

Труды МАИ. 2021. № 121

Trudy MAI, 2021, no. 121

Научная статья

УДК 531.381

DOI: [10.34759/trd-2021-121-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-02)

**ФОРМИРОВАНИЕ СЕМЕЙСТВА ТРАЕКТОРИЙ СВОБОДНОГО  
СФЕРИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА КАК  
ТВЁРДОГО ТЕЛА, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИХ ПЕРЕОРИЕНТАЦИЮ ЕГО ОСИ  
ДИНАМИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ В ЗАДАННОЕ ПОЛОЖЕНИЕ**

**Наиль Ильгизович Алимов<sup>1</sup>✉, Владимир Иванович Горбулин<sup>2</sup>,**

**Юрий Михайлович Сударь<sup>3</sup>**

<sup>1,2,3</sup>Военно-космическая академия имени А.Ф. Можайского,

Санкт-Петербург, Россия

<sup>1</sup>[vka@mil.ru](mailto:vka@mil.ru)✉

*Аннотация.* Получены аналитические соотношения для определения параметров траекторий свободного (по инерции) сферического движения космического аппарата как твёрдого тела, обеспечивающих переориентацию его оси динамической симметрии в заданное положение. Введена каноническая система координат, в которой углы ориентации связанной системы координат со временем изменяются линейно. Указана особенность, объясняющая неоднозначность определения начального значения угла собственного вращения, и предложен вариант устранения указанной неоднозначности. Показано, что формирование траектории сферического движения твёрдого тела, обеспечивающей перенацеливание оси динамической

симметрии в требуемое положение за заданное время, является базовой задачей при выборе управления переориентацией в импульсной постановке. Получаемые решения позволяют достаточно точно оценивать длительность процесса перенацеливания оси динамической симметрии космического аппарата и потребных энергозатрат.

**Ключевые слова:** свободное по инерции сферическое движение твёрдого тела, каноническая система координат, траектория углового движения, импульсное управление угловым движением, концепция обратных задач динамики

**Для цитирования:** Алимов Н.И., Горбулин В.И., Сударь Ю.М. Формирование семейства траекторий свободного сферического движения космического аппарата как твёрдого тела, обеспечивающих переориентацию его оси динамической симметрии в заданное положение // Труды МАИ. 2021. № 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-02)

## **FORMATION OF A FAMILY OF TRAJECTORIES OF FREE SPHERICAL MOTION OF A SPACECRAFT AS A RIGID BODY, PROVIDING REORIENTATION OF ITS AXIS OF DYNAMIC SYMMETRY TO A GIVEN POSITION**

**Naeel' I. Alimov<sup>1</sup>✉, Vladimir I. Gorbulin<sup>2</sup>, Yuriy M. Sudar<sup>3</sup>**

<sup>1,2,3</sup>Military space Academy named after A.F. Mozhaisky,

Saint Petersburg, Russia

<sup>1</sup>[vka@mil.ru](mailto:vka@mil.ru)✉

**Abstract.** Analytical relations for trajectories parameters determining of the free (by inertia) spherical movement a satellite as a solid, which ensures reorientation of its dynamic axis of symmetry to the specified position in the regular precession mode, were obtained. A

canonical inertial coordinate system, in which angles of orientation of the associated coordinate system, i.e. Euler angles, change in time linearly, was introduced. A peculiarity, explaining the ambiguity of determining the initial value of the rotation angle, is indicated, and the option of the pointed ambiguity elimination is suggested. The article demonstrates that spherical movement trajectory of a solid, which ensures the dynamic axis of symmetry retargeting to the required position in the predetermined time is a basic problem while reorientation control selection in the pulsing statement and computing required increment, kinetic moment and kinetic energy in the points of impulses application. The solutions being obtained allow assessing rather accurately the retargeting process duration and required energy consuming, necessary for further analysis. Besides, these solutions are a good initial approximation for the continuous control tasks. The authors introduced the notion of control strategy for spherical (angular) satellite motion control at lengthy time intervals, consisting of sequence of controls of the two active sections and ensuring transition from one angular motion trajectory to another, which kinematic and dynamic parameters are being determined based of the spacecraft flight program. The article proposes realizing continuous angular motion control computing at each active section based on the utilizing the concept of inverse problems of dynamics and algorithms for solving the problem two-pulse control of the satellite reorientation.

**Keywords:** free spherical motion of a rigid body by inertia, canonical coordinate system, trajectory of angular motion, impulse control of angular motion, concept of inverse problems of dynamics

**For citation:** Alimov N.I., Gorbulin V.I., Sudar Yu.M. Formation of a family of trajectories of free spherical motion of a spacecraft as a rigid body, providing reorientation of its axis of dynamic symmetry to a given position. *Trudy MAI*, 2021, no. 121. DOI: [10.34759/trd-2021-121-02](https://doi.org/10.34759/trd-2021-121-02)

## **Введение**

Складывающаяся тенденция увеличения количественного состава перспективных спутниковых систем [1, 2] обуславливает необходимость разработки качественно иных технологий управления как орбитальным сегментом в целом, так и отдельными космическими аппаратами (КА) [3], направленных на снижение нагрузки наземного комплекса управления, повышения показателей результативности. Данная цель может достигаться путём повышения автономности управления спутниками, использования децентрализованных способов координации их применения, интеллектуального управления согласованным функционированием бортовых систем как единого целого.

### **Некоторые аспекты перспективных технологий управления**

Реализация концепции единой технологии управления как орбитальным сегментом в целом, так и отдельными космическими аппаратами применительно к системе управления спутником предполагает выполнение ряда операций таких как:

- непрерывное (периодическое) измерение и/или вычисление критически важных параметров, характеризующих текущее состояние бортовых систем и окружающей

среды. К таким параметрам, в частности, относятся параметры поступательного и углового (сферического) движения КА, параметры системы электроснабжения, напряжённость геомагнитного поля в окрестности КА, координаты Солнца и др.;

– на основе статистической обработки результатов измерений уточнение параметров бортовых систем (моментов инерции, характеристик исполнительных органов системы управления, системы управления и др.) и параметров математических моделей воздействия среды на КА, используемых, в частности, для расчёта возмущающих моментов от гравитационного и магнитных полей, давления солнечного света;

– прогнозирование развития событий (ситуации), в частности, прогнозирование динамики критически важных параметров в соответствии с рассматриваемым сценарием (планом) применения отдельного КА на длительный интервал времени, согласованным с планом применения орбитального сегмента в целом;

– расчёт программы управления функционированием бортовых систем (на нижнем – тактическом – уровне планирования), согласование с планом применения группировки;

– реализация этой программы (данный процесс предполагает периодическую её коррекцию в соответствии с реально складывающимися условиями на основе принципа терминального управления);

– ведение базы знаний, экспертной системы для выработки решений при изменении условий обстановки и возникновении нештатных ситуаций.

В программе управления функционированием бортовых систем, в частности, должна содержаться информация о стратегии углового маневрирования КА на предстоящий интервал времени: моменты начала и окончания, проекции управляющего момента на оси связанной системы координат в функции времени. Целью углового маневрирования может являться: переориентация КА в положение, необходимое для отслеживания и зондирования заданных областей, для ориентации панелей солнечных батарей на Солнце, для ориентации антенны на наземную станцию или спутник-ретранслятор и т.п.

