

Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Московский авиационный институт  
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



**Красавин Егор Эдуардович**

**РАЗРАБОТКА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ  
ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ОБТЕКАНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ БОЛЬШОЙ  
КРИВИЗНЫ**

*Специальность: 1.1.9. – Механика жидкости, газа и плазмы*

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

**Научный руководитель**  
доктор физико-математических  
наук, старший научный сотрудник  
Никитченко Юрий Алексеевич

Москва – 2024

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	4
ГЛАВА 1 ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ НАВЬЕ-СТОКСА-ФУРЬЕ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ НЕРАВНОВЕСНОСТИ.....	15
1.1 Анализ моментных уравнений напряжений и теплового потока .....	16
1.2 Решение модельного кинетического уравнения.....	18
1.3 Численные тесты .....	21
1.4 Заключение к Главе 1 .....	26
ГЛАВА 2 СРАВНЕНИЕ МОДЕЛИ НАВЬЕ-СТОКСА.....	27
И ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ МОДЕЛИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ.....	27
2.1 Рассматриваемые модели течений .....	27
2.2 Математическая формулировка задачи .....	29
2.3 Метод численного решения .....	31
2.4 Результаты расчетов .....	38
2.5 Заключение к Главе 2 .....	44
ГЛАВА 3 МЕТОД РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ.....	46
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ НАВЬЕ-СТОКСА-ФУРЬЕ.....	46
3.1 Расчет обтекания тонкой пластины с граничными условиями скольжения пограничного слоя, включенными в разностную схему .....	46
3.1.1 Постановка задачи .....	47
3.1.2 Модель течения.....	47
3.1.3 Результаты расчетов традиционным методом.....	49
3.2 Методика расчета обтекания тонкой пластины с искусственной точкой торможения .....	56
3.2.1 Постановка задачи.....	58
3.2.2 Численная реализация .....	61
3.2.3 Результаты расчетов.....	71
3.3 Заключение к Главе 3 .....	79
ГЛАВА 4 ОЦЕНКА СТЕПЕНИ НЕРАВНОВЕСНОСТИ ГАЗА.....	81
В СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКАХ.....	81
4.1 Особенности течений, содержащих ударные волны.....	81
4.2 Определение степени неравновесности течения .....	82

4.3 Результаты расчетов .....	83
4.4 Заключение к Главе 4 .....	85
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	86
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ .....	87
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ .....	96

## ВВЕДЕНИЕ

### Актуальность темы

Разработка методов численного моделирования течений высокой степени динамической (поступательной) неравновесности представляет собой весьма актуальную задачу, недостаточно полно изученную как теоретически, так и экспериментально.

Одной из задач газовой динамики является расчет газодинамических параметров в окрестности поверхностей большой кривизны (острой кромки) на сверх- и гиперзвуковых режимах течения. Применимость моделей для решения задачи об обтекании высокоскоростным потоком газа острого клина схематично показана на Рисунке 1.

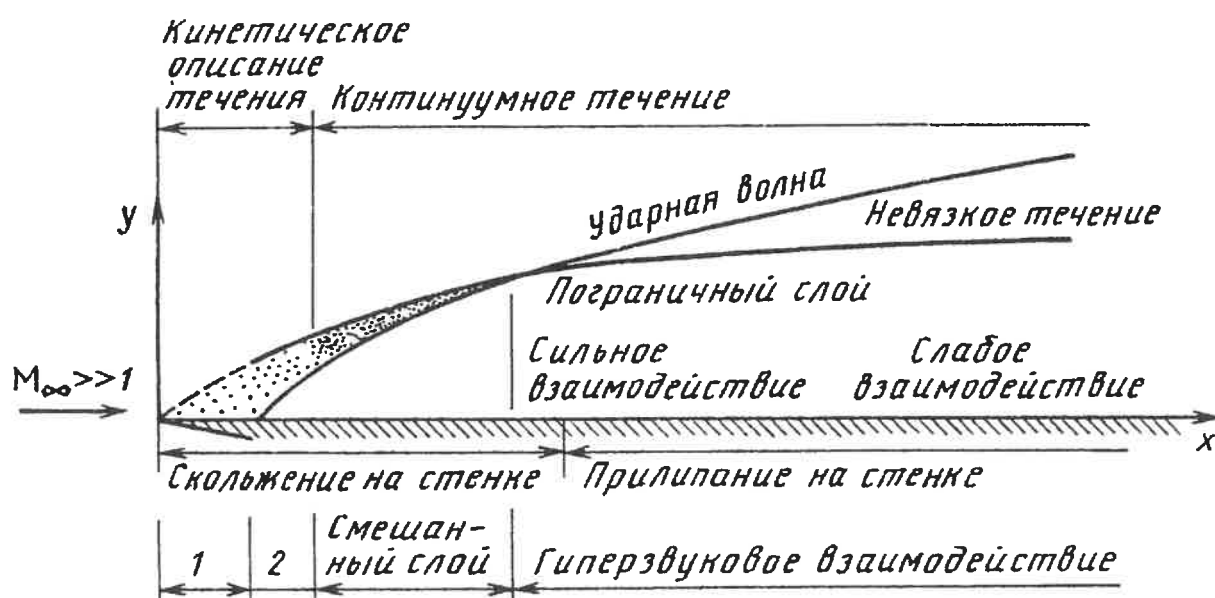


Рисунок 1 – Режимы течений при высокоскоростном обтекании острого клина гиперзвуковым потоком газа. 1 – обтекание, близкое к свободномолекулярному, 2 – переходной режим обтекания

В окрестности острой кромки формируется течение высокой степени неравновесности, которое является характерным при больших числах Маха и

Кнудсена. Особенностью острой кромки является появление сильно уплотненной области, в которой ударная волна максимально приближается к поверхности летательного аппарата и локализуется в окрестности носовой части. Возникновение ударной волны сопровождается значительным увеличением градиентов газодинамических параметров. Малые с точки зрения механики сплошной среды параметры, например, девиатор напряжений и тепловой поток, становятся соизмеримы с основными газодинамическими параметрами: давлением и полным потоком энергии.

### **Степень разработанности темы**

Модель сплошной среды начинает свою историю с уравнения Эйлера, начиная со второй половины 18 века. Область применения таких моделей существует только для малых чисел Кнудсена, что ограничивает их использование. В качестве элементарного объекта берется жидкая частица, после чего записываются законы сохранения массы, импульса и энергии, из которых получается модель Эйлера [1]. Модель Эйлера рассматривается только в невязкой среде. В случае, если производится расчет для вязкого газа, применяется модель Навье-Стокса-Фурье (НСФ). Модель НСФ является системой законов сохранения и замкнута феноменологическими законами Стокса (обобщенный закон Ньютона) и Фурье. С точки зрения молекулярно-кинетической теории газов (МКТ), модель НСФ представляет собой первое приближение системы моментных уравнений неполного второго порядка [2, 3]. Термин "первое приближение" означает, что в уравнениях неравновесных величин (неравновесных напряжений, тепловых потоков, разности поступательной и вращательной температур) учитываются члены только первого порядка малости (процедура Чепмена-Энскога). В некоторых случаях результат, который дает модель НСФ, лучше, чем результат, полученный с помощью уравнений высших приближений [4].

Основной особенностью моделей высших приближений является коротковолновая неустойчивость [5], что существенно усложняет использование этих моделей для практических приложений. Например, при решении

стационарных краевых задач методом установления не удалось справиться с проблемой неустойчивости для систем моментных уравнений третьего и более высокого порядков [6]. Однако при решении тестовых задач модели Барнетта и супер-Барнетта было показано, что модели высших приближений лучше согласуются с кинетическими решениями, чем модель НСФ [7]. Если рассчитывать высокоскоростное течение с помощью гидродинамических моделей, то решение получается отличным от эталонных данных [8, 9, 10, 11].

Во второй половине 20 века была представлена общая теория модели сплошной среды [12], которая редко используется в практическом приложении.

Одной из задач моделирования является проблема постановки граничных условий. При постановке граничных условий на твердой поверхности появляются различия в случае модели Эйлера и НСФ. Так, для модели Эйлера изначально заложено, что трение и тепловые потоки учитываться не будут [1, 13].

Постановка граничных условий на твердой поверхности для уравнений плотных газов (число Кнудсена  $Kn < 10^{-2}$ ), весьма актуальна в случае разреженных течений [14, 15]. При обтекании острых кромок, такие параметры потока как напряжение, давление, плотность, температура значительно возрастают. Если говорить про граничное условие прилипания, то характерное число Кнудсена принято считать равным  $Kn = 10^{-2}$ . В переходной области течений ( $Kn \sim 1$ ) традиционно используются граничные условия скольжения пограничного слоя [16], что не всегда приводит к физически адекватному решению. Стоит отметить, что у кинетических моделей проблема постановки граничных условий на твердой поверхности в значительной степени решена [17, 18, 19, 20].

В переходной области проявляются особенности неравновесных течений, например, распределение энергии между внутренними и поступательными степенями свободы молекулы. Использование модели НСФ приводит к существенным погрешностям. Известно, что модель Навье-Стокса-Фурье теоретически обоснована при числах Кнудсена, не превышающих  $10^{-2}$ . Для некоторых типов течений область может быть расширена до  $10^{-1}$ . Это показано в

работах по определению коэффициента трения в течении Куэтта [21], для коэффициента сопротивления пластины, поставленной поперек потока [22], и ряде других работ.

Фундамент для построения моделей неравновесных течений был заложен в [23, 24, 25, 26]. В отдельное направление можно выделить модели течения, основанные на системе моментных уравнений [27], которые, также как модели высших приближений, не нашли практического применения.

Во второй половине 20 века активно развивались модельные кинетические уравнения (МКУ), которые являются упрощенным вариантом кинетического уравнения Больцмана. В таких моделях за элементарный объем принимается группа молекул, объединенная определенным газодинамическим параметром. В первую очередь кинетические модели использовались для описания течений одноатомных газов [28, 29, 30, 31]. Для одноатомного газа широко применяется модель Бхатнагара-Гросса-Крука (БГК-модель) [32, 33], где число Прандтля равно единице.

В кинетических моделях предполагается, что для различного представления время свободного пробега молекулы определяется индивидуально для каждой модели [28]. Например, в S-модели Е.М.Шахова получилось корректное число Прандтля равное  $2/3$ , что лучшим образом сочетается с теоретическими и экспериментальными данными.

Более сложной с точки зрения вычислительных операций является эллипсоидальная модель (ES) [34], где число Прандтля определяется как  $\tau = \frac{\mu}{\rho r}$ .

В этой модели время релаксации напряжений больше, чем у тепловых потоков, что противоречит молекулярно-кинетической теории газа.

Если говорить про модели многоатомных газов, то они появились значительно позже одноатомных [35, 36, 37, 38, 39].

В отдельную группу можно определить методы прямого статистического моделирования (Direct simulation Monte-Carlo, DSMC) или методы Монте-Карло

[40]. Здесь в качестве элементарного объекта используется отдельная молекула. Расчет с использованием данных моделей осложнен повышенной трудоемкостью, которая напрямую связана с количеством вычислительных операций [41, 42]. В связи с этим приходится вводить определенные допущения, так как полное решение современной практической задачи невозможно даже на суперкомпьютере.

Кинетические модели в свою очередь описывают течение на молекулярном уровне, но имеют удвоенную размерность, что для практических задач сложно реализуемо. Применимость кинетических моделей в высоко неравновесной области также ограничена малым размером вычислительных сеток, определяемым длиной свободного пробега молекулы, что сопровождается значительным увеличением времени вычислительного процесса. Модели, основанные на МКТ, достаточно адекватно описывают течение газа в переходной и свободномолекулярной области. В гидродинамической области такие модели практически не реализуемы.

В работе [43] произведен расчет параметров газа у бесконечно тонкой пластины при числе Маха  $M=23$ . Важно отметить, что распределение параметров газа показано по всей длине пластины с учетом ее носовой части. С точки зрения анализа возмущенная область вблизи носика имеет порядок длины свободного пробега молекулы. При высоких числах Маха анализ носовой части сильно затруднен. Если рассмотреть решение при умеренных и больших числах  $M=2\dots 10$  [16], то можно отметить резкое возрастание параметров на носовой части летательного аппарата. Распределение перед носовой частью авторами не показано.

При наличии массообмена на поверхности плоской пластины в месте контакта пограничного слоя с невязкой областью течения [1] становится видно следующее. При гиперзвуковом обтекании форма ударной волны отличается от автомодельной. Полученная система справедлива для невязкой области течения. Если проанализировать граничные условия, связанные с массообменом на



поверхности, то будет получена зависимость для автомодельной скорости вдува газа в общем виде.

Обтекание пластины под нулевым углом атаки было рассмотрено авторами в работе [44]. В данной работе кинетическое уравнение решалось методом статистического моделирования Монте-Карло. Уравнения Навье-Стокса анализировались в полной форме. Было показано, что применение уравнений Навье-Стокса с использованием граничных условий на поверхности пластины оказывает сильное влияние на распределение газодинамических переменных. Также было выявлено, что при сопоставлении скорости и температуры на поверхности, наибольшее отличие имеет температура газа.

Некоторое уточнение решений уравнений Навье-Стокса-Фурье при малых числах  $Kn$  обеспечивает полная система уравнений Барнетта [5]. Если говорить о структуре сильной ударной волны, то применяя уравнения Барнетта, получаются наилучшие совпадения с кинетическими и экспериментальными данными.

На основе приведённого обзора можно сформулировать цель и основные задачи настоящей работы.

**Цель работы** – разработка метода численного решения задачи обтекания острой кромки на базе модели Навье-Стокса-Фурье.

#### **Основные задачи работы**

1. Определение особенностей модели Навье-Стокса-Фурье в области высоконераспределённых течений на примере задачи о профиле ударной волны.

