\right)
\end{aligned}$$

Пусть $f \in C^1(X)$. Для сокращения записи будем считать, что $i = 1$. С учётом формулы (2.14) получаем

$$\begin{aligned}
& \tilde{f}'_{u_1}(u_1, \dots, u_n) = \\
& = 2^l \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{Z}} \sum_{i_1, \dots, i_n=-1}^1 a_{i_1} \dots a_{i_n} f_{\lambda_1-i_1-2, \dots, \lambda_n-i_n-2} \cdot \\
& \cdot \left(N_{l,3,\lambda_1-1}(u_1) - N_{l,3,\lambda_1}(u_1) \right) N_{l,4,\lambda_2}(u_2) \dots N_{l,4,\lambda_n}(u_n) = \\
& = 2^l \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{Z}} \sum_{i_1, \dots, i_n=-1}^1 a_{i_1} \dots a_{i_n} (f_{\lambda_1-i_1-1, \dots, \lambda_n-i_n-2} - f_{\lambda_1-i_1-2, \dots, \lambda_n-i_n-2}) \cdot \\
& \cdot N_{l,3,\lambda_1}(u_1) N_{l,4,\lambda_2}(u_2) \dots N_{l,4,\lambda_n}(u_n).
\end{aligned}$$

По теореме Лагранжа

$$2^l (f_{\lambda_1-i_1-1, \dots, \lambda_n-i_n-2} - f_{\lambda_1-i_1-2, \dots, \lambda_n-i_n-2}) = f'_{u_1} \left(\xi_1, \frac{\lambda_2 - i_2 - 2}{2^l}, \dots, \frac{\lambda_n - i_n - 2}{2^l} \right),$$

где $\xi_1 \in (2^{-l}(\lambda_1 - i_1 - 2); 2^{-l}(\lambda_1 - i_1 - 1))$.

Далее снова применяем приём, представленный в доказательстве первого неравенства и получаем вторую оценку.

Для получения последней оценки рассмотрим отдельно чистую и смешанную вторую частную производные. Для сокращения выкладок будем оценивать производные \tilde{f}''_{u_1, u_1} и \tilde{f}''_{u_1, u_2} . Имеем

$$\begin{aligned}
& \tilde{f}_{u_1, u_1}''(u_1, \dots, u_n) = \\
& = 2^{2l} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{Z}} \sum_{i_1, \dots, i_n = -1}^1 a_{i_1} \dots a_{i_n} f_{\lambda_1 - i_1 - 2, \dots, \lambda_n - i_n - 2} \cdot \\
& \cdot \left(N_{l, 2, \lambda_1 - 2}(u_1) - 2N_{l, 2, \lambda_1 - 1} + N_{l, 2, \lambda_1}(u_1) \right) N_{l, 4, \lambda_2}(u_2) \dots N_{l, 4, \lambda_n}(u_n) = \\
& = 2^{2l} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{Z}} \sum_{i_1, \dots, i_n = -1}^1 a_{i_1} \dots a_{i_n} (f_{\lambda_1 - i_1, \dots, \lambda_n - i_n - 2} - 2f_{\lambda_1 - i_1 - 1, \dots, \lambda_n - i_n - 2} + \\
& + f_{\lambda_1 - i_1 - 2, \dots, \lambda_n - i_n - 2}) \cdot N_{l, 2, \lambda_1}(u_1) N_{l, 4, \lambda_2}(u_2) \dots N_{l, 4, \lambda_n}(u_n) =
\end{aligned}$$

Для преобразования выражения в скобках рассмотрим функцию

$$F(u_1) = f(u_1 - 2^{-l}i_1, 2^{-l}(\lambda_2 - i_2 - 2), \dots, 2^{-l}(\lambda_n - i_n - 2)).$$

Пусть $u_1 = 2^{-l}(\lambda_1 - 2)$, $\Delta u_1 = 2^{-l}$. Тогда, дважды применяя теорему Лагранжа, получим

$$\begin{aligned}
& f_{\lambda_1 - i_1, \dots, \lambda_n - i_n - 2} - 2f_{\lambda_1 - i_1 - 1, \dots, \lambda_n - i_n - 2} + f_{\lambda_1 - i_1 - 2, \dots, \lambda_n - i_n - 2} = \\
& = \left(F((u_1 + \Delta u_1) + \Delta u_1) - F(u_1 + \Delta u_1) \right) - \left(F(u_1 + \Delta u_1) - F(u_1) \right) = \\
& = \left(F'(u_1 + \theta_1 \Delta u_1 + \Delta u_1) - F'(u_1 + \theta_1 \Delta u_1) \right) \Delta u_1 = \\
& = F''(u_1 + (\theta_1 + \theta_2) \Delta u_1) (\Delta u_1)^2,
\end{aligned}$$

где $\theta_1, \theta_2 \in (0; 1)$.

Снова применив приём, представленный в доказательстве первого неравенства, получим третью оценку.

Для смешанной частной производной произведение производных В-сплайнов распадётся в сумму

$$\begin{aligned}
& \left(N_{l, 3, \lambda_1 - 1}(u_1) - N_{l, 3, \lambda_1}(u_1) \right) \left(N_{l, 3, \lambda_2 - 1}(u_2) - N_{l, 3, \lambda_2}(u_2) \right) \dots N_{l, 4, \lambda_n}(u_n) = \\
& = N_{l, 3, \lambda_1 - 1}(u_1) N_{l, 3, \lambda_2 - 1}(u_2) \dots N_{l, 4, \lambda_n}(u_n) - N_{l, 3, \lambda_1 - 1}(u_1) N_{l, 3, \lambda_2}(u_2) \dots N_{l, 4, \lambda_n}(u_n) - \\
& - N_{l, 3, \lambda_1}(u_1) N_{l, 3, \lambda_2 - 1}(u_2) \dots N_{l, 4, \lambda_n}(u_n) + N_{l, 3, \lambda_1}(u_1) N_{l, 3, \lambda_2}(u_2) \dots N_{l, 4, \lambda_n}(u_n).
\end{aligned}$$

После изменения индекса суммирования для второй частной производной локально-аппроксимационного сплайна получим выражение

$$\begin{aligned}
\tilde{f}_{u_1, u_2}''(u_1, \dots, u_n) &= \\
&= 2^{2l} \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{Z}} \sum_{i_1, \dots, i_n = -1}^1 a_{i_1} \dots a_{i_n} (f_{\lambda_1 - i_1 - 1, \lambda_2 - i_2 - 1, \dots, \lambda_n - i_n - 2} - f_{\lambda_1 - i_1 - 2, \lambda_2 - i_2 - 1, \dots, \lambda_n - i_n - 2} \\
&\quad - f_{\lambda_1 - i_1 - 1, \lambda_2 - i_2 - 2, \dots, \lambda_n - i_n - 2} + f_{\lambda_1 - i_1 - 2, \lambda_2 - i_2 - 2, \dots, \lambda_n - i_n - 2}) \cdot \\
&\quad \cdot N_{l, 3, \lambda_1}(u_1) N_{l, 3, \lambda_2}(u_2) \dots N_{l, 4, \lambda_n}(u_n).
\end{aligned}$$

Для преобразования выражения в скобках введём обозначение

$$F(u_1, u_2) = f(u_1 - 2^{-l}i_1, u_2 - 2^{-l}i_2, 2^{-l}(\lambda_3 - i_3 - 2), \dots, 2^{-l}(\lambda_n - i_n - 2)).$$

Пусть $u_1 = 2^{-l}(\lambda_1 - 2)$, $u_2 = 2^{-l}(\lambda_2 - 2)$ и $\Delta u_1 = \Delta u_2 = 2^{-l}$. Тогда выражение в скобках можно записать в виде

$$F(u_1 + \Delta u_1, u_2 + \Delta u_2) - F(u_1, u_2 + \Delta u_2) - F(u_1 + \Delta u_1, u_2) + F(u_1, u_2),$$

что, очевидно может быть преобразовано к виду $F_{u_1, u_2}''(\xi_1, \xi_2)\Delta u_1 \Delta u_2$, где ξ_i лежит между u_i и $u_i + \Delta u_i$. Далее все аналогично первой оценке. \square

Пусть $M: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Для значений $M(k_1, \dots, k_n)$ будем также использовать обозначение M_{k_1, \dots, k_n} .

Определение 2.3. Пусть $M: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R}$ и $F: \mathbf{Z}^n \rightarrow \mathbf{R}$ – две функции с компактными носителями. Свертку этих функций $M * F$ определим равенством

$$(M * F)_{m_1, \dots, m_n} = \sum_{k_1, \dots, k_n = -\infty}^{+\infty} M_{k_1, \dots, k_n} F_{m_1 - k_1, \dots, m_n - k_n}.$$

Функцию M будем называть ядром свёртки.

Если обозначить $c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(l)} = \sum_{i_1, \dots, i_n = -1}^1 a_{i_1} \dots a_{i_n} f_{\lambda_1 - i_1 - 2, \dots, \lambda_n - i_n - 2}$, то ясно, что

$$c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(l)} = ((a \otimes \dots \otimes a) * f)_{\lambda_1 - 2, \dots, \lambda_n - 2}.$$

Здесь предполагается, что $a_i = 0$, если $i \neq -1, 0, 1$.

Из соотношения Кокса - Де Бура (2.13) находим

$$\begin{aligned}
N_{l, 4, i} \left(\frac{i-3}{2^l} \right) &= \frac{1}{6}; \quad N_{l, 4, i} \left(\frac{i-2}{2^l} \right) = \frac{2}{3}; \quad N_{l, 4, i} \left(\frac{i-1}{2^l} \right) = \frac{1}{6}; \\
N_{l, 3, i} \left(\frac{i-2}{2^l} \right) &= N_{l, 3, i} \left(\frac{i-1}{2^l} \right) = \frac{1}{2}, \quad N_{l, 2, i} \left(\frac{i-1}{2^l} \right) = 1.
\end{aligned}$$

Следовательно, на основании формулы (2.14) получаем

$$N'_{l,4,i} \left(\frac{i-3}{2^l} \right) = 2^{l-1}, N'_{l,4,i} \left(\frac{i-2}{2^l} \right) = 0, N'_{l,4,i} \left(\frac{i-1}{2^l} \right) = -2^{l-1};$$

$$N''_{l,4,i} \left(\frac{i-3}{2^l} \right) = 2^{2l}, N''_{l,4,i} \left(\frac{i-2}{2^l} \right) = -2^{2l+1}, N''_{l,4,i} \left(\frac{i-1}{2^l} \right) = 2^{2l}.$$

Введём в рассмотрение функции $d^i: \mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}$, $i = 0,1,2$, определённые равенствами

$$d_{-1}^0 = \frac{1}{6}, d_0^0 = \frac{4}{6}, d_1^0 = \frac{1}{6}, d_k^0 = 0, k \neq -1,0,1;$$

$$d_{-1}^1 = 2^{l-1}, d_1^1 = -2^{l-1}, d_k^1 = 0, k \neq -1,1;$$

$$d_{-1}^2 = 2^{2l}, d_0^2 = -2 \cdot 2^{2l}, d_1^2 = 2^{2l}, d_k^2 = 0, k \neq -1,0,1.$$

Таким образом, $d_k^p = \partial^{(p)} N_{l,4,i} \left(\frac{k+i-2}{2^l} \right)$. Для краткости будем использовать обозначение $d^0 = \frac{1}{6}(1 \ 4 \ 1)$, $d^1 = 2^{l-1}(1 \ 0 \ -1)$, $d^2 = 2^{2l}(1 \ -2 \ 1)$, указывая только значения этих функций на носителе $\{-1,0,1\}$.

Теорема 2.2. Пусть \tilde{f} – локально-аппроксимационный сплайн, тогда значения частных производных функции \tilde{f} в узлах $\mathbf{u}_{l,k_1,\dots,k_n}$ определяются равенствами

$$\partial^{(s_1,\dots,s_n)} \tilde{f}(\mathbf{u}_{l,k_1,\dots,k_n}) = ((d^{s_1} \otimes \dots \otimes d^{s_n}) * ((a \otimes \dots \otimes a) * f))_{k_1,\dots,k_n}, \quad (2.17)$$

$$s_1, \dots, s_n = 0,1,2, s_1 + \dots + s_n \leq 2;$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \partial^{(s_1,\dots,s_n)} \tilde{f}(\mathbf{u}_{l,k_1,\dots,k_n}) &= \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} c_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}^{(l)} \partial^{(s_1)} N_{l,4,\lambda_1}(2^{-l}k_1) \dots \partial^{(s_n)} N_{l,4,\lambda_n}(2^{-l}k_n) = \\ &= \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} c_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}^{(l)} d_{k_1-\lambda_1+2}^{s_1} \dots d_{k_n-\lambda_n+2}^{s_n} = \\ &= \sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_n} c_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}^{(l)} (d^{s_1} \otimes \dots \otimes d^{s_n})_{k_1-\lambda_1+2,\dots,k_n-\lambda_n+2} = \\ &= \sum_{\mu_1,\dots,\mu_n} c_{\mu_1+2,\dots,\mu_n+2}^{(l)} (d^{s_1} \otimes \dots \otimes d^{s_n})_{k_1-\mu_1,\dots,k_n-\mu_n} = \\ &= \sum_{\mu_1,\dots,\mu_n} (d^{s_1} \otimes \dots \otimes d^{s_n})_{k_1-\mu_1,\dots,k_n-\mu_n} ((a \otimes \dots \otimes a) * f)_{\mu_1,\dots,\mu_n} = \\ &= \left((d^{s_1} \otimes \dots \otimes d^{s_n}) * ((a \otimes \dots \otimes a) * f) \right)_{k_1,\dots,k_n}. \end{aligned}$$

□

Пусть

$$\Phi_{j,i}(u_i) = (N_{j,4,k_{j,i,0}+1}(u_i) \quad \dots \quad N_{j,4,k_{j,i,1}+3}(u_i))$$

и

$$P_{j+1,i} = (p_{\lambda,\mu}^{j+1,i}) = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 6 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 4 \end{pmatrix},$$

$$\lambda = k_{j+1,i,0} + 1, k_{j+1,i,0} + 2, \dots, k_{j+1,i,1} + 3, \quad \mu = k_{j,i,0} + 1, k_{j,i,0} + 2, \dots, k_{j,i,1} + 3,$$

матрица размера $(2(k_{j,i,1} - k_{j,i,0}) + 3) \times (k_{j,i,1} - k_{j,i,0} + 3)$, $i = 1, 2$. Тогда из равенства (2.16) следует $\Phi_{j,i} = \Phi_{j+1,i} \cdot P_{j+1,i}$. Используя данное преобразование, можно найти аппроксимацию функции f и её частных производных на более мелкой сетке, чем та, на которой она задана.

Следствие 2.1. Пусть \tilde{f} – локально-аппроксимационный сплайн. Тогда значения частных производных функции \tilde{f} в узлах $\mathbf{u}_{l+j,k_1,\dots,k_n}$, $j \geq 0$ определяются равенствами:

$$\partial^{(s_1,\dots,s_n)} \tilde{f}(\mathbf{u}_{l+j,k_1,\dots,k_n}) = \left((d^{s_1} \otimes \dots \otimes d^{s_n}) * c^{(l+j)} \right)_{k_1+2,\dots,k_n+2},$$

$$s_1, \dots, s_n = 0, 1, 2, \quad s_1 + \dots + s_n \leq 2,$$

где

$$c_{m_1,\dots,m_n}^{(l+\mu+1)} = c_{k_1,\dots,k_n}^{(l+\mu)} p_{m_1,k_1}^{l+\mu+1,1} \dots p_{m_n,k_n}^{l+\mu+1,n}, \quad \mu = 0, 1, \dots, j-1. \quad (2.18)$$

Доказательство. Следствие получается из равенства

$$\begin{aligned} \tilde{f}(u_1, \dots, u_n) &= \sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^l N_{l,4,\lambda_1}(u_1) \dots N_{l,4,\lambda_n}(u_n) = \\ &= \sum_{\mu_1, \dots, \mu_n} \left(\sum_{\lambda_1, \dots, \lambda_n} c_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^l p_{\mu_1, \lambda_1}^{l+1,1} \dots p_{\mu_n, \lambda_n}^{l+1,n} \right) N_{l+1,4,\mu_1}(u_1) \dots N_{l+1,4,\mu_n}(u_n) \end{aligned}$$

метода математической индукции и предыдущей теоремы. \square

Из формулы (2.10) следует, что преобразование (2.18) есть частный случай вейвлет-восстановления. На рис. 2.2 показан пример использования следствия 2.1 при построении подразделения триангуляции кольца.

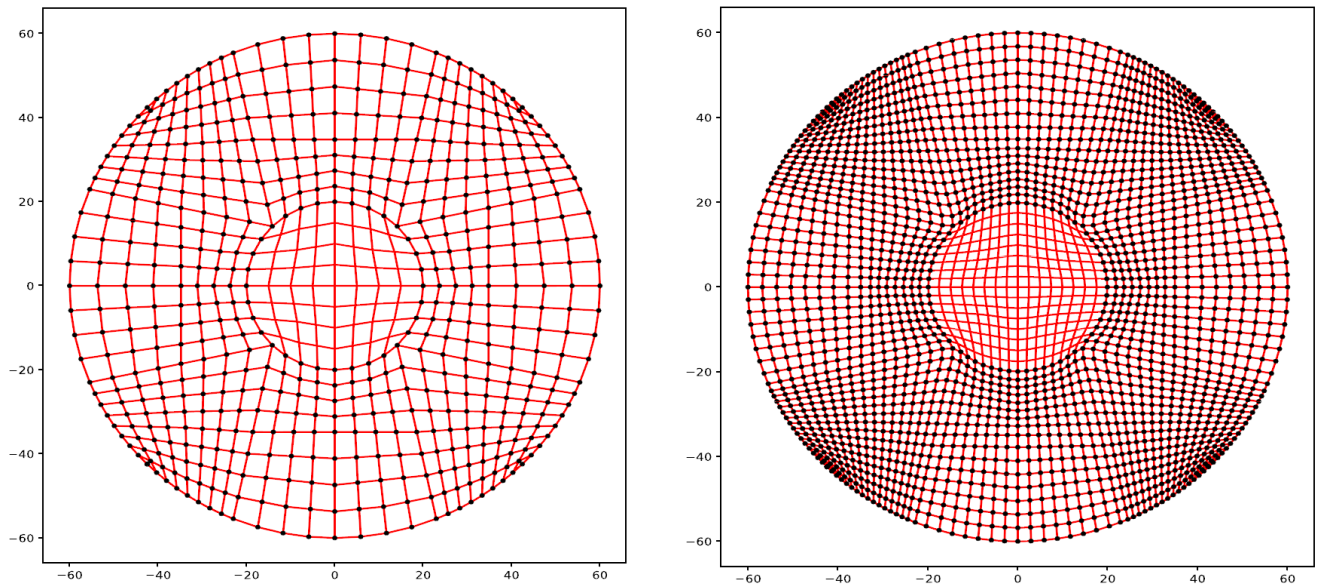


Рис. 2.2 – Построение подразделения триангуляции кольца

2.5 Схемы подразделений

Методы подразделения представляют собой большой класс рекурсивных схем для построения кривых и поверхностей. Алгоритмы начинают работу с некоторого начального набора дискретных данных, называемых опорными точками, которые можно визуализировать как вершины заданной многогранной поверхности. Конкретный алгоритм определяется несколькими простыми линейными правилами, которые используются неоднократно, последовательно генерируя более плотные наборы точек из начального набора. На любом шаге предельная кривая или поверхность может быть аппроксимирована ломаной или многогранником, который интерполирует полученный на этом шаге набор точек.

Пусть $n \in \mathbf{N}$ и \mathbf{Z}^n – целочисленная решетка. Схема подразделения определяется заданной последовательностью $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^n}$. Будем предполагать, что $\text{supp } A = \{\alpha: A_\alpha \neq 0\}$ – конечное множество. Обозначим $l_\infty(\mathbf{Z}^n)$ линейное нормированное пространство ограниченных последовательностей $v = \{v_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^n}$, в котором норма определяется равенством

$$\|v\|_\infty = \sup_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} |v_\alpha|.$$

Введём в рассмотрение оператор $S: l_\infty(\mathbf{Z}^n) \rightarrow l_\infty(\mathbf{Z}^n)$, который определим формулой [40]

$$(Sv)_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^n} A_{\alpha-2\beta} v_\beta, \quad v \in l_\infty(\mathbf{Z}^n). \quad (2.19)$$

Определение 2.4. [40] Будем считать, что схема подразделения

$$v^m = Sv^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad v^0 = v \quad (2.20)$$

сходится в $l_\infty(\mathbf{Z}^n)$, если существует непрерывная функция f_v , определенная на \mathbf{R}^n такая, что

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \left\| f_v\left(\frac{\cdot}{2^m}\right) - v^m \right\|_\infty = 0. \quad (2.21)$$

Если функция f_v удовлетворяет дополнительному свойству $f_v(k) = v_k$, $k \in \mathbf{Z}^n$, то она называется интерполяционной.

Последовательность $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^n}$ будем называть маской подразделения, а S – оператором подразделения. Следует заметить, что для интерполяционной схемы должно быть выполнено условие [40]

$$A_{2k} = \delta_{0,k}. \quad (2.22)$$

Доказательство следующих результатов можно найти в работе [40].

Лемма 2.8. Предположим, что схема подразделения сходится для некоторого $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^n)$ и $f_v \neq 0$. Тогда маска удовлетворяет условию

$$\sum_{\beta \in \mathbf{Z}^n} A_{\alpha-2\beta} = 1, \quad \alpha \in \mathbf{Z}^n. \quad (2.23)$$

Теорема 2.3. [40] Предположим, что схема (2.19) сходится для всех $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^n)$ и для некоторого $v \in l_\infty(\mathbf{Z}^n)$ функция $f_v \neq 0$. Тогда маска $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^n}$ определяет единственную непрерывную функцию с компактным носителем φ , удовлетворяющую условиям:

$$\varphi(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} A_\alpha \varphi(2x - \alpha), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad (2.24)$$

$$\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} \varphi(x - \alpha) = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n. \quad (2.25)$$

Более того,

$$f_\nu(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} \nu_\alpha \varphi(x - \alpha), \quad x \in \mathbf{R}^n. \quad (2.26)$$

Пусть χ – любая функция с компактным носителем. Определим оператор

$$(T\chi)(x) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} A_\alpha \chi(2x - \alpha). \quad (2.27)$$

Как показано в работе [40], если $\sum_{\alpha \in \mathbf{Z}^n} \chi(x - \alpha) = 1$, то $\lim_{m \rightarrow +\infty} T^m \chi = \varphi$. Этот факт даёт способ вычисления значений функции φ .

Теорема 2.4. [40] Предположим, что $\{B_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{Z}^s}$ и $\{C_\beta\}_{\beta \in \mathbf{Z}^t}$ – две маски с конечными носителями, а, связанные с ними схемы подразделения определяют функции φ_B и φ_C , соответственно. Тогда схема подразделения с маской $\{A_{\alpha,\beta} = B_\alpha C_\beta\}_{(\alpha,\beta) \in \mathbf{Z}^{s+t}}$ определяет функцию $(\varphi_B \otimes \varphi_C)(x, y) = \varphi_B(x)\varphi_C(y)$, $x \in \mathbf{R}^s$, $y \in \mathbf{R}^t$.

В дальнейшем нам потребуется следующий результат.

Лемма 2.9. Пусть $\nu^{0,l} = \{\delta_{k,l}\}_{k \in \mathbf{Z}^n}$. Тогда $\nu_k^{m,l} = \nu_{k-2^m l}^{m,0}$.

Доказательство. Докажем индукцией по m . При $m = 1$ получаем

$$\nu_k^{1,0} = A_k, \quad \nu_k^{1,l} = A_{k-2l} = \nu_{k-2l}^{1,0}.$$

Предположим, что утверждение верно для всех натуральных чисел до m включительно, и докажем его для $m + 1$.

$$\nu_k^{m+1,l} = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^n} A_{k-2\beta} \nu_\beta^{m,l} = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^n} A_{k-2\beta} \nu_{\beta-2^m l}^{m,0}.$$

Пусть $\gamma = \beta - 2^m l$. Тогда

$$\nu_k^{m+1,l} = \sum_{\gamma \in \mathbf{Z}^n} A_{k-2^{m+1}l-2\gamma} \nu_\gamma^{m,0} = \nu_{k-2^{m+1}l}^{m+1,0}.$$

□

Следует заметить [40], что $\text{supp } \nu^{j+1} \subset 2\text{supp } \nu^j + \text{supp } A$. Отсюда получаем

$$\text{supp } \nu^{j+J} \subset 2^J \text{supp } \nu^j + (2^J - 1)\text{supp } A. \quad (2.28)$$

Рассмотрим последовательность сеток $\{\tau_{j,k} = \frac{k}{2^j}\}_{k \in \mathbf{Z}}$, $j \geq 0$ на числовой прямой. Пусть $\varphi_{j,l}$ – функция, полученная по схеме (2.20) с начальной

последовательностью $v^{j,l} = \{\delta_{l,k}\}_{k \in \mathbf{Z}}$, причём $\text{supp}A = [\Gamma; \Delta] \cap \mathbf{Z}$. Из включения (2.28) следует, что

$$\text{supp } v^{j+J,l} \subset [2^J l + (2^J - 1) \cdot \Gamma; 2^J l + (2^J - 1) \cdot \Delta] \cap \mathbf{Z}. \quad (2.29)$$

С учётом определения 2.4 получаем $\text{supp} \varphi_{j,l} \subset \left[\tau_{j,l} + \frac{\Gamma}{2^j}; \tau_{j,l} + \frac{\Delta}{2^j} \right]$. Следовательно, функциям $\varphi_{j,l}$, не равным тождественно нулю на отрезке $[i_0; i_1]$, $i_0, i_1 \in \mathbf{Z}$, соответствуют значения l из промежутка $l_L \leq l \leq l_R$, где $l_L = 2^j \cdot i_0 - \Delta$, $l_R = 2^j \cdot i_1 - \Gamma$.

По лемме 2.9

$$\varphi_{j,l}(\tau_{j+J,k}) \approx v_k^{j+J,l} = v_k^{J,l} = v_{k-2^J l}^{J,0}. \quad (2.30)$$

Поэтому для построения приближения функции $\varphi_{j,l}(x)$ при произвольных значениях j и l достаточно найти только $v^{J,0}$.

2.6 Кратномасштабный анализ

Рассмотрим неортогональный кратномасштабный анализ. В изложении и обозначениях будем следовать работам [19 – 21, 33, 35, 59, 79 – 82, 94].

Пусть $X \subset \mathbf{R}^n$. Будем рассматривать действительное пространство $L_2(X)$.

Определение 2.5. [19] Пусть H – гильбертово пространство и \mathfrak{U} – счётное множество индексов. Семейство $\{f_n\}_{n \in \mathfrak{U}} \subset H$ называется системой Рисса с постоянными $A, B > 0$, если для любого $c = \{c_n\}_{n \in \mathfrak{U}} \in l_2$ ряд $\sum_{n \in \mathfrak{U}} c_n f_n$ сходится в H и

$$A \|c\|_{l_2}^2 \leq \left\| \sum_{n \in \mathfrak{U}} c_n f_n \right\|_H^2 \leq B \|c\|_{l_2}^2.$$

Если система Рисса является базисом, то её будем называть базисом Рисса.

Определение 2.6. [81] Кратномасштабный анализ на X определяется как последовательность подпространств $V_j \subset L_2(X)$, $j \in \mathcal{J} \subset \mathbf{Z}$, такая что

1. $V_j \subset V_{j+1}$.
2. $\bigcup_{j \in \mathcal{J}} V_j$ плотно в $L_2(X)$.

3. Для каждого j существуют масштабирующие функции $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathcal{K}_j$ такие, что множество $\{\varphi_{j,k}: k \in \mathcal{K}_j\}$ представляет собой базис Рисса в V_j . При этом $\mathcal{K}_j \subset \mathcal{K}_{j+1}$.

Заметим, что в отличие от кратномасштабного анализа на прямой, масштабирующие функции $\varphi_{j,k}$ не обязаны получаться из одной функции путём её масштабирования и сдвига. Из свойства 1 следует, что существует последовательность коэффициентов $\{h_{j,k,l}\}$, такая что [81]

$$\varphi_{j,k} = \sum_{l \in \mathcal{K}_{j+1}} h_{j,k,l} \varphi_{j+1,l}. \quad (2.31)$$

Значения $h_{j,k,l}$ определены для $j \in \mathcal{J}$, $k \in \mathcal{K}_j$ и $l \in \mathcal{K}_{j+1}$.

Определение 2.7. [19] Пусть $\{V_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ и $\{\tilde{V}_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ – два кратномасштабных анализа на X с масштабирующими функциями $\varphi_{j,k}$, $k \in \mathcal{K}_j$, $j \in \mathcal{J}$ и $\tilde{\varphi}_{j,k}$, $k \in \mathcal{K}_j$, $j \in \mathcal{J}$ соответственно. Кроме того, пусть $V_{j+1} = V_j + W_j$, $\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j + \tilde{W}_j$ и $\{\psi_{j,k}, k \in \mathcal{M}_j\}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}, k \in \mathcal{M}_j\}$ – базисы Рисса в W_j и \tilde{W}_j , соответственно. Если

$$\begin{aligned} (\varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'}) &= \delta_{k,k'}, \quad \forall k, k' \in \mathcal{K}_j, \\ (\psi_{j,m}, \tilde{\psi}_{j,m'}) &= \delta_{m,m'}, \quad \forall j \in \mathcal{J}, \forall m \in \mathcal{M}_j, \forall m' \in \mathcal{M}_j; \\ (\tilde{\psi}_{j,m}, \varphi_{j,k}) &= 0; (\tilde{\varphi}_{j,k}, \psi_{j,m}) = 0, \quad \forall m \in \mathcal{M}_j, \forall k \in \mathcal{K}_j, \end{aligned}$$

то семейства функций $\{\psi_{j,k}\}_{j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{M}_j}$ и $\{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{M}_j}$ называются биортогональными вейвлет-системами.