Разнообразие задач управления, необходимость учёта взаимодействия разных бортовых систем обуславливает необходимость расширения в сравнении с известными [4-16] вариантами математических постановок задач и совершенствования программно-алгоритмического обеспечения для их решения, ориентированного на бортовую реализацию. Представляется, что теоретической основой построения эффективных алгоритмов может стать метод синтеза рационального (квазиоптимального) управления сферическим (угловым) движением КА на основе концепции обратных задач динамики [17-20]. В рамках предлагаемой технологии формирования управления на длительных интервалах времени – стратегии управления сферическим движением – предлагается вначале осуществлять разбиение интервала планирования на типовые отрезки в соответствии с программой полета, каждому из которых будет соответствовать некоторая наиболее предпочтительная траектория углового движения спутника, и рассчитывать динамические и кинематические параметры сферического движения на этих

участках. Вследствие этого, управление угловым движением будет состоять в последовательности переходов (под действием моментов, создаваемых исполнительными органами) с одной траектории сферического движения на другую. Каждый такой переход требует, как правило, два активных (управляемых) участка. Применение концепции обратных задач динамики предполагает для каждого активного участка, во-первых, построение переходной траектории и, во-вторых, проверку её реализуемости.

В предлагаемой технологии управления согласованным управлением функционирования бортовыми системами КА и, в частности, сферическим движением важное значение имеет задача его перевода с одной траектории на другую в процессе его углового движения. Существующие методы и алгоритмы [4-16] в подавляющем большинстве опираются на положения теории оптимального управления, сложны в программной реализации, характеризуются значимыми вычислительными затратами, а также чувствительны к исходным данным, и поэтому их бортовая реализация представляется проблематичной. Вместе с тем, в ряде работ [17-20] предлагается формировать управление, которое должно реализовать траекторию с нужными свойствами. Следует отметить, что данный способ расчёта управления нашел своё применение в некоторых отраслях техники таких, как авиация, робототехника и др. Применение данного подхода в теории синтеза управления угловым движением КА сопряжено с решением ряда частных задач таких, как формирование потребных траекторий активного и пассивного сферического движения, проверка их реализуемости и др. Представляется, что при построении

траекторий управляемого углового движения целесообразно использовать результаты соответствующей задачи в импульсной постановке. В этой связи уместно отметить, что теоретические основы импульсных движений нашли своё широкое применение в теории удара [21-23] и теории межорбитального маневрирования [24], однако при синтезе управления угловым движением используются лишь отдельными авторами [16]. Ниже рассматривается задача переориентации оси динамической симметрии космического аппарата в требуемое угловое положение. Конструктивно для многих спутников этой оси параллельны диаграммы направленности антенн, ось телескопа, нормаль к среднему положению панелей солнечных батарей. Поэтому рассматриваемая задача возникает при переориентации КА с целью нацеливания антенн на КА-ретрансляторы или наземные станции, сканирования заданных объектов бортовыми средствами зондирования, ориентации панелей солнечных батарей на Солнце и т.п.

### **Математическая постановка задачи**

Пусть оси  $Oxuz$  связанной с КА системы координат совпадают с его главными осями инерции, а главные моменты инерции определяются величинами  $J_x, J_y, J_z$  соответственно, причем  $J_x = J_y$ , т.е. данный КА является динамически симметричным, а ось  $Oz$  является его осью динамической симметрии [21-23]. Пусть текущая ориентация осей связанной системы координат задается в базовой (инерциальной) системе координат, начало которых совпадает с центром масс КА,



углами Эйлера:  $\psi$  – угол прецессии,  $\vartheta$  – угол нутации,  $\varphi$  – угол собственного вращения.

Пусть сферическое движение динамически симметричного КА моделируется в некоторой базовой (инерциальной) системе координат  $OXYZ$  на основе численного интегрирования динамических и кинематических соотношений Эйлера [21]:

$$\begin{cases} J_x \cdot \dot{\omega}_x + (J_z - J_y) \cdot \omega_y \cdot \omega_z = M_x, \\ J_y \cdot \dot{\omega}_y + (J_x - J_z) \cdot \omega_x \cdot \omega_z = M_y, \\ J_z \cdot \dot{\omega}_z + (J_y - J_x) \cdot \omega_x \cdot \omega_y = M_z, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \dot{\psi} = (\omega_x \cdot \sin \varphi + \omega_y \cdot \cos \varphi) \cdot \frac{1}{\sin \vartheta}, \\ \dot{\vartheta} = \omega_x \cdot \cos \varphi - \omega_y \cdot \sin \varphi, \\ \dot{\varphi} = \omega_z - (\omega_x \cdot \sin \varphi + \omega_y \cdot \cos \varphi) \cdot \operatorname{ctg} \vartheta, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  – проекции вектора угловой скорости КА на оси связанной системы координат,  $\dot{\psi}, \dot{\vartheta}, \dot{\varphi}$  – скорости изменения углов прецессии, нутации и собственного вращения соответственно,  $M_x, M_y, M_z$  – проекции момента внешних сил на оси связанной системы координат.

Пусть в момент времени  $t_0$  начальная ориентация КА задана углами  $\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0$ , а конечное положение оси динамической симметрии на момент времени  $t_k$  углами  $\psi_k, \vartheta_k$ .

Требуется найти вектор угловой скорости в начальный момент времени  $\vec{\omega}(t_0) = (\omega_{x_0}, \omega_{y_0}, \omega_{z_0})$ , обеспечивающий требуемую переориентацию оси

динамической симметрии твердого тела при его сферическом движении по инерции, т.е. при  $M_x(t) = 0$ ,  $M_y(t) = 0$ ,  $M_z(t) = 0$ .

Следует подчеркнуть, что в силу произвольности конечного значения  $\varphi_k$  в конечный момент времени  $t_k$  ( $\varphi_k = \varphi_k(t_k) \in [0, 2\pi)$ ) сформулированная задача будет иметь бесконечное множество решений. Каждое решение этого множества, как будет показано ниже, определяется некоторым параметром – углом  $\mu$  ориентации кинетического момента  $\vec{K}$  переходной траектории,  $\mu \in [0, 2\pi)$ . Поэтому правомерно утверждать о существовании семейства решений сформулированной задачи, которому соответствует семейство траекторий свободного сферического движения КА как твердого тела.

### **Каноническая система координат**

Вначале предлагается определить некоторые понятия. Под *угловым движением КА* понимается сферическое движение КА вокруг центра масс, т.е. изменение ориентации корпуса КА в пространстве (изменение углов ориентации корпуса КА в неподвижной системе координат). *Траекторией углового движения КА* называется зависимость от времени углов ориентации корпуса КА относительно неподвижной системы координат и проекций угловой скорости его сферического движения (скоростей изменения углов ориентации) на оси связанной системы координат

$$Tr(t) = \{\psi(t), \vartheta(t), \varphi(t), \omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)\}.$$

Угловое движение может происходить как под воздействием внешних моментов (управляющих или возмущающих), так и по инерции – *по свободной траектории углового движения КА.*

Под *канонической системой координат* понимается такая неподвижная система координат, в которой, уравнения, описывающие сферическое движение динамически симметричного твердого тела по инерции приобретают простейший вид: углы прецессии и собственного вращения являются линейными функциями времени, а угол нутации остается постоянным [21-23], т.е. справедливы соотношения:

$$\begin{cases} \dot{\psi}_{кан} = const, \\ \vartheta_{кан} = const, \\ \dot{\phi}_{кан} = const. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь необходимо подчеркнуть, что в литературе по теоретической механике указывается [21-23], что ось  $OZ_{кан}$  такой системы координат совпадает с вектором кинетического момента; по поводу ориентации оставшихся осей лишь в некоторых источниках [21, 23] указывается на то, что искомый угол зависит от постоянных интегрирования, однако формулы для его расчета не представлены. Ниже приводится обоснование по выбору данного угла, устраняющее указанную неопределенность.