2. Оценка области применимости (по числам Кнудсена) модели Навье-Стокса-Фурье к расчету обтекания поверхностей большой кривизны.

3. Разработка метода численной реализации модели Навье-Стокса-Фурье применительно к обтеканию острых кромок.

**Объект исследования** – течения высокой степени динамической неравновесности.

**Предмет исследования** – физико-математические модели неравновесных течений совершенных газов.

### **Научная новизна работы**

- Предложен метод описания течений высокой степени неравновесности вблизи острой кромки с использованием модели Навье-Стокса-Фурье;
- Установлено, что степень неравновесности газа в окрестности острой кромки примерно вдвое превышает степень неравновесности в плоской ударной волне при тех же числах Маха;
- Показано, что верхняя граница области применимости модели Навье-Стокса-Фурье для описания течения в окрестности поверхности большой кривизны целесообразно оценивать как  $Kn = 0,01$ . При  $Kn = 0,1$  могут возникать существенные погрешности.

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

- изучена область применимости и свойства модели Навье-Стокса-Фурье применительно к абсолютно острым кромкам;
- разработана физико-математическая модель обтекания острых кромок высокоскоростным потоком;
- получено численное решение задачи при обтекании газом поверхности большой кривизны для высокоскоростных течений;
- разработанная физико-математическая модель может использоваться при разработке вычислительных ядер CFD-пакетов, ориентированных на расчеты высокоскоростных течений.

### **Методология и методы исследования**

В работе применялся аналитический метод исследования. Для изучения свойств полученной физико-математической модели использовался метод численного эксперимента. Полученные результаты сравнивались с известными экспериментальными и расчетными данными.

### **Положения, выносимые на защиту:**

- Структурный анализ уравнений Навье-Стокса-Фурье для неравновесных течений;

- Диапазон применимости моделей первого приближения по числу  $K_n$  для описания обтекания поверхности большой кривизны.

- Метод расчета обтекания поверхности большой кривизны с использованием модели Навье-Стокса-Фурье.

**Достоверность результатов** исследования подтверждена сравнением полученных данных с результатами расчетных и экспериментальных работ других авторов.

#### **Апробация результатов**

Материалы работы доложены и обсуждены на международных и российских научных конференциях:

- XV Международная конференция по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2024). Доклад «Метод расчета обтекания абсолютно острой кромки с использованием модели Навье-Стокса-Фурье».

- Научный семинар С.М. Белоцерковского (15 февраля 2024 г.). Доклад «Вариант расчета обтекания тонкой пластины с использованием модели Навье-Стокса-Фурье».

- XXII международная конференция по вычислительной механике и современным прикладным программным системам. Доклад «Оценка применимости моделей первого приближения для описания обтекания поверхностей большой кривизны».

- Гагаринские чтения – 2021: XLVII Международная молодежная научная конференция Доклад «Анализ систем моментных уравнений различных порядков и уравнений Навье-Стокса-Фурье для течений высокой степени неравновесности»

- 19-я международная конференция «Авиация и космонавтика – 2020». Доклад «Структурный анализ систем моментных уравнений и уравнений Навье-Стокса-Фурье для неравновесных течений».

- Гагаринские чтения – 2020: XLVI Международная молодежная научная конференция Доклад «Структурный анализ моментных уравнений на примере задачи о профиле плоской ударной волны».

Зарегистрированы программные продукты:

- «Программа расчёта ударной волны с вычислением моментов высокого порядка с использованием модельного кинетического уравнения многоатомных газов», свидетельство о регистрации №2023683877.
- «Программа расчёта обтекания пластины со скругленным носиком под нулевым углом атаки с использованием модели Навье-Стокса-Фурье», свидетельство о регистрации №2023666661.
- «Программа расчёта обтекания пластины со скругленным носиком под нулевым углом атаки с использованием двухтемпературной модели», свидетельство о регистрации №2023666596.
- «Программа расчета обтекания тонкой пластины под нулевым углом атаки с искусственно внесенной точкой торможения», свидетельство о регистрации № 2024680226.

Тезисы докладов:

- Красавин Е.Э., Никитченко Ю.А., Буданова С.Ю. Структурный анализ систем моментных уравнений и уравнений Навье-Стокса-Фурье для неравновесных течений // 19-я Международная конференция «Авиация и космонавтика». - Тезисы. – Москва.–МАИ.–2020.– с. 469-470.
- Красавин Е.Э. Структурный анализ моментных уравнений на примере задачи о профиле плоской ударной волны. // XLVI Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения»: Сборник материалов конференции. –Москва. –МАИ.- 2020.– с. 881.
- Красавин Е.Э. Анализ систем моментных уравнений различных порядков и уравнений Навье-Стокса-Фурье для течений высокой степени неравновесности. // XLVII Международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения»: Сборник материалов конференции. – Москва. – 2021.– с. 11-12.
- Никитченко Ю.А., Красавин Е.Э. Оценка применимости моделей первого приближения для описания обтекания поверхностей большой кривизны. // Материалы XXIII Международной конференции по вычислительной механике и

современным прикладным программным системам (ВМСППС'2023)- Тезисы. – Алушта, Крым. – 2021. – с. 392-394.

- Никитченко Ю.А., Красавин Е.Э. Вариант расчета обтекания тонкой пластины с использованием модели Навье-Стокса-Фурье. // Материалы научного семинара С.М. Белоцерковского – Москва. –2024.

- Красавин Е.Э., Никитченко Ю.А. Метод расчета обтекания абсолютно острой кромки с использованием модели Навье-Стокса-Фурье. // Материалы XV Международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли (АММАГ'2024). – 2024. – с. 76-77.

### **Публикации**

Содержание диссертации изложено в пяти публикация, в том числе – четырех изданиях перечня ВАК по специальности и одной публикации статьи, проиндексированной в международной базе данных SCOPUS и Web of Science. В представленной библиографии содержатся ссылки на статьи [51, 59, 70, 80, 86].

### **Личный вклад автора**

В процессе научной деятельности соискателем лично получены результаты, которые изложены в диссертационной работе. Исследования включают математическую постановку проблемы, разработку физико-математических моделей, создание программ на языке Fortran, обработку и анализ результатов, которые выносятся на защиту. Автор лично подготовил публикации, отражающие содержание диссертации и выступал с докладами по выполненной работе.

### **Структура и объем работы**

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы, списка сокращений и условных обозначений. Общий объём составляет 100 страниц, включая 28 рисунков. Библиографический список содержит 86 наименований.

Представленная диссертационная работа является одним из результатов комплексной исследовательской работы в области неравновесной газовой динамики, проводимой на кафедре «Аэродинамика, динамика и управление

летательных аппаратов»» МАИ. Работа выполнена в рамках государственных заданий Минобрнауки России, темы FSFF-2020-0013 и FSFF-2023-0008.

## ГЛАВА 1 ОСОБЕННОСТИ ПРИМЕНЕНИЯ МОДЕЛИ НАВЬЕ-СТОКСА-ФУРЬЕ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ НЕРАВНОВЕСНОСТИ

Физико-математическая модель Навье-Стокса-Фурье (НСФ) может быть рассмотрена как строгое первое приближение системы моментных уравнений третьего порядка [1, 3]. Термин "первое приближение" подразумевает, что в уравнениях неравновесных величин (неравновесных напряжений, тепловых потоков, разности поступательной и вращательной температур) учитываются члены только первого порядка малости.

Хотя модель НСФ теоретически обоснована только при указанных выше условиях, она имеет "неожиданно широкую" область применения [45, 46]. В частности, ударные волны эта модель описывает лучше 13-моментной модели Грэда [46, 47]. В ряде случаев дает результаты не хуже моделей более высоких приближений [4].

Для модели НСФ сформулированы граничные условия на твердой поверхности, удовлетворительно зарекомендовавшие себя даже в области слабо разреженных течений [13, 26]. Приближенные аналитические зависимости для основных газодинамических величин, полученные из системы уравнений НСФ успешно используются для описания гиперзвуковых течений в разреженных средах [48, 49].

Основным недостатком модели НСФ является слишком приближенное описание вязких эффектов в сильно неравновесной области. При торможении гиперзвукового потока возмущенная область сильно сжата (вязкость модели недостаточна), при истечении струи в вакуум – расширена (вязкость избыточна).

В настоящем разделе анализируются моментные уравнения неравновесных напряжений и тепловых потоков на базе их сравнения с решениями модельного кинетического уравнения. Рассматриваются однокомпонентные и многоатомные газы. Число Прандтля принято  $Pr = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}$ .

### 1.1 Анализ моментных уравнений напряжений и теплового потока

Рассмотрим систему моментных уравнений 3-го порядка [1, 6] в незамкнутом виде [50, 51]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (1.1) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_{i\alpha}}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (1.2) \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} + (\gamma - 1) T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{c_v \rho} \frac{\partial q_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (1.3) \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial \theta}{\partial x_\alpha} + \frac{2}{3} T_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \frac{2}{3R} \phi_\alpha - \frac{1}{R_r} \omega_\alpha \right) = -\frac{\theta}{h\tau_p} \quad (1.4) \\ \frac{\partial}{\partial t} P_{ij}^m + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha P_{ij}^m) + P_{i\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} - \\ - \delta_{ij} \frac{2}{3} P_{\alpha\beta} \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + 2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( \phi_{ij\alpha} - \delta_{ij} \frac{1}{3} \phi_\alpha \right) = -\frac{P_{ij}^m}{\tau_p} \quad (1.5) \\ \frac{\partial \phi_{ijk}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \phi_{ijk}) + \phi_{ij\alpha} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + \phi_{ik\alpha} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + \phi_{jk\alpha} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + \\ + \frac{R}{2} \left( P_{i\alpha} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_\alpha} + P_{j\alpha} \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_\alpha} + P_{k\alpha} \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho m_{ijk\alpha}^{(4)}) = -\frac{2}{3} \frac{\phi_{ijk}}{\tau_p} \quad (1.6) \\ \frac{\partial \omega_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (u_\alpha \omega_i) + \omega_\alpha \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha} + R_r P_{i\alpha} \frac{\partial T_r}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\rho m_{ijk\alpha}^{r(4)}) = -\frac{\omega_i}{\tau_p} \quad (1.7) \end{array} \right.$$

В этих выражениях и ниже повторяющиеся греческие подстрочные индексы в одночленах подразумевают свертку тензора, т.е. суммирование от 1 до 3, например:

$$P_{\alpha\alpha} \equiv P_{11} + P_{22} + P_{33}.$$

Основные символы:

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера;

$\rho$ ,  $u_i$ ,  $T$  – плотность, скорость и термодинамическая температура газа;



$T_t, T_r, \theta = T_t - T_r$  – температуры поступательных и вращательных степеней свободы молекул и разность температур;

$P_{ij}, T_{ij} = P_{ij}/(\rho R)$  – полное и удельное напряжения;

$p^m = P_{\alpha\alpha}/3 = \rho R T_t, p = \rho R T$  – механическое и термодинамическое давления;

$p^m_{ij} = P_{ij} - \delta_{ij} p^m, p_{ij} = P_{ij} - \delta_{ij} p$  – механическое и термодинамическое неравновесные напряжения;

$\Phi_{ijk}, \Phi_i \equiv \Phi_{i\alpha\alpha}$  – момент 3-го порядка и вектор теплового потока, обусловленный переносом энергии поступательного движения молекул;

$\omega_i$  – вектор теплового потока, обусловленный переносом энергии вращения молекул;

$q_i = \Phi_i + \omega_i$  – полный тепловой поток;

$c_v, \gamma, R$  – изохорная теплоемкость, показатель адиабаты и удельная газовая постоянная;

$R_r = c_v - \frac{3}{2} R = \frac{5 - 3\gamma}{2(\gamma - 1)} R$  – теплоемкость внутренних степеней свободы

молекул;

$\tau_p$  – времена релаксации напряжений;

$h = Z \frac{(7 - 2s)(5 - 2s)}{30}$  – отношение времен поступательно-вращательной и

поступательно-поступательной релаксаций;

Здесь  $s$  – показатель степени температуры в аппроксимации коэффициента вязкости

$$\mu = \mu(T_t^s).$$

$m_{ijkl}^{(4)}, m_{ijkl}^{r(4)}$  – моменты 4-го порядка [47, 50].

Следуя работе [47], поясним соотношения температур и неравновесных напряжений. Энергия теплового движения молекул может быть разложена на поступательную и вращательную составляющие следующим образом:

$$c_v \rho T = \frac{3}{2} R \rho T_t + \left( c_v - \frac{3}{2} R \right) \rho T_r \quad (1.8)$$

$$T = \frac{3}{2} (\gamma - 1) T_t + \frac{5 - 3\gamma}{2} T_r \quad (1.9)$$

Связь поступательной и термодинамической температур выражается неравновесной величиной –  $\theta = T_t - T_r$ . С использованием этой величины поступательная и вращательная температуры могут быть представлены следующим образом:

$$T_t = T + \frac{5 - 3\gamma}{2} \theta \quad (1.10)$$

$$T_r = -\frac{3}{2} (\gamma - 1) \theta \quad (1.11)$$

Тензор напряжений может быть разложен на сферическую и девиаторную (неравновесную) части двумя способами:

$$P_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} p^m = p_{ij} + \delta_{ij} p \quad (1.12)$$

С учетом определений механического и термодинамического давлений из (10) и (12) следует связь между термодинамическим и механическим неравновесными напряжениями:

$$p_{ij} = p_{ij}^m + \delta_{ij} \frac{5 - 3\gamma}{2} \rho R \theta \quad (1.13)$$

Система уравнений НСФ содержит уравнения (1.1) ... (1.3). Моментные уравнения (1.4), (1.5) и (1.6), (1.7) заменяются законом трения Стокса и законом Фурье соответственно.