Так как $W_j \subset V_{j+1}$ и $\tilde{W}_j \subset \tilde{V}_{j+1}$, то [81]

$$\psi_{j,m} = \sum_{l \in \mathcal{K}_{j+1}} g_{j,m,l} \varphi_{j+1,l}, \quad \tilde{\psi}_{j,m} = \sum_{l \in \mathcal{K}_{j+1}} \tilde{g}_{j,m,l} \tilde{\varphi}_{j+1,l}, \quad m \in \mathcal{M}_j. \quad (2.32)$$

В случае биортогональных вейвлет-систем для $f \in L_2(X)$ имеет место равенство [19]

$$\begin{aligned} f &= \sum_{n \in \mathcal{K}_{j_0}} (f, \tilde{\varphi}_{j_0,n}) \varphi_{j_0,n} + \sum_{j \geq j_0} \sum_{n \in \mathcal{M}_j} (f, \tilde{\psi}_{j,n}) \psi_{j,n} = \\ &= \sum_{n \in \mathcal{K}_{j_0}} v_{j_0,n} \varphi_{j_0,n} + \sum_{j \geq j_0} \sum_{n \in \mathcal{M}_j} \gamma_{j,n} \psi_{j,n}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

где $v_{j,k} = (f, \tilde{\varphi}_{j,k})$, $\gamma_{j,m} = (\tilde{\psi}_{j,m}, f)$.

Пусть

$$\tilde{\varphi}_{j,k} = \sum_{l \in \mathcal{K}_{j+1}} \tilde{h}_{j,k,l} \tilde{\varphi}_{j+1,l}. \quad (2.34)$$

Последовательности $h_{j,k,l}$, $\tilde{h}_{j,k,l}$, $g_{j,k,l}$ и $\tilde{g}_{j,k,l}$ называются фильтрами. Из условий биортогональности получаем [81]

$$\tilde{h}_{j,k,l} = (\tilde{\varphi}_{j,k}, \varphi_{j+1,l}), \quad \tilde{g}_{j,k,l} = (\tilde{\psi}_{j,k}, \varphi_{j+1,l}).$$

Так как $V_{j+1} = V_j + W_j$, то $\varphi_{j+1,l} = \sum_{s \in \mathcal{K}_j} c_{j,s,l} \varphi_{j,s} + \sum_{m \in \mathcal{M}_j} d_{j,m,l} \psi_{j,m}$. Из условий биортогональности находим $c_{j,s,l} = \tilde{h}_{j,s,l}$, $d_{j,s,l} = \tilde{g}_{j,s,l}$. Следовательно,

$$\varphi_{j+1,l} = \sum_{s \in \mathcal{K}_j} \tilde{h}_{j,s,l} \varphi_{j,s} + \sum_{m \in \mathcal{M}_j} \tilde{g}_{j,m,l} \psi_{j,m}. \quad (2.35)$$

Из равенств (2.32) и (2.33) получаем [81]

$$v_{j,k} = \sum_{l \in \mathcal{K}_{j+1}} \tilde{h}_{j,k,l} v_{j+1,l}, \quad \gamma_{j,m} = \sum_{l \in \mathcal{K}_{j+1}} \tilde{g}_{j,m,l} v_{j+1,l} \quad (2.36)$$

Из формулы аналогичной (2.35) получаем [81]

$$v_{j+1,l} = \sum_{s \in \mathcal{K}_j} h_{j,s,l} v_{j,s} + \sum_{m \in \mathcal{M}_j} g_{j,m,l} \gamma_{j,m}. \quad (2.37)$$

Формулы (2.36) представляют собой формулы вейвлет-разложения или формулы анализа, а формула (2.37) представляет собой вейвлет-восстановление или формула синтеза.

Пусть $X = [a; b] \subset \mathbf{R}$. Следуя обозначениям раздела 2.2, формулы (2.31), (2.32) и (2.34) можно переписать в матричном виде

$$\Phi_j = \Phi_{j+1} P_{j+1}; \quad \Psi_j = \Psi_{j+1} P_{j+1}; \quad (2.38)$$

$$\tilde{\Phi}_j = \tilde{\Phi}_{j+1} \tilde{Q}_{j+1}; \quad \tilde{\Psi}_j = \tilde{\Psi}_{j+1} \tilde{Q}_{j+1}. \quad (2.39)$$

Как показано в [26], получаем

$$2 \begin{pmatrix} A_j \\ B_j \end{pmatrix} = (\tilde{P}_j \quad \tilde{Q}_j)^T.$$

Из этого равенства следует [26], что имея банк фильтров $\{P_j, Q_j, A_j, B_j\}$, можно найти и банк $\{\tilde{P}_j, \tilde{Q}_j, \tilde{A}_j, \tilde{B}_j\}$.

2.7 Схема подъёма

Схема подъёма (lifting scheme, англ.) позволяет строить биортогональные вейвлет-системы с заданными свойствами, используя некоторые начальные биортогональные вейвлет-системы с фильтрами $h_{j,k,l}^0$, $\tilde{h}_{j,k,l}^0$, $g_{j,k,l}^0$ и $\tilde{g}_{j,k,l}^0$. По схеме подъёма новое семейство фильтров $h_{j,k,l}$, $\tilde{h}_{j,k,l}$, $g_{j,k,l}$, $\tilde{g}_{j,k,l}$, определяющих биортогональные вейвлет-системы, находится по формулам [81, 86, 87]:

$$\begin{aligned} h_{j,k,l} &= h_{j,k,l}^0, \quad g_{j,m,l} = g_{j,m,l}^0 - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} s_{j,k,m} h_{j,k,l}^0, \\ \tilde{g}_{j,m,l} &= \tilde{g}_{j,m,l}^0, \quad \tilde{h}_{j,k,l} = \tilde{h}_{j,k,l}^0 + \sum_{m \in \mathcal{M}_j} s_{j,k,m} \tilde{g}_{j,m,l}^0 \end{aligned}$$

при любом выборе последовательности $\{s_{j,k,m}\}_{k \in \mathcal{K}_j, m \in \mathcal{M}_j}$. Следует заметить, что масштабирующие функции $\varphi_{j,l}$ одинаковы в исходном и поднятом кратномасштабном анализе $\varphi_{j,k} = \varphi_{j,k}^0$.

Заметим, что можно не менять функцию $\tilde{\varphi}_{j,k}$, а поднимать $\varphi_{j,k}$. Механизм этот точно такой же, и называется двойственной схемой подъёма [81, 86, 87]. Он позволяет улучшить свойства вейвлета $\tilde{\psi}_{j,m}$. При двойственном подъёме новые фильтры определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_{j,k,l} &= \tilde{h}_{j,k,l}^0, \quad \tilde{g}_{j,m,l} = \tilde{g}_{j,m,l}^0 - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} \tilde{s}_{j,k,m} \tilde{h}_{j,k,l}^0, \\ g_{j,m,l}^1 &= g_{j,m,l}^0, \quad h_{j,k,l} = h_{j,k,l}^0 + \sum_{m \in \mathcal{M}_j} \tilde{s}_{j,k,m} g_{j,m,l}^0. \end{aligned}$$

2.8 Ленивые вейвлеты

Пусть $X = \mathbf{R}^n$, Λ^n – совокупность всех ненулевых векторов $e_l \in \mathbf{Z}^n$, координаты которых равны 0 или 1. Обозначим $\mathcal{K}_j = 2^{-j}\mathbf{Z}^n$, $\mathcal{M}_j = 2^{-j}\mathcal{K}_j + 2^{-j-1}\Lambda^n$, $\mathcal{J} = \{0\} \cup \mathbf{N}$. Тогда $\mathcal{M}_j = \mathcal{K}_{j+1} \setminus \mathcal{K}_j$. Рассмотрим следующие фильтры [81]:

$$h_{j,k,t}^0 = \tilde{h}_{j,k,t}^0 = \delta_{k,t}, \quad g_{j,m,t}^0 = \tilde{g}_{j,m,t}^0 = \delta_{m,t}, \quad \forall k \in \mathcal{K}_j, \quad \forall m \in \mathcal{M}_j, \quad \forall t \in \mathcal{K}_{j+1};$$

В этом случае вейвлеты $\psi_{j,m}^0$, называемые ленивыми [81, 86], совпадают с некоторыми из функций пространства V_{j+1}

$$\varphi_{j,k}^0 = \varphi_{j+1,k}^0, \quad k \in \mathcal{K}_j; \quad \psi_{j,m}^0 = \varphi_{j+1,m}^0, \quad m \in \mathcal{M}_j.$$

Таким образом, множество базисных функций $\{\varphi_{j+1,k}^0\}_{k \in \mathcal{K}_{j+1}}$ разбивается на два подмножества. Одно содержит базисные функции $\{\varphi_{j,k}^0\}_{k \in \mathcal{K}_j}$, а другое содержит множество вейвлетов $\{\psi_{j,m}^0\}_{m \in \mathcal{M}_j}$.

Рассмотрим двойственную схему подъёма ленивого вейвлета [81, 86].

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{j,m,t}^1 &= \tilde{g}_{j,m,t}^0 - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} \tilde{s}_{j,k,m} \tilde{h}_{j,k,t}^0 = \delta_{m,t} - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} \tilde{s}_{j,k,m} \delta_{k,t} = \begin{cases} -\tilde{s}_{j,t,m}, & \text{если } t \in \mathcal{K}_j; \\ \delta_{m,t}, & \text{если } t \in \mathcal{M}_j. \end{cases} \\ h_{j,k,t}^1 &= h_{j,k,t}^0 + \sum_{m \in \mathcal{M}_j} \tilde{s}_{j,k,m} g_{j,m,t}^0 = \delta_{k,t} + \sum_{m \in \mathcal{M}_j} \tilde{s}_{j,k,m} \delta_{m,t} = \begin{cases} \tilde{s}_{j,k,t}, & \text{если } t \in \mathcal{M}_j; \\ \delta_{k,t}, & \text{если } t \in \mathcal{K}_j, \end{cases} \end{aligned}$$

Далее применим схему подъёма [81, 86].

$$\begin{aligned} h_{j,k,t} &= h_{j,k,t}^1 = \begin{cases} \tilde{s}_{j,k,t}, & \text{если } t \in \mathcal{M}_j; \\ \delta_{k,t}, & \text{если } t \in \mathcal{K}_j, \end{cases} \quad \tilde{g}_{j,m,t} = \tilde{g}_{j,m,t}^1 = \begin{cases} -\tilde{s}_{j,t,m}, & \text{если } t \in \mathcal{K}_j; \\ \delta_{m,t}, & \text{если } t \in \mathcal{M}_j. \end{cases} \\ \tilde{h}_{j,k,t} &= \delta_{k,t} + \sum_m s_{j,k,m} \tilde{g}_{j,m,t}^1, \quad g_{j,m,t} = \delta_{m,t} - \sum_k s_{j,k,m} h_{j,k,t}^1 \end{aligned}$$

Формулу вейвлет-восстановления (2.37) можно представить в виде:

$$v_{j+1,t} = v_{j,t} - \sum_{m \in \mathcal{M}_j} s_{j,t,m} \gamma_{j,m}, \quad \text{если } t \in \mathcal{K}_j; \quad (2.40)$$

$$v_{j+1,t} = \gamma_{j,t} + \sum_{k \in \mathcal{K}_j} \tilde{s}_{j,k,t} v_{j,k}, \quad \text{если } t \in \mathcal{M}_j. \quad (2.41)$$

Предположим, что маска $A = \{A_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$ определяет функцию из $C^r(\mathbf{R})$ с компактным носителем и удовлетворяет дополнительному условию $A_{2i} = \delta_{0,i}$, $i \in \mathbf{Z}$. Определим маску $b = \{b_t\}_{t \in \mathbf{Z}^n}$ следующим равенством

$$b_t = \prod_{i=1}^n A_{t_i}, \quad t = (t_1 \quad \dots \quad t_n)^T \in \mathbf{Z}^n. \quad (2.42)$$

По теореме 2.4 такая маска определяет функцию $\varphi \in C^r(\mathbf{R}^n)$ с компактным носителем. Далее выберем $\tilde{s}_{j,k,t}$ следующим образом

$$\tilde{s}_{j,k,t} = b_{(2^{j+1}t)-2 \cdot (2^j k)}, \quad t \in \mathcal{M}_j, \quad k \in \mathcal{K}_j.$$

Рассмотрим, как можно оценить значение функции φ_{j_0, k_0} после применения схемы подъёма [28, 81]. Пусть $f = \varphi_{j_0, k_0}$. Тогда по определению 2.7 имеем

$$v_{j_0, k} = (\varphi_{j_0, k_0}, \tilde{\varphi}_{j_0, k}) = \delta_{k, k_0}.$$

Кроме того, из ортогональности $\tilde{W}_j \perp V_j$ и включения $V_{j_0} \subset V_j$ при $j \geq j_0$, получаем $\tilde{W}_j \perp V_{j_0}$ при $j \geq j_0$. Таким образом, $\gamma_{j, m} = (\tilde{\psi}_{j, m}, \varphi_{j_0, k_0}) = 0$. Следовательно, если в формулах (2.40) и (2.41) выбрать коэффициент $v_{j_0, k} = \delta_{k, k_0}$ и $\gamma_{j, m} = 0$ для всех m и всех $j \geq j_0$, то эта формула позволит найти значения $v_{j, k}$ при всех $j \geq j_0$ и всех k . С учётом того, что $b_{(2^{j+1}\alpha)-2 \cdot (2^j \beta)} = \delta_{\alpha, \beta}$ при $\alpha \in \mathcal{K}_j$, формулы (2.40) и (2.41) для данного случая можно переписать в виде

$$v_{j+1, \alpha} = \sum_{\beta \in \mathcal{K}_j} b_{(2^{j+1}\alpha)-2 \cdot (2^j \beta)} v_{j, \beta}, \quad j \geq j_0, \quad v_{j_0, k} = \delta_{k, k_0}, \quad \alpha \in \mathcal{K}_{j+1} = 2^{-j-1} \mathbf{Z}^n. \quad (2.43)$$

Таким образом, получаем стационарную схему подразделения с маской b . Значения $v_{j, \alpha}$ при достаточно больших j примерно совпадают со значениями функции $\varphi_{j_0, k_0}(\alpha)$ [28, 81]. Обозначим $v_{j_0+J}^{j_0, 0}$, $J > 0$ последовательность, полученную по формуле (1.43) с $v_{j_0, k}^{j_0, 0} = \delta_{0, k}$. Тогда, если $k_0 = 2^{-j_0} t_0 \in \mathcal{K}_{j_0}$, $t_0 \in \mathbf{Z}^n$, то по лемме 2.9 получаем

$$\varphi_{j_0, 2^{-j_0} t_0}(2^{-J-j_0} \beta) \approx v_{J+j_0, (\beta-2^J t_0) 2^{-J-j_0}}^{j_0, 0}. \quad (2.44)$$

Далее выясним, как можно вычислить значение функции ψ_{j_0, m_0} .

Выберем $f = \psi_{j_0, m_0}$. Тогда по определению 2.7 получаем $v_{j_0, k} = (\psi_{j_0, m_0}, \tilde{\varphi}_{j_0, k}) = 0$ для всех k . Кроме того,

$$\gamma_{j, m} = (\tilde{\psi}_{j, m}, \psi_{j_0, m_0}) = \begin{cases} 1, & j = j_0, \quad m = m_0 \\ 0, & \text{остальные случаи.} \end{cases}$$

Следовательно, формулы (2.40) и (2.41) для рассматриваемого случая примут вид

$$v_{j+1, \alpha} = \sum_{\beta \in \mathcal{K}_j} b_{(2^{j+1}\alpha)-2 \cdot (2^j \beta)} v_{j, \beta}, \quad j > j_0, \quad v_{j_0+1, k} = g_{j_0, m_0, k}, \quad \alpha \in \mathcal{K}_{j+1} = 2^{-j-1} \mathbf{Z}^n. \quad (2.45)$$

Значения $v_{j, \alpha}$ при достаточно больших j примерно совпадают со значениями функции $\psi_{j_0, m_0}(\alpha)$.

Из формулы $g_{j,m,t} = \delta_{m,t} - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} s_{j,k,m} h_{j,k,t}^1$ следует, что вейвлет $\psi_{j,m}$ после подъема определяется следующим выражением

$$\psi_{j,m} = \varphi_{j+1,m} - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} s_{j,k,m} \varphi_{j,k}$$

Значения $s_{j,k,m}$ будем выбирать из условия $\int_{\mathbf{R}^n} \psi_{j,m}(x) dx = 0$. Отсюда получаем уравнение для определения $s_{j,k,m}$

$$\sum_{k \in \mathcal{K}_j} s_{j,k,m} \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_{j,k}(x) dx = \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_{j+1,m}(x) dx. \quad (2.46)$$

Пусть $m = \frac{2k+e}{2^{j+1}} \in \mathcal{M}_j$, $k \in \mathbf{Z}^n$ и $\mathcal{K}(m) \subset \mathcal{K}_j$ – соседние с m узлы. Выберем $s_{j,k,m} = 0$ для всех $k \notin \mathcal{K}(m)$ и

$$s_{j,k,m} = \frac{\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_{j+1,m}(x) dx}{|\mathcal{K}(m)| \cdot \int_{\mathbf{R}^n} \varphi_{j,k}(x) dx},$$

где $|\mathcal{K}(m)|$ – число элементов в множестве $\mathcal{K}(m)$.

В этом случае равенство (2.46) будет выполнено.

2.9 Алгоритм вычисления значений масштабирующих функций

Рассмотрим организацию вычислений значений масштабирующих функций и вейвлетов и их частных производных. Современные библиотеки языков программирования (в настоящей работе используются библиотеки SciPy© и TensorFlow© языка программирования Python©) достаточно быстро осуществляют преобразование свёртки. Поэтому представим вычислительные процедуры для нахождения значений масштабирующих функций, полученных по схеме подъёма и соответствующих вейвлетов, а также их частных производных через свёртку. Заметим, что формулу (2.45) можно представить в виде

$$v_{j+1,2^{-j-1}\alpha} = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}^s} b_{\alpha-2\beta} v_{j,2^{-j-1}2\beta}, \quad j > j_0, \quad \alpha \in \mathbf{Z}^s.$$

Введём в рассмотрение оператор U , который функции $v: \mathcal{K}_j \rightarrow \mathbf{R}$ ставит в соответствие функцию $Uv: \mathcal{K}_{j+1} \rightarrow \mathbf{R}$, определенную равенством: $(Uv)_k = v_k$, для

любого $k \in \mathcal{K}_j$ и $(Uv)_m = 0$, для любого $m \in \mathcal{M}_j$. Тогда $v_{j+1} = b * (Uv_j)$. Это преобразование показано на рис. 2.3.

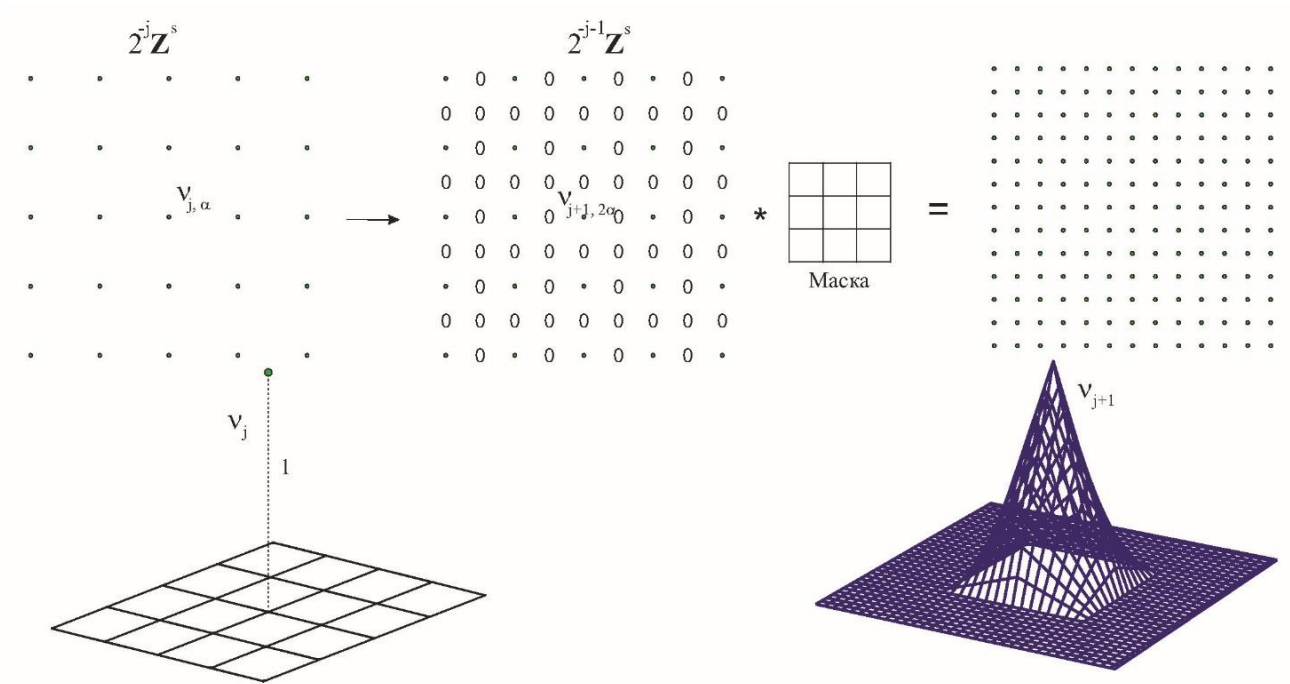


Рис. 2.3 – Вычисление значений масштабирующей функции

Вычисление значений частных производных теперь можно осуществить с помощью формул (2.17). Итак, можно сформулировать следующий алгоритм приближенного нахождения значений масштабирующих функций и вейвлетов, а также их частных производных.

Алгоритм вычисления значений масштабирующих функций, вейвлетов и их частных производных

Шаг 1. Определение последовательности $b = \{b_t\}_{t \in \mathbb{Z}^n}$ с помощью равенства $b_t = \prod_{i=1}^n A_{t_i}$, $t = (t_1 \dots t_n)^T \in \mathbb{Z}^n$.

Шаг 2. Нахождение последовательности v_{j+m} , $m \in \mathbb{N}$ для данного $\alpha \in \mathcal{K}_j$ по схеме подразделений $v_{j+m} = b * (Uv_{j+m-1})$, $m = 1, 2, \dots, J$, $v_{j,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}$, $\forall \beta \in \mathcal{K}_j$.

Шаг 3. Нахождение значений масштабирующей функции $\varphi_{j,\alpha}$ и её частных производных в точках $\beta \in \mathcal{K}_{j+J}$ из приближенных равенств:

$$\varphi_{j,\alpha}(\beta) \approx v_{j+J,\beta}, \quad \left(\lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_{j,\alpha}(\bullet) - v_{j+J,\bullet}\|_{\infty} = 0 \right);$$

$$\partial^{l_1, \dots, l_n} \varphi_{j,\alpha}(\beta) \approx \left((d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * \left((a \otimes \dots \otimes a) * v_{j+J} \right) \right)_{\beta}$$

$$l_1, \dots, l_n = 0, 1, 2; \quad l_1 + \dots + l_n \leq 2,$$

где

$$d^0 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d^1 = 2^{j+J-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d^2 = 2^{2(j+J)} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$a = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

Шаг 4. Нахождение вейвлетов по формуле $\psi_{j,m} = \varphi_{j+1,m} - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} s_{j,k,m} \varphi_{j,k}$, где последовательность $s_{j,k,m}$ можно выбрать произвольным образом.

Выбором последовательностей A и s можно задавать свойства масштабирующих функций и вейвлетов. Ещё больше возможностей появляется, если рассматривать нестационарные схемы подразделений. В этом случае можно, например, обнулять некоторые функции на заданном множестве.

Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выберем последовательности, $A_{s,\bullet}^i = \{A_{s,\alpha}^i\}_{\alpha \in \mathbf{Z}}$, $s \in \mathbf{Z}$, которые в схеме $\lambda_{j+1,\alpha} = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}} A_{\alpha, \alpha-2\beta}^i \lambda_{j,\beta}$, $j = 0, 1, \dots$, $\lambda_{0,\bullet} \in l_{\infty}(\mathbf{Z})$ приводят к гладким функциям нужного класса гладкости. Тогда, если фильтр h определить равенством $h_{j,s,k} = (A_{k_1,\bullet}^1 \otimes \dots \otimes A_{k_n,\bullet}^n)_{k_1-2s_1, \dots, k_n-2s_n}$, где $k = 2^{-j-1}(k_1 \dots k_n)$ и $s = 2^{-j}(s_1 \dots s_n)$, то масштабирующие функции $\varphi_{j,\alpha}$ будут определяться по следующей нестационарной схеме подразделений

$$v_{j+m+1,k} = \sum_{s \in \mathcal{K}_{j+m}^n} h_{j,s,k} v_{j+m,s} =$$

$$= \sum_{s=2^{-j-m}(s_1, \dots, s_n) \in \mathcal{K}_{j+m}^n} (A_{k_1,\bullet}^1 \otimes \dots \otimes A_{k_n,\bullet}^n)_{k_1-2s_1, \dots, k_n-2s_n} v_{j+m,s},$$

$$m = 0, 1, \dots, \quad v_{j,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \forall \beta \in \mathcal{K}_j.$$

2.10 Примеры вейвлет-систем, полученных с использованием схемы подъёма Вейвлеты Deslauriers-Dubuc.

Пусть задана последовательность $v^0 = \{v_k^0\}_{k \in \mathbf{Z}} \in l_\infty(\mathbf{Z})$. Схему подразделения определим следующим образом

$$\begin{cases} v_{2k}^{j+1} = v_k^j; \\ v_{2k+1}^{j+1} = L\left(\frac{1}{2}\right), \end{cases}$$

где $L(x)$ – многочлен Лагранжа степени $2p - 1$, построенный по узлам интерполяции (k, v_{i+k}^j) , $k = -p + 1, \dots, p$.

Таким образом

$$\begin{aligned} v_{2k+1}^{j+1} &= L\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=-p+1}^p v_{i+k}^j \frac{\prod_{l=-p+1}^p \left(\frac{1}{2} - l\right)}{\left(\frac{1}{2} - i\right) \prod_{l=-p+1}^{i-1} (i - l) \prod_{l=i+1}^p (i - l)} \\ &= \sum_{i=-p+1}^p v_{i+k}^j A_{1-2i}. \end{aligned}$$

Следовательно, маска имеет вид

$$\begin{cases} A_{2k} = \delta_{0,k}, \\ A_{1-2k} = \frac{\prod_{l=-p+1}^p \left(\frac{1}{2} - l\right)}{\left(\frac{1}{2} - k\right) \prod_{l=-p+1}^{k-1} (k - l) \prod_{l=k+1}^p (k - l)}, \quad k = -p + 1, \dots, p. \end{cases} \quad (2.47)$$

Такая маска определяет функцию φ с компактным носителем, называемую масштабирующей функцией Deslauriers-Dubuc [56]. Схема подразделения в этом случае имеет вид

$$\begin{cases} (Sv)_{2k+1} = \sum_{l \in \mathbf{Z}} A_{2(k-l)+1} v_l; \\ (Sv)_{2k} = v_k. \end{cases}$$

На рис. 2.4 представлен график масштабирующей функции Deslauriers-Dubuc и её первой и второй производных для $p = 6$.

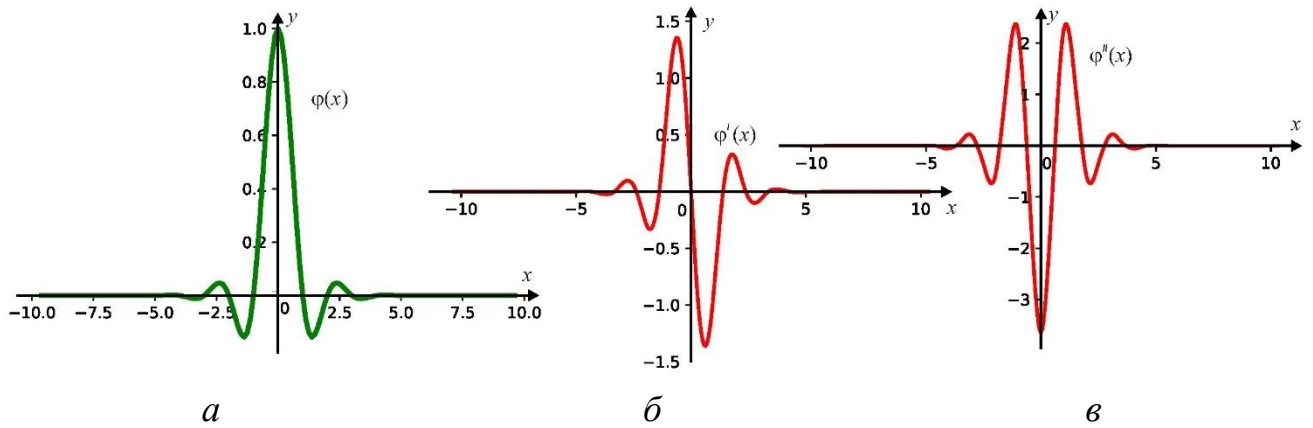


Рис. 2.4 – Графики функции для $p = 6$:

a – масштабирующая функция, b – первая производная, c – вторая производная

На рис. 2.5 представлен график масштабирующей функции двух аргументов и вейвлета для случая, когда в качестве маски $A = \{A_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ в (2.42) выбрана последовательность (2.47) с $p = 6$.