Пусть ориентация канонической СК относительно базовой определяется углами Эйлера  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$ , причем углы  $\alpha$  и  $\beta$  задают ориентацию оси  $OZ_{кан}$ , а угол  $\gamma$  – положение осей  $OX_{кан}$  и  $OY_{кан}$  в плоскости, перпендикулярной вектору кинетического момента.

Исходными для расчета углов  $\alpha$  и  $\beta$  ориентации канонической СК являются следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
K_x &= J_x \cdot \omega_x, \\
K_y &= J_y \cdot \omega_y, \\
K_z &= J_z \cdot \omega_z, \\
K_0 &= \sqrt{K_x^2 + K_y^2 + K_z^2},
\end{aligned}
\tag{4}$$

где  $K_x, K_y, K_z$  – проекции вектора кинетического момента на оси связанной СК,  $K_0$  – модуль вектора кинетического момента.

По известным значениям проекций кинетического момента в связанной СК можно найти его проекции в базовой СК. Для этого следует воспользоваться матрицей направляющих косинусов [22]:

$$\begin{aligned}
M_{II}(\psi, \vartheta, \varphi) &= \\
&= \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \sin \varphi & \sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \vartheta \cos \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \vartheta \cos \varphi & \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \psi \sin \vartheta & -\cos \psi \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{bmatrix},
\end{aligned}
\tag{5}$$

при обращении к которой в дальнейшем в индексе будут указываться обозначения используемых систем координат, например:  $M_{связ \rightarrow баз}(\psi, \vartheta, \varphi)$ , где в скобках указаны соответствующие углы Эйлера (для случаев перехода от неподвижной к связанной СК подразумевается использование транспонированной матрицы).

Для проекций кинетического момента в базовой СК справедливо уравнение:

$$\begin{bmatrix} K_{x_{баз}} \\ K_{y_{баз}} \\ K_{z_{баз}} \end{bmatrix} = M_{баз \rightarrow связ}(\psi, \vartheta, \varphi) \cdot \begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix}.
\tag{6}$$

С другой стороны, поскольку в канонической СК вектор кинетического момента имеет вид  $[0, 0, K_0]^T$ , то уравнение перехода в базовую СК запишется в виде:

$$\begin{bmatrix} K_{x_{\text{баз}}} \\ K_{y_{\text{баз}}} \\ K_{z_{\text{баз}}} \end{bmatrix} = M_{\text{баз} \rightarrow \text{кан}}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Следует обратить внимание, что в выражении (7), при обращении к матрице направляющих косинусов (5), проекция вектора кинетического момента на ось  $OZ_{\text{кан}}$  не зависит от угла  $\gamma$ .

Из выражений (6) и (7) однозначно определяются искомые углы  $\alpha$  и  $\beta$  по формулам:

$$\beta = \arccos\left(\frac{K_{z_{\text{баз}}}}{K_0}\right), \beta \in (0, \pi), K_0 \neq 0; \quad (8)$$

$$\alpha \begin{cases} \sin \alpha = \frac{K_{x_{\text{баз}}}}{K_0} \\ \cos \alpha = -\frac{K_{y_{\text{баз}}}}{K_0} \end{cases}, \alpha \in [0, 2\pi), K_0 \neq 0. \quad (9)$$

При определении угла  $\gamma$  следует иметь в виду, что векторы  $\vec{\gamma}$  и  $\vec{\psi}_{\text{кан}_0}$  коллинеарны, т.е. изменение этих углов происходит вокруг одной и той же оси. Это означает, что угол  $\psi_{\text{кан}_0}$  является продолжением угла  $\gamma$ , т.е. неизвестными величинами являются не два угла  $\gamma$  и  $\psi_{\text{кан}_0}$ , а один – некоторый угол  $\chi$ , равный их сумме  $\chi = \gamma + \psi_{\text{кан}_0}$ . Поэтому в дальнейшем можно одному из искомым углов придать любое допустимое значение и определить оставшуюся величину. Предлагается для определенности принять значение угла  $\psi_{\text{кан}_0}$  по следующему правилу:

$$\Psi_{кан_0} = \begin{cases} 0, & \text{при } \vartheta_{кан} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]; \\ \pi, & \text{при } \vartheta_{кан} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right); \end{cases} \quad (10)$$

которое осуществимо при ориентации осей  $OX_{кан}$  и  $OY_{кан}$  относительно вектора угловой скорости КА  $\vec{\omega}$  (на момент построения СК). При регулярной прецессии вектор  $\vec{\omega}$  будет находится в плоскости, содержащей оси  $Oz$  и  $OZ_{кан}$  [21-23] (см. рис. 1). Удобно направить ось  $OY_{кан}$  в плоскости, содержащей оси  $Oz$  и  $OZ_{кан}$  так, чтобы направление проекции вектора угловой скорости на ось  $OY_{кан}$  определялась по правилу:

$$\begin{cases} -\omega_{y_{кан_0}}, & \text{при } \dot{\varphi}_{кан} > 0; \\ +\omega_{y_{кан_0}}, & \text{при } \dot{\varphi}_{кан} < 0. \end{cases}$$

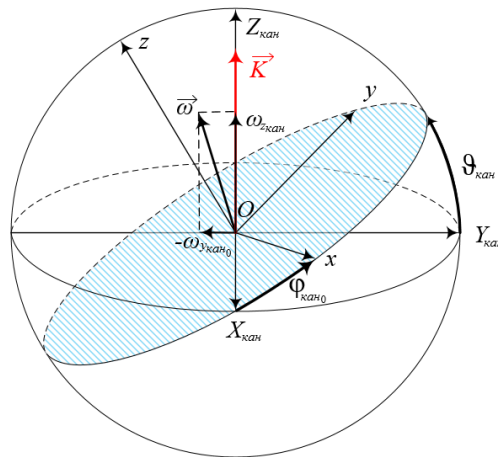


Рис. 1. Ориентация канонической системы координат

относительно векторов  $\vec{K}$  и  $\vec{\omega}$

Тогда вектор угловой скорости в начальный момент построения канонической системы координат будет иметь проекции только на оси  $OY_{кан}$  и  $OZ_{кан}$  :

$$|\vec{\omega}| = \sqrt{\omega_{y_{кан_0}}^2 + \omega_{z_{кан}}^2}. \quad (11)$$

Из выражения (11) следует, что  $\omega_{x_{кан0}} \equiv 0$ , тогда для проекций вектора угловой скорости в канонической СК справедливо выражение:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \omega_{y_{кан0}} \\ \omega_{z_{кан0}} \end{bmatrix} = M_{кан \rightarrow баз}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{bmatrix} \omega_{x_{баз}} \\ \omega_{y_{баз}} \\ \omega_{z_{баз}} \end{bmatrix}. \quad (12)$$