## 1.2 Решение модельного кинетического уравнения

Метод численного решения является аналогичным [39]. В нем рассматривается четырехдиагональная матрица вместо разностей по потоку. Анализируется течение газа вдоль декартовой координатной оси ОХ.

Рассматривается модельное кинетическое уравнение многоатомных газов:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_\alpha \frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{f^+ - f}{\tau} \quad (1.14)$$

где  $\xi_i$  – молекулярная скорость, измеренная в лабораторной системе координат;  $\tau$  – среднее время свободного пробега молекулы.

Рассматривается кинетическое уравнение, составленное относительно функции распределения в расширенном фазовом пространстве  $f = (t, x, y, z, \xi_x, \xi_y, \xi_z, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  – энергия вращения молекул.

В работе [52] рассматривается алгоритм сокращения размерности по пространству вращательных скоростей с помощью формального интегрирования (1.14) по энергиям вращения молекул, после чего кинетическое уравнение релаксационного типа имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| + \xi_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left| \frac{f_t}{f_r} \right| = \frac{1}{\tau} \left| \frac{f_t^+ - f_t}{f_r^+ - f_r} \right|$$

где

$$f_t = \int f d\varepsilon,$$

$$f_r = \int \varepsilon f d\varepsilon,$$

$$f_t^+ = f_M^+ \left( 1 + \frac{1}{p^+ RT_t^+} \left( \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_p} \right) p_{\alpha\beta} c_\alpha c_\beta + \left( 1 - \frac{2}{3} \frac{\tau}{\tau_p} \right) \varphi_\alpha \left( \frac{c^2}{5RT_t^+} - 1 \right) c_\alpha \right) \right) \quad (1.15)$$

$$f_r^+ = kT_r^+ \left( \eta f_t^+ + f_M^+ \left( 1 - \frac{\tau}{\tau_p} \right) \frac{\omega_\alpha c_\alpha}{\rho RT_t^+ RT_r^+} \right) \quad (1.16)$$

$$f_M^+ = \frac{n}{(2\pi RT_t^+)^{3/2}} \exp \left( -\frac{c^2}{2RT_t^+} \right). \quad (1.17)$$

Зависимости (1.15)-(1.17) взяты из работы [49].

Расчетная область разбивается на верхнюю и нижнюю границу по потоку, где задаются точные значения функций  $f_t$  и  $f_r$ . На границах устанавливаются

условия невозмущенного потока и условия Ренкина-Гюгонио. Как в геометрической  $\Delta x$ , так и в скоростной  $\Delta \xi_x$  сетке шаг берется постоянный.

Решается дифференциально-интегральное уравнение, которое необходимо рассчитать в двух направлениях молекулярной скорости. Сначала выполняется проход при  $\xi_x > 0$ , затем в обратную сторону  $\xi_x < 0$ . Конечно-разностная аппроксимация выполнялась в  $i$ -ом узле геометрического и  $j$ -ом узле скоростного пространства:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{i,j} \cong \frac{1}{6\Delta x} (F_{i-2,j} - 6F_{i-1,j} + 3F_{i,j} + 2F_{i+1,j}), \xi_x > 0 \quad (1.18)$$

В случае обратного прохода:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{i,j} \cong \frac{1}{6\Delta x} (2F_{i-1,j} + 3F_{i,j} - 6F_{i+1,j} + F_{i+2,j}), \xi_x < 0 \quad (1.19)$$

где  $F_{i,j}$  – искомая функция.

Такая конечно-разностная схема с четырехдиагональной матрицей имеет преимущество по сравнению с традиционной противопоточной схемой. Если рассматривать предпоследнюю точку в области нижней по потоку, то при первом проходе (1.18) по противопоточной схеме для правой полусферы функция распределения получается отличной от условий Ренкина-Гюгонио, накапливая вычислительную погрешность. Данная точка является расчетной, а значения на границах строго определены, так как решается первая краевая задача.

При решении по схеме с центральными разностями трехдиагональная матрица строится по-другому. Если решение осуществляется с постоянным шагом, то на главной диагонали появится нулевое значение при вычислении первой производной и матрица коэффициентов окажется плохо обусловленной. Стоит отметить, что кинетические уравнения не имеют вторых производных.

Локальная производная:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial t} \right|_i \cong \frac{F_i - F_i^{n-1}}{\Delta t},$$

здесь  $F_i^{n-1}$  – значение искомой функции на предыдущем шаге по времени  $\Delta t$ .

Конечно-разностный шаблон кинетического уравнения:

$$K_\xi F_{i-2} - 6K_\xi F_{i-1} + 6(1 + 0.5K_\xi + K_\tau)F_i + 2K_\xi F_{i+1} = 6(F_i^{n-1} + K_\tau F_i^+), \xi_x > 0 \quad (1.20)$$

$$2K_\xi F_{i-1} + 6(1 + 0.5K_\xi + K_\tau)F_i - 6K_\xi F_{i+1} + K_\xi F_{i+2} = 6(F_i^{n-1} + K_\tau F_i^+), \xi_x < 0 \quad (1.21)$$

Параметры  $K_\xi = |\xi_x| \Delta t / \Delta x$  и  $K_\tau = \Delta t / \tau$  имеют смысл сеточных чисел Куранта и Кнудсена соответственно. По критерию Куранта анализируются параметры устойчивости схемы. В условно устойчивых схемах его принимают меньше единицы. Стоит отметить, что в (1.20) и (1.21) вязкие члены преобладают над конвективными. То есть распространение малых колебаний происходит интенсивно, в тоже время движение осуществляется несущественное. Из-за этого на главной диагонали получаются адекватные по размеру коэффициенты, что приводит к абсолютно устойчивому решению. Соблюдая все правила для получения хорошо обусловленной матрицы, рационально использовать численный метод прогонки.

### 1.3 Численные тесты

С целью сокращения выкладок и без ущерба для существа вопроса, рассмотрим одномерное стационарное течение вдоль декартовой оси  $OX$ . По аналогии с [47] запишем уравнение термодинамических неравновесных напряжений. Используя (1.13), почленно сложим (1.4) и (1.5). Перепишем полученное уравнение относительно напряжения, стоящего в релаксационном члене. Для  $p_{xx}$ , наибольшего из неравновесных напряжений в случае торможения потока, получим:

$$p_{xx} = -\tau_p \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \left( p_{xx}^m + \frac{5-3\gamma}{2} h \rho R \theta \right) \right) + \left( \frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h \right) p_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\varphi_{xxx} - \left( \frac{2}{3} - \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \varphi_x - (\gamma-1) h \omega_x \right) \right) \quad (1.22)$$

В ряде работ, например [1, 4, 26, 29], показано, что в близких к равновесию условиях время релаксации  $\tau_p$  связано с коэффициентом вязкости  $\mu$  следующим образом:

$$\tau_p = \mu/p \quad (1.23)$$

Рассмотрим вклад каждого из слагаемых правой части (1.22):

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \left( p_{xx}^m + \frac{5-3\gamma}{2} h \rho R \theta \right) \right) \quad (1.24)$$

$$-\left( \frac{4}{3} + \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \mu \frac{P_{xx}}{p} \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1.25)$$

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\phi_{xxx} - \left( \frac{2}{3} - \frac{5-3\gamma}{3} h \right) \phi_x - (\gamma-1) h \omega_x \right) \quad (1.26)$$

Вычислить напряжение непосредственно по (1.22) возможность не представляется. Воспользуемся решением МКУ работы [39], полученного для течения в плоской ударной волне азота при числе Маха  $M_\infty = 5$ . Свободные параметры МКУ подбирались по экспериментальным данным [52, 53, 54] и соответствовали [39].

Значения слагаемых (1.22) взяты из кинетического решения и представлены на Рисунке 2. Координатная ось  $0X$  проградуирована в длинах свободного пробега молекул в невозмущенном потоке. Значение  $x=0$  соответствует локальному числу Маха  $M=1$ . На этом же Рисунке (кривая 4) показан профиль  $p_{xx}$ , полученный из решения модели НСФ с объемной вязкостью. Этот вариант модели будет описан ниже. Все данные, представленные на Рисунке 2, отнесены к локальному термодинамическому давлению.

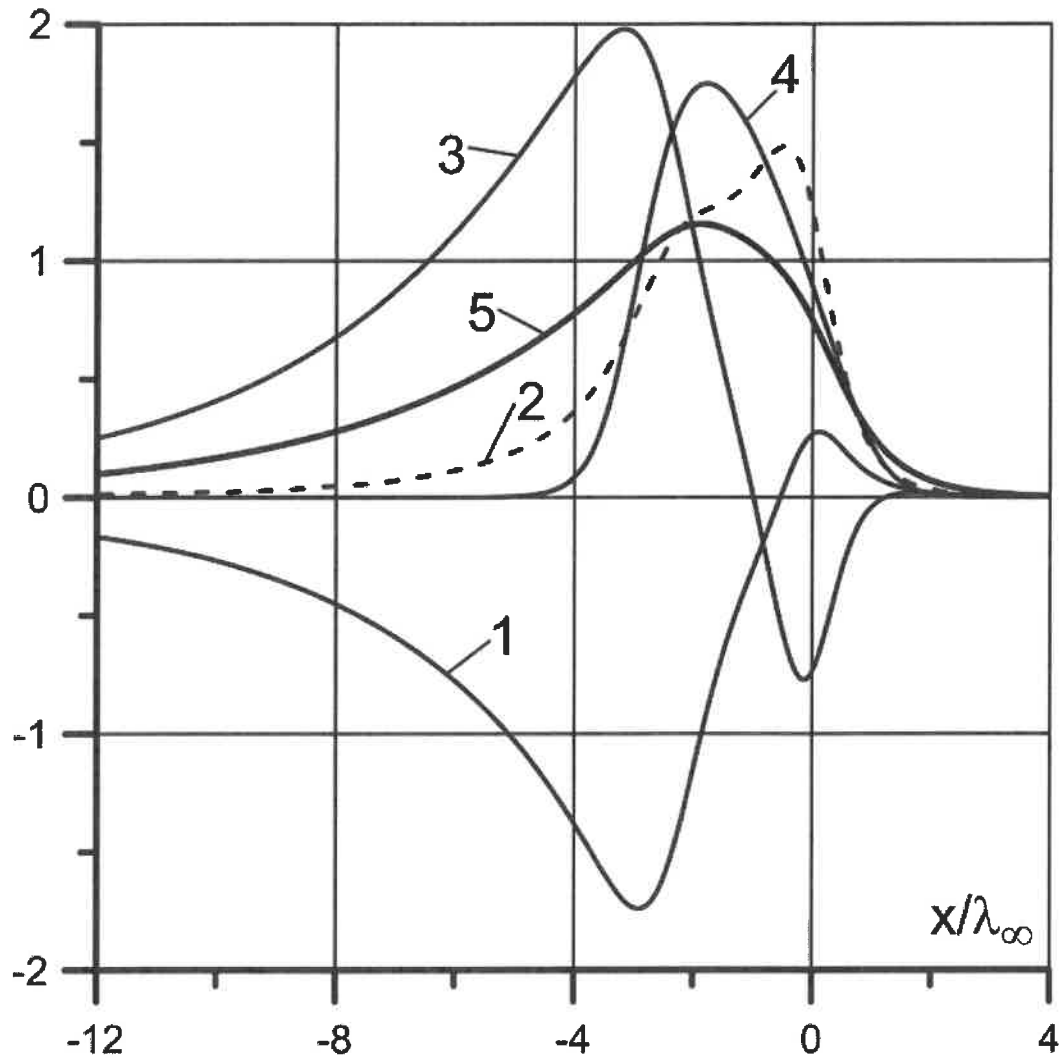


Рисунок 2 – Профили неравновесного напряжения и его составляющих в плоской ударной волне двухатомного газа.  $M_\infty = 5$ . 1 – (1.24), 2 – (1.25), 3 – (1.26), 4 –  $p_{xx}$  модели НСФ, 5 –  $p_{xx}$  решение МКУ

Профиль неравновесного напряжения МКУ, близкий к реальному, существенно шире профиля НСФ. Возмущения в потоке газа начинают формироваться значительно раньше, чем это предписывает модель НСФ.

За наработку напряжения в (1.22) отвечают члены (1.25) и (1.26). Член (1.24) только "констатирует" изменение потока напряжения. Большой вклад в наработку напряжения создает градиент тепловых потоков (1.26). Градиент скорости (1.25) влияет меньше и позже. Используемый в модели НСФ закон трения Стокса,

представляет собой первое приближение (1.25). Градиент тепловых потоков (1.26) в этой модели не используется.

Специально отметим, что преобладание градиента тепловых потоков имеет место только в сильно неравновесных течениях, в которых неравновесные величины становятся соизмеримы по порядку величины с основными газодинамическими переменными.

На Рисунке 2 неравновесное напряжение превышает давление: по МКУ – примерно в 1.2 раза, по НСФ – примерно в 1.7 раза. По мере уменьшения неравновесности течения тепловые потоки стремятся к нулю, а вместе с ними и их градиент (1.26). В отличие от (1.26), член (1.25) содержит нормальное напряжение  $P_{xx}$ , которое в условиях равновесия сравнивается с давлением. Порядок малости (1.26) определяется коэффициентом вязкости (временем релаксации  $\tau_p$ ).