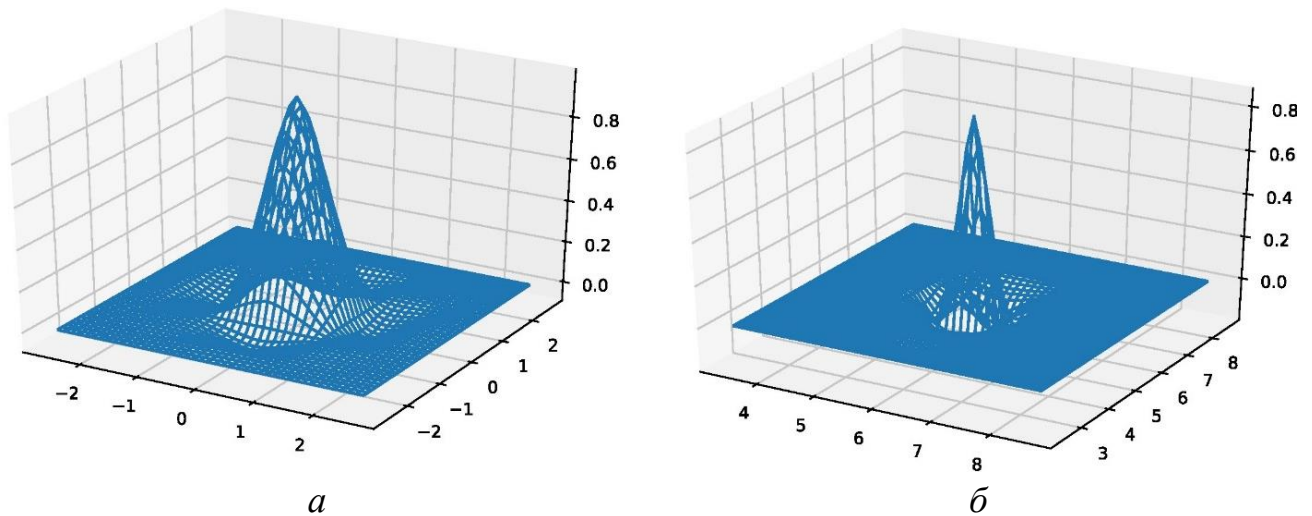


Рис. 2.5 – Графики:

a – масштабирующая функция двух аргументов, b – вейвлет

Сплайн-вейвлеты.

Построим вейвлет-систему на кубе $[0; m]^n$, обладающую тем свойством, что базисные функции, соответствующие узлам сетки, не принадлежащим границе куба, обращаются в ноль на границе этого куба. Такую вейвлет-систему удобно использовать при решении задач теории упругости, поскольку можно сразу сделать

так, что приближение решения задачи будет удовлетворять граничным условиям. Для этого нам потребуются нестационарные схемы подразделения, в которых маска схемы не фиксирована и замечание, сделанное в конце раздела 2.7.

Пусть $\mathcal{K}_j^i = 2^{-j}\mathbf{Z}^i \cap [0; m]^i$, $i \in \mathbf{N}$. Для каждого $i = 1, 2, \dots, n$ выберем маски $A_{s,\bullet}^i = \{A_{s,\alpha}^i\}_{\alpha \in \mathbf{Z}}$, $s \in \mathbf{Z}$, которые в схеме $(S^i v)_\alpha = \sum_{\beta \in \mathbf{Z}} A_{\alpha, \alpha-2\beta}^i v_\beta$, $v \in l_\infty(\mathbf{Z})$ приводят к гладким функциям нужного класса гладкости, и положим $h_{j,s,k} = (A_{k_1,\bullet}^1 \otimes \dots \otimes A_{k_n,\bullet}^n)_{k_1-2s_1, \dots, k_n-2s_n}$, где $k = 2^{-j-1}(k_1 \dots k_n)$ и $s = 2^{-j}(s_1 \dots s_n)$. Тогда, масштабирующие функции $\varphi_{j,\alpha}$ определяются нестационарной схемой подразделений

$$v_{j+m+1,k} = \sum_{s \in \mathcal{K}_j^n} h_{j,s,k} v_{j+m,s}, \quad v_{j,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}, \quad m = 0, 1, \dots,$$

а вейвлеты определяются равенством [26]

$$\psi_{j,m} = \varphi_{j+1,m} - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} S_{j,k,m} \varphi_{j,k}.$$

В качестве масок возьмём, например, следующие:

$$\begin{aligned} A_{0,\bullet} &= (1), \quad \text{supp } A_{0,\bullet} = \{0\}; \quad A_{1,\bullet} = (0,5 \quad 0 \quad 0,5), \quad \text{supp } A_{1,\bullet} = \{-1,0,1\}; \\ A_{k,\bullet} &= \left(\frac{1}{8} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{6}{8} \quad \frac{4}{8} \quad \frac{1}{8}\right), \quad \text{supp } A_{k,\bullet} = \{-2, -1, 0, 1, 2\}, \quad k = 1, 2, \dots, 2^j m - 2; \\ A_{2^j m - 1,\bullet} &= (0,5 \quad 0 \quad 0,5), \quad \text{supp } A_{2^j m - 1,\bullet} = \{-1, 0, 1\}, \\ A_{2^j m,\bullet} &= (1), \quad \text{supp } A_{2^j m,\bullet} = \{0\}. \end{aligned}$$

В результате получим масштабирующие функции, представленные на рис. 2.6.

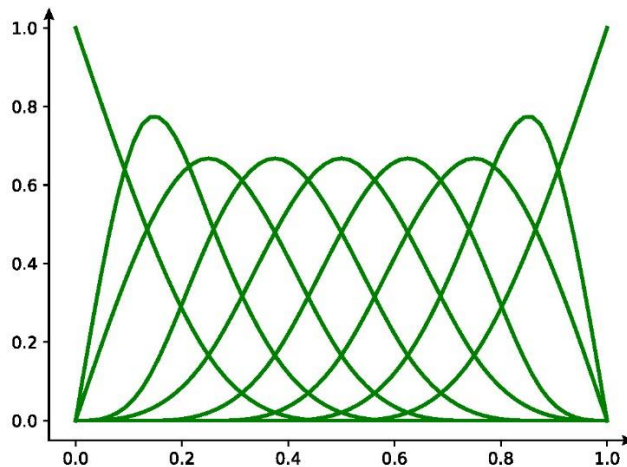


Рис. 2.6 – Графики масштабирующих функций на отрезке $[0; m]$

Аналогично можно действовать и в многомерном случае и даже на множествах более сложных, чем куб. На рис. 2.7 представлен пример, в котором показано, что масштабирующие функции, соответствующие узлам сетки, принадлежащим заданной области, обнуляются за её пределами.

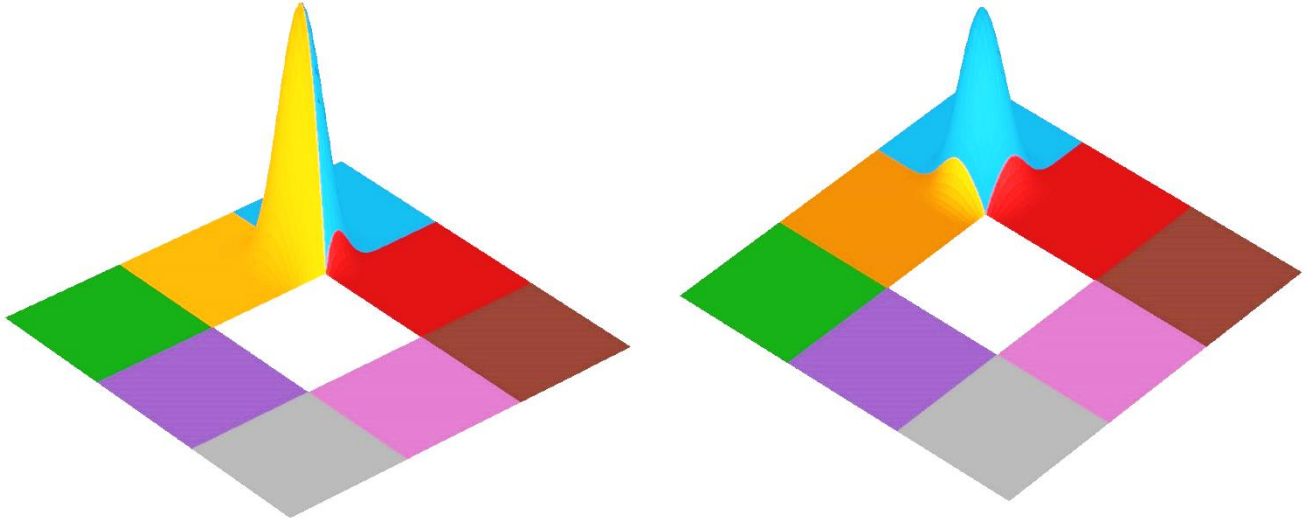


Рис. 2.7 – Графики масштабирующей функции

Выводы по главе 2

Во второй главе получены следующие результаты:

- 1) Проанализирован общий подход к построению вейвлет-систем на отрезке и прямоугольнике и применению таких вейвлетов в задачах поверхностного моделирования.
- 2) Получены формулы вейвлет-разложения и вейвлет-восстановления функций, заданных на n -мерном параллелепипеде.
- 3) Обобщено понятие локально-аппроксимационного сплайна, получены оценки погрешности аппроксимации таким сплайном гладкой функции. Получены формулы для нахождения значений локально аппроксимационных сплайнов и их производных в узлах сетки, основанные на свёртке. Показано, что эти формулы являются частным случаем вейвлет-восстановления. Преимущество полученных формул в том, что их использование позволяет распараллелить процедуру построения вейвлет-системы на заданном множестве.
- 4) Проанализирован общий подход к построению биортогональных вейвлет-систем на основе схем подъёма. Анализ показал, что эти схемы тесно связаны со схемами подразделений и позволяют строить вейвлеты с заданными свойствами.
- 5) Разработан алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и их частных производных, основанный на преобразовании свёртки.
- 6) Представлены примеры вейвлетов, построенных на основе схем подъёма, такие как вейвлеты Deslauriers-Dubuc и сплайн-вейвлеты.

3 ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТОВ В ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Данная глава посвящена исследованию применения вейвлетов в задачах теории упругости. На основании полученных во второй главе результатов предложен метод приближённого решения задач теории упругости с помощью вейвлетов. Преимущество вейвлетов перед другими базисными функциями заключается в быстром убывании вейвлет-коэффициентов, поэтому достаточно небольшого числа слагаемых в разложениях. Дополнительным преимуществом вейвлетов, использующих схемы подразделений и подъёма, является возможность управлять формой базисных функций. Например, обнулять их на выбранной области, что ещё уменьшает число слагаемых. Эти важные преимущества особенно сказываются при поиске оптимальной схемы печати, когда требуется многократно решать систему уравнений в частных производных, описывающую напряжённо-деформируемое состояние конструкции.

3.1 Вейвлеты на триангулируемом пространстве с конечным множеством симплексов

Рассмотрим множество $T = \bigcup_{l=1}^N I_l^n \subset \mathbf{R}^n$, представляющее собой объединение замкнутых n -мерных кубов вида

$$I_l^n = \prod_{i=1}^n [b_{i,l}; b_{i,l} + 1], \quad (3.1)$$

где $b_{i,l} \in \mathbf{Z}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $g: T \rightarrow X \subset \mathbf{R}^n$ – гомеоморфизм, причем $g|_{\text{Int}T}: \text{Int}T \rightarrow \text{Int}X$ – диффеоморфизм класса C^2 и $X = \bigcup_l g(I_l^n) \subset \mathbf{R}^n$ получается из гомеоморфных образов замкнутых n -мерных кубов I_l^n посредством склейки их краёв. При этом, если ∂X – это граница множества X , то $\partial X = g(\partial T)$. Таким образом, (T, g, X) – триангулируемое пространство с конечным множеством симплексов [25].

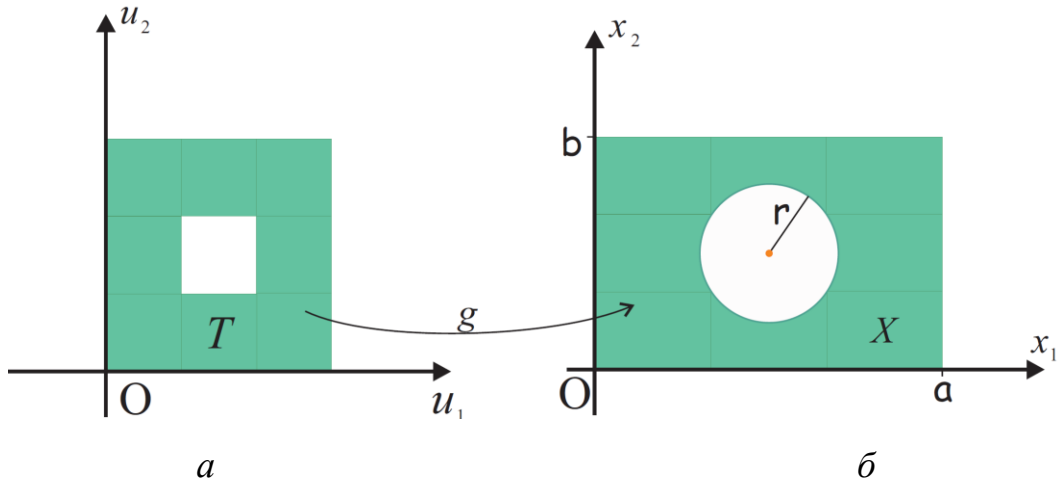


Рис. 3.1 – Триангулируемое пространство:
 $a - T, \bar{b} - X$

Пусть $\{\varphi_{j,\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{K}_j}, \{\psi_{j,\beta}\}_{\beta \in \mathcal{M}_j}$ – масштабирующие функции и вейвлеты на T .
 Определим масштабирующие функции и вейвлеты на X следующими равенствами:

$$\varphi_{j,\alpha}^X(x) = \varphi_{j,\alpha} \circ g^{-1}(x), \quad \psi_{j,\alpha}^X(x) = \psi_{j,\alpha} \circ g^{-1}(x).$$

Тогда, если $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ и $f \circ g \in L_2(T)$, то

$$f = \sum_{k \in \mathcal{K}_{j_0}} v_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}^X + \sum_{j \geq j_0} \sum_{m \in \mathcal{M}_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}^X, \quad (3.2)$$

в том смысле, что

$$\lim_{J \rightarrow +\infty} \int_T \left[\left(f - \sum_{k \in \mathcal{K}_{j_0}} v_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}^X - \sum_{j=j_0}^J \sum_{m \in \mathcal{M}_j} \gamma_{j,m} \psi_{j,m}^X \right) \circ g(u) \right]^2 du = 0.$$

Для краткости удобно переобозначить и перенумеровать базисные функции и коэффициенты в (3.2). Базисные функции обозначим ω_i , а коэффициенты – c_i . Тогда равенство (3.2) примет вид $f = \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \omega_i$. При этом в сумме нужно учитывать только те слагаемые, носители которых пересекаются с X . Рассмотрим, какие индексы соответствуют тем масштабирующим функциям, носители которых точно не пересекают множество X , при использовании равномерных схем подразделений. Пусть $T \subset I_0^n = [i_{1,0}; i_{1,1}] \times \dots \times [i_{n,0}; i_{n,1}]$. Нумерация масштабирующих функций осуществлялась с помощью узлов сетки $\mathcal{K}_j = 2^{-j} \mathbf{Z}^n$. Каждому такому узлу $2^{-j} \alpha$ соответствовала своя масштабирующая функция

$\varphi_{j,2^{-j}\alpha}$, $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)^T \in \mathbf{Z}^n$. При этом, если носитель маски A схемы подразделений представляет собой отрезок $[\Gamma; \Delta] \cap \mathbf{Z}$, то согласно разделу 2.6, если будет выполнено хотя бы одно из неравенств:

$$\alpha_q \leq 2^j i_{q,0} - \Delta; \alpha_q \geq 2^j i_{q,1} - \Gamma; \quad q = 1, 2, \dots, n,$$

то на X функция $\varphi_{j,2^{-j}\alpha}^X$ будет тождественно равна нулю. Вне X предполагаем функции равными тождественно нулю, поэтому указанные масштабирующие функции можно не учитывать. Следовательно, необходимо учитывать только масштабирующие функции с $\alpha = (\alpha_1 \dots \alpha_n)^T$, удовлетворяющих условию

$$\alpha_q = 2^j i_{q,0} - \Delta, 2^j i_{q,0} - \Delta + 1, \dots, 2^j i_{q,1} - \Gamma, \quad q = 1, 2, \dots, n. \quad (3.3)$$

3.2 Построение аппроксимации гомеоморфизма областей в \mathbf{R}^n

На практике выписать гомеоморфизм $g: T \rightarrow X$ обычно не возможно. Поэтому построим его аппроксимацию, используя точечные соответствия и результаты второй главы. Пусть $T \subset I_0^n = [i_{1,0}; i_{1,1}] \times \dots \times [i_{n,0}; i_{n,1}]$. Будем строить отображение $G: I_0^n \rightarrow \hat{X}$ и его обратное, где $X \subset \hat{X}$ и $G|_X = g$. Предположим, что заданы точечные соответствия

$$x_{j,k} = G(u_{j,k}), \quad k \in \mathcal{K}_j \subset 2^{-j}\mathbf{Z}^n. \quad (3.4)$$

где $x = G(u)$, $G(u_1, \dots, u_n) = (x_1(u_1, \dots, u_n) \dots x_n(u_1, \dots, u_n))^T$.

Обратное отображение запишем в виде

$$u = G^{-1}(x), \quad G^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (u_1(x_1, \dots, x_n) \dots u_n(x_1, \dots, x_n))^T.$$

Следует заметить, что значения функций $x_i(u_1, \dots, u_n)$, $i = 1, \dots, n$ и их частных производных в произвольных точках нам не потребуются. Необходимы только значения этих функций и их частных производных в узлах $u_{j,k}$. Эти значения нам даёт теорема 2.2. А именно, вычислим свёртки

$$(d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * \left((a \otimes \dots \otimes a) * x_{i,\bullet} \right),$$

где $x_{i,\bullet} = \{x_{i,k}\}_k$, $a = \frac{1}{6}(-1 \ 8 \ -1)$, $d^0 = \frac{1}{6}(1 \ 4 \ 1)$, $d^1 = 2^{j-1}(1 \ 0 \ -1)$, $d^2 = 2^{2j}(1 \ -2 \ 1)$. В результате находим

$$\partial^{(l_1, \dots, l_n)} x_i(u_{j,k}) \approx \left((d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * \left((a \otimes \dots \otimes a) * x_{i,\bullet} \right) \right)_k.$$

Для нахождения частных производных $\partial^{(l_1, \dots, l_n)} u_i(x_{j,k})$ воспользуемся теоремами об обратной и сложной функций [15]. По теореме о производной обратной функции находим: $DG^{-1}(x_{j,k}) = \left(DG(u_{j,k}) \right)^{-1}$, где DG – матрица Якоби отображения G . Значения вторых частных производных $\partial_\lambda \partial_\mu u_l(x_{j,k})$ находим из системы

$$\sum_{l=1}^n \partial_l x_i(u_{j,k}) \partial_\lambda \partial_\mu u_l(x_{j,k}) = - \sum_{l=1}^n \sum_{t=1}^n \partial_l \partial_t x_i(u_{j,k}) \partial_\lambda u_l(x_{j,k}) \partial_\mu u_t(x_{j,k})$$

Пример 3.1. Рассмотрим следующий диффеоморфизм и его обратный.

$$\begin{cases} x_1 = \frac{u_1}{u_2 + 1}; \\ x_2 = \frac{1}{u_1 + u_2 + 1}, \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = \frac{x_1}{x_2(x_1 + 1)}; \\ u_2 = -1 + \frac{1}{x_2(x_1 + 1)}. \end{cases}$$

По полученным выше формулам найдём приближенные значения частных производных $\partial^{(l_1, l_2)} x_i(u_{j,k})$, $\partial^{(l_1, l_2)} u_i(x_{j,k})$ и сравним с точными.

Решение. На рис. 3.2 показаны точки $u_{j,k}$ и $x_{j,k}$.

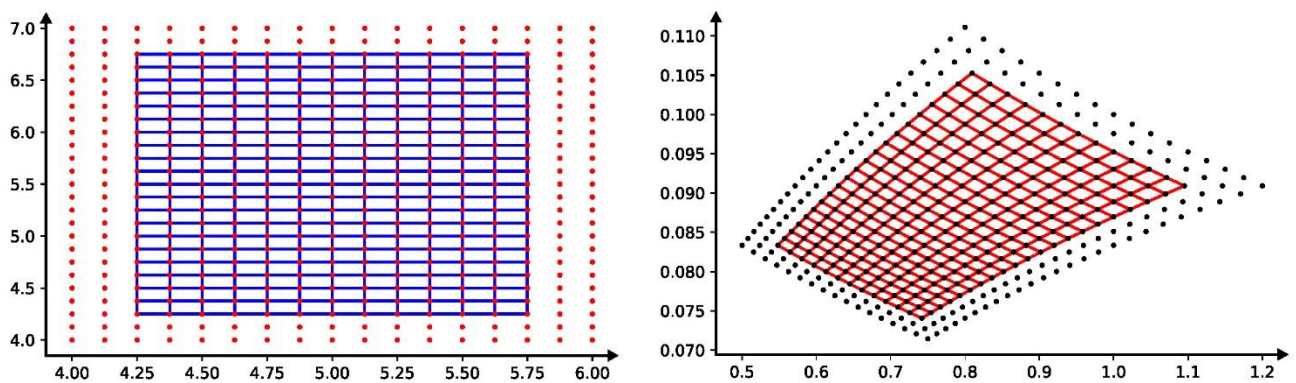


Рис. 3.2 – Аппроксимация диффеоморфизма

В таблице 3.1 представлено сравнение значений частных производных в этих точках, полученных по точным $\partial^{(l_1, l_2)} x_i(u)$, $\partial^{(l_1, l_2)} u_i(x)$ и приближенным $\partial^{(l_1, l_2)} \tilde{x}_i(u)$, $\partial^{(l_1, l_2)} \tilde{u}_i(x)$ формулам.

Таблица 3.1 – Результаты вычислений для $j = 5$

| (l_1, l_2) | $\max_{u,i} \partial^{(l_1, l_2)} x_i(u) - \partial^{(l_1, l_2)} \tilde{x}_i(u) $ | $\max_{x,i} \partial^{(l_1, l_2)} u_i(x) - \partial^{(l_1, l_2)} \tilde{u}_i(x) $ |
|--------------|--|--|
| (0,0) | $1,14 \cdot 10^{-9}$ | - |
| (0,1) | $1,35 \cdot 10^{-9}$ | $1,7 \cdot 10^{-7}$ |
| (1,0) | $1,9 \cdot 10^{-10}$ | $8,8 \cdot 10^{-9}$ |
| (2,0) | $3,1 \cdot 10^{-8}$ | $7,8 \cdot 10^{-5}$ |
| (0,2) | $3,5 \cdot 10^{-6}$ | 0,03 |
| (1,1) | $2,3 \cdot 10^{-10}$ | 0,0011 |

Отдельно рассмотрим двумерный случай. В дальнейшем нам потребуются вычислительные формулы для нахождения значений частных производных первого и второго порядков функций $u_i(x_1, x_2)$, $i = 1, 2$. Из равенств

$$\begin{cases} x_1 = x_1(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)), \\ x_2 = x_2(u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)) \end{cases} \quad (3.5)$$

находим

$$\begin{cases} 1 = \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}); \\ 0 = \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}). \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) = \frac{\partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}; \\ \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) = -\frac{\partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}. \end{cases} \quad (3.6)$$

Аналогично, дифференцируя (3.5) по x_2 , получаем

$$\begin{cases} 0 = \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}); \\ 1 = \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \partial^{(0,1)}u_1(x_{j,k}) = -\frac{\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}; \\ \partial^{(0,1)}u_2(x_{j,k}) = \frac{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Для нахождения частных производных второго порядка продифференцируем уравнения (3.5) дважды по x_1 . Получим

$$\begin{aligned} & \partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(2,0)}u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})\partial^{(2,0)}u_2(x_{j,k}) = \\ & = -\partial^{(2,0)}x_1(u_{j,k})\left(\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\right)^2 - \\ & -2\partial^{(1,1)}x_1(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k}) - \partial^{(0,2)}x_1(u_{j,k})\left(\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})\right)^2. \\ & \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(2,0)}u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k})\partial^{(2,0)}u_2(x_{j,k}) = \\ & = -\partial^{(2,0)}x_2(u_{j,k})\left(\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\right)^2 - \\ & -2\partial^{(1,1)}x_2(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k}) - \partial^{(0,2)}x_2(u_{j,k})\left(\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})\right)^2. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} B_1 &= -\partial^{(2,0)}x_1(u_{j,k})\left(\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\right)^2 - 2\partial^{(1,1)}x_1(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k}) - \\ & -\partial^{(0,2)}x_1(u_{j,k})\left(\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})\right)^2; \\ B_2 &= -\partial^{(2,0)}x_2(u_{j,k})\left(\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\right)^2 - 2\partial^{(1,1)}x_2(u_{j,k})\partial^{(1,0)}u_1(x_{j,k})\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k}) - \\ & -\partial^{(0,2)}x_2(u_{j,k})\left(\partial^{(1,0)}u_2(x_{j,k})\right)^2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \partial^{(2,0)}u_1(x_{j,k}) = \\ & = \frac{B_1\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - B_2\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}; \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} & \partial^{(2,0)}u_2(x_{j,k}) = \\ & = \frac{B_2\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k}) - B_1\partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)}x_1(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)}x_2(u_{j,k})\partial^{(0,1)}x_1(u_{j,k})}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Продифференцируем уравнения (3.5) по x_1, x_2 . Получим

$$\begin{aligned}
& \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_2(x_{j,k}) = \\
& = -\partial^{(2,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) - \\
& - \partial^{(1,1)} x_1(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right) - \\
& - \partial^{(0,2)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}). \\
& \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_1(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,1)} u_2(x_{j,k}) = \\
& = -\partial^{(2,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) - \\
& - \partial^{(1,1)} x_2(u_{j,k}) \left(\partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right) - \\
& - \partial^{(0,2)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}).
\end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned}
D_1 &= -\partial^{(2,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) - \\
& - \partial^{(1,1)} x_1(u_{j,k}) \left[\partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right] - \\
& - \partial^{(0,2)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) \\
D_2 &= -\partial^{(2,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) - \\
& - \partial^{(1,1)} x_2(u_{j,k}) \left[\partial^{(1,0)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) + \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \right] - \\
& - \partial^{(0,2)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(1,0)} u_2(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k})
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
& \partial^{(1,1)} u_1(x_{j,k}) = \\
& = \frac{D_1 \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - D_2 \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}; \tag{3.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial^{(1,1)} u_2(x_{j,k}) = \\
& = \frac{D_2 \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) - D_1 \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Далее продифференцируем уравнения (3.5) дважды по x_2 . Получим

$$\begin{aligned}
& \partial^{(0,2)} u_1(x_{j,k}) = \\
& = \frac{C_1 \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - C_2 \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}; \tag{3.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \partial^{(0,2)} u_2(x_{j,k}) = \\ & = \frac{C_2 \partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) - C_1 \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k})}{\partial^{(1,0)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_2(u_{j,k}) - \partial^{(1,0)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} x_1(u_{j,k})}, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} C_1 = & -\partial^{(2,0)} x_1(u_{j,k}) \left(\partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \right)^2 - 2 \partial^{(1,1)} x_1(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) - \\ & - \partial^{(0,2)} x_1(u_{j,k}) \left(\partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) \right)^2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 = & -\partial^{(2,0)} x_2(u_{j,k}) \left(\partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \right)^2 - 2 \partial^{(1,1)} x_2(u_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_1(x_{j,k}) \partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) - \\ & - \partial^{(0,2)} x_2(u_{j,k}) \left(\partial^{(0,1)} u_2(x_{j,k}) \right)^2. \end{aligned}$$

3.3 Алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и вейвлетов на X

Из теоремы 2.2 и алгоритма 2.10 нахождения значений частных производных функций $\varphi_{j,\alpha}$ получаем следующий алгоритм вычисления значений масштабирующих функций на X и их частных производных.

Алгоритм.

Шаг 1. Вычисление свёрток $\left((d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * (a \otimes \dots \otimes a) \right) * x_{\Lambda, \bullet}^{(i)}$,

где $x_{\Lambda, \bullet}^{(i)} = \{x_{\Lambda, k}^{(i)}\}_k$,

Результат: $\partial^{(l_1, \dots, l_n)} x_i(u_{\Lambda, k}) \approx \left(\left((d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * (a \otimes \dots \otimes a) \right) * x_{\Lambda, \bullet}^{(i)} \right)_k$.

Шаг 2. Нахождение $Dg^{-1}(x_{\Lambda, k}) = \left(Dg(u_{\Lambda, k}) \right)^{-1}$ по теореме о производной обратной функции. Значения вторых частных производных $\partial_\lambda \partial_\mu u_l(x_{\Lambda, k})$ находятся из системы

$$\sum_{l=1}^n \partial_l x_i(u_{\Lambda, k}) \partial_\lambda \partial_\mu u_l(x_{\Lambda, k}) = - \sum_{l=1}^n \sum_{t=1}^n \partial_l \partial_t x_i(u_{\Lambda, k}) \partial_\lambda u_l(x_{\Lambda, k}) \partial_\mu u_t(x_{\Lambda, k})$$

Шаг 3. Последовательное вычисление свёрток для заданного $\alpha \in \mathcal{K}_j$

$$v_{k+1} = b * (Uv_k), \quad j \leq k \leq j+J-1, \quad v_{j,\beta} = \delta_{\alpha,\beta}, \quad \forall \beta \in \mathcal{K}_j$$

Шаг 4. Вычисление свёрток $\left((d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * (a \otimes \dots \otimes a) \right) * v_{j+J}$.

Шаг 5. Нахождение приближённых значений масштабирующих функций в узлах $T \cap \mathcal{K}_{j+J}$

$$\varphi_{j,\alpha}(\beta) \approx v_{j+J,\beta}, \quad \forall \beta \in T \cap \mathcal{K}_{j+J}$$

$$\partial^{(l_1, \dots, l_n)} \varphi_{j,\alpha}(\beta) \approx \left(\left((d^{l_1} \otimes \dots \otimes d^{l_n}) * (a \otimes \dots \otimes a) \right) * v_{j+J} \right)_{\beta}, \quad \forall \beta \in T \cap \mathcal{K}_{j+J}.$$

Шаг 6. Нахождение по теореме о производной сложной функции в любой точке $x_{j+J,k} \in X$ (здесь $j+J \leq \Lambda$)

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi_{j,\alpha}^X(x_{j+J,k}) &= \sum_{l=1}^n \partial_l \varphi_{j,\alpha}(u_{j+J,k}) \partial_i u_l(x_{j+J,k}), \\ \partial_i \partial_p \varphi_{j,\alpha}^{\hat{X}}(x_{j+J,k}) &= \sum_{l=1}^n \partial_l \varphi_{j,\alpha}(u_{j+J,k}) \partial_i \partial_p u_l(x_{j+J,k}) + \\ &+ \sum_{l,t=1}^n \partial_l \partial_t \varphi_{j,\alpha}(u_{j+J,k}) \partial_p u_t(x_{j+J,k}) \partial_i u_l(x_{j+J,k}). \end{aligned}$$

3.4 Вейвлет-система на двумерной области

Пусть $T \subset I_0^2 = [i_{1,0}; i_{1,1}] \times [i_{2,0}; i_{2,1}]$, $X \subset \mathbf{R}^2$. Обозначим

$$I_{j,k} = \int_{I_0^2} \varphi_{j,k}(u) du$$

и для упрощения записи будем опускать множитель 2^{-j} в индексах функций $\varphi_{j,2^{-j}\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{Z}^2$. Аналогичное упрощение будем использовать и в $\psi_{j,m}$, $m \in \mathcal{M}_j$. Как было отмечено выше, вейвлет $\psi_{j,m}$ после подъёма определяется следующим выражением

$$\psi_{j,m} = \varphi_{j+1,m} - \sum_{k \in \mathcal{K}(m)} s_{j,k,m} \varphi_{j,k}$$

где $\mathcal{K}(m)$ – соседние с m узлы.