Путем преобразований из выражения (12) можно получить уравнения тригонометрических функций для однозначного определения искомого угла  $\gamma$  на интервале  $\gamma \in [0, 2\pi)$ :

$$\gamma \begin{cases} s\gamma = -\frac{\omega_{x_{баз}} \cdot c\alpha + \omega_{y_{баз}} \cdot s\alpha}{\left(\omega_{x_{баз}} \cdot s\alpha \cdot c\beta - \omega_{y_{баз}} \cdot c\alpha \cdot c\beta - \omega_{z_{баз}} \cdot s\beta\right)^2 + \left(\omega_{x_{баз}} \cdot c\alpha + \omega_{y_{баз}} \cdot s\alpha\right)^2} \cdot \omega_{y_{кан0}}, \\ c\gamma = \frac{\omega_{z_{баз}} \cdot s\beta + \omega_{y_{баз}} \cdot c\alpha \cdot c\beta - \omega_{x_{баз}} \cdot s\alpha \cdot c\beta}{\left(\omega_{x_{баз}} \cdot s\alpha \cdot c\beta - \omega_{y_{баз}} \cdot c\alpha \cdot c\beta - \omega_{z_{баз}} \cdot s\beta\right)^2 + \left(\omega_{x_{баз}} \cdot c\alpha + \omega_{y_{баз}} \cdot s\alpha\right)^2} \cdot \omega_{y_{кан0}}, \end{cases} \quad (13)$$

где для краткости записи тригонометрических функций  $\sin$  и  $\cos$  углов Эйлера вместо самих функций указаны первые буквы их названий.

Представляет интерес также ориентация канонической системы координат при фиксированном значении третьего угла:

$$\gamma \equiv 0. \quad (14)$$

Тогда значение  $\psi_{кан0}$  можно определить из следующего выражения:

$$M_{связ \rightarrow кан}(\psi_{кан}, \vartheta_{кан}, \varphi_{кан}) = M_{кан \rightarrow баз}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot M_{связ \rightarrow баз}(\psi, \vartheta, \varphi),$$

откуда путем преобразований следует:

$$\Psi_{кан_0} \begin{cases} \sin \Psi_{кан_0} = \frac{\cos \alpha \cdot \sin \psi_0 - \sin \alpha \cdot \cos \psi_0}{\sin \vartheta_{кан}} \cdot \sin \vartheta_0, \\ \cos \Psi_{кан_0} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta \cdot \sin \psi_0 \cdot \sin \vartheta_0 + \cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \psi_0 \cdot \sin \vartheta_0 - \sin \beta \cdot \cos \vartheta_0}{\sin \vartheta_{кан}}, \end{cases}$$

где

$$\vartheta_{кан} = \arccos(\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \psi_0 \cdot \sin \vartheta_0 + \cos \alpha \cdot \sin \beta \cdot \cos \psi_0 \cdot \sin \vartheta_0 + \cos \beta \cdot \cos \vartheta_0).$$

Представленные аналитические выражения для определения ориентации канонической системы координат как первого варианта с соотношениями (8), (9), (13), так и второго варианта с выражениями (8), (9), (14) применимы для решения различных прикладных задач.

### **Аналитические соотношения для формирования семейства траекторий свободного углового движения, обеспечивающих переориентацию оси динамической симметрии КА**

Удобно представить пространственные развороты триэдров используемых СК в сфере единичного радиуса, центр которой совпадает с началом рассматриваемых СК. На рис. 2 изображено, как возможно попасть из начального положения переориентируемой оси динамической симметрии ( $Oz_0$ ) в конечное ( $Oz_k$ ) свободным угловым движением при регулярной прецессии. Так как угол между осью  $Oz$  и единичным вектором кинетического момента постоянен за все время движения по инерции, то все возможные положения вектора кинетического момента будут находиться в одной плоскости  $\sigma_K$ , перпендикулярной плоскости  $\sigma_C$ , содержащей



$Oz_0$  и  $Oz_k$ . На основе этой особенности строятся дальнейшие рассуждения и описание нахождения необходимых начальных условий для формирования семейства траекторий, которые обеспечат требуемую переориентацию оси динамической симметрии КА.

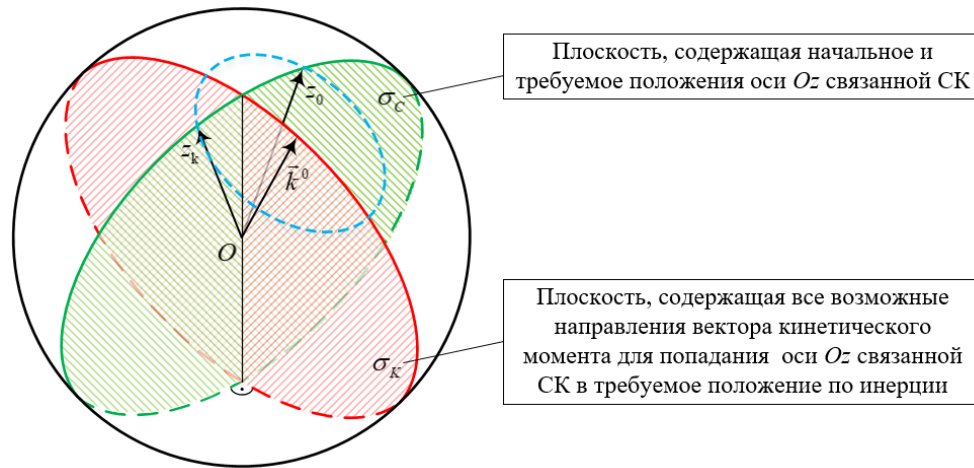


Рис. 2. Изображение определения ориентации плоскости, содержащей все возможные направления вектора кинетического момента при регулярной прецессии

Пусть концам ортов связанной СК  $Oxyz$  соответствуют точки:  $A$  для  $\vec{Ox}^0$ ,  $B$  для  $\vec{Oy}^0$  и  $C$  для  $\vec{Oz}^0$ . Для исходного углового положения КА декартовы координаты для точки  $A_0$  рассчитываются следующим образом (с учетом того, что орт записывается в виде  $\vec{Ox}^0 = [1, 0, 0]^T$ , а матрица направляющих косинусов определяется согласно выражению (5)):

$$\begin{bmatrix} x_{A_0} \\ y_{A_0} \\ z_{A_0} \end{bmatrix} = M_{св \rightarrow баз}(\psi_0, \vartheta_0, \varphi_0) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

откуда следует:

$$\begin{cases} x_{A_0} = \cos \psi_0 \cdot \cos \varphi_0 - \sin \psi_0 \cdot \cos \vartheta_0 \cdot \sin \varphi_0, \\ y_{A_0} = \sin \psi_0 \cdot \cos \varphi_0 + \cos \psi_0 \cdot \cos \vartheta_0 \cdot \sin \varphi_0, \\ z_{A_0} = \sin \vartheta_0 \cdot \sin \varphi_0. \end{cases} \quad (16)$$

По аналогии с выражениями (15) и (16) можно найти декартовы координаты точек  $B_0$ ,  $C_0$  и  $C_k$  для единичных ортов  $\overline{Oy}^0 = [0, 1, 0]^T$  и  $\overline{Oz}^0 = [0, 0, 1]^T$  соответственно:

$$\begin{cases} x_{B_0} = -\cos \psi_0 \cdot \sin \varphi_0 - \sin \psi_0 \cdot \cos \vartheta_0 \cdot \cos \varphi_0, \\ y_{B_0} = -\sin \psi_0 \cdot \sin \varphi_0 + \cos \psi_0 \cdot \cos \vartheta_0 \cdot \cos \varphi_0, \\ z_{B_0} = \sin \vartheta_0 \cdot \cos \varphi_0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{C_0} = \sin \psi_0 \cdot \sin \vartheta_0, \\ y_{C_0} = -\cos \psi_0 \cdot \sin \vartheta_0, \\ z_{C_0} = \cos \vartheta_0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_{C_k} = \sin \psi_k \cdot \sin \vartheta_k, \\ y_{C_k} = -\cos \psi_k \cdot \sin \vartheta_k, \\ z_{C_k} = \cos \vartheta_k. \end{cases}$$