Аналогично выражению (1.22) может быть записано выражение для теплового потока. Используя соотношение  $q_i = \varphi_i + \omega_i$ , почленно сложим свертку уравнения (1.6), домноженного на 3/2, и уравнения (1.7). Перепишем полученное уравнение относительно теплового потока, стоящего в релаксационном члене. Для рассматриваемого одномерного течения:

$$q_x = -\tau_p \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \left( q_x + \frac{1}{2} \varphi_x \right) \right) + \left( q_x + \frac{1}{2} \varphi_x + 3\varphi_{xxx} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} + \\ & + RP_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\gamma-1} T + \frac{3}{4} T_t + \frac{3}{2} T_{xx} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \left( \frac{3}{4} m_{xxxx}^{(4)} + m_{xx}^{r(4)} \right) \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Как и в предыдущем случае рассмотрим вклад каждого из слагаемых правой части (1.27):

$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x \left( q_x + \frac{1}{2} \varphi_x \right) \right) \quad (1.28)$$

$$-\frac{\mu}{p} \left( q_x + \frac{1}{2} \varphi_x + 3\varphi_{xxx} \right) \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1.29)$$

$$-\frac{\mu}{p} RP_{xx} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\gamma-1} T + \frac{3}{4} T_t + \frac{3}{2} T_{xx} \right) \quad (1.30)$$



$$-\frac{\mu}{p} \frac{\partial}{\partial x} \left( \rho \left( \frac{3}{4} m_{xx\alpha\alpha}^{(4)} + m_{xx}^{r(4)} \right) \right) \quad (1.31)$$

Значения слагаемых (1.27) взяты из кинетического решения и представлены на Рисунке 3.

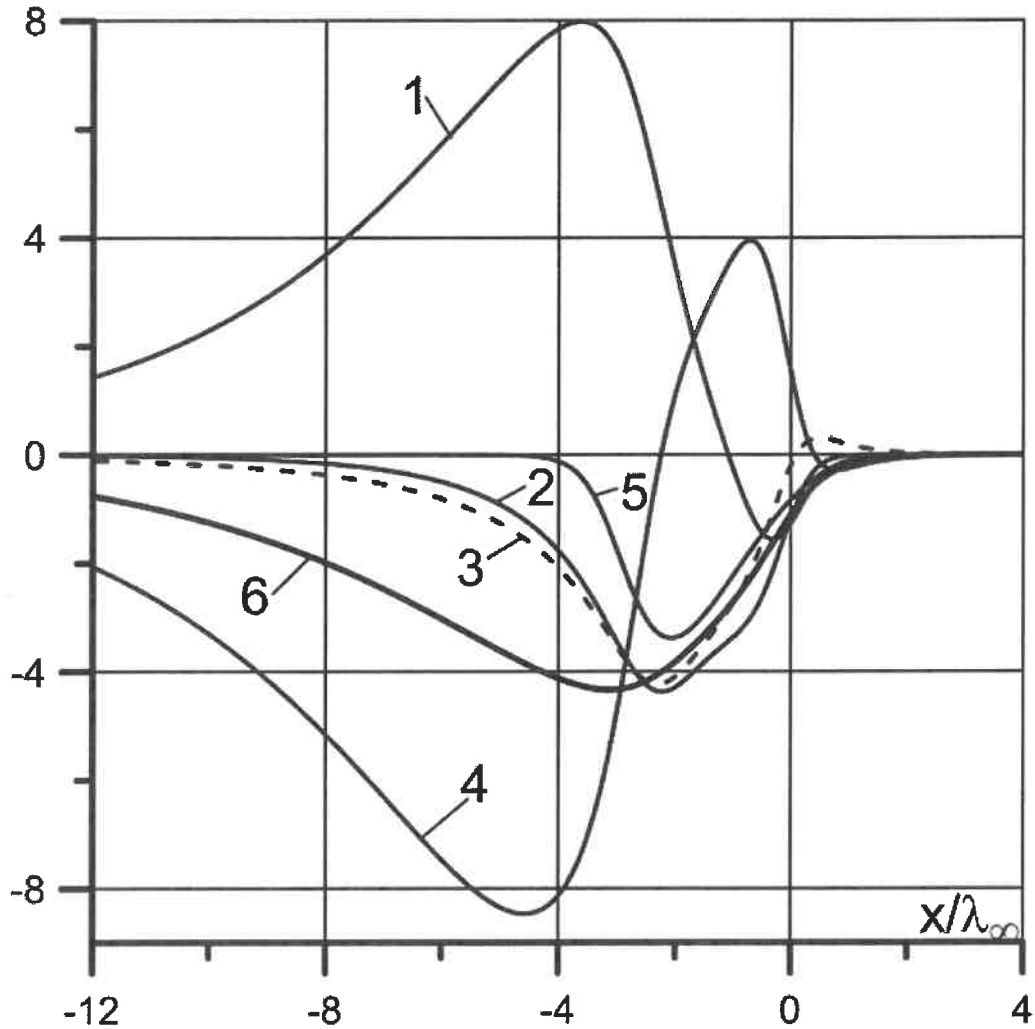


Рисунок 3 – Профили теплового потока и его составляющих в плоской ударной волне двухатомного газа.  $M_\infty = 5$ . 1 – (1.28), 2 – (1.29), 3 – (1.30), 4 – (1.31), 5 –  $q_x$  модели НСФ, 6 –  $q_x$  решение МКУ

В решении МКУ (кривая 6) тепловой поток формируется в более широкой области, чем в решении НСФ (кривая 5). Основной вклад в тепловой поток вносит градиент моментов четвертого порядка, определение которых возможно только в

системе моментных уравнений 4-го порядка [50]. Напомним, что система НСФ – система неполного второго порядка, и в ней используется только член (1.30) (кривая 3) в первом приближении, т.е. закон Фурье.

В слабо неравновесных течениях этот член является определяющим, при этом  $P_{xx}$  вырождается в давление  $p$ , а  $T_{xx}$  – в температуру  $T$ , что и соответствует закону Фурье. Порядок малости теплового потока, также, как и неравновесного напряжения, определяется коэффициентом вязкости. Остальные члены (1.27), включая (1.31), при переходе газа в равновесное состояние стремятся к нулю.

Проведенный анализ в основном объясняет существенные погрешности расчетов сильно неравновесных течений, возникающие при использовании модели НСФ в ее классическом виде.

#### 1.4 Заключение к Главе 1

В отношении распределения параметров, выразившегося в данной работе в виде профилей ударной волны, отметим следующее. В сильно неравновесных течениях неравновесные напряжения и тепловые потоки в значительной степени определяются процессами, не учитываемыми моделью первого приближения – моделью НСФ. По этой причине, используя модель НСФ, нельзя получить корректное описание распределений газодинамических параметров в сильно возмущенной области.

Геометрические размеры сильно неравновесных областей, как правило, невелики. В той связи представляют как теоретический, так и практический интерес комбинированные и гибридные модели, использующие кинетические уравнения в сильно неравновесной области и модель НСФ в остальной области течения [55, 56]. Модели этого типа позволяют весьма корректно описывать все поле течения. К их недостаткам следует отнести высокую вычислительную трудоемкость и, следовательно, повышенные требования к вычислительным средствам.

## ГЛАВА 2 СРАВНЕНИЕ МОДЕЛИ НАВЬЕ-СТОКСА И ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ МОДЕЛИ НА ПРИМЕРЕ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ ПОВЕРХНОСТИ БОЛЬШОЙ КРИВИЗНЫ

В работе [1] на примере расчета профиля ударной волны было показано, что двухтемпературная модель течения (М2Т) [14] дает лучшие результаты при расчете профиля ударной волны по сравнению с моделью Навье-Стокса-Фурье (НСФ). Это связано с тем, что модель М2Т в уравнениях энергии явно содержит члены, отвечающие за выполнение второго закона термодинамики.

Для описания течений в этой области традиционно используются методы молекулярно-кинетической теории газов [26], теории сплошной среды [57] и моментные методы [23]. Для отдельного типа течений используются аналитические методы [44, 58].

В настоящей работе рассматривается сверхзвуковое обтекание двухатомным газом пластины бесконечного размаха, установленной параллельно набегающему потоку. Носик пластины скруглен. Радиус скругления характеризует число Кнудсена  $Kn$  решаемой задачи. Целью работы является оценка максимального значения  $Kn$ , при котором решения модели НСФ и М2Т практически совпадают.

### 2.1 Рассматриваемые модели течений

Модель НСФ представляет собой систему моментных уравнений неполного второго порядка [1, 23]. В случае плоского двумерного течения ( $OXY$ ) эта система уравнений может быть представлена в следующем виде [59]:

$$\begin{cases}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} = 0 \\
\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) = 0 \\
\frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} \right) = 0 \\
\frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{c_v \rho} \left( P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + P_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + P_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} \right) = 0
\end{cases} \quad (2.1)$$

где:  $R$  – удельная газовая постоянная,  $c_v$  – изохорная теплоемкость,  $\gamma$  – показатель адиабаты,  $\mu$  – коэффициент вязкости.

$$P_{ij} = \delta_{ij} R \rho T - \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \frac{2}{3} \left( 1 - \frac{5-3\gamma}{2} Z \right) \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right),$$

$$q_i = - \frac{9\gamma - 5}{4\gamma(\gamma - 1)} R \mu \frac{\partial T}{\partial x_i},$$

В настоящей работе для коэффициента вязкости используется аппроксимация  $\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^S$ . Принято следующее значение параметра  $Z$ :  $Z = 2.5$ .

В двухтемпературной модели энергии теплового движения молекул рассматриваются отдельно. Система уравнений этой модели, в отличие от (2.1), содержит два уравнения энергии с релаксационными членами, отвечающими за выполнение второго закона термодинамики [1]:

$$\frac{\partial T_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial T_t}{\partial x} + u_y \frac{\partial T_t}{\partial y} + \frac{2}{3\rho R} \left( P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + P_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + P_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \right) = - \frac{5-3\gamma}{2Z} \frac{T_t - T_r}{\tau_p} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial T_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial T_r}{\partial x} + u_y \frac{\partial T_r}{\partial y} + \frac{2(\gamma-1)}{(5-3\gamma)\rho R} \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) = \frac{3(\gamma-1)}{2Z} \frac{T_t - T_r}{\tau_p} \quad (2.3)$$

Здесь  $T_t$  и  $T_r$  – температуры поступательных и вращательных степеней свободы молекул,  $\varphi_i$  и  $\omega_i$  – тепловые потоки поступательных и вращательных степеней свободы,  $\tau_p = \mu / (\rho R T_t)$  – время релаксации напряжений,

$$P_{ij} = \delta_{ij} R \rho T_t - \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \frac{2}{3} \mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right), \varphi_i = -\frac{15}{4} R \mu \frac{\partial T_t}{\partial x_i};$$

$$\omega_i = -\frac{5-3\gamma}{2} \mu \frac{\partial T_r}{\partial x_i}.$$

В этой модели коэффициент вязкости определяется поступательной температурой:  $\mu/\mu_\infty = (T_t/T_\infty)^S$ .

## 2.2 Математическая формулировка задачи

Схема рассматриваемого течения представлена на Рисунке 4. Использована вычислительная сетка с переменным шагом. Верхняя половина пластины изображена толстой линией. Для большей наглядности расчетная сетка нанесена на все поле схемы, но узлы сетки, находящиеся внутри тела пластины, очевидно, не используются.

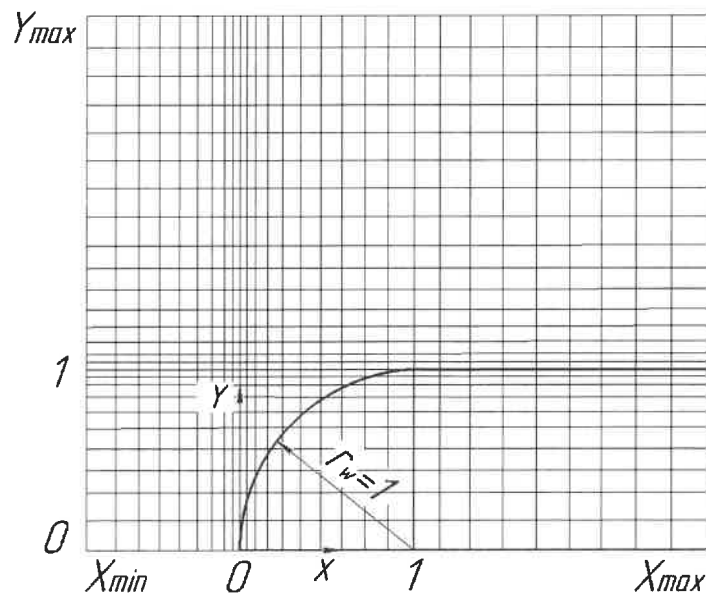


Рисунок 4 – Схема расчетной области,  $r_w$  – радиус скругления носика

Шаг сетки в области скругления носика пластины выбирался таким образом, чтобы узлы сетки располагались на поверхности пластины.

Размер вычислительной области определялся из условия расположения периферийной части фронта ударной волны на нижней по потоку границе вычислительной области.

В качестве единицы измерения длины принят радиус скругления носика пластины  $r_w$ . Число Кнудсена определено как  $Kn = \lambda_\infty / r_w$ , где  $\lambda_\infty = \frac{\mu_\infty}{p_\infty} \sqrt{RT_\infty}$  – средняя длина пробега молекулы. Размер вычислительной области выбирался в зависимости от  $Kn$ , и составлял:  $x_{min} = -20 \dots -5$ ,  $x_{max} = 100$ ,  $y_{max} = 120 \dots 150$ .

Граничные условия выставлялись следующим образом:

- на левой и верхней границах вычислительной области принимались параметры невозмущенного потока  $\rho_\infty$ ,  $T_\infty$ ,  $U_\infty$ ;

- на правой границе  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho, u_x, T) = 0$ ;

- на оси симметрии ( $x_{min} < x < 0, y = 0$ )  $\frac{\partial}{\partial y}(\rho, u_x, T) = 0, u_y = 0$ ;

- на твердой поверхности условия скольжения пограничного слоя.

Решение системы дифференциальных уравнений формулировалось в виде краевой задачи на трехдиагональных матрицах с нестационарным членом, развернутых по оси  $X$ . Перед носиком пластины ( $y < 1$ ) значение искомой функции в правой граничной точке определялось условиями скольжения пограничного слоя (третья краевая задача), в остальной вычислительной области условием  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\rho, u_x, T) = 0$  (вторая краевая задача). Производные аппроксимировались центральными разностями на трех точках.