Будем использовать 4-х и 2-х точечную схемы, т.е. в сумме будем учитывать только слагаемые, относящиеся к четырём или двум соседним с m узлам сетки. Таким образом (рис. 3.3),

$$\mathcal{K}(m) = \begin{cases} \{(\alpha_1 \ \alpha_2)^T, (\alpha_1 \ \alpha_2 + 1)^T\}, & \text{если } m = (2\alpha_1 \ 2\alpha_2 + 1)^T; \\ \{(\alpha_1 \ \alpha_2)^T, (\alpha_1 + 1 \ \alpha_2)^T\}, & \text{если } m = (2\alpha_1 + 1 \ 2\alpha_2)^T; \\ \{(\alpha_1 \ \alpha_2)^T, (\alpha_1 + 1 \ \alpha_2)^T, \\ (\alpha_1 + 1 \ \alpha_2 + 1)^T, (\alpha_1 \ \alpha_2 + 1)^T\}, & \text{если } m = (2\alpha_1 + 1 \ 2\alpha_2 + 1)^T; \end{cases}$$

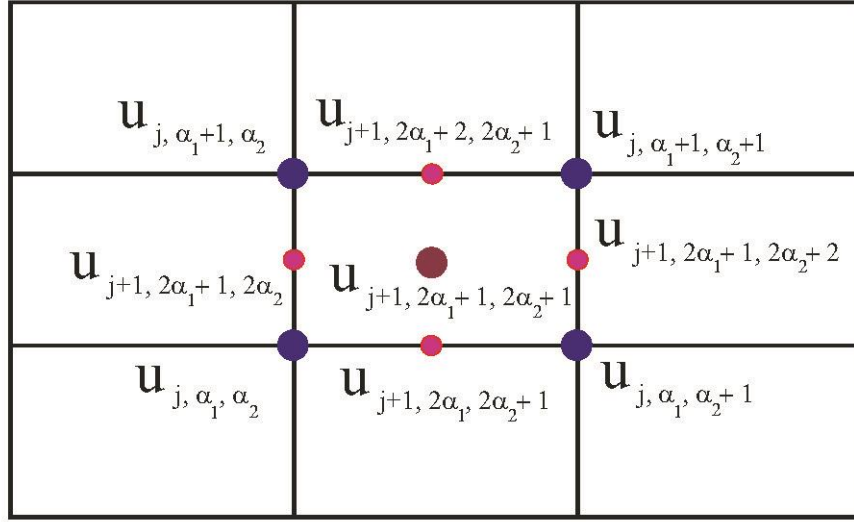


Рис. 3.3 – Окружность $\mathcal{K}(m)$

Отсюда

$$\begin{aligned} \psi_{j, 2\alpha_1, 2\alpha_2+1}^X &= \varphi_{j+1, 2\alpha_1, 2\alpha_2+1}^X - \frac{I_{j+1, 2\alpha_1, 2\alpha_2+1}}{2 \cdot I_{j, \alpha_1, \alpha_2}} \varphi_{j, \alpha_1, \alpha_2}^X - \frac{I_{j+1, 2\alpha_1, 2\alpha_2+1}}{2 \cdot I_{j, \alpha_1, \alpha_2+1}} \varphi_{j, \alpha_1, \alpha_2+1}^X. \\ \psi_{j, 2\alpha_1+1, 2\alpha_2}^X &= \varphi_{j+1, 2\alpha_1+1, 2\alpha_2}^X - \frac{I_{j+1, 2\alpha_1+1, 2\alpha_2}}{2 \cdot I_{j, \alpha_1, \alpha_2}} \varphi_{j, \alpha_1, \alpha_2}^X - \frac{I_{j+1, 2\alpha_1+1, 2\alpha_2}}{2 \cdot I_{j, \alpha_1+1, \alpha_2}} \varphi_{j, \alpha_1+1, \alpha_2}^X. \\ \psi_{j, 2\alpha_1+1, 2\alpha_2+1}^X &= \varphi_{j+1, 2\alpha_1+1, 2\alpha_2+1}^X - \frac{I_{j+1, 2\alpha_1+1, 2\alpha_2+1}}{4 \cdot I_{j, \alpha_1, \alpha_2}} \varphi_{j, \alpha_1, \alpha_2}^X - \frac{I_{j+1, 2\alpha_1+1, 2\alpha_2+1}}{4 \cdot I_{j, \alpha_1+1, \alpha_2}} \varphi_{j, \alpha_1+1, \alpha_2}^X - \\ &\quad - \frac{I_{j+1, 2\alpha_1+1, 2\alpha_2+1}}{4 \cdot I_{j, \alpha_1, \alpha_2+1}} \varphi_{j, \alpha_1, \alpha_2+1}^X - \frac{I_{j+1, 2\alpha_1+1, 2\alpha_2+1}}{4 \cdot I_{j, \alpha_1+1, \alpha_2+1}} \varphi_{j, \alpha_1+1, \alpha_2+1}^X. \end{aligned}$$

В случае использования стационарных схем подразделений при построении вейвлетов из (3.3) следует, что необходимо учитывать только масштабирующие функции с $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, удовлетворяющим условию

$$\alpha_l = \alpha_{j,l,0} = 2^j i_{l,0} - \Delta, 2^j i_{l,0} - \Delta + 1, \dots, \alpha_{j,l,1} = 2^j i_{l,1} - \Gamma, \quad l = 1, 2 \quad (3.14)$$

Поэтому вейвлеты $\psi_{j,m}$ не равные тождественно нулю на $[i_{1,0}; i_{1,1}] \times [i_{2,0}; i_{2,1}]$ должны иметь индексы $m = 2^{-j-1}(\beta_1, \beta_2) \in \mathcal{M}_j$, где $\beta_l \in \{2\alpha_{j,l,0} - 1, \dots, 2\alpha_{j,l,1} + 1\}$.

На рис. 3.4 представлены графики функций $\varphi_{j,k}^X$, $\partial^{(0,1)}\varphi_{j,k}^X$, $\psi_{j,m}^X$, $\partial^{(0,1)}\psi_{j,m}^X$ для случая масштабирующих функций и вейвлетов Deslauriers-Dubuc и диффеоморфизма g , имеющего вид

$$x_1 = \frac{u_1}{u_2 + 1}, \quad x_2 = \frac{1}{u_1 + u_2 + 1}.$$

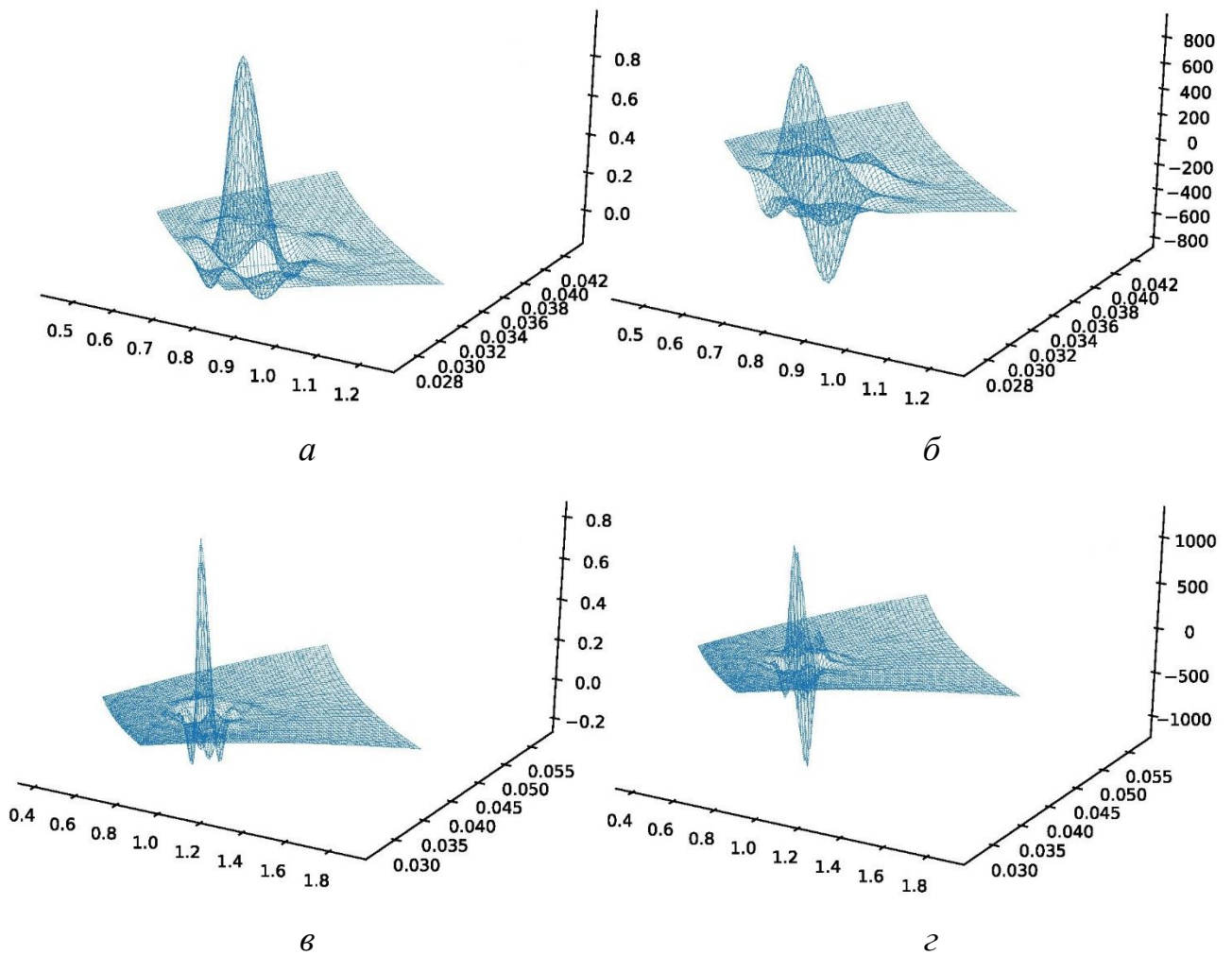


Рис. 3.4 – Графики:

a – масштабирующая функция $\varphi_{j,k}^X$, $б$ – частная производная $\partial^{(0,1)}\varphi_{j,k}^X$,
 $в$ – вейвлет $\psi_{j,m}^X$, $г$ – частная производная $\partial^{(0,1)}\psi_{j,m}^X$

В заключении этого раздела рассмотрим, как оценить значения интегралов $I_{j,k}$.

Согласно алгоритму построения функций $\varphi_{j,k}$ известны приближённые значения этой функции в точках $(2^{-j-J}\alpha, 2^{-j-J}\beta)$, $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}$, равные $v_{j+J,\alpha,\beta}$.

Поэтому

$$\begin{aligned} I_{j,k} &= \int_{i_0^2} \varphi_{j,k}(u) du \approx \frac{1}{2^{2(j+J-1)}} \sum_{i_1=2^{j+J-1}i_{1,0}}^{2^{j+J-1}i_{1,1}-1} \sum_{i_2=2^{j+J-1}i_{2,0}}^{2^{j+J-1}i_{2,1}-1} \varphi_{j,k}\left(\frac{2i_1+1}{2}, \frac{2i_2+1}{2}\right) \approx \\ &\approx \frac{1}{2^{2(j+J-1)}} \sum_{i_1=2^{j+J-1}i_{1,0}}^{2^{j+J-1}i_{1,1}-1} \sum_{i_2=2^{j+J-1}i_{2,0}}^{2^{j+J-1}i_{2,1}-1} v_{j+J,2i_1+1,2i_2+1}. \end{aligned}$$

Вернёмся к преобразованиям, описанным в разделе 1.2.

Пусть $p: (x_1, x_2) \mapsto (v_1(x_1, x_2), v_2(x_1, x_2))$, $p(\tilde{X}) = \Omega$ и $\{\omega_i^X\}_{i=1}^{+\infty}$ – вейвлет-система на X . Определим функции ω_i^Ω на $p(X) \subset \Omega$ равенством

$$\omega_i^\Omega(v_1, v_2) = \omega_i^X(x_1(v_1, v_2), x_2(v_1, v_2)), \quad (v_1, v_2) \in \Omega, \quad (3.15)$$

где отображение $p^{-1}: (v_1, v_2) \mapsto (x_1(v_1, v_2), x_2(v_1, v_2))$ является обратным к p . Обозначим $v_{j,k} = p(x_{j,k})$, $x_{j,k} \in X$. Найдём значения частных производных функции ω_i^Ω в точках $v_{j,k}$.

Из (3.15) имеем

$$\omega_i^\Omega(v_{j,k}) = \omega_i^X(x_{j,k}) \quad (3.16)$$

Зная $v_1(x_1, x_2) = z(\tilde{f}_1(x_1, x_2), \tilde{f}_2(x_1, x_2))$ можно снова воспользоваться формулами (3.6) – (3.13) и получить значения $\partial_\lambda x_i(v_{j,k})$, $\partial^{(\lambda,\mu)} x_i(v_{j,k})$, $i, k = 1, 2$, $\lambda, \mu = 0, 1, 2$, $\lambda + \mu \leq 2$. При этом в этих формулах функцию v_2 нужно выразить через v_1 , используя соотношения Коши-Римана

$$\partial_2 v_2(x_{j,k}) = \partial_1 v_1(x_{j,k}), \quad \partial_1 v_2(x_{j,k}) = -\partial_2 v_1(x_{j,k}).$$

Тогда

$$\partial_1 \omega_i^\Omega(v_{j,k}) = \partial_1 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_1 x_1(v_{j,k}) + \partial_2 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_1 x_2(v_{j,k}) = \quad (3.17)$$

$$= \frac{\partial_1 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_1 v_1(x_{j,k}) + \partial_2 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_2 v_1(x_{j,k})}{(\partial_1 v_1(x_{j,k}))^2 + (\partial_2 v_1(x_{j,k}))^2}.$$

$$\begin{aligned} \partial_2 \omega_i^\Omega(v_{j,k}) &= \partial_1 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_2 x_1(v_{j,k}) + \partial_2 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_2 x_2(v_{j,k}) = \\ &= \frac{-\partial_1 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_2 v_1(x_{j,k}) + \partial_2 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_1 v_1(x_{j,k})}{(\partial_1 v_1(x_{j,k}))^2 + (\partial_2 v_1(x_{j,k}))^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \partial^{(2,0)} \omega_i^\Omega(v_{j,k}) &= \partial^{(2,0)} \omega_i^X(x_{j,k}) (\partial_1 x_1(v_{j,k}))^2 + \\ + 2\partial^{(1,1)} \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_1 x_1(v_{j,k}) \partial_1 x_2(v_{j,k}) &+ \partial^{(0,2)} \omega_i^X(x_{j,k}) (\partial_1 x_2(v_{j,k}))^2 + \\ + \partial_1 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial^{(2,0)} x_1(v_{j,k}) &+ \partial_2 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial^{(2,0)} x_2(v_{j,k}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \partial^{(0,2)} \omega_i^\Omega(v_{j,k}) &= \partial^{(0,2)} \omega_i^X(x_{j,k}) (\partial_2 x_1(v_{j,k}))^2 + \\ + 2\partial^{(1,1)} \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_2 x_1(v_{j,k}) \partial_2 x_2(v_{j,k}) &+ \partial^{(0,2)} \omega_i^X(x_{j,k}) (\partial_2 x_2(v_{j,k}))^2 + \\ + \partial_1 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial^{(0,2)} x_1(v_{j,k}) &+ \partial_2 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial^{(0,2)} x_2(v_{j,k}) \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \partial^{(1,1)} \omega_i^\Omega(v_{j,k}) &= \partial^{(2,0)} \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_1 x_1(v_{j,k}) \partial_2 x_1(v_{j,k}) + \\ + \partial^{(1,1)} \omega_i^X(x_{j,k}) (\partial_1 x_1(v_{j,k}) \partial_2 x_2(v_{j,k}) &+ \partial_2 x_1(v_{j,k}) \partial_1 x_2(v_{j,k})) + \\ + \partial^{(0,2)} \omega_i^X(x_{j,k}) \partial_1 x_2(v_{j,k}) \partial_2 x_2(v_{j,k}) &+ \partial_1 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial^{(1,1)} x_1(v_{j,k}) + \\ + \partial_2 \omega_i^X(x_{j,k}) \partial^{(1,1)} x_2(v_{j,k}) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Таким образом, значения частных производных вейвлетов $\omega_i^\Omega(v_{j,k})$ мы выразили через значения частных производных вейвлетов $\omega_i^X(x_{j,k})$ и значения частных производных функции $v_1(x_{j,k})$. Следовательно, для решения задач теории упругости нет необходимости находить аналитическую функцию (1.36),

достаточно иметь только её действительную часть, которую определяем из уравнения Лапласа.

3.5 Использование вейвлетов в приближенном решении уравнений в частных производных

Рассмотрим дифференциальное уравнение и краевые условия

$$Lw = f, L_i w = f_i, \text{ на } \partial X, i = 1, 2, \dots, m, \quad (3.22)$$

где L – линейный дифференциальный оператор.

Пусть $\{V_j\}_{j \in J}$ – кратномасштабный анализ на X . Приближённые решения w_{j_1} уравнения (3.22) будем искать в виде

$$w_{j_1} = \sum_{n \in \mathcal{K}_{j_0}} v_{j_0, n} \varphi_{j_0, n}^X + \sum_{j=j_0}^{j_1-1} \sum_{n \in \mathcal{M}_j} \gamma_{j, n} \psi_{j, n}^X = \sum_{k=1}^{M(j_1)} c_k \omega_k \in V_{j_1}, \quad (3.23)$$

где для удобства базисные функции пронумерованы одним индексом и обозначены ω_k , а коэффициенты $v_{j_0, n}$ и $\gamma_{j, n}$ обозначены c_k . Приближённые решения находятся по методу наименьших квадратов из решения вариационной задачи

$$w_{j_1} = \arg \min_{w \in V_{j_1}} I_{j_1}(w),$$

а функционал $I_{j_1}(w)$ определяется равенством

$$I_j(w) = \|Lw - f\|^2 + \sum_{i=1}^m a_i \|L_i w - f_i\|^2, \quad (3.24)$$

где a_i – положительные весовые коэффициенты.

С учётом того, что при построении вейвлетов есть возможность обнулить часть базисных функций на границе области (это функции $\varphi_{j, \alpha}^X$, с $\alpha \notin \mathcal{K}_j \cap \partial X$), можно часть коэффициентов разложения (3.23) найти из граничных условий. В этом случае

$$w_{j_1} = \sum_{k \in \text{Int}X} c_k \omega_k + \sum_{s \in \partial X} c_s \omega_s,$$

а остальные коэффициенты уже находить из задачи минимизации

$$\left\| \sum_{k \in \text{Int}X} c_k L\omega_k - g \right\|^2 \rightarrow \min_{c_k},$$

где $g = f - \sum_{s \in \partial X} c_s \omega_s$.

Второй приближённый способ решения задачи (3.22), который будем использовать, это метод коллокаций. В этом способе требуют, чтобы уравнение и граничные условия удовлетворялись в узлах сетки, так называемых узлах коллокации.

3.6 Примеры использования вейвлетов в приближенном решении уравнений в частных производных

В данном разделе рассмотрим уравнения в частных производных с известными решениями, чтобы иметь возможность сравнить получаемые с помощью вейвлетов приближенные решения с точными.

Пример 3.2. Уравнение Пуассона. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = f(x_1, x_2), \quad (3.25)$$

$$y|_{\partial X} = 0$$

где $(x_1, x_2) \in X = [0; 1] \times [0; 1]$ и

$$f(x_1, x_2) = 6x_1x_2(x_1^2(2x_2 - 1)(x_1 - 1) + x_2^2(2x_1 - 1)(x_2 - 1)).$$

Используя вейвлеты, найдём приближённое решение данного уравнения и сравним его с точным.

Решение. Точным решением в данном случае является функция

$$y(x_1, x_2) = x_1^3 x_2^3 (1 - x_1)(1 - x_2).$$

Рассмотрим применение вейвлетов к приближённому решению данного уравнения. В данном случае $T = X = [0; 1]^2$. Приближение будем искать в виде $y_j(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{M(j)} c_i \omega_i(x_1, x_2)$. Подставляя в уравнение граничные условия, находим

$$\sum_{i=1}^{M(j)} c_i \left(\partial^{(2,0)} \omega_i(x_1, x_2) + \partial^{(0,2)} \omega_i(x_1, x_2) \right) = f(x_1, x_2);$$

$$\sum_{i=1}^{M(j)} c_i \omega_i(x_1, 0) = \sum_{i=1}^{M(j)} c_i \omega_i(x_1, 1) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{M(j)} c_i \omega_i(0, x_2) = \sum_{i=1}^{M(j)} c_i \omega_i(1, x_2) = 0.$$

На рис. 3.5 *а* представлен график точного решения, на рис. 3.5 *б* – график приближенного решения $y_j \in V_2$, найденного методом коллокаций с использованием в качестве масштабирующих функций вейвлетов Deslauriers-Dubuc ($p=3$). На рис. 3.5 *в* представлен график приближенного решения $y_j \in V_1$, найденного методом коллокаций с использованием в качестве масштабирующих функций вейвлетов Deslauriers-Dubuc ($p=4$). Отличие точного решения от приближенного в случае (*б*) не превосходит 0,0015, а в случае (*в*) не превосходит 0,00041.

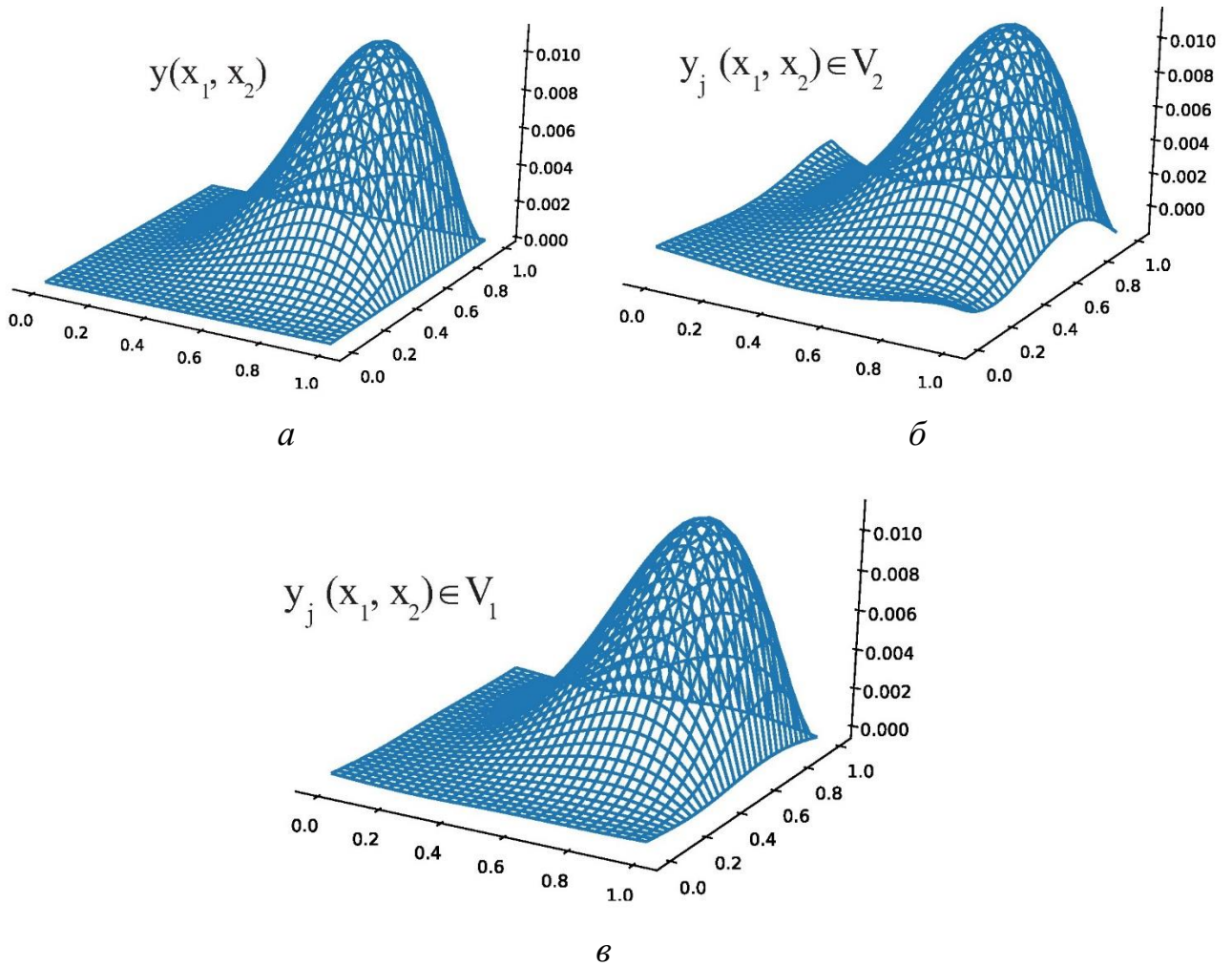


Рис. 3.5 – Графики решений:

a – точное решение, b – приближённое решение $y_j \in V_2$ с использованием вейвлетов Deslauriers-Dubuc ($p = 3$), c – приближённое решение $y_j \in V_1$ с использованием вейвлетов Deslauriers-Dubuc ($p = 4$)

Пример 3.3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = -2 \frac{\partial y}{\partial x_1} - 3y,$$

$$y(0, x_2) = e^{-x_2} \cos x_2, y(x_1, 0) = \cos x_1, \quad (3.26)$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}, x_2\right) = 0, y\left(x_1, \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Используя вейвлеты, найдём приближённое решение данного уравнения, и сравним его с точным.

Решение. Точным решением данной задачи является функция

$$y(x_1, x_2) = e^{-x_2} \cos x_1 \cos x_2.$$

Для нахождения приближённого решения используем вейвлеты. В данном случае $T = [0; 1]^2$, а $X = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]^2$. Приближение будем искать в виде $y_j(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{M(j)} c_i \omega_i(x_1, x_2)$. Подставляя в уравнение граничные условия, находим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{M(j)} c_i (\partial^{(2,0)} \omega_i + \partial^{(0,2)} \omega_i + 2 \partial^{(1,0)} \omega_i + 3 \omega_i) &= 0. \\ \sum_{i=1}^{M(j)} c_i \omega_i(0, x_2) &= e^{-x_2} \cos x_2, \quad \sum_{i=1}^{M(j)} c_i \omega_i(x_1, 0) = \cos x_1, \\ \sum_{i=1}^{M(j)} c_i \omega_i\left(\frac{\pi}{2}, x_2\right) &= 0, \quad \sum_{i=1}^{M(j)} c_i \omega_i\left(x_1, \frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

На рис. 3.6 *а* представлен график точного решения, а на рис. 3.6 *б* – график приближённого решения, найденного методом коллокаций. Отличие точного решения от приближённого не превосходит 0,12. В вычислениях применялись вейвлеты Deslauriers-Dubuc ($p = 3$).

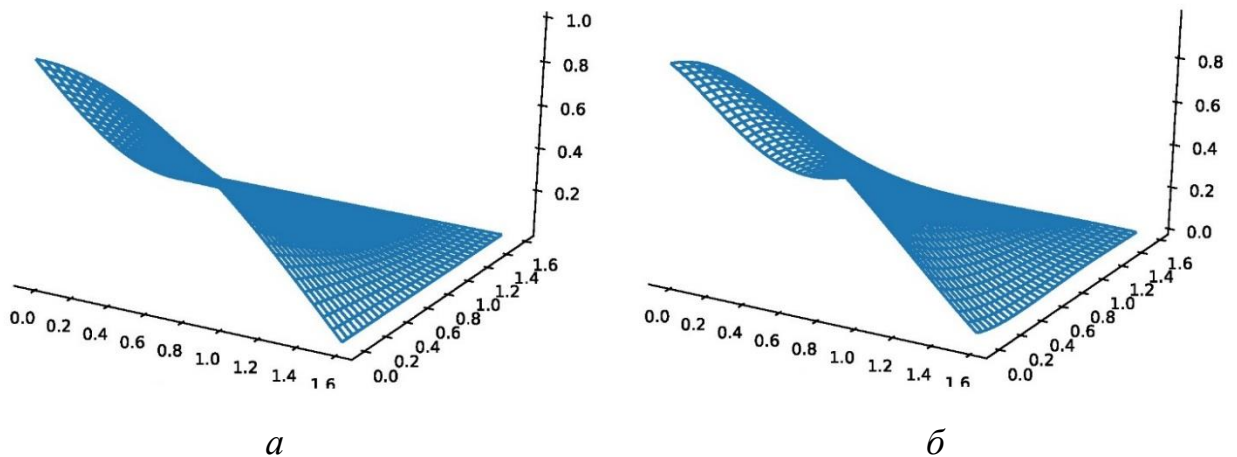


Рис. 3.6 – Графики решений:

а – точное решение, *б* – приближённое решение из V_2

Пример 3.4. Решение уравнения Лапласа $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ в области X, представленной на рис. 3.7.