Координаты точки  $C'$  – середины отрезка  $C_0C_k$  будут равны:

$$C' \left( \frac{x_{C_0} + x_{C_k}}{2}, \frac{y_{C_0} + y_{C_k}}{2}, \frac{z_{C_0} + z_{C_k}}{2} \right),$$

зная которые, можно найти координаты точки  $C$  – середины дуги  $C_0C_k$  большого круга:

$$C \left( \frac{x_{C'}}{\sqrt{x_{C'}^2 + y_{C'}^2 + z_{C'}^2}}, \frac{y_{C'}}{\sqrt{x_{C'}^2 + y_{C'}^2 + z_{C'}^2}}, \frac{z_{C'}}{\sqrt{x_{C'}^2 + y_{C'}^2 + z_{C'}^2}} \right).$$

Вектор нормали к плоскости  $\sigma_C$ , содержащей точки  $O, C_0, C_k$ , будет равен:

$$\vec{n}_{\sigma_C} = \overline{OC_0} \times \overline{OC_k}.$$

Вектор нормали  $\vec{n}_{\sigma_K}$  к плоскости возможных положений вектора кинетического момента  $\vec{K}$  можно найти из уравнения:

$$\vec{n}_{\sigma_K} = \vec{OC} \times \vec{n}_{\sigma_C}^{-0},$$

где  $\vec{n}_{\sigma_C}^{-0}$  – единичный вектор (орт) вектора  $\vec{n}_{\sigma_C}$ .

Для однозначного определения и удобства последующих расчетов предлагается воспользоваться тем свойством, что для всех допустимых траекторий переориентации оси динамической симметрии КА соответствующий каждой из них орт  $\vec{k}^0$  вектора кинетического момента имеет своим годографом большой круг на единичной сфере. Поэтому целесообразно ввести *годографную СК*  $OX_{200}Y_{200}Z_{200}$  (рис. 3), начало которой совпадает с центром масс КА, ось  $OX_{200}$  направлена по вектору  $\vec{k}^0$ , ось  $OY_{200}$  по вектору  $\vec{n}_{\sigma_K}$ , ось  $OZ_{200}$  дополняет систему координат до правой.

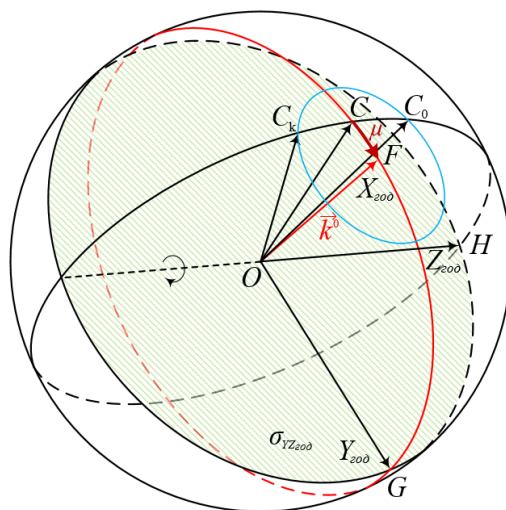


Рис. 3. Изображение ориентации годографной СК относительно начального и конечного положения оси  $Oz$  связанной СК

Пусть ориентация годографной СК относительно базовой определяется углами Эйлера  $\xi, \eta, \zeta$ , а точки  $F, G, H$  соответствуют концам единичных ортов годографной СК для осей  $OX_{zod}, OY_{zod}, OZ_{zod}$  соответственно.

Так как плоскость  $\sigma_{XY_{zod}}$ , содержащая точки  $O, F, G$ , будет совпадать с плоскостью  $\sigma_K$ , то при варьировании величиной  $\mu$  координаты точки  $H$  будут неизменны (см. рис. 3), а при  $\mu = 0$  координаты точек  $F$  и  $C$  совпадут. Помимо этого, из построения годографной СК следует, что координаты точки  $H$  будут совпадать с концом вектора  $\vec{n}_{\sigma_K}$ , а координаты точки  $G$  с концом орта  $\vec{n}_{\sigma_C}^0$ .

Углы  $\xi$  и  $\eta$  можно найти через координаты точки  $H$  из следующего выражения:

$$\begin{bmatrix} x_H \\ y_H \\ z_H \end{bmatrix} = M_{zod \rightarrow баз}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда следует:

$$\eta = \arccos z_H, \quad (17)$$

$$\xi \begin{cases} \sin \xi = \frac{x_H}{\sin \eta}, \\ \cos \xi = -\frac{y_H}{\sin \eta}. \end{cases} \quad (18)$$

Угол  $\zeta$  можно найти через координаты точек  $F$  и  $G$  на основе выражений:

$$\begin{bmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{bmatrix} = M_{zod \rightarrow баз}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_G \\ y_G \\ z_G \end{bmatrix} = M_{z_{00} \rightarrow \text{баз}}(\xi, \eta, \zeta) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

откуда получается:

$$\zeta \begin{cases} \sin \xi = \frac{z_F}{\sin \eta}, \\ \cos \xi = \frac{z_G}{\sin \eta}. \end{cases} \quad (19)$$

Проекция орта  $\vec{k}^0$  вектора кинетического момента  $\vec{K}$  на оси базовой СК с вариацией величины  $\mu$  по оси  $Oz_{z_{00}}$  ( $\vec{k}^0$  будет совпадать с положительным направлением оси  $Ox_{z_{00}}$ ) примут вид:

$$\begin{cases} k_x^0 = \cos \xi \cdot \cos(\zeta + \mu) - \sin \xi \cdot \cos \eta \cdot \sin(\zeta + \mu), \\ k_y^0 = \sin \xi \cdot \cos(\zeta + \mu) + \cos \xi \cdot \cos \eta \cdot \sin(\zeta + \mu), \\ k_z^0 = \sin \eta \cdot \sin(\zeta + \mu). \end{cases} \quad (20)$$

На основе соотношений (20) можно определить углы ориентации канонической СК относительно базовой СК из выражения:

$$\begin{bmatrix} k_x^0 \\ k_y^0 \\ k_z^0 \end{bmatrix} = M_{\text{кан} \rightarrow \text{баз}}(\alpha, \beta, \gamma) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