При проведении расчетов по двум моделям использовались идентичные расчетные сетки и алгоритмы.

### 2.3 Метод численного решения

Рассмотрим схему расчетной области для пластины со скругленным носиком на Рисунке 5:

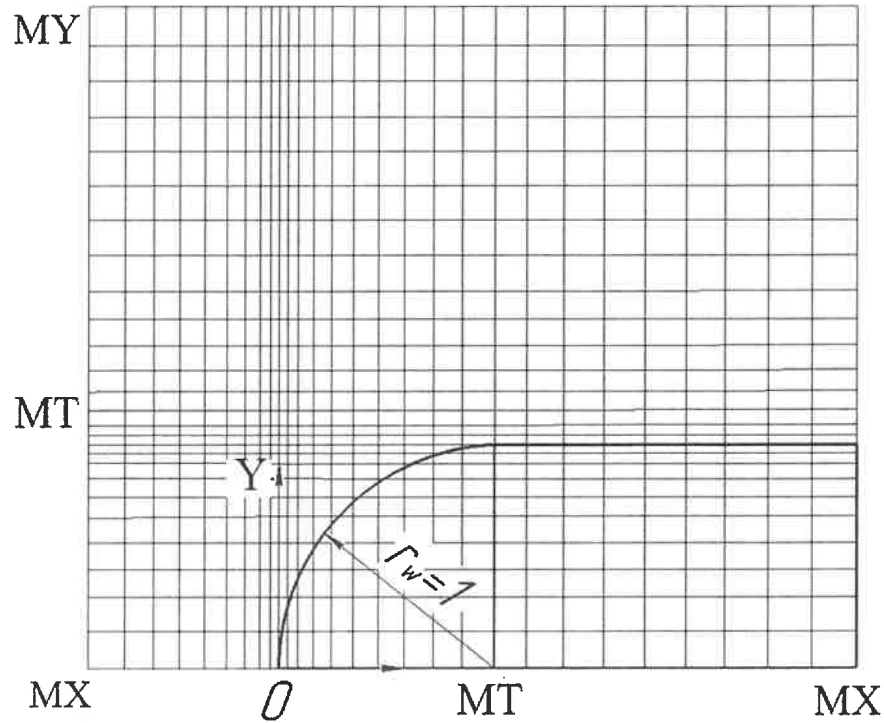


Рисунок 5 – Схема расчетной области для численного решения

$$\theta_k = \frac{k \pi}{MT \cdot 2}$$

$$X(0:MT) = 1 - \cos(\theta(0:MT))$$

$$Y(0:MT) = \sin(\theta(0:MT))$$

Номер последнего узла по оси  $x$   $I_{\max}(\dot{J}) = \dot{J}$  на интервале  $0 \leq x \leq 1$ ,  $i(0:MT)$ .

Коэффициент прогрессии сетки на интервалах  $(MX:0)$  и  $(MT:MY)$  единый для обоих направлений:  $QdXY$ . Этот коэффициент больше, чем коэффициент прогрессии сетки  $QdX$  на интервале  $(MT:MX)$ .

$$\text{Температура торможения: } T_0 = T_\infty \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2\right).$$

Представлена система уравнений в безразмерной форме. Приняты следующие единицы измерения:

$$x, y \rightarrow r_w \quad u_x, u_y \rightarrow \sqrt{RT_\infty} \quad t \rightarrow \frac{r_w}{\sqrt{RT_\infty}}$$

В качестве единиц измерения газодинамических параметров приняты параметры газовой среды в невозмущенном потоке:

$$\rho \rightarrow \rho_\infty \quad T_t, T_r \rightarrow T_\infty \quad p, P_{i,j} \rightarrow \rho_\infty RT_\infty \quad \varphi_x, \varphi_y \rightarrow p_\infty \sqrt{RT_\infty}$$

$$u_{\infty \text{б.п.}} = \sqrt{\gamma} M_\infty \quad \mu_{\text{б.п.}} = \left( \frac{T_t}{T_\infty} \right)^3 = \frac{\mu}{\mu_\infty} \quad \mu' = \mu_{\text{б.п.}} Kn_\infty$$

$$M_\infty = \frac{u_\infty}{\sqrt{\gamma RT_\infty}} \quad Kn_\infty = \frac{\lambda_\infty}{r_w} = \frac{\mu_\infty}{p_\infty r_w} \sqrt{RT_\infty} \quad \lambda = \frac{\mu_{\text{б.п.}}}{\rho \sqrt{T_t}} = \frac{1}{\rho} (T_t)^{3-\frac{1}{2}}$$

Двухтемпературная модель:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \rho = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial T_t}{\partial t} + u_x \frac{\partial T_t}{\partial x} + u_y \frac{\partial T_t}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{1}{\rho} \left( \begin{array}{l} P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + P_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \\ P_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \end{array} \right) = -\frac{5-3\gamma}{2z} \frac{p}{\mu'} (T_t - T_r) \\ \frac{\partial T_r}{\partial t} + u_x \frac{\partial T_r}{\partial x} + u_y \frac{\partial T_r}{\partial y} + \frac{2(\gamma-1)}{(5-3\gamma)\rho} \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} \right) = -\frac{3(\gamma-1)}{2z} \frac{p}{\mu'} (T_t - T_r) \end{array} \right.$$



$$p = \rho T_i \quad P_{xx} = p + p_{xx} \quad P_{yy} = p + p_{yy} \quad P_{zz} = p - (p_{xx} + p_{yy})$$

$$p_{xx} = -\frac{2}{3} \mu' \left( 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \quad p_{yy} = -\frac{2}{3} \mu' \left( 2 \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \quad p_{zz} = -(p_{xx} + p_{yy})$$

$$P_{xy} = -\mu' \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad \varphi_x = -\frac{15}{4} \mu' \frac{\partial T_t}{\partial x} \quad \varphi_y = -\frac{15}{4} \mu' \frac{\partial T_t}{\partial y} \quad \mu' = \mu K n_\infty$$

$$\omega_x = -\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} \mu' \frac{\partial T_r}{\partial x} \quad \omega_y = -\frac{5-3\gamma}{2(\gamma-1)} \mu' \frac{\partial T_r}{\partial y}$$

Приведенная форма:

Таблица 1 – Коэффициенты дифференциального уравнения

$F$	$S_{2x}$	$S_{2y}$	$S_{1x}$	$S_{1y}$	$S_0$
$\rho$	0	0	$u_x$	$u_y$	$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$
$u_x$	$-\frac{4 \mu'}{3 \rho}$	$-\frac{\mu'}{\rho}$	$u_x - \frac{5}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu'}{\partial x}$	$u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu'}{\partial y}$	0
$u_y$	$-\frac{\mu'}{\rho}$	$-\frac{4 \mu'}{3 \rho}$	$u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu'}{\partial x}$	$u_y - \frac{5}{3} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu'}{\partial y}$	0
$T_i$	$-\frac{5 \mu'}{2 \rho}$	$-\frac{5 \mu'}{2 \rho}$	$u_x - \frac{5}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu'}{\partial x}$	$u_y - \frac{5}{2} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu'}{\partial y}$	$\frac{5-3\gamma}{2z} \frac{p}{\mu'} + \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)$
$T_r$	$-\frac{\mu'}{\rho}$	$-\frac{\mu'}{\rho}$	$u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu'}{\partial x}$	$u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu'}{\partial y}$	$\frac{3\gamma-1}{2} \frac{p}{z \mu'}$

Таблица 2 – Коэффициенты дифференциального уравнения

$F$	$S_r$
$\rho$	0
$u_x$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\mu'}{\rho} \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \mu'}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu'}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)$
$u_y$	$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3} \frac{\mu'}{\rho} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \mu'}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{2}{3} \frac{\partial \mu'}{\partial y} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)$
$T_i$	$\frac{5-3\gamma}{2z} \frac{p}{\mu'} T_r + \frac{8}{9} \frac{\mu'}{\rho} \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \frac{3}{4} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right]$
$T_r$	$\frac{3}{2} \frac{\gamma-1}{z} \frac{p}{\mu'} T_i$

Аппроксимация первой и второй производной проводится на трех узлах. Функция аппроксимируется в виде полинома второй степени и имеет второй порядок точности.

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_{i,j} = W1X_i * F_{i-1,j} + WX_i * F_{i,j} + WX1_i * F_{i+1,j}$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right|_{i,j} = W1Y_j * F_{i,j-1} + WY_j * F_{i,j} + WY1_j * F_{i,j+1}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{i,j} = V1X_i * F_{i-1,j} + VX_i * F_{i,j} + V1X_i * F_{i+1,j}$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{i,j} = V1Y_j * F_{i,j-1} + VY_j * F_{i,j} + V1Y_j * F_{i,j+1}$$

Коэффициенты для первой и второй производной:

$$V1X = \frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i}; VX = \frac{\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i}{\Delta x_i (\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)}; V1Y = \frac{\Delta y_{i-1} + \Delta y_i}{\Delta y_{i-1} \Delta y_i}.$$

$$\begin{aligned}
VY &= \frac{\Delta y_{i-1} + 2\Delta y_i}{\Delta y_i(\Delta y_{i-1} + \Delta y_i)}; W1X = \frac{2}{\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}; WX = \frac{2}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}}. \\
WY1 &= \frac{2}{\Delta y_{i+1}(\Delta y_i + \Delta y_{i+1})}; W1Y = \frac{2}{\Delta y_i(\Delta y_i + \Delta y_{i+1})}; WY = \frac{2}{\Delta y_i \Delta y_{i+1}}; \\
WX1 &= \frac{2}{\Delta x_{i+1}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})}.
\end{aligned}$$

Общая форма уравнения для решения первой краевой задачи следующая. После подстановки соответствующих коэффициентов  $S$  и значений производных, уравнение (2.4) будет сведено в трехдиагональную матрицу:

$$B_i F_{i-1,j} + A_i F_{i,j} + C_i F_{i+1,j} = R_i$$

$$B_i = \Delta t(S2X \cdot W1X_i + S1X \cdot V1X_i)$$

$$A_i = 1 + \Delta t(S2X \cdot WX_i + S2Y \cdot WY_j + S1X \cdot VX_i + S1Y \cdot VY_j + S0)$$

$$C_i = \Delta t(S2X \cdot WX_i + S1X \cdot VX_i)$$

$$R_i = F_{i,j}^{k-1} - \Delta t \left[ (S2Y(W1Y_j F_{i,j-1} + WY1 F_{i,j+1})) + S1Y(V1Y_j F_{i,j-1} + V1Y_j F_{i,j+1}) - SR \right]$$

$$R_i = F_{i,j}^{k-1} - \Delta t \left[ (S2Y \cdot W1Y_j + S1Y \cdot V1Y_j) F_{i,j-1} + (S2Y \cdot WY1_j + S1Y \cdot VY1_j) F_{i,j+1} - SR \right]$$

В узле  $i=M$  только для скорости на линии торможения решается первая краевая задача.

Решение матриц в направлении оси  $OX$

$$B'_M F_{M-1} + F_M = R'_M$$

$$B'_M = \frac{B_M}{A_M} \quad R'_M = \frac{R_M - C_M F_{M+1}}{A_M}$$

В узле  $i < M$ :

$$B'_i F_{i-1} + F_i = R'_i$$

$$B'_i = \frac{B_i}{A_i - C_i B'_{i+1}} \quad R'_i = \frac{R_i - C_i R'_{i+1}}{A_i - C_i B'_{i+1}}$$

Для плотности и вращательной температуры решается задача Коши.

Для  $u_x, u_y, T_i$   $\begin{cases} y \leq r_w & (0:MT) \\ y > r_w & (MT+1) \end{cases}$  решаются первая и вторая краевые задачи.

Начальное значение числа Куранта выбирается достаточно малым ( $\sim 0.1$ ).

Коэффициенты односторонних производных для расчета в узлах находящихся на твердой поверхности:

$$VX20_1 = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad VX10_1 = -\frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{\Delta x_1 \Delta x_2} \quad VX0_1 = \frac{\Delta x_1 + 2\Delta x_2}{\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad (M\_X2:MX)$$

$$VY0 = -\frac{2\Delta y_1 + \Delta y_2}{\Delta y_1(\Delta y_1 + \Delta y_2)} \quad VY01 = \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2}{\Delta y_1 \Delta y_2} \quad VY02 = -\frac{\Delta y_1}{\Delta y_2(\Delta y_1 + \Delta y_2)} \quad (0:MT)$$

$$WX20_1 = \frac{2}{\Delta x_1(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad WX10_1 = -\frac{2}{\Delta x_1 \Delta x_2} \quad WX0_1 = \frac{2}{\Delta x_2(\Delta x_1 + \Delta x_2)} \quad (M\_X2:MX)$$

$$WY0 = \frac{2}{\Delta y_1(\Delta y_1 + \Delta y_2)} \quad WY01 = -\frac{2}{\Delta y_1 \Delta y_2} \quad WY02 = \frac{2}{\Delta y_2(\Delta y_1 + \Delta y_2)} \quad (0:MT)$$

На интервале  $(MT+1:MY-1)$  центральные разности с коэффициентами  $V1Y, VY, VY1$  и  $W1Y, WY, WY1$ .

Задача Коши для плотности

Над пластиной  $(M\_X+2:MX, MT+1:MY-1)$

$$\rho_{i,j} = \frac{\rho_{i,j}^{k-2} - \Delta t \left[ u_{xi,j} (VX20_i \rho_{i-2,j} + VX10_i \rho_{i-1,j}) + u_{yi,j} (V1Y_j \rho_{i,j-1} + VY1_j \rho_{i,j+1}) \right]}{1 + \Delta t \left( u_{xi,j} \cdot VX0_i + u_{yi,j} \cdot VY_j + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \Big|_{i,j} \right)}$$

Решение на интервале  $(M\_X+2:MX-1)$ . В узле  $MX$  экстраполяция, т.е.