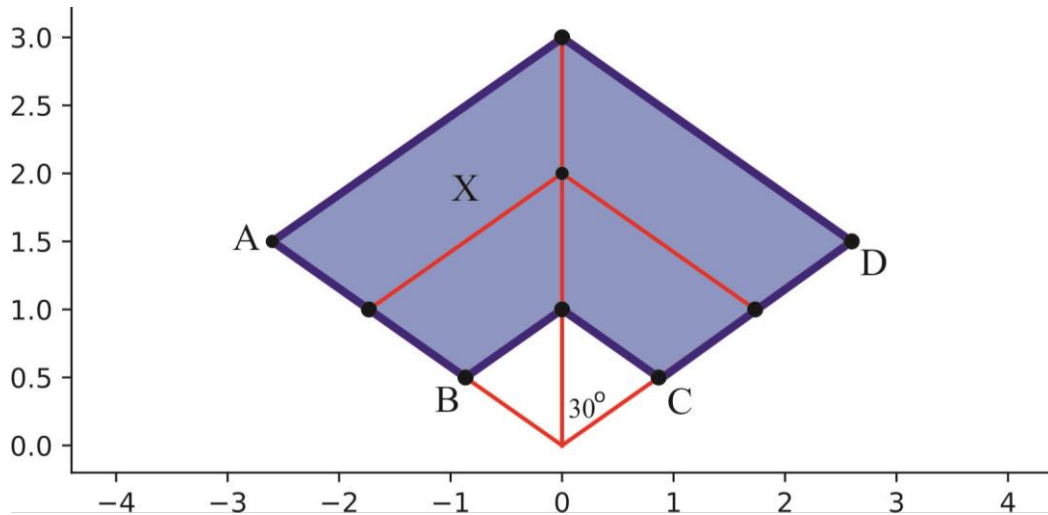


Рис. 3.7 – Область X и её разбиение на конечные элементы

Граничные условия

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AB} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{BC} = -1, \quad u|_{CD} = \ln 3, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{DA} = \frac{1}{3}.$$

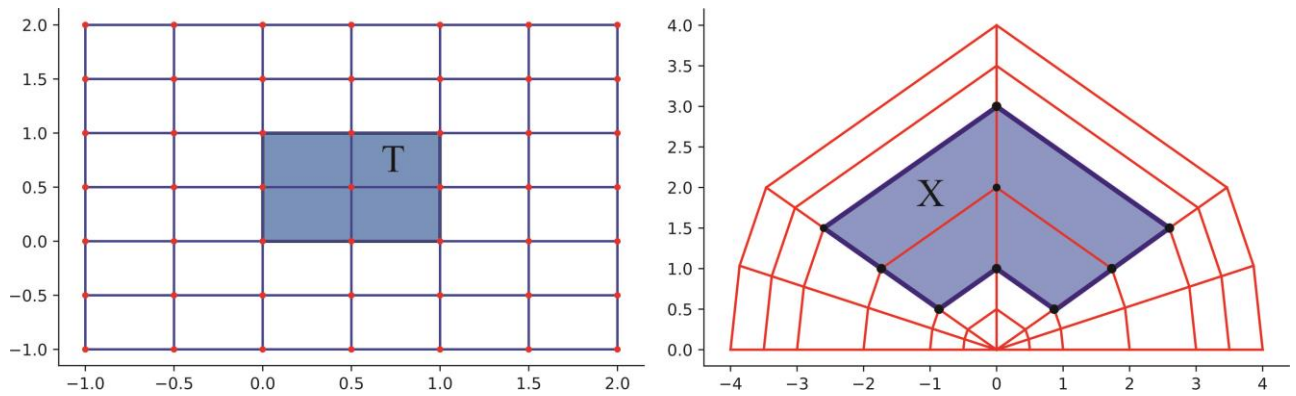
Решение. Найдём приближенное решение уравнения Лапласа с помощью разработанного метода и сравним полученную в ходе решения погрешность с погрешностью решения методом конечных элементов. Приближённые значения функции $u(x, y)$ найдены в узлах, показанных на рис. 3.7. Погрешность δ вычислена по формуле

$$\delta = \sqrt{\sum_{i=1}^m (u_{\text{точ}}(x_i, y_i) - u_i)^2},$$

где $u_{\text{точ}}(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, m – количество точек в сетке.

Значения u_i в представленных узлах найдены с помощью метода конечных элементов [31]. Погрешность решения в этом случае $\delta = 0,329$.

На рис. 3.8 показаны множества Γ и X для разработанного метода, основанного на вейвлетах. Дополнительные узлы необходимы для построения аппроксимации гомеоморфизма g .

Рис. 3.8 – Множества T и X

Поиск приближения осуществлялся в пространстве V_1 , при этом использовались сплайн-вейвлеты. График этого приближения и график точного решения, построенные на заданной сетке, представлены на рис. 3.9. Погрешность $\delta = 0,03$.

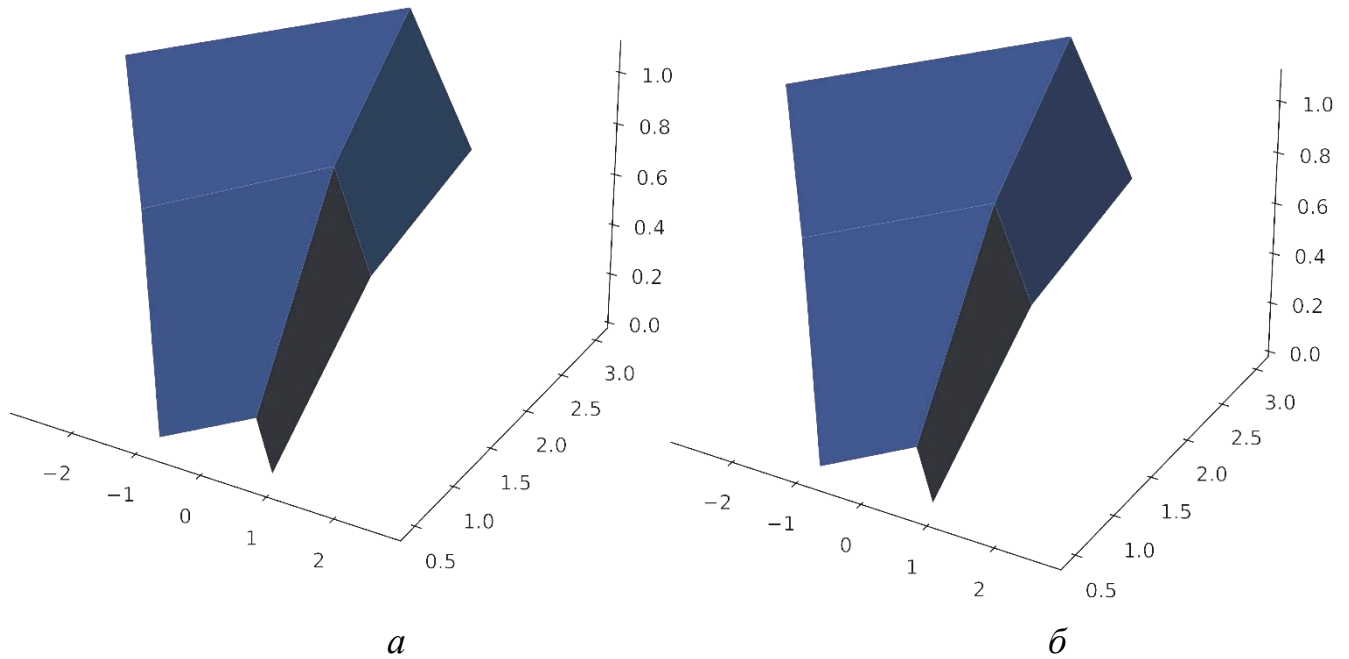


Рис. 3.9 – Построенные на заданной сетке графики решений уравнения:
а – приближённое решение, *б* – точное решение

3.7 Применение вейвлетов в задачах теории упругости

В данном разделе рассмотрим использование вейвлетов в приближённом решении простых задач теории упругости с известным решением. Тем самым, сравним известные решения с предложенным нами решением, полученным с использованием вейвлетов.

3.7.1 Элементы теории упругости

В теории упругости предполагается, что исследуемое тело обладает свойствами сплошности, однородности, изотропности и упругости. Свойство сплошности заключается в том, что тело, непрерывное до деформации, остаётся непрерывным и после приложения нагрузки. Свойство однородности тела предполагает, что во всех точках тела под действием одинаковых сил возникают одинаковые деформации. Свойство изотропности предполагает, что упругие свойства одинаковы по любому направлению, проведённому из данной точки тела. Упругостью называется свойство тела восстанавливать свои первоначальные размеры после снятия внешней нагрузки.

Рассмотрим некое упругое тело Ω с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$. Выберем систему координат, связанную с этим телом: $Ox_1x_2x_3$. Обозначим $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ – вектор единичной нормали границы тела, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x})\mathbf{i} + F_2(\mathbf{x})\mathbf{j} + F_3(\mathbf{x})\mathbf{k}$ – силу, действующую на тело в точке $\mathbf{x} \in \Omega$ и $\mathbf{F}_n(\mathbf{x}) = F_{n,1}(\mathbf{x})\mathbf{i} + F_{n,2}(\mathbf{x})\mathbf{j} + F_{n,3}(\mathbf{x})\mathbf{k}$ – поверхностную силу в точке $\mathbf{x} \in \partial\Omega$.

Под воздействием сил в теле возникнут напряжения. Под напряжением понимается внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади. Составляющая напряжения, действующая по нормали к грани выделенного элементарного объёма, называется нормальным напряжением и обозначается σ . Составляющая напряжения, действующая в плоскости грани, называется касательным напряжением и обозначается τ .

Выделим внутри тела параллелепипед объёма $\Delta V = \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ (рис. 3.10).

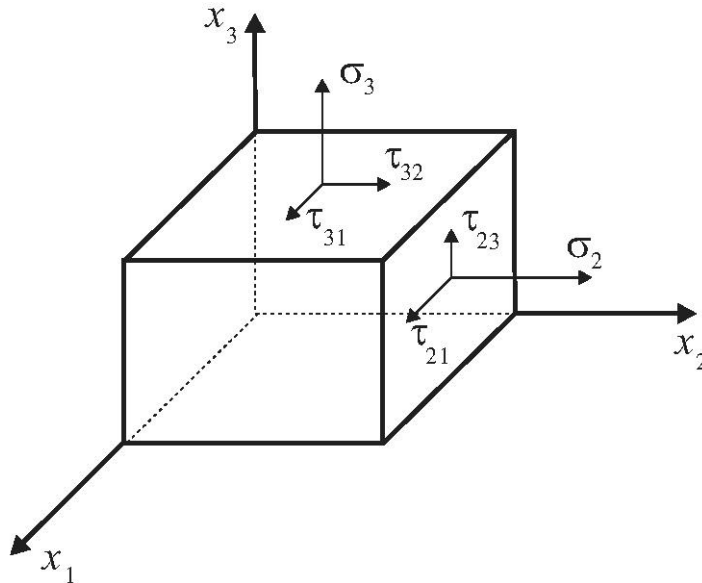


Рис. 3.10 – Компоненты напряжений

Для касательных напряжений будем использовать обозначение $\tau_{i,j}$, что представляет собой проекцию на ось Ox_j вектора напряжений, действующего на площадке перпендикулярной оси Ox_i . Условия его равновесия могут быть записаны в виде [27]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} + F_1 = 0, \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} + F_2 = 0, \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_3} + F_3 = 0. \end{cases} \quad (3.27)$$

Равновесие моментов относительно координатных осей приводят к уравнениям (закон парности касательных напряжений) [27]:

$$\tau_{12} = \tau_{21}, \quad \tau_{13} = \tau_{31}, \quad \tau_{23} = \tau_{32} \quad (3.28)$$

Таким образом, напряжённое состояние в произвольной точке тела с учётом закона парности касательных напряжений полностью определяется шестью компонентами напряжений: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{12}, \tau_{13}, \tau_{23}$.

Условие равновесия на поверхности упругого тела имеет вид [27]

$$\begin{cases} \sigma_1 n_1 + \tau_{12} n_2 + \tau_{13} n_3 = F_{n,1}; \\ \tau_{21} n_1 + \sigma_2 n_2 + \tau_{23} n_3 = F_{n,2}; \\ \tau_{31} n_1 + \tau_{32} n_2 + \sigma_3 n_3 = F_{n,3}. \end{cases} \quad (3.29)$$

Площадки, на которых касательные напряжения равны нулю, называются главными. Нормальные напряжения, действующие на них, называются главными напряжениями.

Выделенный параллелепипед деформируется из-за различий перемещений его точек. При этом будут меняться длины рёбер параллелепипеда и углы между ними. Составляющие вектора полного перемещения по осям x_1 , x_2 и x_3 обозначаются соответственно ξ , ζ и η . Линейные деформации ε_1 , ε_2 , ε_3 ребер параллелепипеда и угловые деформации γ_{12} , γ_{13} , γ_{23} между взаимно ортогональными направлениями подчинены геометрическим соотношениям Коши [27]

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial \xi}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial \eta}{\partial x_3}. \quad (3.30)$$

$$\gamma_{12} = \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi}{\partial x_2}, \quad \gamma_{13} = \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi}{\partial x_3}, \quad \gamma_{23} = \frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_3}. \quad (3.31)$$

Между напряжениями и деформациями существует связь, которая называется уравнения обобщённого закона Гука [27]:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{1}{E} (\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)); \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{E} (\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)); \\ \varepsilon_3 = \frac{1}{E} (\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)); \\ \gamma_{12} = \frac{1}{G} \tau_{12}; \\ \gamma_{13} = \frac{1}{G} \tau_{13}; \\ \gamma_{23} = \frac{1}{G} \tau_{23}, \end{cases} \quad (3.32)$$

где E – модуль Юнга, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$ – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона.

Итак, условия равновесия (3.27), формулы Коши (3.30), (3.31) и уравнения обобщённого закона Гука (3.32) дают 15 уравнений относительно 15 неизвестных σ_1 , σ_2 , σ_3 , τ_{12} , τ_{13} , τ_{23} , ε_1 , ε_2 , ε_3 , γ_{12} , γ_{13} , γ_{23} , u , v , w . Таким образом, задача теории

упругости может быть решена путём интегрирования этих уравнений при удовлетворении граничным условиям.

3.7.2 Решение задач теории упругости

Решение задач теории упругости в перемещениях.

Если из уравнений закона Гука выразить напряжения, то получим [27]

$$\begin{cases} \sigma_1 = 2G\varepsilon_1 + \lambda\varepsilon; \\ \sigma_2 = 2G\varepsilon_2 + \lambda\varepsilon; \\ \sigma_3 = 2G\varepsilon_3 + \lambda\varepsilon; \\ \tau_{12} = G\gamma_{12}; \\ \tau_{13} = G\gamma_{13}; \\ \tau_{23} = G\gamma_{23}, \end{cases} \quad (3.33)$$

где $\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}$ – коэффициент Ламе, $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$.

Полученные зависимости напряжений от перемещений подставляются в уравнения равновесия. В результате получаются три уравнения равновесия в перемещениях, которые называются уравнениями Ламе [27]:

$$\begin{cases} (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_3 \partial x_1} \right) + G \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_3^2} \right) + F_1 = 0; \\ (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_3 \partial x_2} \right) + G \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_3^2} \right) + F_2 = 0; \\ (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_3 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_3^2} \right) + G \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_3^2} \right) + F_3 = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

Решения этих уравнений должны удовлетворять граничным условиям. Это могут быть геометрические граничные условия, которые накладываются непосредственно на перемещения, или статические граничные условия (3.29), которые по аналогии с уравнениями равновесия записываются через перемещения с помощью уравнений Коши, а также с помощью уравнений закона Гука.

Статические граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} n_1 \left(2G \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right) \right) + n_2 G \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right) + n_3 G \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \right) = X_n; \\ n_1 G \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \right) + n_2 \left(2G \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right) \right) + n_3 G \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \right) = Y_n; \\ n_1 G \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi}{\partial x_3} \right) + n_2 G \left(\frac{\partial \eta}{\partial x_2} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_3} \right) + n_3 \left(2G \frac{\partial \eta}{\partial x_3} + \lambda \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_1} + \frac{\partial \zeta}{\partial x_2} + \frac{\partial \eta}{\partial x_3} \right) \right) = Z_n; \end{cases} \quad (3.35)$$

Решение задач теории упругости в напряжениях.

При решении задачи теории упругости в напряжениях за основные неизвестные принимаются шесть компонент тензора напряжений. В предположении, что объёмные силы отсутствуют, напряжения можно найти из уравнений Бельтрами-Митчела:

$$\begin{cases} (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_1 + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} = 0; \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_2 + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} = 0; \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_3 + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} = 0; \\ (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{12} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; \\ (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{13} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1 \partial x_3} = 0; \\ (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{23} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \end{cases}$$

где $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ и $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$.

3.7.3 Плоская задача теории упругости

Деформация называется плоской, если перемещения всех точек тела могут происходить только в двух направлениях в одной плоскости и не зависят от координаты, нормальной к этой плоскости, т. е. $\xi = \xi(x_1, x_2)$, $\zeta = \zeta(x_1, x_2)$, $\eta = 0$. Поэтому из трёх уравнений (3.27) остаются только два

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} + F_1 = 0; \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} + F_2 = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

Граничные условия примут вид

$$\begin{cases} \sigma_1 n_1 + \tau_{12} n_2 = F_{1,n}; \\ \tau_{12} n_1 + \sigma_2 n_2 = F_{2,n}. \end{cases} \quad (3.37)$$

Кроме того, должно выполняться уравнение неразрывности деформаций Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}. \quad (3.38)$$

В случае плоско напряжённого состояния $\sigma_3 = 0$. В этом случае необходимо найти три неизвестные функции σ_1 , σ_2 , τ_{12} . Условие неразрывности деформаций можно переписать в виде

$$\frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma_2}{\partial x_2^2} = 0. \quad (3.39)$$

Уравнения равновесия (3.36) вместе с граничными условиями (3.37) и уравнением неразрывности (3.39) дают систему уравнений, которых достаточно для полного определения напряжений в двумерной задаче.

Пример 3.4. Расчёт пластины.

Рассмотрим пластину $X = [0; a] \times [0; b]$. Пусть $E = 2,1$ МПа; $\mu = 0,3$; $a = 6$ м, $b = 2$ м. Интенсивность нормальной к границе пластины нагрузки имеет вид:

$$F_{1,n}(a, x_2) = -Ax_2^2 + Ca^2 - 2Cx_2^2 + Dax_2; \quad F_{2,n}(a, x_2) = -\frac{Ba^2 + 4Cax_2 + Dx_2^2}{2}$$

$$F_{1,n}(x_1, b) = -\frac{Bx_1^2 + 4Cbx_1 + Db^2}{2}; \quad F_{2,n}(x_1, b) = Ax_1^2 + Bbx_1 + Cb^2;$$

$$F_{1,n}(0, x_2) = x_2^2(A + 2C); \quad F_{2,n}(0, x_2) = \frac{Dx_2^2}{2};$$

$$F_{1,n}(x_1, 0) = \frac{Bx_1^2}{2}; \quad F_{2,n}(x_1, 0) = -Ax_1^2,$$

где $A = B = C = 0,1$ МПа, $D = -0,1$ МПа.

Используя вейвлеты, найдём приближённое решение данной задачи и сравним его с точным:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= Cx_1^2 + Dx_1x_2 - (2C + A)x_2^2; \quad \sigma_2 = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2; \\ \tau_{12} &= -\frac{B}{2}x_1^2 - 2Cx_1x_2 - \frac{D}{2}x_2^2.\end{aligned}$$

Решение. Для построения гладких приближений краевой задачи (3.36) – (3.38) будем использовать сплайн-вейвлеты. В данном примере

$$T = [i_{1,0}; i_{1,1}] \times [i_{2,0}; i_{2,1}] = [0; 1] \times [0; 1].$$

Будем искать приближения функций σ_1 , σ_2 и τ_{12} в виде:

$$\sigma_{1,j}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{M(j)} C_i \omega_i(x_1, x_2); \quad \sigma_{2,j}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{M(j)} C_{i+M(j)} \omega_i(x_1, x_2), \quad (3.40)$$

$$\tau_{12,j}(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^{M(j)} C_{i+2M(j)} \omega_i(x_1, x_2), \quad (3.41)$$

Значения коэффициентов C_i будем искать методом коллокаций. Подставим (3.40), (3.41) в уравнения (3.36) – (3.38). В точках коллокации получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов C_i :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{M(j)} C_i \partial^{(1,0)} \omega_i + \sum_{i=1}^{M(j)} C_{i+2M(j)} \partial^{(0,1)} \omega_i &= 0; \\ \sum_{i=1}^{M(j)} C_{i+M(j)} \partial^{(0,1)} \omega_i + \sum_{i=1}^{M(j)} C_{i+2M(j)} \partial^{(1,0)} \omega_i &= 0; \\ \sum_{i=1}^{M(j)} C_i (\partial^{(0,2)} \omega_i + \partial^{(2,0)} \omega_i) + \sum_{i=1}^{M(j)} C_{i+M(j)} (\partial^{(0,2)} \omega_i + \partial^{(2,0)} \omega_i) &= 0; \\ \sum_{i=1}^{M(j)} C_i n_1 \omega_i + \sum_{i=1}^{M(j)} C_{i+2M(j)} n_2 \omega_i &= F_{1,n}; \\ \sum_{i=1}^{M(j)} C_{i+M(j)} n_2 \omega_i + \sum_{i=1}^{M(j)} C_{i+2M(j)} n_1 \omega_i &= F_{2,n}. \end{aligned} \right.$$

На рис. 3.11 представлены графики точных решений задачи (3.36) – (3.38) и их приближений из V_2 , полученные методом коллокаций и методом наименьших

квадратов. Погрешности для метода коллокаций $\max_{x_i} |\sigma_1(x_i) - \sigma_{1,j}(x_i)|$, $\max_{x_i} |\sigma_2(x_i) - \sigma_{2,j}(x_i)|$ и $\max_{x_i} |\tau_{12}(x_i) - \tau_{12,j}(x_i)|$ не превышает, соответственно, 0.03, 0.013 и 0.006 МПа, а для метода наименьших квадратов – 0.17, 0.18 и 0.03.

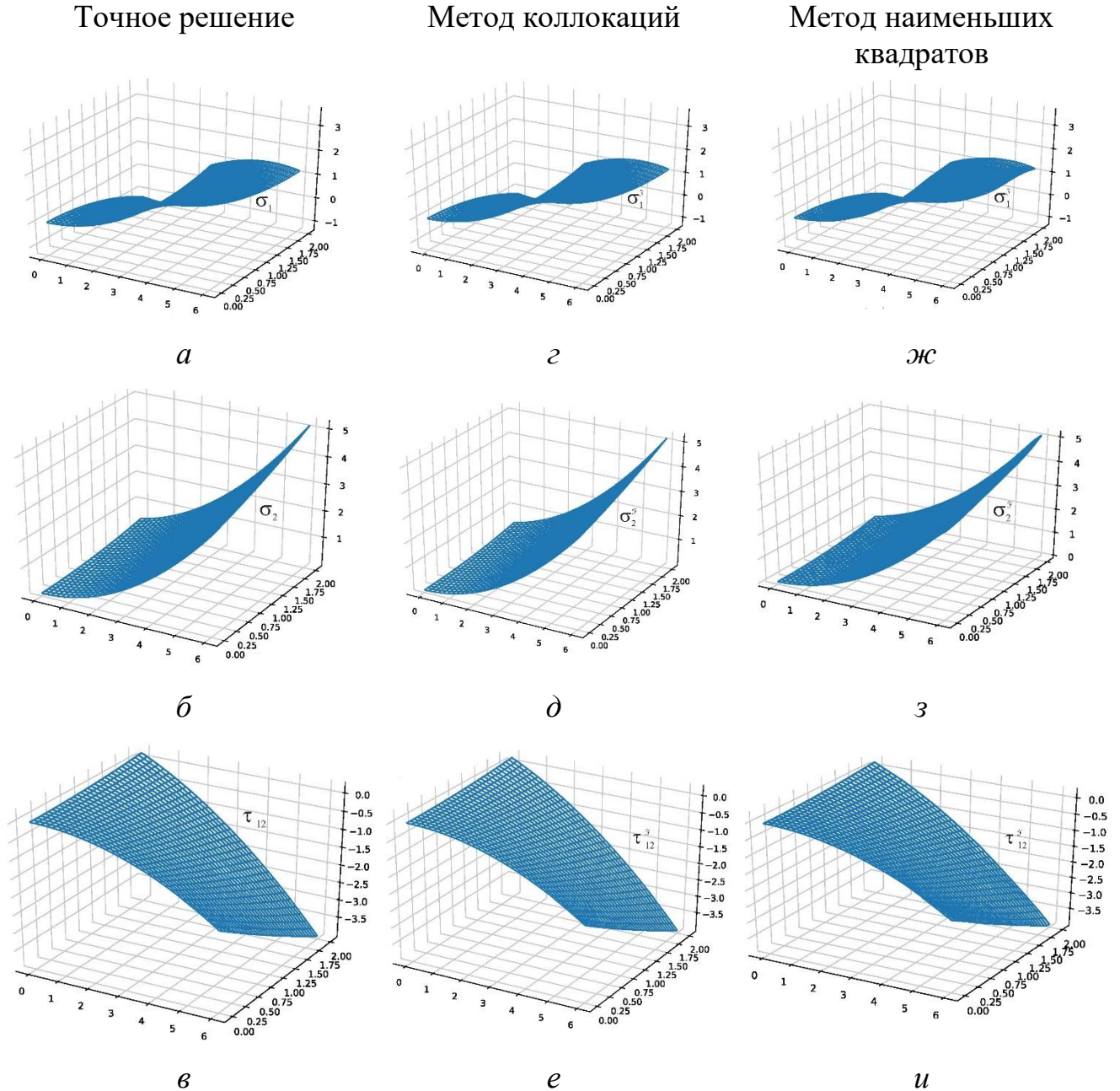


Рис. 3.11 – Графики решений:

точные решения

$a - \sigma_1$, $б - \sigma_2$, $в - \tau_{12}$,

приближённые решения из V_2 методом коллокаций

$г - \sigma_{1,j}$, $д - \sigma_{2,j}$, $е - \tau_{12,j}$,

приближённые решения из V_2 методом наименьших квадратов

$ж - \sigma_{1,j}$, $з - \sigma_{2,j}$, $и - \tau_{12,j}$

Пример 3.5. Расчёт круглой пластины с отверстием.

Рассмотрим пластину $X = \{(x_1, x_2): a^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq b^2\}$ в условиях растяжения/сжатия. Пусть $E = 2,1$ МПа; $\mu = 0,3$; $a = 20$ м, $b = 60$ м. Интенсивность нормальной к границе пластины нагрузки имеет вид:

$$\mathbf{F}_n = 2 \left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \mathbf{n}, \quad \mathbf{F}_n = 2 \left(1 + \frac{1}{b^2}\right) \mathbf{n}.$$

Используя вейвлеты, найдём приближённое решение данной задачи и сравним его с точным:

$$\sigma_1 = 2 + \frac{2}{r^2} \cos(2\theta), \quad \sigma_2 = 2 - \frac{2}{r^2} \cos(2\theta); \quad \tau_{12} = \frac{2}{r^2} \sin(2\theta).$$

Решение. В данной задаче T и X представлены на рис. 3.12 а и рис. 3.12 б. Подразделения X показаны на рис. 3.12 в и рис. 3.12 г. Представим приближения в виде (3.40), (3.41) и применим метод коллокаций, используя сплайн-вейвлеты. На рис. 3.13 – 3.15 представлены графики точного решения σ_1 , σ_2 , σ_{12} и его приближения $\sigma_{1,j}$, $\sigma_{2,j}$, $\tau_{12,j}$.

Погрешности для метода коллокаций $\max_{x_i} |\sigma_1(x_i) - \sigma_{1,j}(x_i)|$, $\max_{x_i} |\sigma_2(x_i) - \sigma_{2,j}(x_i)|$ и $\max_{x_i} |\tau_{12}(x_i) - \tau_{12,j}(x_i)|$ не превышают, соответственно, 0.0009, 0.000955 и 0.00025 МПа.