откуда можно получить:

$$\beta = \arccos k_z^0, \quad (21)$$

$$\alpha \begin{cases} \sin \alpha = \frac{k_x^0}{\sin \beta}, \\ \cos \alpha = -\frac{k_y^0}{\sin \beta}, \end{cases}$$

$$\gamma \equiv 0.$$

Зная  $\alpha, \beta, \gamma$ , можно пересчитать координаты точек  $A_0, B_0, C_0$  из базовой СК в каноническую СК через  $M_{\text{кан} \rightarrow \text{баз}}(\alpha, \beta, \gamma)$  и на основе координат  $A_{0\text{кан}}, B_{0\text{кан}}, C_{0\text{кан}}$ , и  $M_{\text{св} \rightarrow \text{кан}}(\psi_{\text{кан}_0}, \vartheta_{\text{кан}}, \varphi_{\text{кан}_0})$  найти углы ориентации связанной СК относительно канонической СК:

$$\begin{aligned} \vartheta_{\text{кан}} &= \arccos z_{C_{0\text{кан}}}, \\ \psi_{\text{кан}_0} &\begin{cases} \sin \psi_{\text{кан}_0} = \frac{x_{C_{0\text{кан}}}}{\sin \vartheta_{\text{кан}}}, \\ \cos \psi_{\text{кан}_0} = -\frac{y_{C_{0\text{кан}}}}{\sin \vartheta_{\text{кан}}}, \end{cases} \\ \varphi_{\text{кан}_0} &\begin{cases} \sin \varphi_{\text{кан}_0} = \frac{z_{A_{0\text{кан}}}}{\sin \vartheta_{\text{кан}}}, \\ \cos \varphi_{\text{кан}_0} = \frac{y_{B_{0\text{кан}}}}{\sin \vartheta_{\text{кан}}}. \end{cases} \end{aligned} \quad (22)$$

Учитывая, что скорость изменения значения угла прецессии в канонической СК есть величина постоянная (3), ее значение можно рассчитать по формуле:

$$\dot{\psi}_{\text{кан}} = \frac{\Delta \psi_{\text{кан}}}{T_{\text{перепор}}}, \quad (23)$$

где определение величины  $\Delta \psi_{\text{кан}}$  требует дополнительных пояснений и приведено ниже.

Из соотношений (2) можно получить значения проекций угловой скорости КА в связанной СК:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ \omega_y = \dot{\psi} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ \omega_z = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (24)$$

С учетом соотношений (3) в канонической СК для уравнений (24) справедливо:

$$\begin{cases} \omega_x = \dot{\psi}_{кан} \sin \vartheta_{кан} \sin \varphi_{кан}, \\ \omega_y = \dot{\psi}_{кан} \sin \vartheta_{кан} \cos \varphi_{кан}, \\ \omega_z = \dot{\psi}_{кан} \cos \vartheta_{кан} + \dot{\varphi}_{кан}. \end{cases} \quad (25)$$

Тогда выражения (7) с учетом соотношений (25) примут вид:

$$\begin{aligned} K_x &= J_x \dot{\psi}_{кан} \sin \vartheta_{кан} \sin \varphi_{кан}, \\ K_y &= J_y \dot{\psi}_{кан} \sin \vartheta_{кан} \cos \varphi_{кан}, \\ K_z &= J_z (\dot{\psi}_{кан} \cos \vartheta_{кан} + \dot{\varphi}_{кан}). \end{aligned} \quad (26)$$

С другой стороны, проекции вектора кинетического момента в связанной СК можно найти из выражения:

$$\begin{bmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{bmatrix} = M_{кан \rightarrow св} (\psi_{кан}, \vartheta_{кан}, \varphi_{кан}) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K \end{bmatrix},$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} K_x &= K \sin \vartheta_{кан} \sin \varphi_{кан}, \\ K_y &= -K \sin \vartheta_{кан} \cos \varphi_{кан}, \\ K_z &= K \cos \vartheta_{кан}. \end{aligned} \quad (27)$$

На основе соотношений (26) и (27) величина кинетического момента динамически симметричного КА будет определяться уравнением:

$$K = J_x \dot{\psi}_{кан}, \quad (28)$$

откуда можно сделать вывод, что в случае регулярной прецессии величина  $\dot{\psi}_{кан}$  зависит только от скалярных неотрицательных параметров и всегда положительна:

$$\dot{\psi}_{кан} = \frac{K}{J_x}, \quad \dot{\psi}_{кан} \geq 0. \quad (29)$$

Выражение (23) с учетом выражения (29) не всегда позволяет однозначно определить величину  $\Delta\psi_{кан}$ , для определения которой следует обратиться к свойствам регулярной прецессии, в частности к тому, что модули проекций орта оси  $Oz$  на ось  $OZ_{кан}$  (или на направление кинетического момента  $\vec{K}$ , что тоже самое) и на координатную плоскость  $OX_{кан}Y_{кан}$  есть величины постоянные (см. рис. 4):

$$\left| np_{OZ_{кан}} \vec{Oz}^0 \right| \equiv const,$$

$$\left| np_{\sigma_{XY_{кан}}} \vec{Oz}^0 \right| \equiv const,$$

$$\vec{\lambda} = np_{\sigma_{XY_{кан}}} \vec{Oz}^0,$$

где  $\vec{\lambda}$ ,  $np_{\sigma_{XY_{кан}}} \vec{Oz}^0$  – проекция единичного вектора  $\vec{Oz}^0$  оси  $Oz$  на координатную плоскость  $\sigma_{XY_{кан}} \equiv OX_{кан}Y_{кан}$ . Проекция  $\vec{\lambda}$  будет вращаться в координатной плоскости  $\sigma_{XY_{кан}}$  вокруг оси  $OZ_{кан}$  с постоянной угловой скоростью  $\dot{\psi}_{кан}$ , поэтому изменение угла прецессии  $\Delta\psi_{кан}$  (за 1 оборот) есть угол (рис. 4) между векторами  $\vec{\lambda}_0$  и  $\vec{\lambda}_k$  в начальный и конечный моменты времени:

$$\Delta\psi_{кан} = \left( \vec{\lambda}_0, \vec{\lambda}_k \right), \quad \Delta\psi_{кан} \in (0, 2\pi).$$



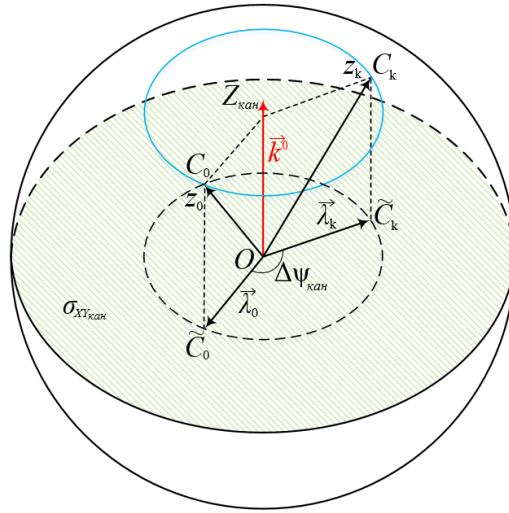


Рис. 4. Проекция начальной и конечной ориентации оси  $Oz$

связанной системы координат на плоскость  $\sigma_{XY_{кан}}$

Следовательно, для расчета величины  $\Delta\psi_{кан}$  необходимо найти  $\vec{\lambda}_0$  и  $\vec{\lambda}_k$ . Данные вектора начинаются в точке  $O$  – центре масс КА; конечными точками являются проекции  $C_0, C_k$  точек  $C_0$  и  $C_k$  на координатную плоскость  $\sigma_{XY_{кан}}$ . В базовой СК координаты точек  $C_0, C_k$  и уравнение плоскости  $\sigma_{XY_{кан}}$  можно представить в виде:

$$C_0 = [x_{C_0}, y_{C_0}, z_{C_0}]^T,$$

$$C_k = [x_{C_k}, y_{C_k}, z_{C_k}]^T,$$

$$k_x^0 \cdot x_{\bar{c}} + k_y^0 \cdot y_{\bar{c}} + k_z^0 \cdot z_{\bar{c}} = 0.$$