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = 0.$$

На уровне пластины  $(M\_X+2:MX, MT)$

На интервале  $(M\_X+2:MT-1, MT)$  также, как над пластиной.

На интервале  $(MT:MX, MT)$ : на окружности

$$\rho_{i,j} = \frac{\rho_{i,j}^{k-1} - \Delta t \cdot u_{xi,j} (VX20_i \rho_{i-2,j} + VX10_i \rho_{i-1,j})}{1 + \Delta t \left( u_{xi,j} \cdot VX0_i + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \Big|_{i,j}^{односторон.} \right)}$$

Перед скруглением ( $M\_X + 2 : I_{\max(j)}, 0 : MT - 1$ )

На интервале ( $M\_X + 2 : I_{\max} - 1, 0 : MT - 1$ ) над пластиной

В узлах ( $I_{\max(i=j)}, 0 : MT - 1$ ) все производные односторонние:

$$\rho_{i,j} = \frac{\rho_{i,j}^{k-1} - \Delta t \left[ u_{xi,j} (VX20_i \rho_{i-2,j} + VX10_i \rho_{i-1,j}) + u_{yi,j} (VY01_j \rho_{i,j+1} + VY02_j \rho_{i,j+2}) \right]}{1 + \Delta t \left( u_{xi,j} \cdot VX0_i + u_{yi,j} \cdot VY0_j + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{i,j}^{одност.} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \Big|_{i,j}^{одност.} \right)}$$

Краевые задачи для  $(u_x, u_y, T_i, T_r)$

Решается трехдиагональная матрица методом прогонки. Перед скругленным носиком решается третья краевая задача. На уровне и над пластиной решается вторая краевая задача.

Общая форма уравнений для решения второй краевой задачи:

$$B_i F_{i-1,j} + A_i F_{i,j} + C_i F_{i+1,j} = R_i, \quad F_{Mx} = 2 \cdot F_{M1x} - F_{M2x}$$

$$B_i = \Delta t (S_{2x} \cdot W1X_i + S_{1x} \cdot V1X_i)$$

$$A_i = 1 + \Delta t (S_{2x} \cdot WX_i + S_{2y} \cdot WY_j + S_{1x} \cdot VX_i + S_{1y} \cdot VY_j + S_0)$$

$$C_i = \Delta t (S_{2x} \cdot WX1_i + S_{1x} \cdot VX1_i)$$

$$R_i = F_{i,j}^{k-1} - \Delta t \left[ (S_{2y} \cdot W1Y_j + S_{1y} \cdot V1Y_j) F_{i,j-1} + (S_{2y} \cdot WY1_j + S_{1y} \cdot VY1_j) F_{i,j+1} - S_r \right]$$

В узле  $i = Mx - 1 = M1x$ :

$$B'_{M1x} F_{M2x} + F_{M1x} = R'_{M1x}$$

$$B'_{M1x} = \frac{B_{M1x} - C_{M1x}}{A_{M1x} + 2C_{M1x}} \quad R'_{M1x} = \frac{R_{M1x}}{A_{M1x} + 2C_{M1x}}$$

В узле  $i < Mx - 1$ :

$$B'_i F_{i-1} + F_i = R'_i$$

$$B'_i = \frac{B_i}{A_i - C_i B'_{i+1}} \quad R'_i = \frac{R_i - C_i R'_{i+1}}{A_i - C_i B'_{i+1}}$$

$$F_i = R'_i - B'_i \cdot F_{i-1}$$

Таблица 3 – Перечень краевых задач

Уровень $j$	$u_x, T_i, T_r$	$u_y$
Выше пластины $j > MT$	2-ая краевая задача	2-ая краевая задача
Уровень пластины $j = MT$	2-ая краевая задача с граничными условиями в расчетной схеме	3-ья краевая задача (вырождается в первую правую)
Ниже пластины $j < MT$	3-ья краевая задача для $u_x$ при $j = 0$ вырождается в 1-ую правую	3-ья краевая задача (кроме $j = 0$ )

## 2.4 Результаты расчетов

Расчеты проведены для двухатомного газа при числе Маха  $M=2$ . Число Кнудсена изменялось в интервале  $Kn=10^{-2} \dots 1$ . В рамках рассматриваемой задачи  $Kn$  может рассматриваться как степень заостренности носика, независимо от степени разреженности газа, которая традиционно характеризуется числом  $Kn$ . В выбранном интервале  $Kn$  радиус скругления изменяется от  $100 \cdot \lambda_\infty$  до  $1 \cdot \lambda_\infty$ .

В качестве практического примера отметим, что на высотах порядка 30 километров, характерных для летательных аппаратов с прямоточными реактивными двигателями, радиус скругления кромки воздухозаборника при указанных  $Kn$  может составлять от 10 до 1 мм.

Наиболее важными параметрами газа, с практической точки зрения, являются плотность и температура в пристеночной области. Эти параметры, в основном, определяют процессы эрозии поверхности кромки, приводящие к изменению ее формы.

На приведенных ниже графиках показаны распределения плотности и температуры по координате  $X$ . На отрицательные значения координаты приведены значения  $\rho$  и  $T$  при  $y=0$  (ось симметрии), на интервале  $0 < x < 1$  – значения параметров на скругленной поверхности ( $0 < y < 1$ ), при  $x > 1$  – значения параметров на плоской поверхности ( $y=1$ ).

На представленных ниже Рисунках 6-11 показаны распределения плотности и температуры при  $M=2$  и различных числах Кнудсена.

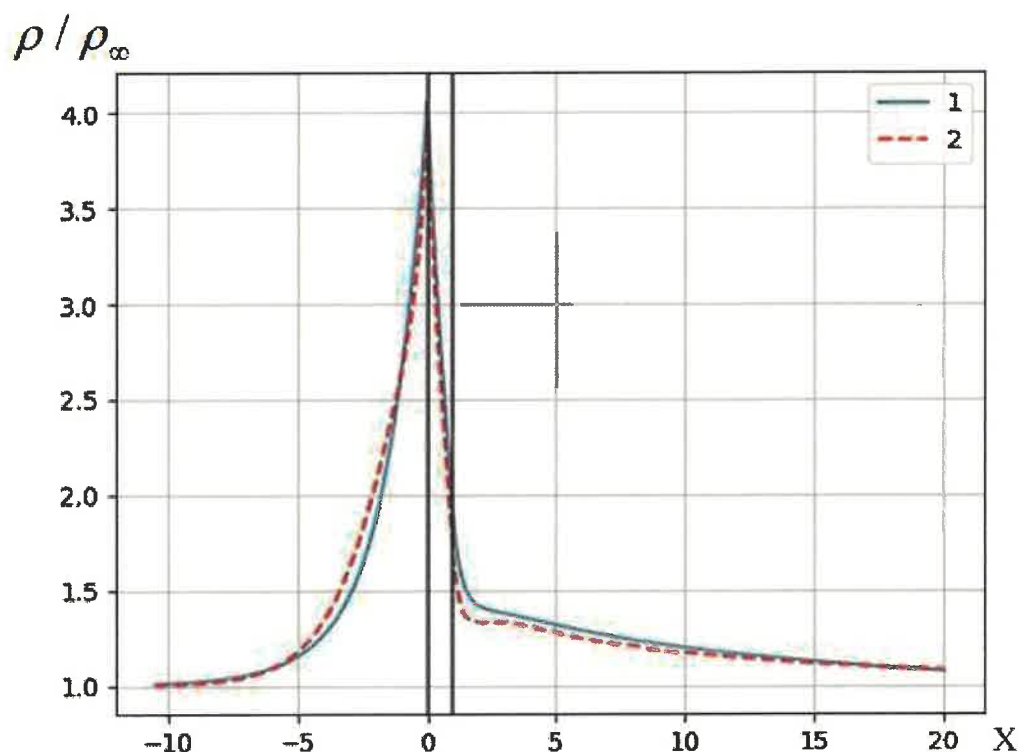


Рисунок 6 – Распределение плотности,  $Kn=1$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления

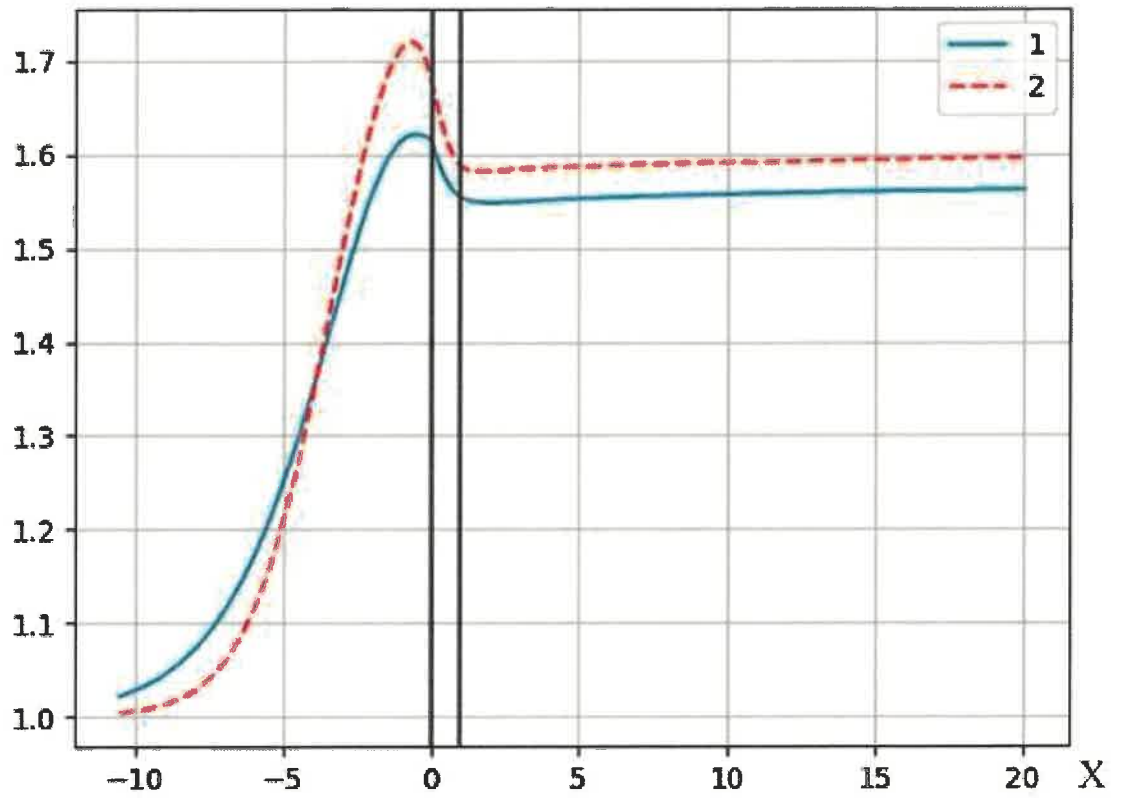
$T/T_\infty$ 

Рисунок 7 – Распределение температуры,  $Kn=1$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления



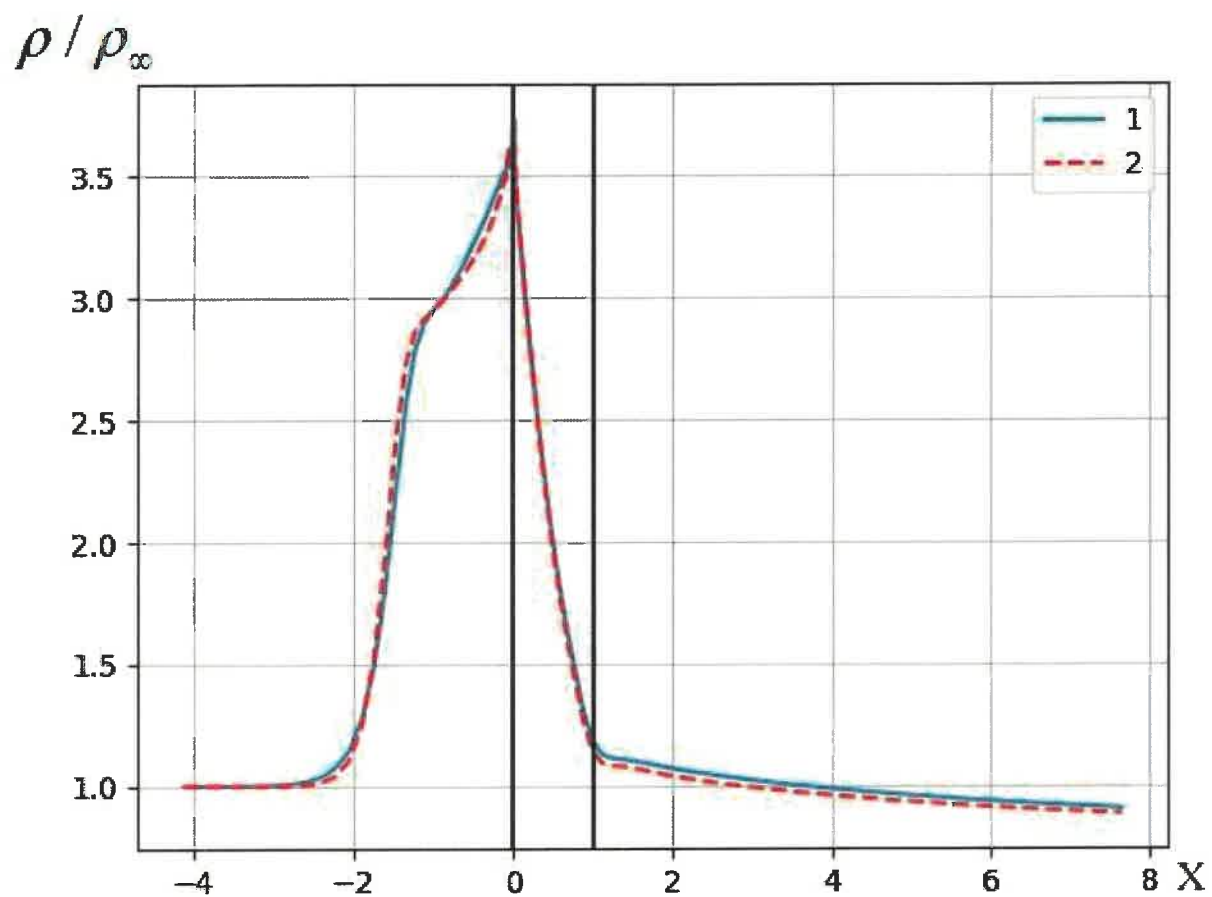


Рисунок 8 – Распределение плотности,  $Kn=0.1$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления