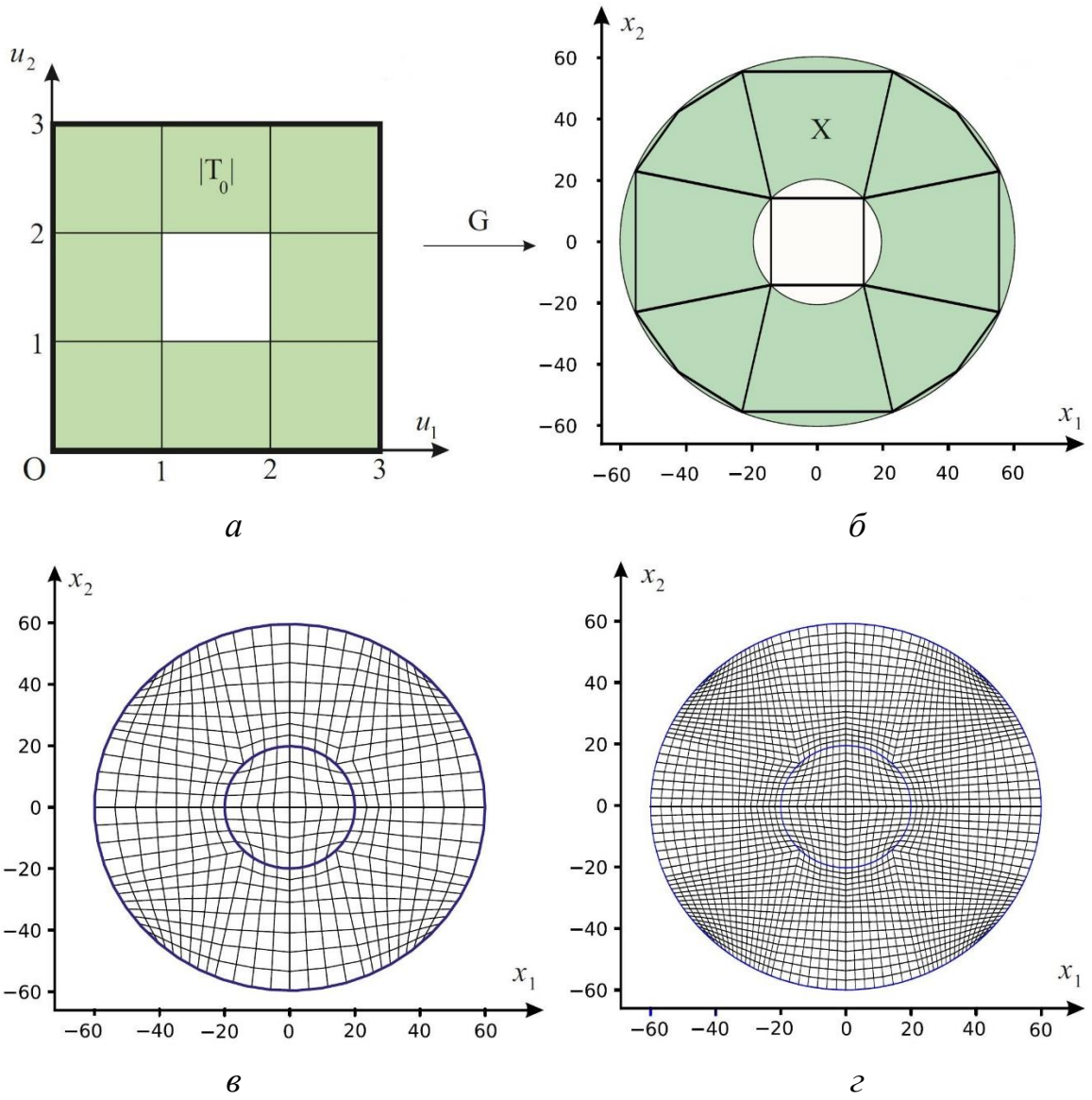


Рис. 3.12 – Триангулируемое пространство (T, g, X) :
a – T , *б* – X , *в* и *г* – подразделения X

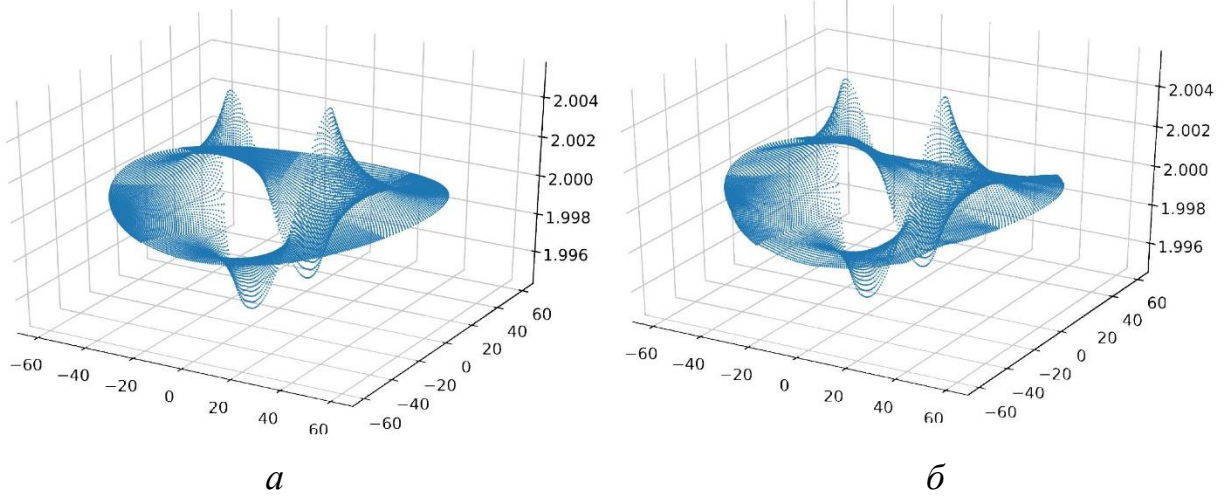


Рис. 3.13 – Графики решений:
a – точное решение σ_1 , *б* – приближённое решение $\sigma_{1,j}$ из V_2

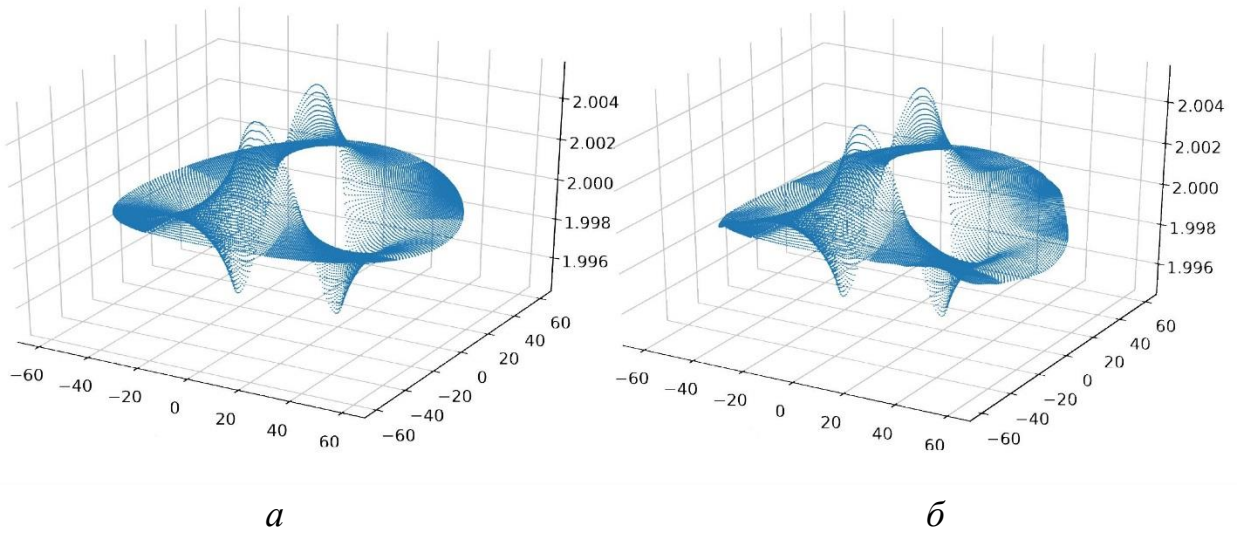


Рис. 3.14 – Графики решений:
a – точное решение σ_2 , *б* – приближённое решение $\sigma_{2,j}$ из V_2

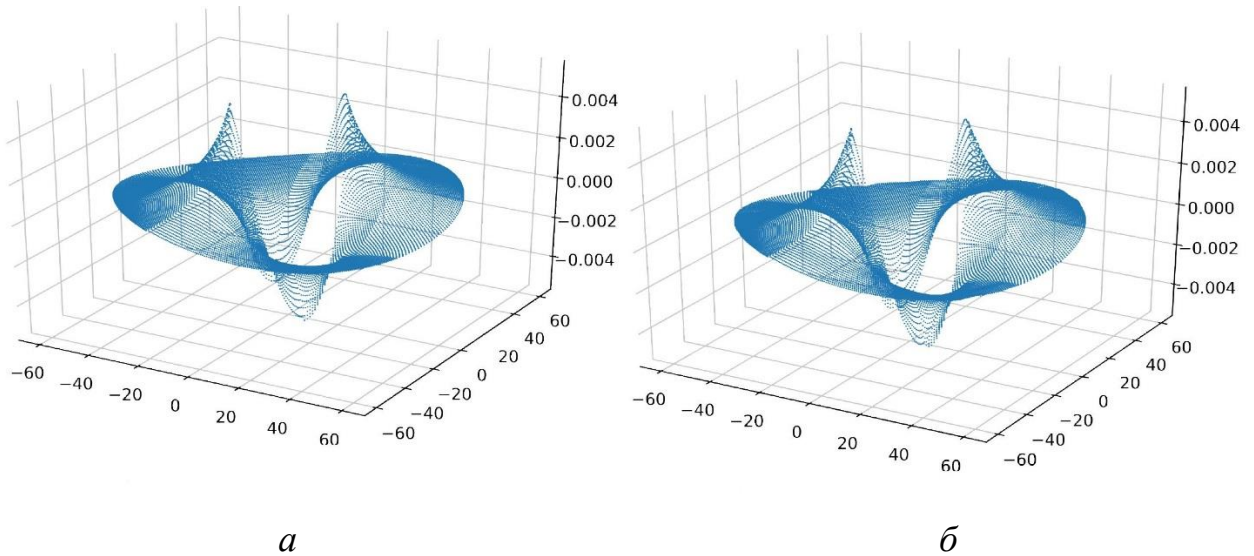


Рис. 3.15 – Графики решений:
a – точное решение τ_{12} , *б* – приближённое решение $\tau_{12,j}$ из V_2

3.8 Эксперимент. Растяжение прямоугольной пластины с отверстием

В данном разделе приводится пример построения траектории укладки волокон при 3D-печати конструкций из волокнистых композиционных материалов на основе оптимизационной задачи, поставленной в 1-й главе. Для решения уравнений механики КМ предлагается использовать подход, основанный на применении вейвлетов.

Сформулируем алгоритм вычисления значений целевой функции с учётом результатов главы 3.

Алгоритм вычисления значений целевой функции R .

Шаг 1. Задание значений углов θ_i на границе ∂X области.

Шаг 2. Нахождение $v_1(x_1, x_2)$. В результате получение отображения $p: X \rightarrow \Omega$.

Шаг 3. Определение вейвлетов $\omega_i^\Omega = \omega_i^X \circ p^{-1}$.

Шаг 4. Нахождение $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ в виде разложений по ω_i^Ω из уравнений (1.15) – (1.33).

Шаг 5. Вычисление $R(\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12})$.

Рассмотрим прямоугольную пластину с отверстием

$$X = [0; a] \times [0; b] \setminus \{(x_1, x_2): (x_1 - x_{1,0})^2 + (x_2 - x_{2,0})^2 \leq r^2\}.$$

Предположим, что пластина подвергается растяжению в направлении осей Ox_1 и Ox_2 . Требуется найти оптимальные траектории укладки волокна для изготовления такой пластины методом 3D-печати.

На рис. 3.16 показано ограничение конформного преобразования единичного круга на многоугольник на круг $\Gamma_{0,75}$ радиуса 0,75 и образ \tilde{X} этого круга. Данное конформное отображение было найдено с помощью формулы Чизотти.

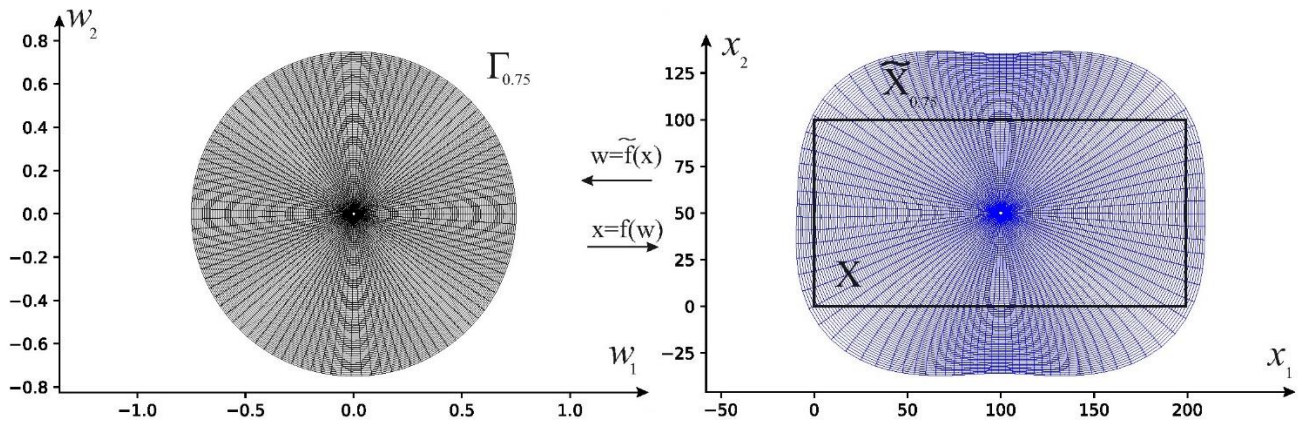


Рис. 3.16 – Конформное преобразование круга на многоугольник и его ограничения на круг $\Gamma_{0,75}$

На рис. 3.17 представлены траектории укладки волокон для 3D-печати пластины после 2-х итераций генетического алгоритма. Достигнуто условие $R < 1$.

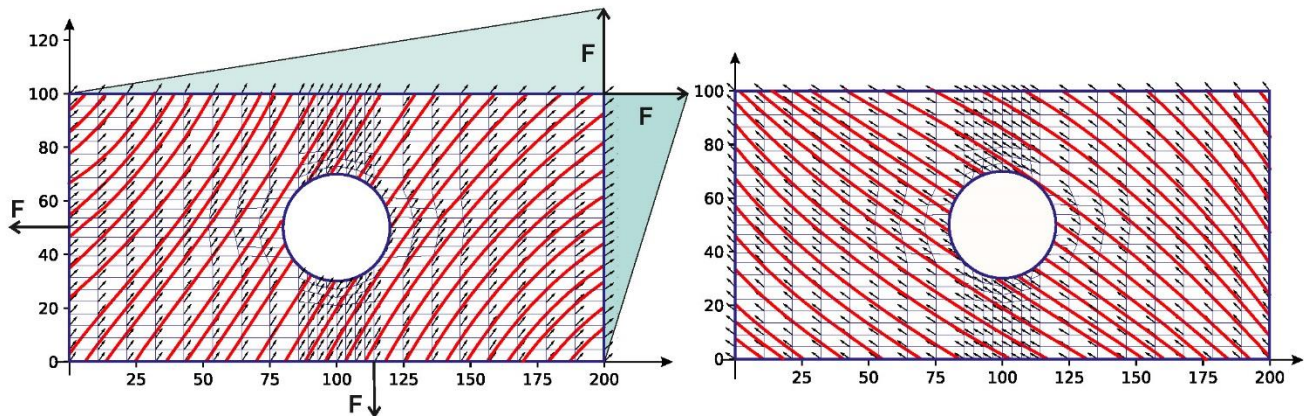


Рис. 3.17 – Траектории укладки волокон при 3D-печати

Выводы по главе 3

В третьей главе получены следующие результаты:

- 1) Разработан метод построения биортогональных вейвлет-систем на триангулируемых пространствах с конечным множеством симплексов.
- 2) Разработан алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и вейвлетов и их производных на триангулируемом пространстве. Вейвлет-системы получены по схеме подъёма, а алгоритм основан на преобразовании свёртки.
- 3) Разработан метод применения биортогональных вейвлет-систем к приближённому решению дифференциальных уравнений в частных производных. В частности, показано применение такого подхода к приближённому решению уравнений теории упругости. Приведены результаты сравнения точных методов решения с приближёнными (методом коллокаций, методом наименьших квадратов, методом конечных элементов).
- 4) Рассмотрен пример 3D-печати прямоугольной пластины с отверстием.

4 ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ОПТИМИЗАЦИИ ПРОЦЕССА 3D-ПЕЧАТИ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ОБЪЕКТОВ ИЗ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

В данной главе описан программный комплекс для реализации разработанных методов и алгоритмов моделирования, управления и оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов из волокнистых композиционных материалов. Приведены общая организация программного комплекса и назначение его функциональных блоков.

4.1 Постановка задачи программной реализации

Программный комплекс предназначен для моделирования и визуализации процесса укладки волокон КМ в области печати, нахождения оптимальной схемы 3D-печати в соответствии с требованиями условий эксплуатации функционального объекта. В связи с этим в программном обеспечении должны быть реализованы следующие возможности:

- 1) Поддержка возможности единообразного описания плоских областей печати.
- 2) Наличие инструментов задания различных схем печати.
- 3) Наличие инструментов расчёта прочности конструкции объекта по заданной схеме печати.
- 4) Наличие инструментов выбора из различных схем печати оптимальной, диктуемой условиями эксплуатации объекта.

4.2 Основные характеристики программного комплекса

В программном комплексе «CompositeCAD» предусмотрены:

- единообразное описание плоских областей печати посредством задания множества, состоящего из объединения конечного семейства квадратов и гомеоморфного области печати, а также точечных соответствий между

точками этого множества и точками области печати. По указанным соответствиям осуществляется построение гомеоморфизма заданного множества на область печати. Таким образом, программный комплекс работает с триангулируемым пространством, состоящим из конечного множества симплексов;

- моделирование укладки волокон при печати, посредством аналитических функций, которые получаются из решения задачи Неймана для уравнения Лапласа. Краевые условия в этой задаче находятся, заданием углов, которые волокна образуют с границей области печати. Сама задача решается посредством конформного преобразования области печати на единичный круг. Задача для единичного круга решается с помощью формулы Дини, а конформное преобразование находится по формуле Чизотти. Таким образом, при задании разных углов, имеется возможность получать и анализировать различные схемы печати;
- наличие инструментария для расчёта прочности функционального объекта, изготовленного по заданной схеме печати. Этот инструментарий основан на использовании вейвлетов, полученных по схемам подъёма и подразделений, в приближенном решении уравнений механики композиционных материалов (МКМ). Расчёты осуществляются в два этапа. На первом этапе посредством нескольких свёрточных преобразований, происходит построение вейвлетов на области печати. На втором этапе находятся коэффициенты разложения компонентов тензора напряжений по построенным вейвлетам;
- расчёт оптимальных траекторий укладки волокон при печати из минимизации критерия разрушения композиционного материала.

Общая схема программного комплекса «CompositeCAD», состоящего из трёх подсистем CAD, CAE, CAM, представлена на рис. 4.1. Следует отметить, что показанная на схеме подсистема CAM, не реализована в настоящей версии программного обеспечения. Предполагается её разработка в дальнейших исследованиях, в подсистеме будет реализована генерация управляющих кодов для 3D-принтера по найденным траекториям укладки волокон.

Программное обеспечение разработано на языке программирования Python© с применением объектно-ориентированного подхода, использованы библиотеки TensorFlow© и SciPy©. Графический интерфейс разработан с применением библиотеки Matplotlib©.

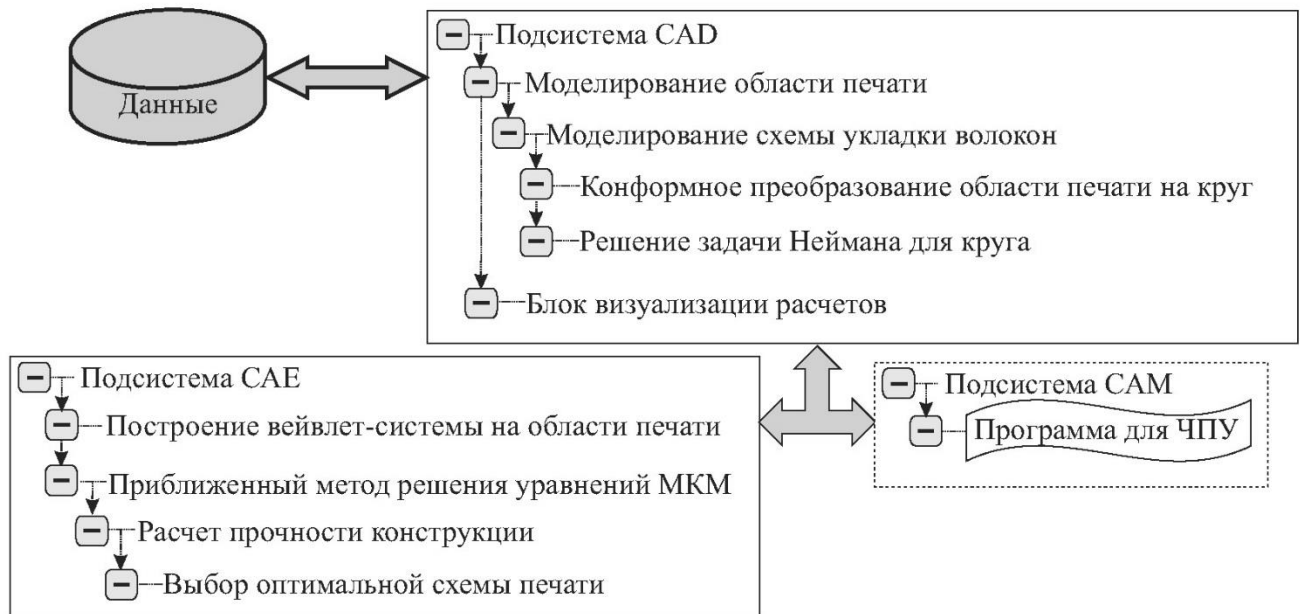


Рис. 4.1 – Общая схема программного комплекса

В основу CAD-подсистемы положена методика единообразного задания плоских областей печати. Область представляет собой триангулируемое пространство (T, g, X) с конечным множеством симплексов. Множество T , которое должно быть задано, представляет собой подмножество плоскости, состоящее из объединения конечного семейства квадратов, гомеоморфное области печати. Помимо множества T должны быть заданы точечные соответствия $u_{j,k} \leftrightarrow x_{j,k}$ между множеством T и областью печати X . По этим данным в CAD-подсистеме, с помощью локально аппроксимационных сплайнов осуществляется построение гомеоморфизма g .

В CAE-подсистеме реализован расчёт конструкции на прочность. Для решения уравнений в частных производных, описывающих напряжённо-деформируемое состояние конструкции, на области печати осуществляется построение вейвлет-системы. В соответствии с разработанным в настоящей

диссертации алгоритму построение вейвлет-системы происходит посредством нескольких свёрточных слоёв. Архитектура этой части программы для построения масштабирующих функций $\varphi_{j,k}$, принадлежащих V_j , представлена на рис. 4.2.

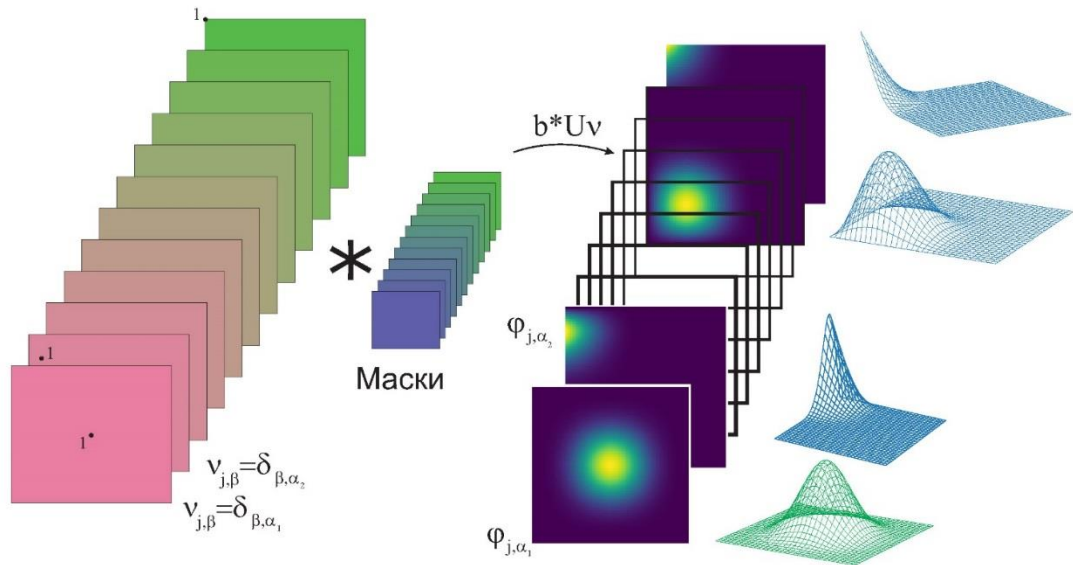


Рис. 4.2 – Построение масштабирующих функций $\varphi_{j,k}$ в V_j

Входной слой представляет собой набор матриц в количестве создаваемых базисных функций в пространстве V_j . Последующие слои выполняют увеличение размеров этих матриц вдвое (преобразование U) и свертку. Построение самих вейвлетов происходит по формуле

$$\psi_{j,m} = \varphi_{j+1,m} - \sum_{k \in \mathcal{K}_j} s_{j,k,m} \varphi_{j,k} .$$

Архитектура программы, осуществляющей построение вейвлет-системы на множестве T , представлена на рис. 4.3. Результатом применения свёрток будет набор матриц, элементы которых – это значения вейвлетов ω_k в узлах сетки $2^{-j'} \mathbf{Z} \cap T$, где j' зависит от количества создаваемых вейвлетов и количества свёрточных слоёв. Например, если рассматриваются вейвлеты в $V_0 + W_0 + W_1 + \dots + W_{j_1-1}$, и применяется J свёрточных слоёв, то $j' = j_1 + J$. Вейвлеты ω_k^X на самом множестве X получаются с помощью гомеоморфизма g по формуле $\omega_k^X = \omega_k \circ g^{-1}$. С помощью вейвлет-системы на X компоненты тензора напряжений находятся через

их разложения по вейвлетам и поиску коэффициентов разложения либо методом коллокаций, либо методом наименьших квадратов.

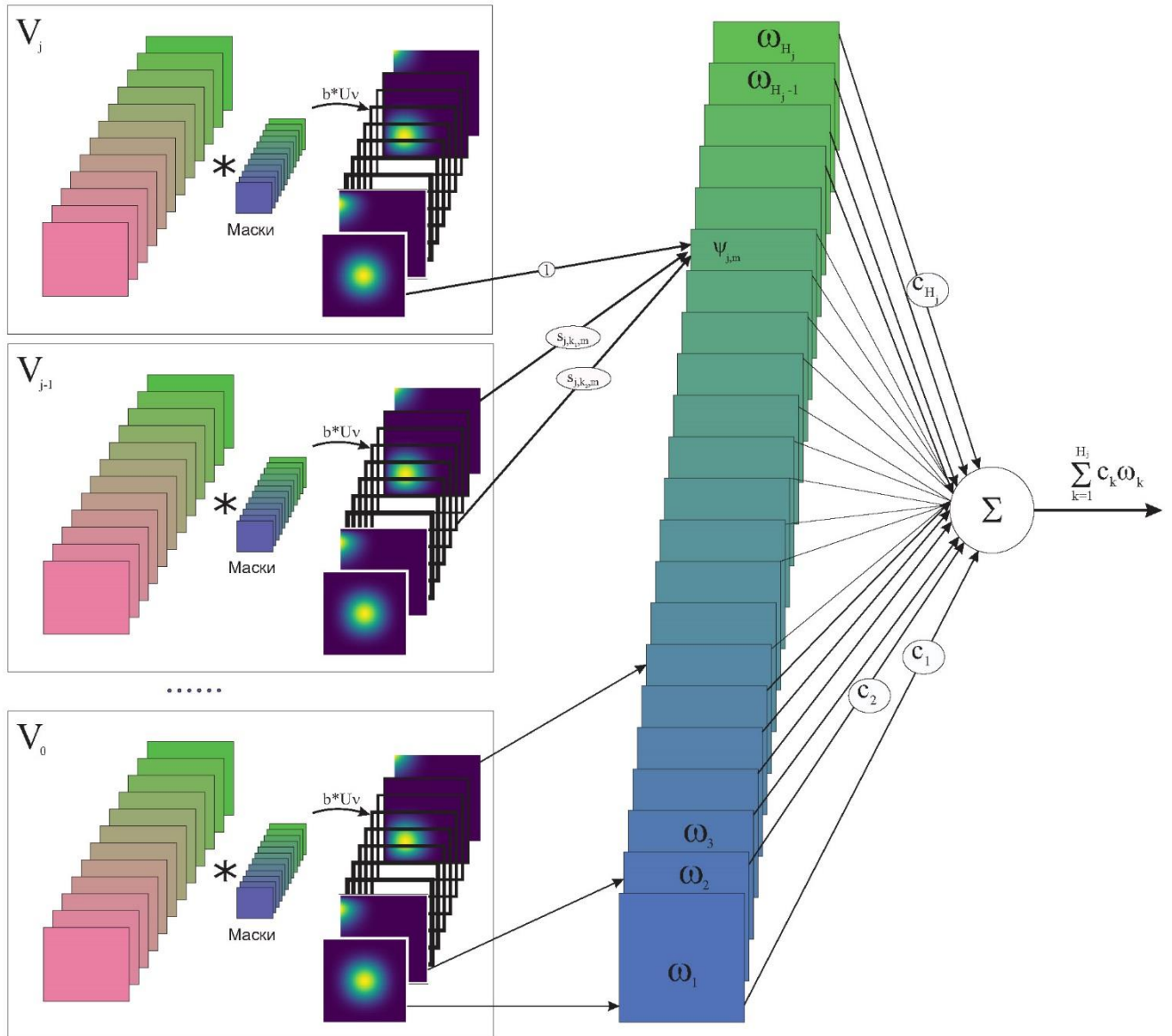


Рис. 4.3 – Построение вейвлет-системы ω_k на T

После построения вейвлет-системы необходимо выбрать многоугольник, содержащий внутри себя область печати. Этот многоугольник даёт конформное преобразование круга Γ_ρ на односвязную область \tilde{X}_ρ , содержащую область печати. Изменяя количество вершин многоугольника (см. рис. 4.4) и изменяя ρ , можно управлять формой множества \tilde{X}_ρ .

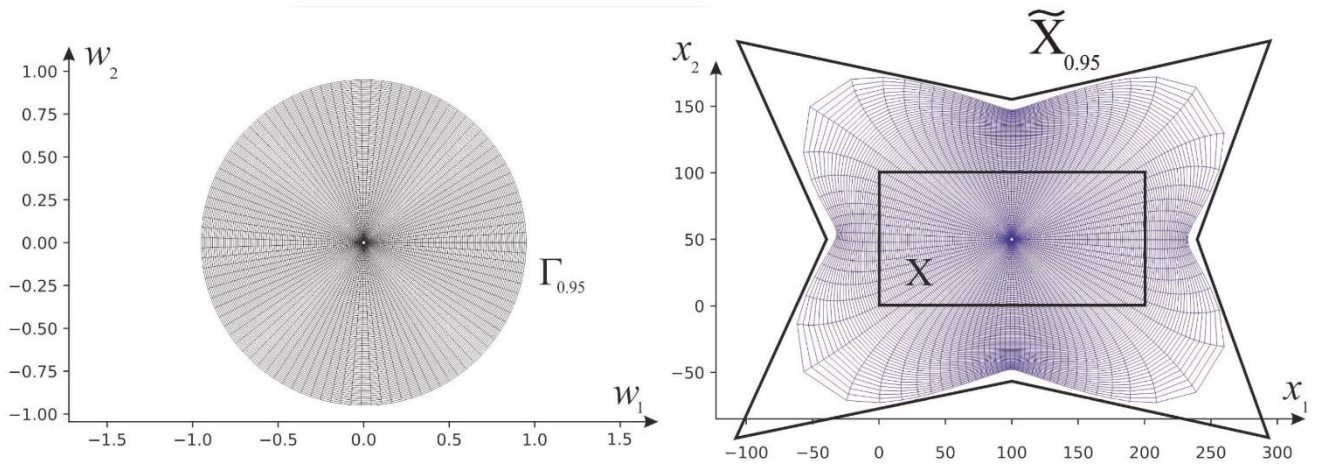


Рис. 4.4 – Конформное преобразование области печати

В программе граница $\partial\tilde{X}_\rho$ разбивается на дуги в соответствии с вершинами многоугольника. На этих дугах и осуществляется выбор углов, которые волокна образуют с границей области. После выбора углов осуществляется построение кривых, по которым укладываются волокна. Углы можно задать вручную, или же они могут быть найдены из задачи минимизации критерия разрушения композиционного материала. На рис. 4.5 представлена архитектура САЕ-подсистемы и её взаимодействие с САД-подсистемой.