Уравнение прямых, проходящих через точки  $C_0, C_k$  и перпендикулярных к плоскости  $\sigma_{XY_{кан}}$ , примет вид:

$$\frac{x_{\bar{c}} - x_c}{k_x^0} = \frac{y_{\bar{c}} - y_c}{k_y^0} = \frac{z_{\bar{c}} - z_c}{k_z^0}.$$

Следовательно, координаты точек  $C_0$ ,  $C_k$  определяются из системы уравнений

вида:

$$\begin{cases} k_y^0(x_{\bar{c}} - x_c) = k_x^0(y_{\bar{c}} - y_c), \\ k_z^0(x_{\bar{c}} - x_c) = k_x^0(z_{\bar{c}} - z_c), \\ k_x^0 \cdot x_{\bar{c}} + k_y^0 \cdot y_{\bar{c}} + k_z^0 \cdot z_{\bar{c}} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Решив систему уравнений (30) методом Гаусса [25], можно записать выражения для искомых декартовых координат в следующем виде:

$$\begin{cases} x_{\bar{c}} = x_c \left( (k_y^0)^2 + (k_z^0)^2 \right) - k_x^0 (k_y^0 \cdot y_c + k_z^0 \cdot z_c), \\ y_{\bar{c}} = y_c - k_y^0 (k_y^0 \cdot y_c + k_x^0 \cdot x_c + k_z^0 \cdot z_c), \\ z_{\bar{c}} = z_c \left( (k_x^0)^2 + (k_y^0)^2 \right) - k_z^0 (k_x^0 \cdot x_c + k_y^0 \cdot y_c). \end{cases} \quad (31)$$

Полученные аналитические выражения для расчета координат точек  $C_0$ ,  $C_k$  в начальный и конечный момент времени позволяют сформировать вектора  $\vec{\lambda}_0 = \overrightarrow{OC_0}$ ,  $\vec{\lambda}_k = \overrightarrow{OC_k}$  и найти значение искомого угла:

$$\Delta\Psi_{кан} = \arccos \frac{\vec{\lambda}_0 \cdot \vec{\lambda}_k}{|\vec{\lambda}_0| \cdot |\vec{\lambda}_k|},$$

где  $\vec{\lambda}_0 \cdot \vec{\lambda}_k$  – скалярное произведение векторов  $\vec{\lambda}_0$  и  $\vec{\lambda}_k$ .

Однако, хотя и найденное значение  $\Delta\Psi_{кан}$  всегда положительно, необходимо (исходя из выражений (23) и (29)) выполнение условия сонаправленности векторов:

$\vec{\Psi}_{кан} \uparrow\uparrow \vec{k}^0$ . Для выбора направления вектора  $\vec{\Psi}_{кан}$  нужно найти результирующий вектор:

$$\vec{\lambda}_{рез} = \vec{\lambda}_0 \times \vec{\lambda}_k,$$

где  $\vec{\lambda}_0 \times \vec{\lambda}_k$  – векторное произведение  $\vec{\lambda}_0$  и  $\vec{\lambda}_k$ .

Используя выражение для  $\vec{\lambda}_{рез}$  можно однозначно определить значение для  $\Delta\psi_{кан} \in [0, 2\pi)$  из условия сонаправленности векторов  $\vec{\lambda}_{рез} \uparrow\uparrow \vec{k}^0$ :

$$\Delta\psi_{кан} = \begin{cases} \arccos \frac{\vec{\lambda}_0 \cdot \vec{\lambda}_k}{|\vec{\lambda}_0| \cdot |\vec{\lambda}_k|}, & \text{если } \vec{\lambda}_{рез} \uparrow\uparrow \vec{k}^0, \\ 2\pi - \arccos \frac{\vec{\lambda}_0 \cdot \vec{\lambda}_k}{|\vec{\lambda}_0| \cdot |\vec{\lambda}_k|}, & \text{если } \vec{\lambda}_{рез} \uparrow\downarrow \vec{k}^0, \end{cases} \quad (32)$$

где проверка условия сонаправленности векторов  $\vec{\lambda}_{рез}$  и  $\vec{k}^0$  проводится определением знака их скалярного произведения:

$$\text{sgn}(\vec{\lambda}_{рез} \cdot \vec{k}^0) = \begin{cases} "+" \Rightarrow \vec{\lambda}_{рез} \uparrow\uparrow \vec{k}^0; \\ "-" \Rightarrow \vec{\lambda}_{рез} \uparrow\downarrow \vec{k}^0. \end{cases}$$

Однозначно определив величину  $\dot{\psi}_{кан}$ , можно на основании выражений (26), (27) записать уравнение для определения скорости изменения угла собственного вращения в канонической СК:

$$\dot{\phi}_{кан} = \frac{J_x - J_z}{J_z} \dot{\psi}_{кан} \cos \vartheta_{кан}. \quad (33)$$

Таким образом, полученные аналитические выражения (22), (23), (29), (32), (33) для правых частей соотношений (25) позволяют формировать семейство траекторий свободного сферического движения космического аппарата как твёрдого тела, обеспечивающих переориентацию его оси динамической симметрии в заданное положение, каждая из которых определяется параметром  $\mu$ .

## Заключение

Представлены аналитические выражения для расчёта параметров траекторий свободного (по инерции) сферического движения космического аппарата как твёрдого тела, обеспечивающих переориентацию его оси динамической симметрии в заданное положение в режиме регулярной прецессии в зависимости от угла  $\mu$  ориентации кинетического момента КА в годографной плоскости. Сравнение результатов моделирования процессов переориентации твёрдого тела на основе представленных аналитических моделей и путем численного интегрирования дифференциальной модели (1), (2) подтвердили достоверность полученных выражений. Данные соотношения могут использоваться для решения задач двухимпульсного управления переориентацией оси динамической симметрии спутника в требуемое положение за заданное время с минимальным расходом энергии или за минимальное время при ограничении на расход ресурса, а также управления переориентацией всего космического аппарата в заданное положение.

## Список источников

1. Поповкин В.А. Теоретико-множественная модель развития системы космического информационного обеспечения // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2011. № 632. С. 110-115.
2. Поповкин В.А., Горбулин В.И. Обоснование нового способа орбитального построения спутниковых систем для повышения качества космического

информационного обеспечения // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2011. № 632. С. 100-103.

3. Балухто А.Н. и др. Искусственный интеллект в космической технике. Состояние. Перспективы применения: монография. - М.: Радиотехника, 2021. - 440 с.

4. Петрищев В.Ф. Оптимальное сканирование космическим аппаратом поверхности земли. - Самара: Изд-во СГАУ, 2007. - 96 с.

5. Горбулин В.И., Власов В.А., Панченко В.В. Оптимизация плана применения оптико-электронной аппаратуры космического аппарата дистанционного зондирования Земли при наблюдении заданных объектов // Информация и космос. 2008. № 4. С. 51-56.

6. Левский М.В. Использование интеграла энергии в оптимальном управлении пространственной ориентацией космического аппарата // Известия РАН. Механика твёрдого тела. 2009. № 4. С. 10-23.

7. Власов В.А., Горбулин В.И., Зозуля Л.П. Расчет оптимального по быстродействию перенацеливания оптико-электронной аппаратуры космического аппарата дистанционного зондирования Земли // Информация и космос. 2009. № 1. С. 71-82.

8. Горелов Ю.Н., Горелова О.И., Данилов С.Б. Формирование оптимальных планов сканирования для космических аппаратов дистанционного зондирования Земли // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Т. 16. С. 310-312.