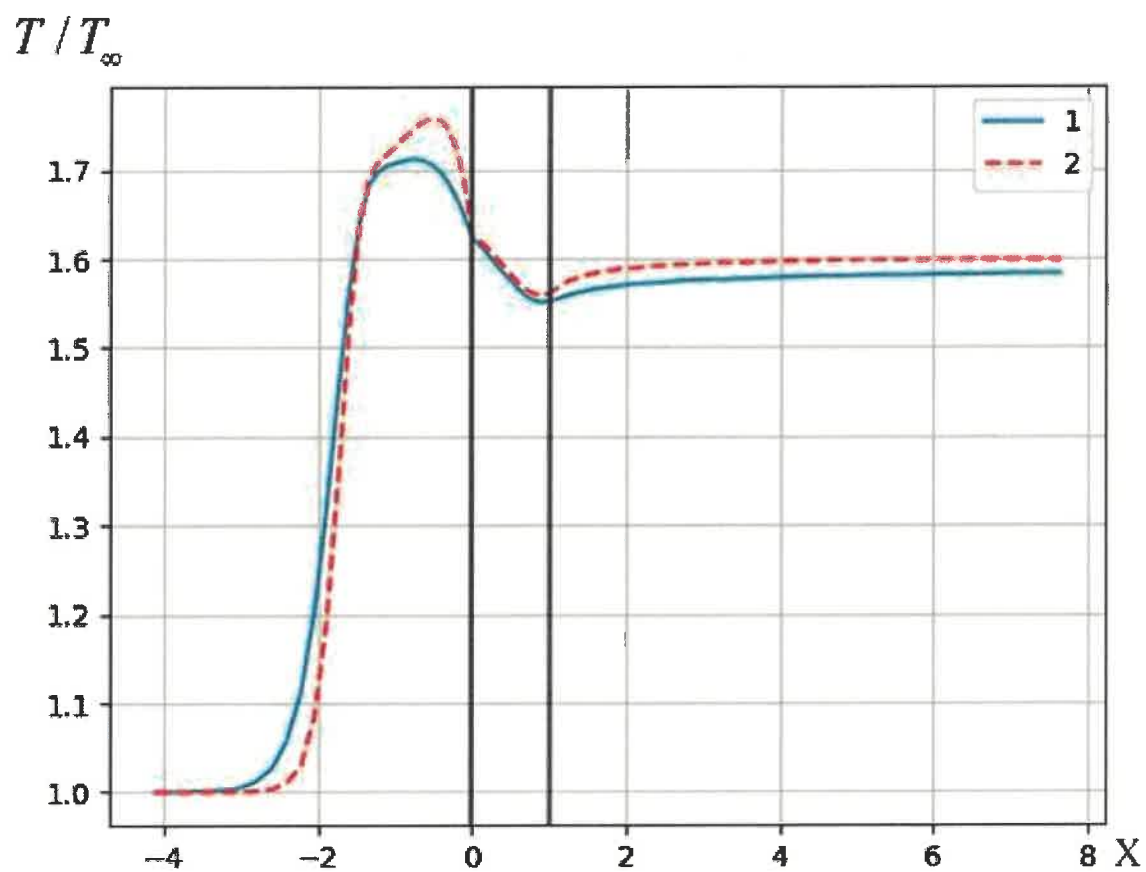


Рисунок 9 – Распределение температуры,  $Kn=0.1$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления

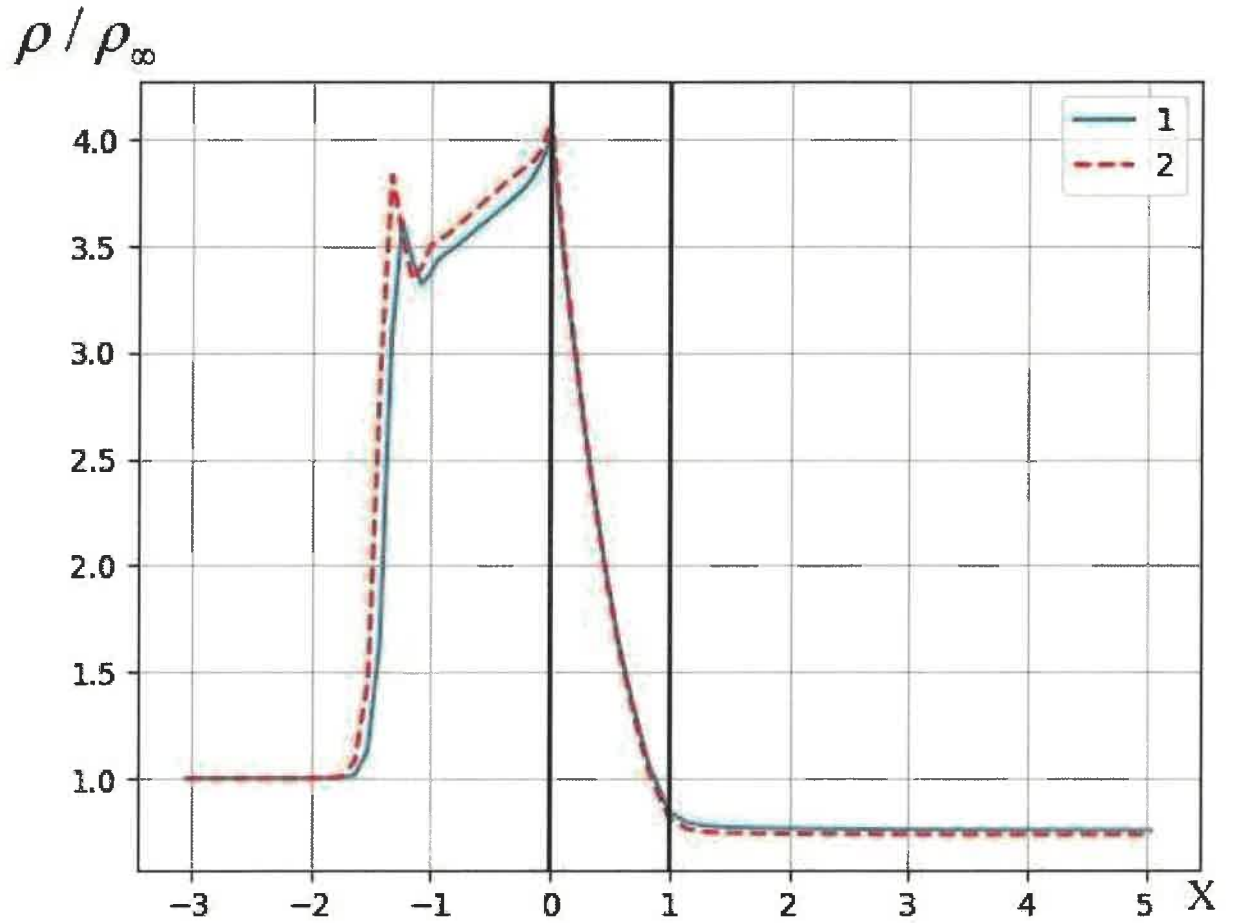


Рисунок 10 – Распределение плотности,  $Kn=0.01$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ,  
2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена  
область скругления

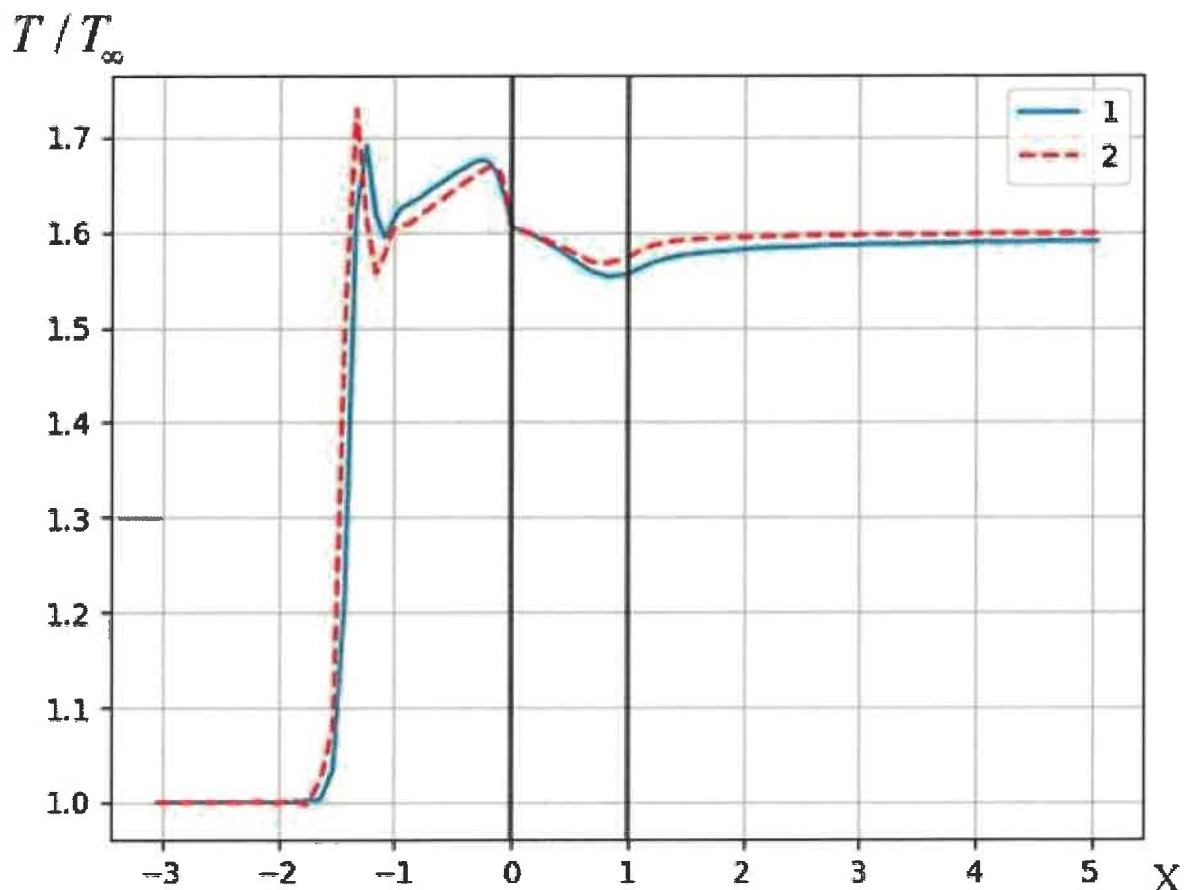


Рисунок 11 – Распределение температуры,  $Kn=0.01$ ,  $M=2$ , 1 – модель НСФ, 2 – модель М2Т. Утолщенными вертикальными линиями выделена область скругления

## 2.5 Заключение к Главе 2

При  $Kn \sim 1$  модели первого приближения, к которым относится и модель М2Т, теоретически не обоснованы, хотя в ряде практических задач, решаемых с помощью широко распространенных CFD-пакетов, модель НСФ используется для расчета полей течения в окрестности кромок, интерпретируемых как абсолютно острые. Число  $Kn$ , вычисленное по размеру затупления, в этом случае, очевидно, является неограниченно большим.

Проведенные расчеты показывают, что при  $Kn > 10^{-2}$  обе модели первого приближения, по-разному описывающие энергообмен между поступательными и

вращательными степенями свободы, приводят к существенно отличающимся распределениям температуры. Распределения плотности достаточно близки во всем рассмотренном интервале чисел Кнудсена.

Таким образом, расширение области применимости модели НСФ до  $Kn=10^{-1}$  при расчетах обтекания поверхностей большой кривизны может приводить к существенной погрешности расчета.

Для оценки границы применимости моделей первого приближения в задачах обтекания поверхностей большой кривизны в более общем смысле требуется сравнение решений этих моделей с кинетическими моделями, что уже при  $Kn=10^{-2}$  представляет собой весьма сложную задачу.

## ГЛАВА 3 МЕТОД РАСЧЕТА ОБТЕКАНИЯ ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛИ НАВЬЕ-СТОКСА-ФУРЬЕ

### 3.1 Расчет обтекания тонкой пластины с граничными условиями скольжения пограничного слоя, включенными в разностную схему

Значительные сложности расчета течения в окрестности острой кромки возникают при решении практических задач, в которых кромка рассматривается как абсолютно острая, например [60, 61, 62]. Этот подход вполне обоснован, если размер затупления кромки много меньше характерных размеров решаемой задачи. Вместе с тем на самой острой кромке отсутствует точка торможения потока и на границе газ-кромка возникает разрыв производных параметров газа.

Задача обтекания тонкой пластины рассматривалась разными авторами. Для описания течения использовались методы молекулярно кинетической теории газов (МКТ) [63, 64, 65, 66, 67, 68] и методы теории сплошной среды [47, 69], как по отдельности, так и совместно [16, 43].