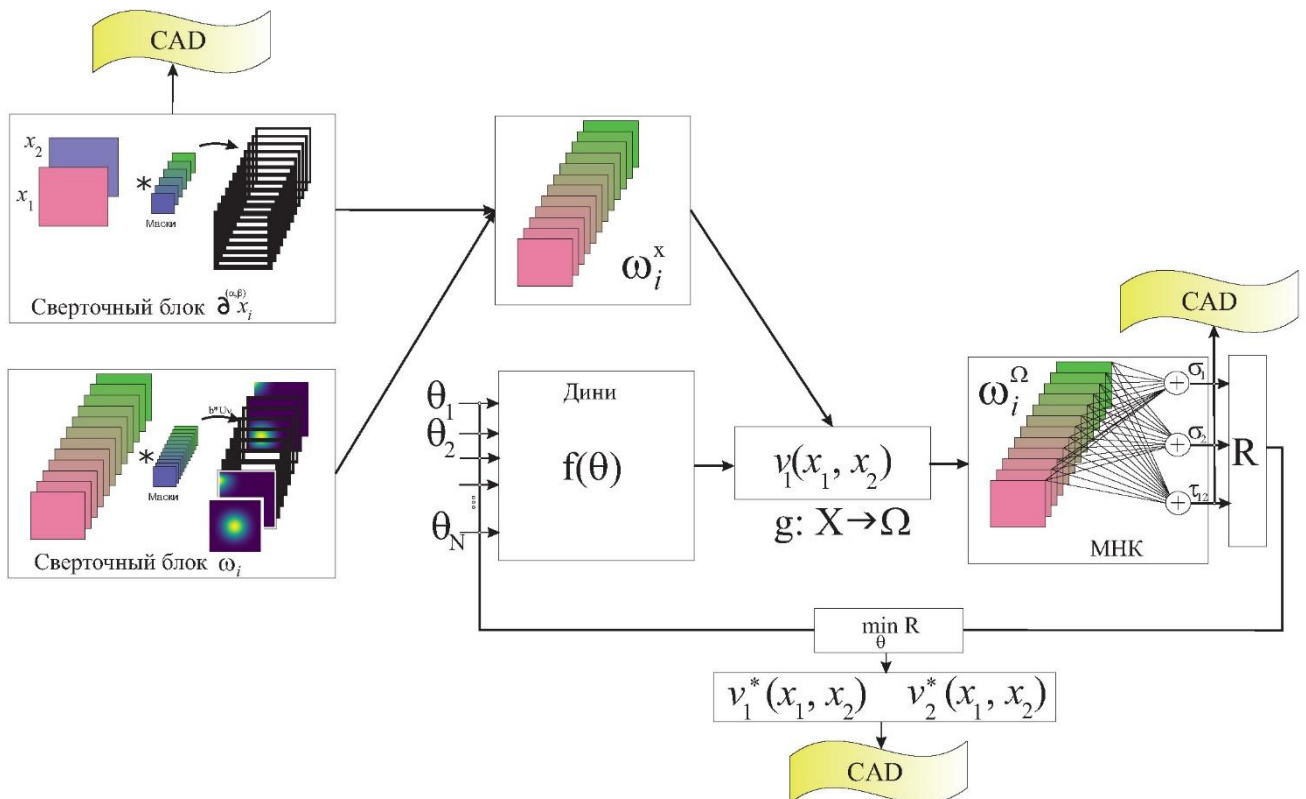


Рис. 4.5 – Архитектура САЕ-подсистемы

4.3 Описание классов, составляющих основу программного комплекса

Рассматривается описание классов CWavelets, CDiffeomorphism, предназначенных для приближённого решения уравнений в частных производных на плоской области с помощью вейвлетов, построенных на основе схем подразделений и подъёма; класса SKonform, предназначенного для построения конформного преобразования единичного круга на плоскую односвязную область, нахождения дифференциальных характеристик этого преобразования и решения задачи Неймана для уравнения Лапласа с целью построения аналитической функции на заданной односвязной области по заданным значениям углов, которые волокна образуют с границей области; класса Ccae, предназначенного для решения уравнений механики КМ, описывающих напряжённо-деформированное состояние функционального объекта.

4.3.1 Класс SKonform

Класс SKonform предназначен для построения конформного преобразования $x = f(w) = f_1(w_1, w_2) + if_2(w_1, w_2)$ единичного круга на произвольную односвязную область и его обратного $w = \tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(x_1, x_2) + i\tilde{f}_2(x_1, x_2)$. Это конформное преобразование задается с помощью формулы Чизотти и функции f_1, f_2 имеют вид (1.50), (1.51). Методами класса находятся значения функций $f_1, f_2, \tilde{f}_1, \tilde{f}_2$ и их частных производных $\partial f_k, \partial^{(\lambda, \mu)} f_k, \partial_i \tilde{f}_k, \partial^{(\lambda, \mu)} \tilde{f}_k, i, k = 1, 2, \lambda, \mu = 0, 1, 2, \lambda + \mu \leq 2$. Нахождение значений функций \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 и их частных производных осуществляется по формулам (3.6) – (3.13). Методами этого класса осуществляется решение задачи Неймана для односвязной области.

Свойства класса:

1. A, x_0 – действительное число и заданная точка области печати, используемые в формулах (1.46) и (1.47).
2. Nu – вектор, содержащий значения углов $\nu(t_i)$ наклона касательных к $\partial \tilde{X}$, где $\{t_i\}_{i=0}^N$ – равномерная сетка на отрезке $[0; 2\pi]$.
3. T – вектор содержащий значения $t_i, i = 0, 1, \dots, N$.

4. x_1, x_2 – массивы, содержащие абсциссы и ординаты точек

$$x_{i,j} = (x_{1,i,j} \quad x_{2,i,j}) \in \tilde{X}$$

области печати, в которых будут найдены значения функций \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 и их частных производных.

5. w_1, w_2 – абсциссы и ординаты точек $w_{i,j} = (w_{1,i,j} \quad w_{2,i,j})$ единичного круга, соответствующих точкам $x_{i,j}$ при конформном преобразовании.

Методы класса:

1. Konform(w1, w2) – функция, значение которой представляет собой список Python, содержащий два словаря Python© с ключами (0,0), (0,1), (1,0), (2,0), (0,2), (1,1). Значения, соответствующий этим ключам представляют собой массивы, содержащие значения функций $f_1, f_2, \partial f_k, \partial^{(\lambda,\mu)} f_k, \lambda, \mu = 0,1,2, \lambda + \mu \leq 2$ в точках $x_{i,j}$.

2. BuildW() – функция, определяющая точки $w_{i,j}$ единичного круга, соответствующие точкам $x_{i,j}$ области \tilde{X} , посредством решения нелинейных уравнений (1.46).

3. SolutionOfTheLaplaceEquation(Theta) – функция, предназначенная для решения задачи Неймана для круга. Входным параметром является массив углов, которые волокна образуют с границей области печати. Выходным значением является словарь Python©, в котором ключам (0,0), (0,1), (1,0), (2,0), (0,2), (1,1) соответствуют массивы со значениями функции $z(w_1, w_2)$ и ее частных производных до второго порядка включительно, найденные в точках $w_{i,j}$ по формулам (1.40) – (1.45).

4. HomXtoOmega(Theta) – функция предназначена для нахождения значений функции $v_1(x) = z(\tilde{f}(x))$ и ее частных производных в точках $x_{i,j}$. Здесь $z(w_1, w_2)$ – результат, полученный с помощью SolutionOfTheLaplaceEquation(Theta), а \tilde{f} – преобразование области печати на единичный круг, обратное к конформному преобразованию, найденному с помощью Konform(w1, w2).

4.3.2 Класс CDiffeomorphism

В классе CDiffeomorphism реализуется построение аппроксимации диффеоморфизма плоских областей $G: |I_0^2| = \prod_{i=1}^2 [u_{i,0}; u_{i,1}] \rightarrow \hat{X} \subset \mathbf{R}^2$ по точечным соответствиям.

Входные данные:

1. j – параметр, определяющий плотность сетки, т.е. имеются точечные соответствия $u_{j,k} \leftrightarrow x_{j,k}$, $k \in 2^{-j}\mathbf{Z}^2$.

2. X1, X2 – массивы Pandas, содержащие координаты x_{1,k_1,k_2} , x_{2,k_1,k_2} точек x_{j,k_1,k_2} , где $k = 2^{-j}(\lambda, \rho)$, $\lambda = \lambda_0 - 2, \dots, \lambda_1 + 2$, $\rho = \rho_0 - 2, \dots, \rho_1 + 2$, где $\lambda_0 = 2^j u_{1,0}$, $\lambda_1 = 2^j u_{1,1}$, $\rho_0 = 2^j u_{2,0}$, $\rho_1 = 2^j u_{2,1}$.

Свойства класса:

1. Dg – массив Numpy размера $(2, :, :, 6)$, содержащий частные производные $D^{(d_1, d_2)} x_i(2^{-j}\lambda, 2^{-j}\mu)$.

2. DgInverse – массив Numpy размера $(2, :, :, 6)$, содержащий значения частных производных $D^{(d_1, d_2)} u_i(x_1, x_2)$.

Основные методы класса.

1. Diffeomorphism – функция, возвращающая значения элементов массивов Dg и DgInverse. Блок схема этой функции представлена на рис. 4.6.

4.3.3 Класс CWavelets

Класс CWavelets содержит методы построения вейвлетов на основе схемы подъёма ленивых вейвлетов. Пусть (T, g, X) – триангулируемое пространство с конечным множеством симплексов, где $X \subset \mathbf{R}^2$,

$$T = \bigcup_{i=1}^n [a_i; a_i + 1] \times [b_i; b_i + 1] \subset [i_{1,0}; i_{1,1}] \times [i_{2,0}; i_{2,1}],$$

где $a_i, b_i, i_{1,0}, i_{1,1}, i_{2,0}, i_{2,1} \in \mathbf{Z}$, а $g: T \rightarrow X$ – диффеоморфизм класса C^2 .

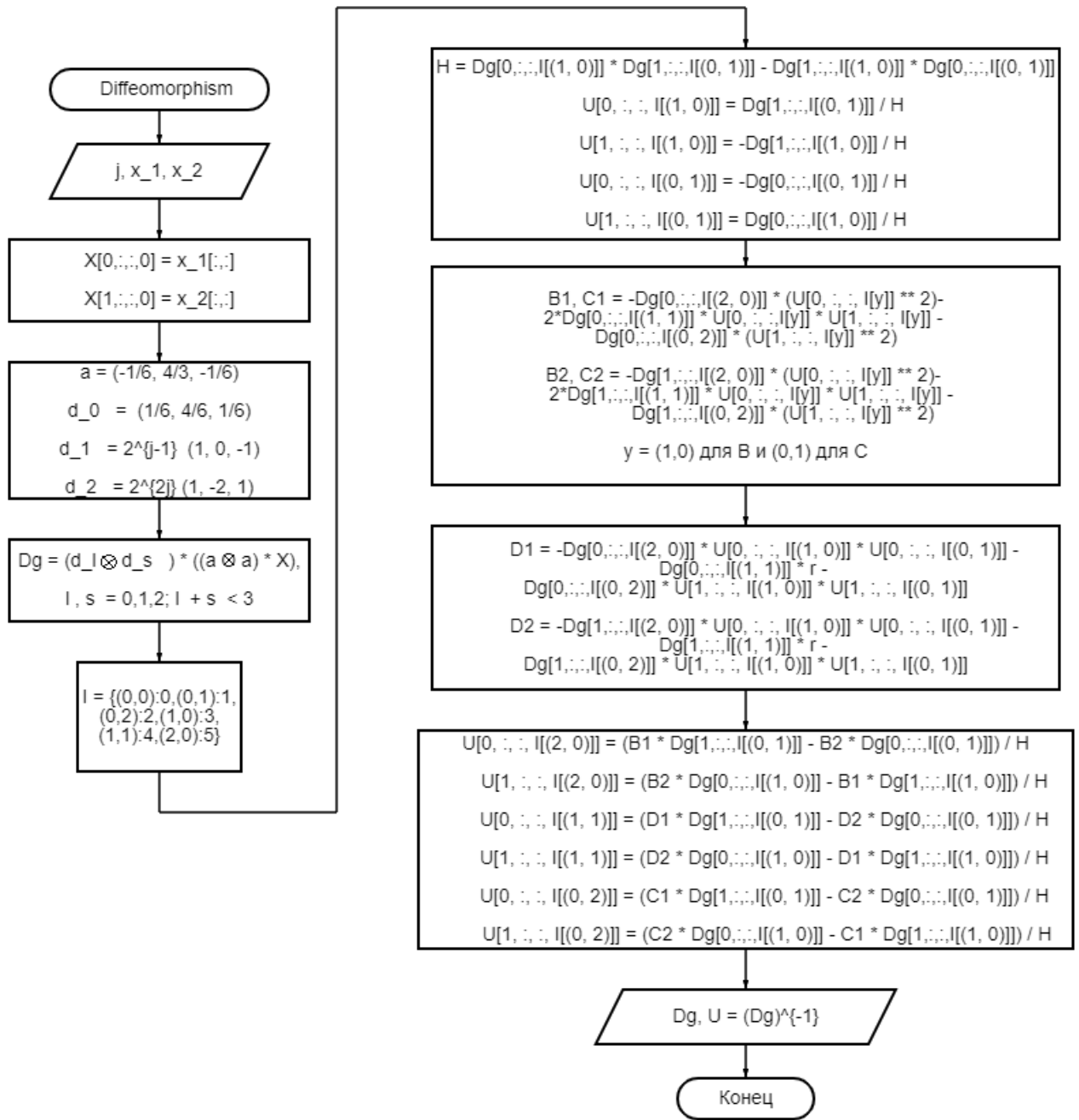


Рис. 4.6 – Блок-схема функции Diffeomorphism

Выберем семейство последовательностей $A_{l,\bullet} \in l_\infty(\mathbf{Z})$ с конечными носителями, причем $\text{supp } A_{0,\bullet} = \{-\delta, -\delta + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \delta - 1, \delta\}$ и $l = -\delta, -\delta + 1, \dots, \delta$. Рассмотрим следующие схемы подразделений:

1. Для $l = 0$

$$\xi_{j+1,2^{-j-1}k}^0 = \sum_{s=k_{j,\min}^l}^{k_{j,\max}^l} A_{0,k-2s} \xi_{j,2^{-j}s}^l, \quad j = 0, 1, \dots, \quad \xi_{0,\alpha} = \delta_{\alpha,0}.$$

В этом случае

$$\text{supp } \xi_{j,\bullet}^0 \subset \{k_{j,\min}^0 = -2^j \delta, -2^j \delta + 1, \dots, k_{j,\max}^0 = 2^j \delta\}.$$

2. При $l = -\delta, -\delta + 1, \dots, -1$

$$\xi_{j+1,2^{-j-1}k}^l = \sum_{s=k_{j,\min}^l}^{k_{j,\max}^l} A_{-\delta+(k-k_{j,\min}^l),k-2s} \xi_{j,2^{-j}s}^l,$$

$$k = k_{j+1,\min}^l = -2^{j+1}(\delta + l), -2^{j+1}(\delta + l) + 1, \dots, 2^{j+1}\delta = k_{j+1,\max}^l,$$

где $A_{l,\bullet} = a_{\bullet}$, $l \geq 0$ и $\text{supp } \xi_{j,\bullet}^l \subset \{k_{j,\min}^l, k_{j,\min}^l + 1, \dots, k_{j,\max}^l\}$

3. При $l = 1, 2, \dots, \delta$

$$\xi_{j+1,2^{-j-1}k}^l = \sum_{s=k_{j,\min}^l}^{k_{j,\max}^l} A_{\delta-(k_{j+1,\max}^l-k),k-2s} \xi_{j,2^{-j}s}^l,$$

$$k = k_{j+1,\min}^l = -2^{j+1}\delta, -2^{j+1}\delta + 1, \dots, 2^{j+1}(\delta - l) = k_{j+1,\max}^l,$$

где $A_{l,\bullet} = a_{\bullet}$, $l \leq 0$ и $\text{supp } \xi_{j,\bullet}^l \subset \{k_{j,\min}^l, k_{j,\min}^l + 1, \dots, k_{j,\max}^l\}$

Пусть $\varphi_l(x)$ – предельная функция для схемы подразделений, в которой строится последовательность $\xi_{j,2^{-j}k}^l$ и $I_l = \int_{\text{supp } \varphi_l} \varphi_l(x) dx$. Если теперь $\{(2^{-M}k_1, 2^{-M}k_2)\}_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z} \cap T}$ – сетка на T , то масштабирующие функции определяются приближенными равенствами:

$$\varphi_{j,2^{-j}\alpha_1,2^{-j}\alpha_2}(2^{-M}k_1, 2^{-M}k_2) \approx \xi_{M,2^{-(M-j)}k_1-\alpha_1}^{l_1(\alpha_1)} \cdot \xi_{M,2^{-(M-j)}k_2-\alpha_2}^{l_2(\alpha_2)}.$$

Некоторые из функций не могут быть получены в таком виде. В этом случае они получаются по общей схеме подразделений, описанной в главе 3. В этой схеме маска изменяется в зависимости от расстояния от текущего узла сетки до границы области. Примеры таких функций показаны на рис. 4.7.

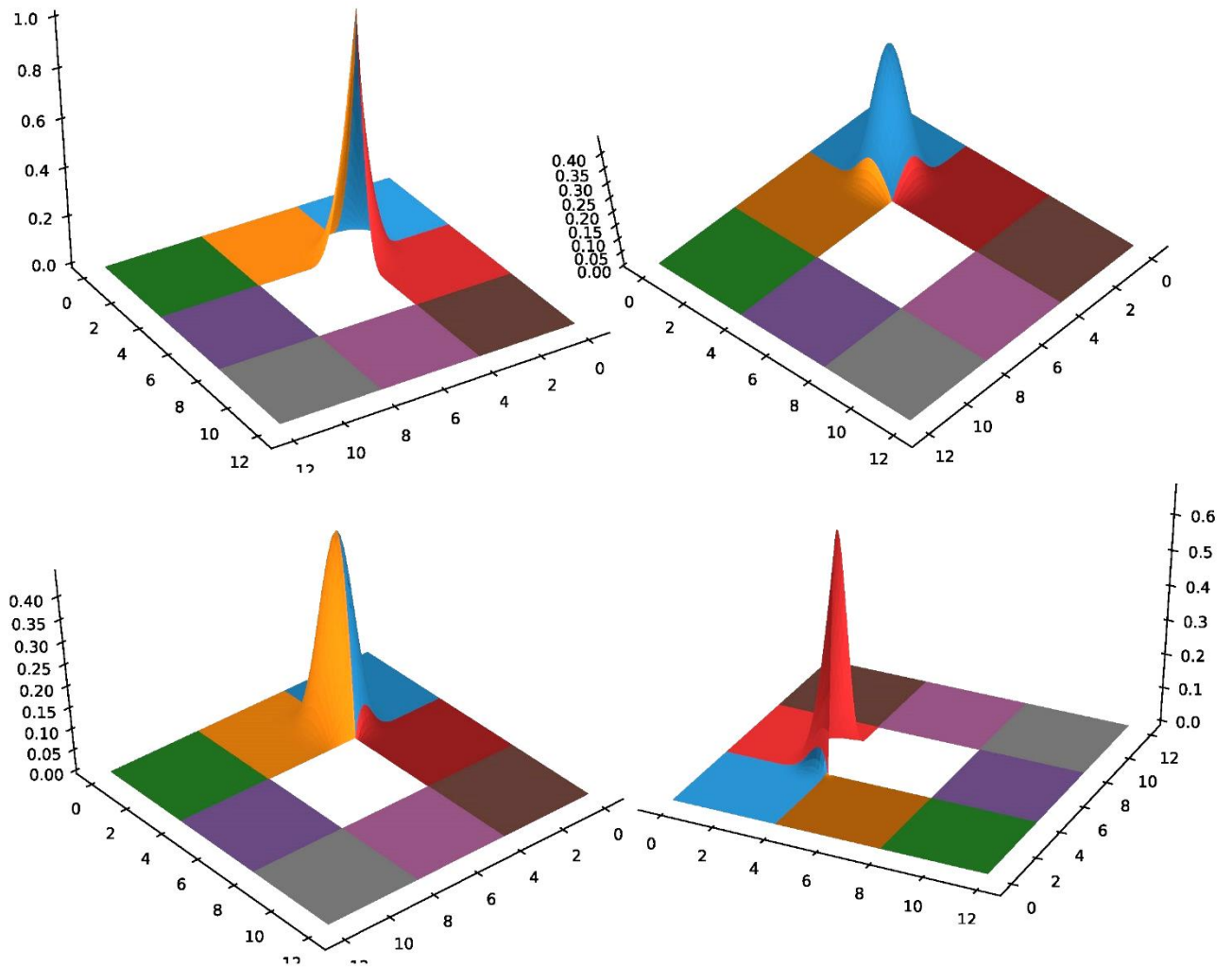


Рис. 4.7 – Примеры масштабирующих функций, полученных по схеме подразделений

Некоторые свойства класса CWavelets:

1. X_1, X_2, j – данные для класса $CDiffeomorphism$.
2. Словарь `pandas` $T = \{1: (a_1, b_1), 2: (a_2, b_2), \dots\}$
3. ξ – словарь `pandas`, содержащий последовательности $\xi_{M, \bullet}^l$.
4. K_j – словарь `pandas`, ключи которого представляют собой кортежи (α_1, α_2) , где $(2^{-j}\alpha_1, 2^{-j}\alpha_2) \in T$. Значения, соответствующие этим ключам представляет собой список, содержащий носитель функции $\varphi_{j, 2^{-j}\alpha_1, 2^{-j}\alpha_2}$ и значения $l_1(2^{-j}\alpha_1), l_2(2^{-j}\alpha_2)$.
5. M_j – словарь `pandas`, ключи которого представляют собой кортежи (α_1, α_2) , где $m = (2^{-j}\alpha_1, 2^{-j}\alpha_2) \in \mathcal{M}_j$ – вершины подразделения, соответствующие

вейвлетам. Значения, соответствующие этим ключам представляют собой списки, содержащие индексы масштабирующих функций, по которым формируется вейвлет, т.е. это множество $\mathcal{K}(m)$.

Некоторые методы класса CWavelets:

1. `varphi_j_alpha_1_alpha_2(self, j, alpha_1, alpha_2)` – функция, предназначенная для нахождения значений масштабирующей функции сразу на всем T . Блок-схема этой функции представлена на рис. 4.8.

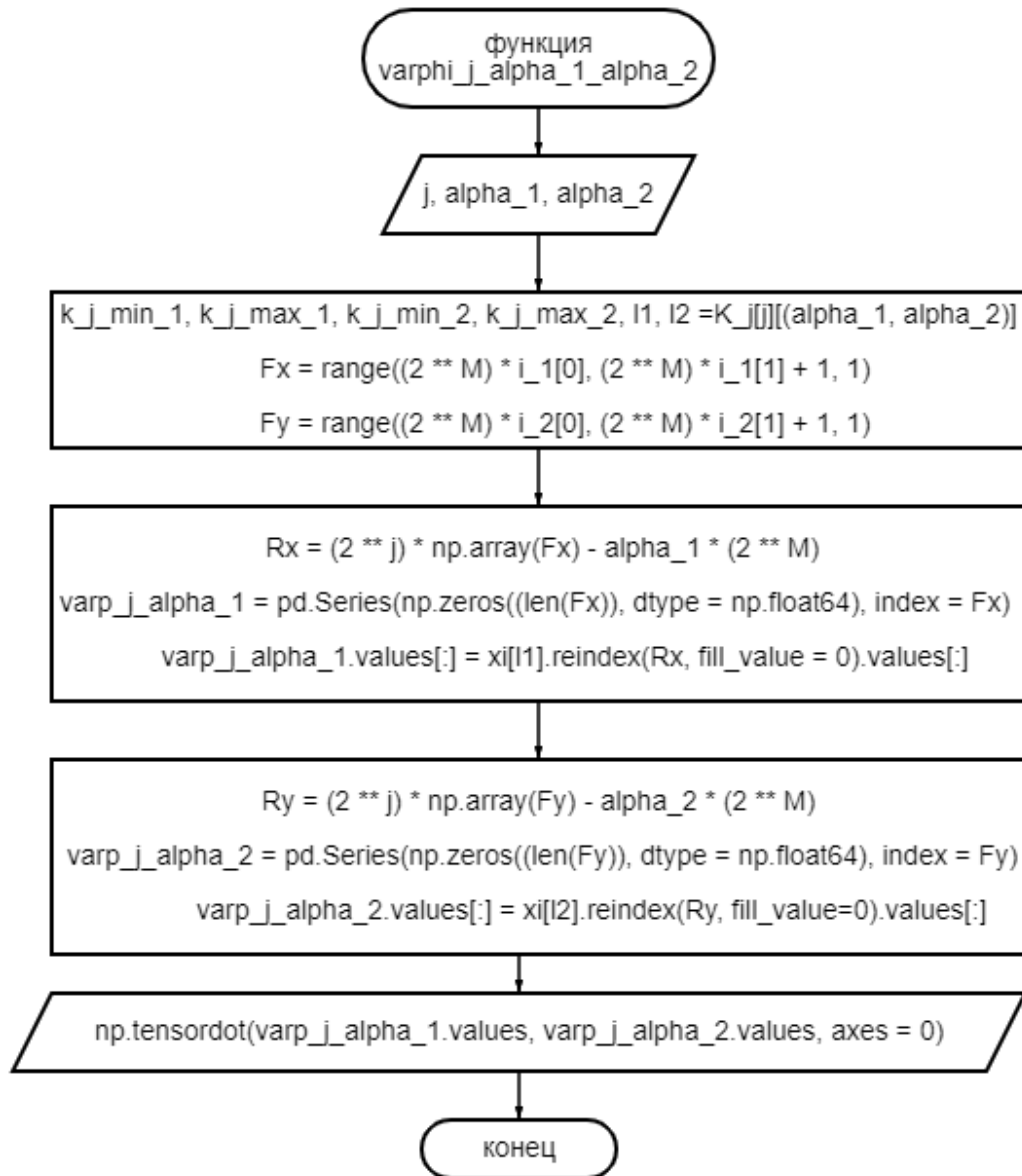


Рис. 4.8 – Блок-схема функции `varphi_j_alpha_1_alpha_2`

2. `psi_j_m` – функция, предназначенная для нахождения значений вейвлетов сразу на всем T . Блок-схема этой функции представлена на рис. 4.9.

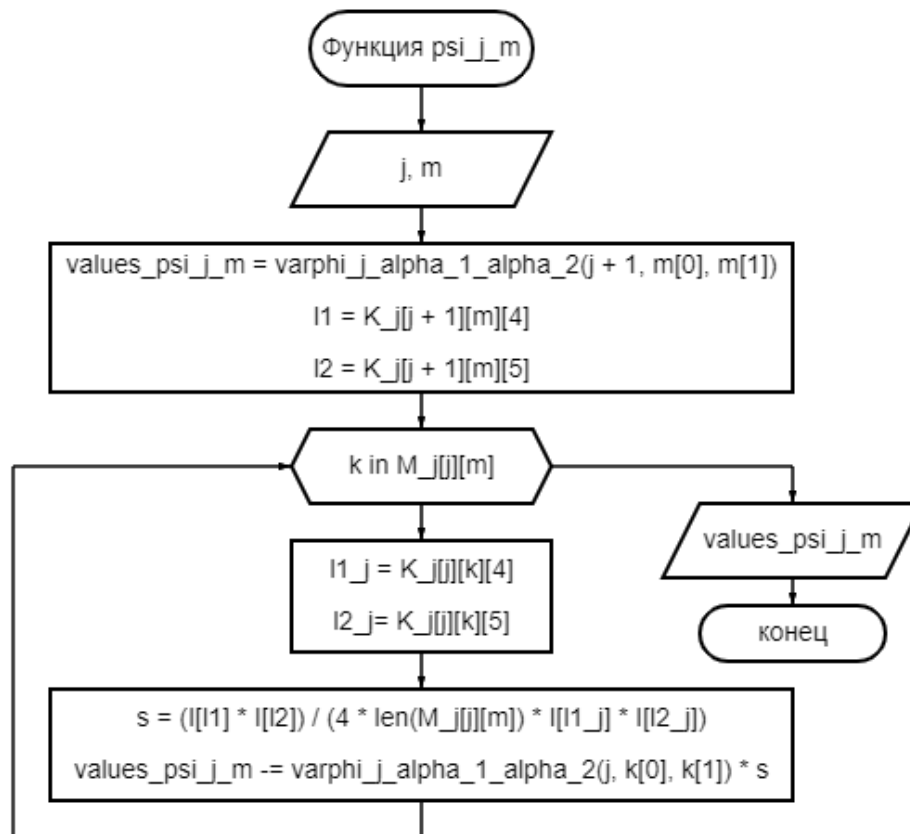


Рис. 4.9 – Блок-схема функции psi_j_m

3. $\text{Varphi_X_j_alpha_1_alpha_2}(j, \alpha_1, \alpha_2)$ – функция, возвращающая значения частных производных $D^{(d_1, d_2)} \varphi_{j, 2^{-j} \alpha_1, 2^{-j} \alpha_2}^X$ в точках $x_{M, 2^{-M} k_1, 2^{-M} k_2} \in X$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

4. $\text{Wavelet_X_j_m}(j, m)$ – функция, возвращающая значения частных производных $D^{(d_1, d_2)} \psi_{j, m}^X$ вейвлета в точках $x_{M, 2^{-M} k_1, 2^{-M} k_2} \in X$, $k_1, k_2 \in \mathbf{Z}$.