9. Галкина А.С., Мантуров А.И. Оценка возможности формирования программ управления угловым движением КА ДЗЗ для съёмки криволинейных маршрутов // Полет. 2010. № 8. С. 48-53.
10. Левский М.В. Об одном случае оптимального управления пространственной ориентацией космического аппарата // Известия РАН. Теория и системы управления. 2012. № 4. С. 115-130.
11. Мантуров А.И., Юрин В.Е., Пыринов Н.И., Горелов Ю.Н. Автономное формирование программ управления аппаратом зондирования для сложных видов съёмки // Материалы IV Всероссийской научно-технической конференции «Актуальные проблемы ракетно-космической техники» («IV Козловские чтения»). - Самара: РЦК «Прогресс», 2015, Т. 1. С. 409-417.
12. Соколов С.В. Интегрируемый случай Ковалевской в неевклидовом пространстве: разделение переменных // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=93532&eng=N>
13. Макаренкова Н.А. Управление кинетическим моментом солнечного паруса путём изменения отражательной способности его поверхности // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=90446>
14. Горбулин В.И., Каргу Д.Л., Поляков С.А., Радионов Н.В. Математическое моделирование планирования этапов генерирования и потребления электроэнергии бортовыми системами космических аппаратов: сценарный подход // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2019. № 668. С. 229-237.

15. Левский М.В. Синтез оптимального управления ориентацией космического аппарата с использованием комбинированного критерия качества // Известия РАН. Теория и системы управления. 2019. № 6. С. 139-162.
16. Сапунков Я.Г., Молоденков А.В. Аналитический алгоритм квазиоптимального по энергии и времени разворота космического аппарата при произвольных граничных условиях // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2021. Т. 21. № 2. С. 213-226. URL: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-213-226>
17. Петров Б.Н., Крутько П.Д., Попов Е.П. Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики // Доклады Академии наук СССР. 1979. Т. 247. № 5. С. 1078-1081.
18. Петров Б.Н., Крутько П.Д., Попов Е.П. Нелинейные алгоритмы управления вращательными движениями динамических объектов // Доклады Академии наук СССР. 1980. Т. 252. № 5. С. 1079-1081.
19. Крутько П.Д., Попов Е.П. Обратные задачи динамики управляемых систем и оптимальные процессы // Доклады Академии наук СССР. 1982. Т. 263. № 5. С. 1078-1082.
20. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики в теории управления. - М.: Машиностроение, 2004. - 576 с.
21. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. – СПб.: Лань, 2009. - 736 с.

22. Дронг В.И., Дубинин В.В., Ильин М.М. и др. Курс теоретической механики. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2017. - 580 с.
23. Маркеев А.П. Теоретическая механика. – М.: ЧеРо, 1999. - 572 с.
24. Власов С.А., Мамон П.А. Теория полета космических аппаратов. СПб: ВКА им. А.Ф. Можайского, 2007. - 435 с.
25. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. - М.: Высшая школа, 2009. Ч. 1. - 304 с.

## References

1. Popovkin V.A. *Trudy Voенно-kosmicheskoi akademii imeni A.F. Mozhaiskogo*, 2011, no. 632, pp. 110-115.
2. Popovkin V.A., Gorbulin V.I. *Trudy Voенно-kosmicheskoi akademii imeni A.F. Mozhaiskogo*, 2011, no. 632, pp. 100-103.
3. Balukhto A.N. i dr. *Iskusstvennyi intellekt v kosmicheskoi tekhnike. Sostoyanie. Perspektivy primeneniya: monografiya* (Artificial intelligence in space technology. State. Application prospects), Moscow, Radiotekhnika, 2021, 440 p.
4. Petrishchev V.F. *Optimal'noe skanirovanie kosmicheskim apparatom poverkhnosti zemli* (Optimal scanning of the earth's surface by a spacecraft), Samara, Izd-vo SGAU, 2007, 96 p.
5. Gorbulin V.I., Vlasov V.A., Panchenko V.V. *Informatsiya i kosmos*, 2008, no. 4, pp. 51-56.
6. Levskii M.V. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela*, 2009, no. 4, pp. 10-23.
7. Vlasov V.A., Gorbulin V.I., Zozulya L.P. *Informatsiya i kosmos*, 2009, no. 1, pp. 71-82.



8. Gorelov Yu.N., Gorelova O.I., Danilov S.B. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki*, 2009, vol. 16, pp. 310-312.
9. Galkina A.S., Manturov A.I. *Polet*, 2010, no. 8, pp. 48-53.
10. Levskii M.V. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2012, no. 4, pp. 115-130.
11. Manturov A.I., Yurin V.E., Pyrinov N.I., Gorelov Yu.N. *Materialy IV Vserossiiskoi nauchno-tekhnicheskoi konferentsii «Aktual'nye problemy raketno-kosmicheskoi tekhniki» («IV Kozlovskie chteniya»)*, Samara, RTsK «Progress», 2015, vol. 1, pp. 409-417.
12. Sokolov S.V. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93532&eng=N>
13. Makarenkova N.A. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90446>
14. Gorbulin V.I., Kargu D.L., Polyakov S.A., Radionov N.V. *Trudy VoЕННО-kosmicheskoi akademii imeni A.F. Mozhaiskogo*, 2019, no. 668, pp. 229-237.
15. Levskii M.V. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2019, no. 6, pp. 139-162.
16. Sapunkov Ya.G., Molodencov A.V. *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seriya. Seriya: Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2021, vol. 21, no. 2, pp. 213-226. URL: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2021-21-2-213-226>
17. Petrov B.N., Krut'ko P.D., Popov E.P. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1979, vol. 247, no. 5, pp. 1078-1081.
18. Petrov B.N., Krut'ko P.D., Popov E.P. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1980, vol. 252, no. 5, pp. 1079-1081.

19. Krut'ko P.D., Popov E. P. *Doklady Akademii nauk SSSR*, 1982, vol. 263, no. 5, pp. 1078-1082.
20. Krut'ko P.D. *Obratnye zadachi dinamiki v teorii upravleniya* (Inverse problems of dynamics in control theory), Moscow, Mashinostroenie, 2004, 576 p.
21. Butenin N.V., Lunts Ya.L., Merkin D.R. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki* (Theoretical Mechanics Course), Saint Petersburg, Lan', 2009, 736 p.
22. Drong V.I., Dubinin V.V., Il'in M.M. et al. *Kurs teoreticheskoi mekhaniki* (Theoretical Mechanics Course), Moscow, Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 2017, 580 p.
23. Markeev A.P. *Teoreticheskaya mekhanika* (Theoretical mechanics), Moscow, CheRo, 1999, 572 p.
24. Vlasov S.A., Mamon P.A. *Teoriya poleta kosmicheskikh apparatov* (Spacecraft flight theory), SPb: VKA im. A.F. Mozhajskogo, 2007, 435 p.
25. Danko P.E., Popov A.G., Kozhevnikova T.Ya., Danko S.P. *Vysshaya matematika v uprazhneniyakh i zadachakh* (Higher mathematics in exercises and problems), Moscow, Vysshaya shkola, 2009, vol. 1, 304 p.

Статья поступила в редакцию 26.11.2021; одобрена после рецензирования 01.12.2021; принята к публикации 21.12.2021

The article was submitted on 26.11.2021; approved after reviewing on 01.12.2021; accepted for publication on 21.12.2021.