4.3.4 Класс Ccae

Класс Ccae предназначен для решения уравнений механики КМ и минимизации критерия разрушения композиционного материала. Целью минимизации является определение оптимальной схемы укладки волокна.

Некоторые методы класса Ccae:

1. $\text{TheCriterionOfDestruction}(\Theta)$ – функция, определяющая значения критерия разрушения композиционного материала по заданным углам, которые

волокна образуют с границей области печати. Блок-схема этой функции представлена на рис. 4.10. В качестве R может быть выбран любой из критериев разрушения.

2. SchemeOptimization – функция, в которой решается задача минимизации критерия разрушения композиционного материала. Результатом является вектор значений углов, которые волокна образуют с границей области печати.

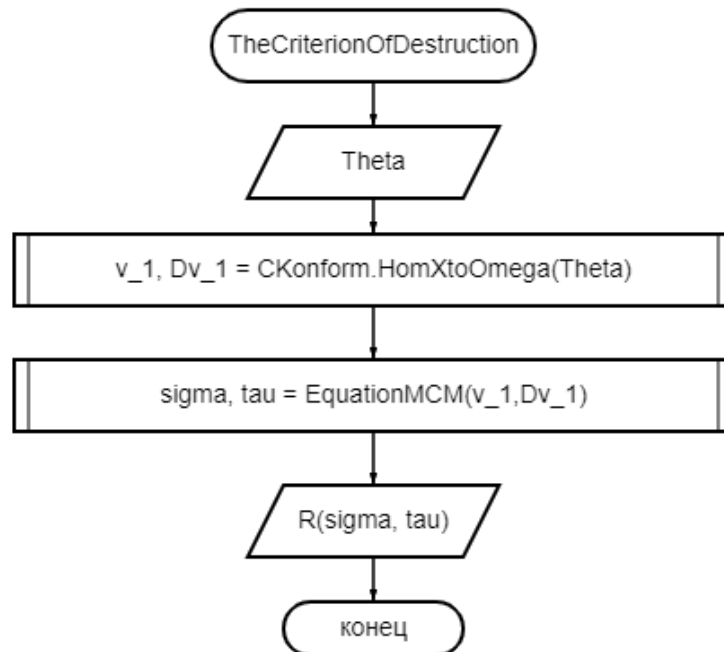


Рис. 4.10 – Блок-схема функции TheCriterionOfDestruction

Выводы по главе 4

В четвёртой главе получены следующие результаты:

- 1) Выполнена постановка задачи программной реализации разработанных методов и алгоритмов моделирования, управления и оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов из волокнистых композиционных материалов.
- 2) Представлены общая организация программного комплекса, его основные характеристики, назначение функциональных блоков.
- 3) Описана архитектура основных блоков программного комплекса и их взаимодействие.
- 4) Представлены описание классов, составляющих основу программного комплекса, и блок-схемы некоторых основных функций классов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации разработано специальное математическое и алгоритмическое обеспечение решения задач оптимизации процесса 3D-печати функциональных объектов из волокнистых композиционных материалов, с целевой функцией в виде критерия разрушения материала. Разработана проблемно-ориентированная система управления моделированием и нахождением оптимальных траекторий укладки волокон при 3D-печати объектов. Отличительной особенностью и новизной предложенного подхода является моделирование траекторий укладки волокон с помощью аналитических функций и использование биортогональных вейвлетов, построенных на основе схем подъёма и подразделений, в качестве инструмента решения уравнений механики композиционных материалов.

В диссертации получены следующие результаты:

1. Поставлена задача оптимизации процесса 3D-печати функционального объекта из полимерного композиционного материала.

2. Разработаны метод и вычислительный алгоритм нахождения значений критерия разрушения композиционного материала по заданным углам, основанный на конформных преобразованиях и вейвлет-преобразовании, как целевой функции задачи оптимизации. В оптимизационной задаче критерий разрушения композиционного материала представлен как функция углов, которые волокна образуют с границей области печати.

3. Разработана математическая модель управления процессом укладки волокон при 3D-печати функциональных объектов из композиционных материалов. Отличительной особенностью этой модели является то, что траектории укладки волокон получаются с помощью аналитических функций, краевые условия для которых – это углы, образуемые волокнами с границей области печати. В рамках модели предложен метод нахождения оптимальной схемы укладки волокон при печати, диктуемой условиями эксплуатации функционального объекта.

4. Обобщено понятие локально-аппроксимационного сплайна, получены оценки погрешности аппроксимации таким сплайном гладкой функции. Получены

формулы для нахождения значений локально аппроксимационных сплайнов и их производных в узлах сетки, основанные на свёртке. Показано, что эти формулы являются частным случаем вейвлет-восстановления. Преимущество полученных формул в том, что их использование позволяет распараллелить процедуру построения вейвлет-системы на заданном множестве.

5. Разработан алгоритм нахождения значений масштабирующих функций и их частных производных, а также вейвлетов, построенных на основе схем подразделений и подъёма, основанный на преобразовании свёртки.

6. Разработан метод построения биортогональных вейвлет-систем на триангулируемых пространствах с конечным множеством симплексов. Отличительной особенностью метода является применение разработанного алгоритма нахождения значений масштабирующих функций и вейвлетов на триангулируемом пространстве, а также их производных. Вейвлет-системы получены по схеме подъёма, а алгоритм основан на преобразовании свёртки.

7. Разработан метод применения биортогональных вейвлет-систем к приближённому решению дифференциальных уравнений в частных производных. В частности, показано его применение к приближённому решению уравнений теории упругости. Приведены результаты сравнения точных методов решения с приближёнными.

8. Разработаны алгоритмы и программный комплекс управления и оптимизации процесса 3D-печати функционального объекта, в которых реализована возможность нахождения оптимальной схемы печати, диктуемой условиями его эксплуатации.

Перспективы и направления дальнейших исследований связаны с совершенствованием предложенных методов и алгоритмов в части разработки специального математического, алгоритмического и программного обеспечения систем анализа и оптимизации с использованием искусственного интеллекта для создания цифровых двойников, виртуального моделирования процессов аддитивного производства технических объектов сложной геометрической формы, нахождения рациональных схем армирования печатных композитных конструкций

и оптимальных режимов печати. Это позволит учитывать и быстро корректировать возможные ошибки при проектировании, экономить дорогостоящие материалы, сокращать время работы технологического оборудования, а, следовательно, значительно уменьшить затраты на начальных стадиях жизненного цикла изделий в соответствии с концепцией проектирования изделий под заданную стоимость.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

В настоящей рукописи применяют следующие сокращения и условные обозначения:

- 1) \mathbf{N} – множество натуральных чисел
- 2) \mathbf{Z} – множество целых чисел
- 3) \mathbf{Z}^n – декартово произведение множеств $\mathbf{Z}^n = \mathbf{Z} \times \dots \times \mathbf{Z}$. Его элементами являются упорядоченные наборы n целых чисел $(\alpha_1 \dots \alpha_n)^T$, $\alpha_i \in \mathbf{Z}$, $i = 1, \dots, n$
- 4) \mathbf{R} – множество действительных чисел
- 5) \mathbf{R}^n – n -мерное евклидово пространство. Точкой x такого пространства называется упорядоченная совокупность n вещественных чисел $x = (x_1 \dots x_n)^T$. Расстояние $\rho(x, y)$ между точками x и $y = (y_1 \dots y_n)^T$ определяется равенством $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$
- 6) Если E – линейное пространство над \mathbf{R} и $e_i \in E$, $i = 1, 2, \dots, k$, то $\text{lin}\{e_1, \dots, e_k\}$ будем обозначать линейную оболочку, натянутую на векторы e_i , т.е.

$$\text{lin}\{e_1, \dots, e_k\} = \left\{ \sum_{i=1}^k c_i e_i, c_1, \dots, c_k \in \mathbf{R} \right\}$$

- 7) Обозначения частных производных:

$$\partial^{(\alpha_1, \dots, \alpha_n)} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

– частная производная порядка $\alpha_1 + \dots + \alpha_n$ функции $f(x_1, \dots, x_n)$. Кроме этого, будем ещё использовать обозначение для частной производной первого порядка

$$\partial_i f = \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$8) \delta_{\alpha, \beta} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta, \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

- 9) \bar{A} – замыкание множества $A \subset \mathbf{R}^n$

- 10) $\text{Int}A$ – внутренность множества $A \subset \mathbf{R}^n$ (совокупность всех внутренних точек)

$$11) N_n = N_{n-1} * N_0, N_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [0; 1); \\ 0, & \text{если } x \notin [0; 1) \end{cases}$$

$$12) N_{j,m,i}(x) = N_{m-1}(2^j x + m - i)$$

$$13) \omega(f, \delta) = \min_{\rho(x,y) < \delta} |f(x) - f(y)| - \text{модуль непрерывности функции}$$

14) CFRT – Carbon Fiber Reinforced Thermoplastic

15) SFRT – Short Fiber Reinforced Thermoplastic

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алберг, Дж. Теория сплайнов и её приложения / Дж. Алберг, Э. Нилсон, Дж. Уолш. – Москва: Мир, 1972. – 230 с.
2. Битюков, Ю.И., Денискин, Ю.И. Применение вейвлетов Хаара при разработке схемы армирования конструкций из композитов / Ю.И. Битюков, Ю.И. Денискин // Компетентность. – 2016. – № 9–10 (140–141). – С. 73–79.
3. Битюков, Ю.И. Применение сплайн-вейвлетов для анализа выходных процессов многомерных нестационарных линейных систем управления / Ю.И. Битюков, Ю.И. Денискин, Г.Ю. Денискина // Динамика систем, механизмов и машин. – 2017. – Том 5, № 4. – С. 117–127.
4. Битюков, Ю.И., Калинин В.А. Применение вейвлетов в системах автоматизированного проектирования / Ю.И. Битюков, В.А. Калинин // Труды МАИ. – 2015, № 84. – С. 32.
5. Богачев, В.И., Смолянов, О.Г. Действительный и функциональный анализ: университетский курс / В.И. Богачев, О.Г. Смолянов. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. – 2009. – 724 с.
6. Васильев, В.В. Механика конструкций из композиционных материалов / В.В. Васильев. – Москва: Машиностроение, 1988. – 272 с.
7. Васильев, П.Ф. Численные методы решения экстремальных задач / П.Ф. Васильев. – Москва: Наука, 1988. – 549 с.
8. Вейвлет-анализ. Основы теории. Москва, 2004. – 280 с.
9. Гантмахер, Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер.– Москва: Наука, 1967.– 560 с.
10. Голованов, Н.Н. Геометрическое моделирование / Н.Н. Голованов. – Москва: Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 472 с.
11. Голуб, Дж., Ван Лоун, Ч. Матричные вычисления / Дж. Голуб, Ч. Ван Лоун; Пер. с англ. – Москва: Мир, 1999. – 548 с.: ил.
12. Демьянович, Ю.К., Ходаковский, В.А. Введение в теорию вейвлетов: курс лекций / Ю.К. Демьянович, В.А. Ходаковский. – Санкт-Петербург: Изд-во С.-Пб. ун-та, 2007. – 49 с.

13. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 464 с.
14. Завьялов, Ю.С. Методы сплайн-функций / Ю.С. Завьялов, Б.И. Квасов, В.Л. Мирошниченко. – Москва: Наука, 1980. – 352 с.
15. Зорич, В.А. Математический анализ: в 2 ч. / В.А. Зорич. – Изд. 3-е, испр. и доп. – Москва: МЦМНМО, 2001. – 794 с.
16. Лаврентьев, М.А., Шабат, Б.В. Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. – Москва: Наука, 1973. – 736 с.
17. Малла, С. Вейвлеты в обработке сигналов / С. Малла; Пер. с англ. – Москва: Мир, 2005. – 671 с.: ил.
18. Марчук, Г.И., Акилов, Г.П. Методы вычислительной математики: учеб. пособие / Г.И. Марчук, Г.П. Акилов. – Москва: Наука, 1989. – 744 с.
19. Новиков, И.Я. Теория всплесков / И.Я. Новиков, В.Ю. Протасов, М.А. Скопина. – Москва: Физматлит, 2005. – 612 с.
20. Новиков, И.Я., Стечкин, С.Б. Основы теории всплесков / И.Я. Новиков, С.Б. Стечкин // Успехи математич. наук. – 1998. – Т.53, № 6. – С. 53–128.
21. Петухов, А.П. Введение в теорию базисов всплесков / А.П. Петухов. – Санкт-Петербург: Изд-во СПбГТУ, 1999. – 132 с.
22. Сагдеева, Ю.А. Введение в метод конечных элементов: методическое пособие / Ю.А. Сагдеева, С.П. Копысов, А.К. Новиков. – Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2011. – 44 с.
23. Смоленцев, Н.К. Основы теории вейвлетов. Вейвлеты в MatLab / Н.К. Смоленцев. – Москва: ДМК Пресс, 2005.
24. Стечкин, С.Б., Субботин, Ю.Н. Сплаины в вычислительной математике / С.Б. Стечкин, Ю.Н. Субботин. – Москва: Наука, 1976 – 248 с.
25. Стинрод, Н., Эйленберг, С. Основания алгебраической топологии / Н. Стинрод, С. Эйленберг; Пер. с англ. под ред. М.М. Постникова. – Москва: Физматлит, 1958. – 403 с.
26. Столниц, Э. Вейвлеты в компьютерной графике / Э. Столниц, Т. ДеРоуз, Д. Салезин. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002.

27. Строительная механика летательных аппаратов: учебник для авиационных специальностей вузов / И.Ф. Образцов, Л.А. Булычев, В.В. Васильев [и др.]; Под ред. И.Ф. Образцова. – Москва: Машиностроение, 1986. – 536 с.: ил.
28. Фрейзер, М. Введение в вейвлеты в свете линейной алгебры / М. Фрейзер; пер. с англ. – Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 487 с.: ил.
29. Халмош, П. Теория меры / П. Халмош; Пер. с англ. под ред. проф. С.В. Фомина. – Москва: Изд-во «Факториал Пресс», 2003. – 256 с.
30. Чуи, Ч. Введение в вейвлеты / Ч. Чуи; Пер. с англ. – Москва: Мир, 2001. – 412 с.
31. Ширвель, П.И. Основы метода конечных элементов в мехатронике: учебно-методическое пособие для студентов технических специальностей высших учебных заведений: в 2 ч. / П.И. Ширвель. – Минск: БНТУ, 2015 – Ч. 1. – 89 с.
32. Amati, G. The Reuse of Free-Form Surface Features: A Wavelet Approach / G. Amati, A. Liverani, G. Caligiana // Proceedings of the IASTED International Conference APPLIED SIMULATION AND MODELLING, June 28-30, 2004, Rhodes, Greece. – P. 247–252.
33. Bauer, F., Gutting, M. Spherical Fast Multiscale Approximation by Locally Compact Orthogonal Wavelets / F. Bauer, M. Gutting // GEM–International Journal on Geomathematics. – 2011. – 2. – P. 69–85.
34. Berman, D.F. Multiresolution Painting and Compositing / Deborah F. Berman, Jason T. Bartell, and David H. Salesin // Proceedings of the 21st Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '94). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA. – 1994. – P. 85–90.
35. Bernstein, S. Spherical Singular Integrals, Monogenic Kernels and Wavelets on the Three-Dimensional Sphere / S. Bernstein // Advances in Applied Clifford Algebras. – 2009. – 19. P. 173–189.
36. Bitjukov, Y.I. Spline Wavelets Use for Output Processes Analysis of Multi-Dimensional Non-Stationary Linear Control Systems / Y.I. Bitjukov, Y.I. Deniskin, G.Y. Deniskina // Journal of Physics: Conference Series. – Omsk: Institute of Physics Publishing, 2018. – P. 012018. – DOI 10.1088/1742-6596/944/1/012018.

37. Bitjukov, Y.I., Akmaeva, V.N. The Use of Wavelets in the Mathematical and Computer Modelling of Manufacture of the Complex-Shaped Shells Made of Composite Materials / Y.I. Bitjukov, V.N. Akmaeva // *Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming and Computer Software.* – 2016. – Vol. 9. – No 3. – P. 5–16. – DOI 10.14529/mmp160301.
38. Bitjukov, Y.I., Deniskin, Y.I. Chaikin Algorithm and its Generalization / Y.I. Bitjukov, Y.I. Deniskin // *2016 Dynamics of Systems, Mechanisms and Machines, Dynamics 2016, Omsk, 15–17 ноября 2016 года.* – Omsk, 2016. – P. 7818981. – DOI 10.1109/Dynamics.2016.7818981.
39. Bujurke, N., Shiralashetti, S., Salimath, C. An Application of Single-term Haar Wavelet Series in the Solution of Non-linear Oscillator Equations / N. Bujurke, S. Shiralashetti, C.J. Salimath // *Comput. Appl. Math.* – 2009. – 227. – P. 234–244.
40. Cavaretta, A.S. Stationary Subdivision Schemes / A.S. Cavaretta, W. Dahmen, C.A. Micchelli // *Publication: Memoirs of the American Mathematical Society.* – 1991. – V. 93, No 453.
41. Chaikin, George M. An Algorithm for High Speed Curve Generation / G.M. Chaikin // *Computer Graphics and Image Processing.* – 1974, Vol. 3, Issue 4. – P. 346–349.
42. Daubechies, I. Time-frequency Localization Operators: A Geometric Phase Space Approach / I. Daubechies // *IEEE Trans. Inform. Theory.* – 1988. – 34. – P. 605–612.
43. Daubechies, I. A Simple Wilson Orthonormal Basis with Exponential Decay / I. Daubechies, S. Jaffard, J.L. Journe // *SIAM J. Math. Anal.* – 1991. – 22. – P. 554–572.
44. Daubechies, I. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets / I. Daubechies // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1988. – 41. – P. 909–996.
45. Daubechies, I. Orthonormal Bases of Compactly Supported Wavelets II. Variations on a Theme / I. Daubechies // *SIAM J.Math.Anal.* – 1993. – 21. – P. 499–519.
46. Daubechies, I. Painless Non-Orthogonal Expansions / I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer // *J. Math. Phys.* – 1986. – 27. – P. 1271–1283.
47. Daubechies, I. The Wavelet Transform, Time-frequency Localization and Signal Analysis / I. Daubechies // *IEEE Trans. Inform. Theory.* – 1990. – 36. – P. 961–1005.

48. Daubechies, I. Wiener Measures for Path Integrals with Affine Kinematic Variables / I. Daubechies, J. Klauder, T. Paul // *J. Math. Phys.* – 1987. – 28. – P. 85–102.
49. Daubechies, I., Grossmann, A. Frames of Entire Functions in the Bargmann Space / I. Daubechies, A. Grossmann // *Comm. Pure Appl. Math.* – 1988. – 41. – P. 151–161.
50. Daubechies, I., Janssen, A.J.E.M. Two Theorems on Lattice Expansions / I. Daubechies, A.J.E.M. Janssen // *IEEE Trans. Inform. Theory.* – 1993. – 39. – P. 3–6.
51. Daubechies, I., Klauder, J. Quantum Mechanical Path Integrals with Wiener Measures for Alt Polynomial Hamiltonians II / I. Daubechies, J. Klauder // *J. Math. Phys.* – 1985. – 26. – P. 2239–2256.
52. Daubechies, I., Lagarias, J. Two-Scale Difference Equations I. Existence and Global Regularity of Solutions / I. Daubechies, J. Lagarias // *SIAM J. Math. Anal.* – 1991. – 22. – P. 1388–1110.
53. Daubechies, I., Lagarias, J. Two-Scale Difference Equations II. Local Regularity, Infinite Products of Matrices and Fractals / I. Daubechies, J. Lagarias // *SIAM J. Math. Anal.* – 1992. – 23. – P. 1031–1079.
54. Daubechies, I., Paul, T. Time-Frequency Localization Operators: A Geometric Phase Space Approach II. The Use of Dilations and Translations / I. Daubechies, T. Paul // *Inverse Prob.* – 1988. – P. 661–680.
55. Daubechies, I., Paul, T. Wavelets Some Applications / I. Daubechies, T. Paul // *Proceedings of the International Conference on Mathematical Physics*, M. Mebkkout and R. Seneor, eds. – World Scientific, Singapore. – 1987. – P. 675–686.
56. Deslauriers, G., Dubuc, S. Symmetric Iterative Interpolation Processes / G. Deslauriers, S. Dubuc // *Construct. Approx.* – 1989, 5(1). – P. 49–68.
57. Dyn, N. A Butterfly Subdivision Scheme for Surface Interpolation with Tension Control / N. Dyn, D. Levin, J. Andgregory // *Transactions on Graphics.* – April 1990. – 9, 2. – P. 160–169.
58. Dyn, N., A 4-Point Interpolatory Subdivision Scheme for Curve Design / N. Dyn, J.A. Gregory, D. Levin // *Computer-Aided Geometric Design.* – 1987. – 4. – P. 257–268.

59. Exact Reconstruction with Directional Wavelets on the Sphere / Yves Wiaux et al. // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2008. – 388. – P. 770–788.
60. Fiber Line Optimization in Single Ply for 3D Printed Composites / Yusuke Yamanaka, Akira Todoroki, Masahito Ueda, Yoshiyasu Hirano and Ryosuke Matsuzaki // Open Journal of Composite Materials, SCIRP. – 2016, Vol. 6, No 4. – P. 121–131.
61. Finkelstein, A., Salesin, David H. Multiresolution Curves / A. Finkelstein, David H. Salesin // Proceedings ACM SIGGRAPH. – 1994. – P. 261–268.
62. Gortler, S.J., Cohen, M.F. Hierarchy and Variational Geometric Modeling with Wavelets / S.J. Gortler, M.F. Cohen // Proceedings of the 1995 Symposium on Interactive 3D Graphics (I3D'95). Association for Computing Machinery, New York, NY, USA. – 1995. – P.35–ff. – <https://doi.org/10.1145/199404.199410>
63. Lepik, U. Application of the Haar Wavelet Transform to Solving Integral and Differential Equations / U. Lepik // Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math. – 2007. – 56. – P. 28–46.
64. Lepik, U. Haar Wavelet Method for Solving Higher Order Differential Equations / U. Lepik // Int. J. Math. Comput. – 2008. – 1. – P. 84–94.
65. Lepik, U. Numerical Solution of Differential Equations Using Haar Wavelets / U. Lepik // Math. Comput. Simul. – 2005. – 68. P. 127–143.
66. Lepik, U. Numerical Solution of Evolution Equations by the Haar Wavelet Method / U. Lepik // Appl. Math. Comput. – 2007. – 185(1). – P. 695–704.
67. Lepik, U., Hein, H. Haar Wavelets with Applications / U. Lepik, H. Hein. – Springer, 2014. – 207 p.
68. Lounsbery, M. Multiresolution Surfaces of Arbitrary Topological Type / M. Lounsbery, T.D. DeRose and J. Warren // ACM Transactions on Graphics. – 1997. – Vol. 16. – P. 34–73.
69. Mallat, S. Multiresolution Approximation and Wavelets / S. Mallat // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – 315. – P. 69–88.
70. Mallat, S., Hwang, W.L. Singularity detection and processing with wavelets / S. Mallat, W.L. Hwang // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1992. – 38. – P. 617–643.

71. Mallat, S., Zhong, S. Characterization of Signals from Multiscale Edges / S. Mallat, S. Zhong // IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence. – 1992. – Vol. 14, No. 7. – P. 710–732.
72. Mallat, S. A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation / S. Mallat // IEEE Trans. PAMI. – 1989. – 11. – P. 671–693.
73. Mallat, S. Multifrequency Channel Decompositions of Images and Wavelet Models / S. Mallat // IEEE Trans. Acoust. Signal Speech Process. – 1989. – 37. – P. 2091–2110.
74. Mallat, S. Zero-crossings of a Wavelet Transform / S. Mallat // IEEE Trans. Inform. Theory. – 1991. – 37. – P. 1019–1033.
75. Meyers, D. Multiresolution Tiling / D. Meyers // Computer Graphics Forum. – Dec. 1994. – Vol. 13, No. 5. – P. 325–340.
76. Micchelli, C.A. Interpolatory Subdivision Schemes and Wavelets / C.A. Micchelli // Journal of Approximation Theory. – 1996. – Vol. 86, Issue 1. – P. 41–71.
77. Mintzer, F. Filters for Distortion-free Two-band Multirate Filter Banks / F. Mintzer // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1985. – 33. – P. 26–30.
78. Nguyen, T.Q., Vaidyanathan, P.P. Two-channel Perfect-reconstruction FIR QMF Structures Which Yield Linear-phase Analysis and Synthesis Filters / T.Q. Nguyen, P.P. Vaidyanathan // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1989. – 37. – P.676–690.
79. Rosca, D., Antoine, J. Locally Supported Orthogonal Wavelet Bases on the Sphere via Stereographic Projection / D. Rosca, J. Antoine // Mathematical Problems in Engineering. – 2009. – P. 1–13.
80. Rosca, D., Antoine, J. Constructing Wavelet Frames and Orthogonal Wavelet Bases on the Sphere / D. Rosca, J. Antoine. – IntechOpen, 2010. – 538 p. – ISBN 978-953-7619-91-6. – eBook (PDF) ISBN 978-953-51-5495-2. – DOI10.5772/3472.
81. Schroder, P., Sweldens, W. Spherical Wavelets: Efficiently Representing Functions on the Sphere / P. Schroder, W. Sweldens // Proceedings of the 22nd Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques (SIGGRAPH '95).

- Association for Computing Machinery, New York, NY, USA. – 1995. – P. 161–172.
– <https://doi.org/10.1145/218380.218439>.
82. Skopina, M. Multiresolution Analysis of Periodic Functions / M. Skopina // East Journal on Approximations. – 1997. – Vol.3, №2. – P. 614–627.
83. Smith, M.J.T. and T.P. Barnwell Exact Reconstruction Techniques for Tree-structured Subband Coders / M.J.T. Smith, T.P. Barnwell // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1986. – 34. – P. 434–441.
84. Stollnitz, E.J. Wavelets for Computer Graphics: A Primer / Eric J. Stollnitz, T.D. DeRose, David H. Salesin // IEEE Computer Graphics and Applications. – 1995. – May. – 15(3). – P. 76–84 (part 1); July. – 15(4). – P. 75–85 (part 2).
85. Storn, R., Price, K. Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization Over Continuous Spaces / R. Storn, K. Price // Journal of Global Optimization. – 1997, No. 11. – P. 341–359.
86. Sweldens, W. The Lifting Scheme: A Custom-Design Construction of Biorthogonal Wavelets / W. Sweldens // Applied and Computational Harmonic Analysis. – 1996. – Vol.3, Issue 2. – P. 186–200.
87. Sweldens, W. The Lifting Scheme: A New Philosophy in Biorthogonal Wavelet Constructions / W. Sweldens, A. Laine, M. Unser // Wavelet Applications in Signal and Image Processing III. – 1995. – Vol. 2569, Issue 1. – Society of Photo-optical Instrumentation Engineers. – <https://doi.org/10.1117/12.217619>.
88. Torghabehi, O.O. Developing a Computational Approach Towards a Performance Based Design and Robotic Fabrication of Fibrous Skin Structures / Omid Oliyan Torghabehi, Alireza Seyedahmadian and Wes McGee // Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2015, Amsterdam Future Visions, 17–20 August 2015, Amsterdam, The Netherlands. – DOI: 10.13140/RG.2.1.2324.6569.
89. Vaidyanathan, P.P. Improved Technique for Design of Perfect Reconstruction FIR QMF Banks with Lossless Polyphase Matrices / P.P. Vaidyanathan, T.Q. Nguyen, Z. Doganata and T. Saramaki // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1989. – 37. – P. 1042–1055.

90. Vaidyanathan, P.P. Theory and Design of M-channel Maximally Decimated Quadrature Mirror Filters with Arbitrary M, Having Perfect Reconstruction Property / P.P. Vaidyanathan // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1987. – 35. – P. 476–492.
91. Vaidyanathan, P.P. and Hoang, P.-Q. Lattice Structures for Optimal Design and Robust Implementation of Two-band Perfect Reconstruction QMF Banks / P.P. Vaidyanathan and P.-Q. Hoang // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1988. – 36. – P. 626–630.
92. Vetterli, M., Le Gall, D. Perfect Reconstruction FIR Filter Banks: Some Properties and Factorizations / M. Vetterli, D. Le Gall // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1989. – 37. – P. 1057–1071.
93. Vetterli, M. Filter Banks Allowing Perfect Reconstruction / M. Vetterli // Signal Process. – 1986. – 10. – P. 219–244.
94. Wiaux, Y. Correspondence Principle between Spherical and Euclidean Wavelets / Y. Wiaux, L. Jacques, P. Vandergheynst // The Astrophysical Journal. – 2005. – 632. – P.15–28.
95. Woods, J.W. and O’Neil, S.D. Subband Coding of Images / J.W. Woods and S.D. O’Neil // IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process. – 1986. – 34. – P. 1278–1288.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD
(подсистема CAD)**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022682105**Программа для моделирования процесса 3D-печати
Composite CAD (подсистема CAD)**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)» (RU)*

Автор(ы): *Денискина Галина Юрьевна (RU)*

Заявка № **2022680221**Дата поступления **28 октября 2022 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **18 ноября 2022 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Ю.С. Зубов

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

**Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ
Программа для моделирования процесса 3D-печати CompositeCAD
(подсистема CAE)**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ

**СВИДЕТЕЛЬСТВО**

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2022682106**«Программа для моделирования процесса 3D-печати
Composite CAD (подсистема CAE)»**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет)» (RU)*

Автор(ы): *Денискина Галина Юрьевна (RU)*

Заявка № **2022680217**Дата поступления **28 октября 2022 г.**

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ **18 ноября 2022 г.**

*Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности*

Ю.С. Зубов