Из перечисленных работ только в работах [47, 63, 69] проводился детальный анализ параметров газа на острой кромке. Решение на базе модельного кинетического уравнения (МКУ) [63] имеет скорее теоретический характер и слишком трудоемко для решения практических задач. В решениях на базе модели Навье-Стокса-Фурье (НСФ) [47, 69] перед острой кромкой возникали осцилляции параметров газа, что существенно снижает достоверность полученных результатов.

Предложен метод расчета обтекания тонкой пластины, использующий модель НСФ. Поле течения перед острой кромкой не содержит осцилляций [70]. Для анализа полученных результатов использована модель МКУ [71], реализованная в программном коде [72].

### 3.1.1 Постановка задачи

Рассматривается обтекание тонкой пластины бесконечного размаха, установленной под нулевым углом атаки. Длина пластины не ограничена. Положение нижней по потоку границы вычислительной области выбирается из условия отсутствия влияния этой области на распределения параметров газа в окрестности носика пластины (абсолютно острой кромки).

При такой постановке задачи отсутствует характерный геометрический размер пластины. В качестве единиц измерения приняты параметры газовой среды в невозмущенном потоке:

плотность –  $\rho_\infty$ ; температура –  $T_\infty$ ; давление и напряжения –  $p_\infty = \rho_\infty R T_\infty$  ( $R$  – удельная газовая постоянная); скорость –  $\sqrt{R T_\infty}$ ; коэффициент вязкости –  $\mu_\infty$ ; время –  $\tau_\infty = \mu_\infty / p_\infty$ ; геометрический размер –  $\lambda_\infty = \tau_\infty \sqrt{R T_\infty}$  (длина свободного пробега молекулы); единица теплового потока –  $p_\infty \sqrt{R T_\infty}$ .

Пластина термостабилизирована и имеет температуру  $T_w$ .

Используется прямоугольная декартова система координат. Координатная ось  $OX$  параллельна пластине, ось  $OY$  – нормаль к пластине.

### 3.1.2 Модель течения

Системой уравнений модели НСФ в безразмерной форме воспользуемся из второго раздела настоящей работы (2.1).

Для коэффициента вязкости используется аппроксимация  $\mu / \mu_\infty = (T / T_\infty)^s$ .

Показатель степени  $s$  принят  $s = 1$ , а параметр  $Z$  в коэффициенте объемной вязкости принят  $Z = 2.5$ .

Численное решение задачи строилось следующим образом. Ввиду симметрии рассматривалась верхняя часть поля течения. Максимальное значение координаты  $Y$  составляло  $200 \lambda_\infty$ , что позволило на верхней границе вычислительной области выставить условия невозмущенного потока. Длина

пластины составляла  $120...150\lambda_\infty$ . Протяженность вычислительной области по координате  $X$  перед передней кромкой пластины составляла  $10...15\lambda_\infty$ .

На нижней по потоку границе вычислительной области принималось  $\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$ . На поверхности пластины выставлялись граничные условия

скольжения пограничного слоя [26]:

$$u_x|_{y=0} = \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \left( \zeta_u \frac{\partial u_x}{\partial y} + \zeta_{ut} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.1)$$

$$T|_{y=0} - T_w = \zeta_T \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.2)$$

Коэффициенты  $\zeta_u$ ,  $\zeta_{ut}$ ,  $\zeta_T$  уравнений выбирались из условия наилучшего соответствия известным экспериментальным данным [47]. Уравнения (3.1) и (3.2) были преобразованы следующим образом:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\rho\sqrt{T}}{\zeta_u \mu} u_x - \frac{\zeta_{ut}}{\zeta_u \sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{4(\gamma - 1)\rho\sqrt{T}}{(9\gamma - 5)\zeta_T \mu} (T - T_w).$$

Кроме этого было учтено, что граничные условия скольжения пограничного слоя предусматривают линейный закон изменения скорости и температуры в граничной точке [26], т. е.

$$\left. \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

Такое преобразование позволяет включить граничные условия в разностную схему решения дифференциальных уравнений  $u_x$  и  $T$ , заменяя производные по оси  $OY$  указанными выше выражениями. При этом не требуется вычислять односторонние производные на поверхности пластины.



В расчетах использовалась вычислительная сетка с переменным шагом. Величина шага у кромки по обеим координатам составляла  $0.1 \lambda_{\infty}$ . Максимальное значение шага  $0.5 \lambda_{\infty}$ . Начало координат располагалось на передней кромке пластины.

Численное решение системы (2.1) проводилось методом установления. Использовалась конечно-разностное представление производных второго порядка точности. Для уравнения неразрывности ставилась задача Коши на поле скоростей, определенном на предыдущем временном шаге. Для уравнений движения и энергии ставилась вторая краевая задача, сводящаяся к решению трехдиагональной матрицы в направлении координатной оси  $X$ .

### 3.1.3 Результаты расчетов традиционным методом

Серийные расчеты проводились в интервале чисел Маха от 2 до 5. Тестовый расчет проведен при  $M_{\infty}=10.15$  и  $T_w=2.16T_{\infty}$  для сравнения результатов с экспериментальными [61] и расчетными данными [63].

Рассматривалось течение двухатомных газов. Температура поверхности пластины принималась по оценкам работы [73].

$$T_w = 0.1(T_0 - T_{\infty}),$$

где  $T_0$  – температура торможения.

Ниже представлены графики распределения плотности, температуры и давления на оси симметрии задачи ( $x < 0, y = 0$ ) и поверхности пластины ( $x \geq 0, y = 0$ ). Специально отметим, что для расчета химических реакций, протекающих на сильно разогретой передней кромке, определяющее значение имеют плотность и температура газа.

В качестве базы сравнения приняты решения по МКУ с использованием программного кода [72].

На Рисунках 12-14 представлены распределения плотности, скорости и температуры при  $M=2$ . Решения модели НСФ не содержат осцилляций, хотя распределения плотности и температуры значительно отличаются от решения МКУ.

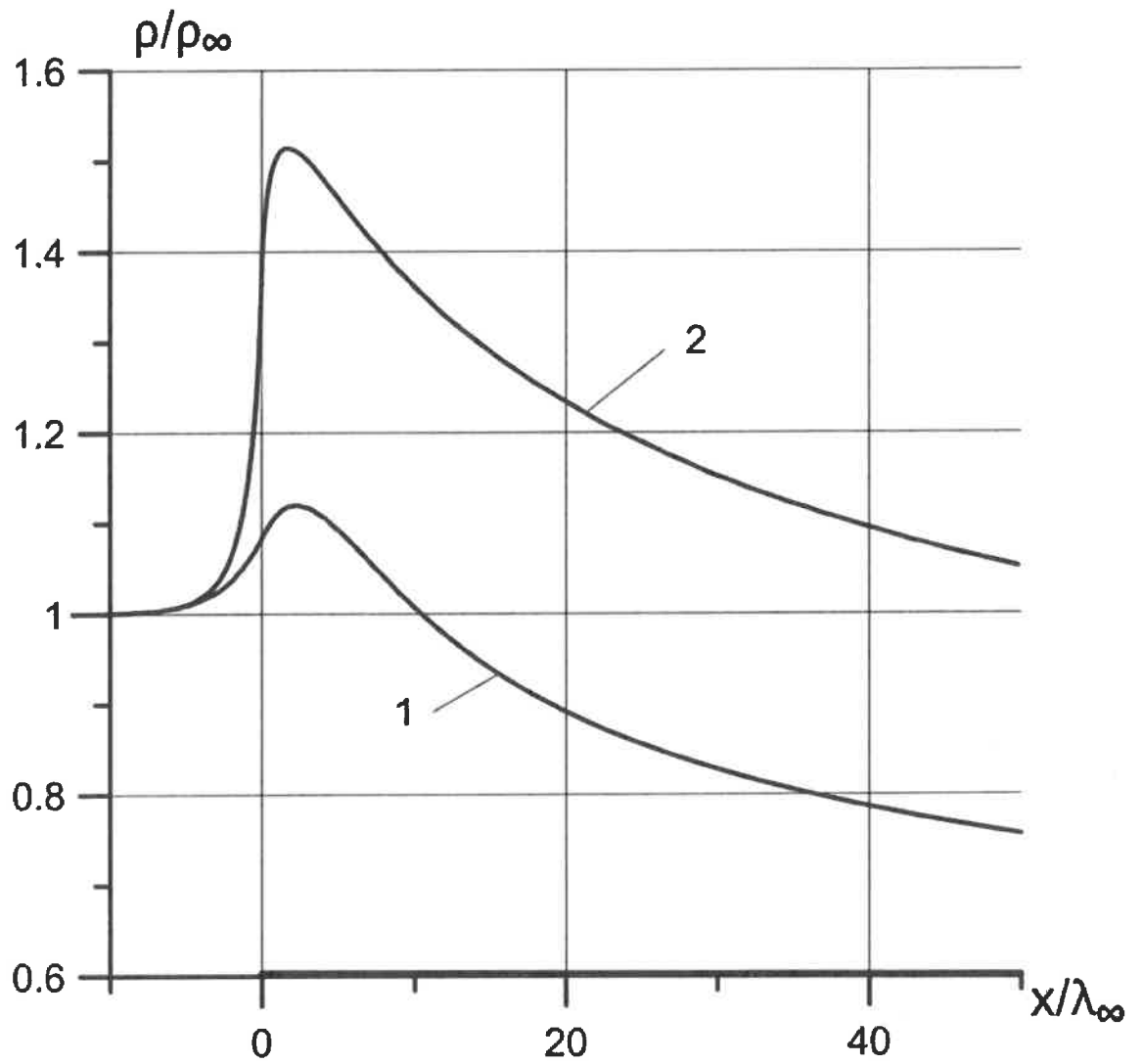


Рисунок 12 – Распределение плотности при  $Y=0$ ,  $M=2$ . Линии: 1 – НСФ,  
2 – МКУ

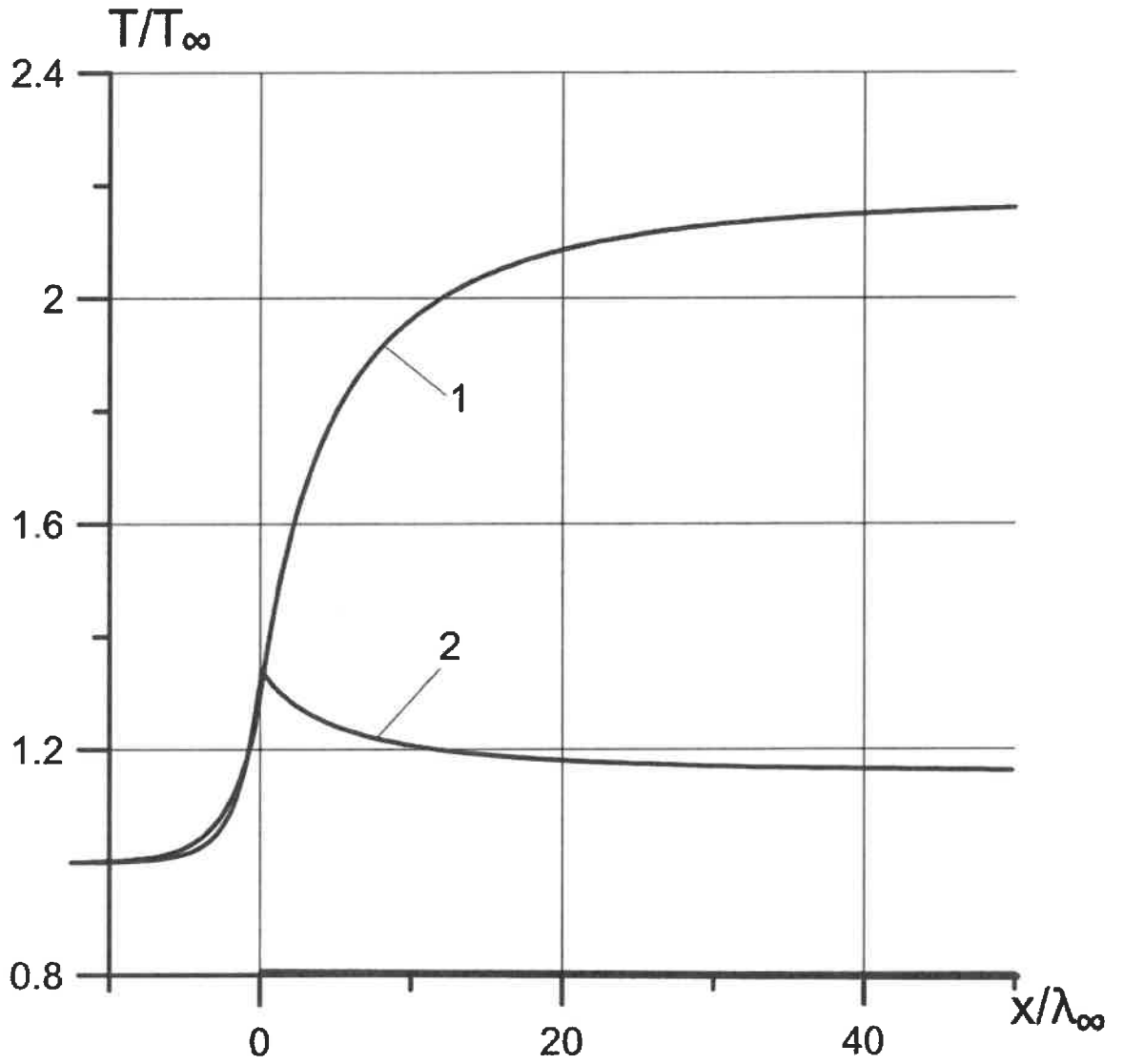


Рисунок 13 – Распределение температуры при  $Y=0$ ,  $M=2$ . Линии: 1 – НСФ,  
2 – МКУ

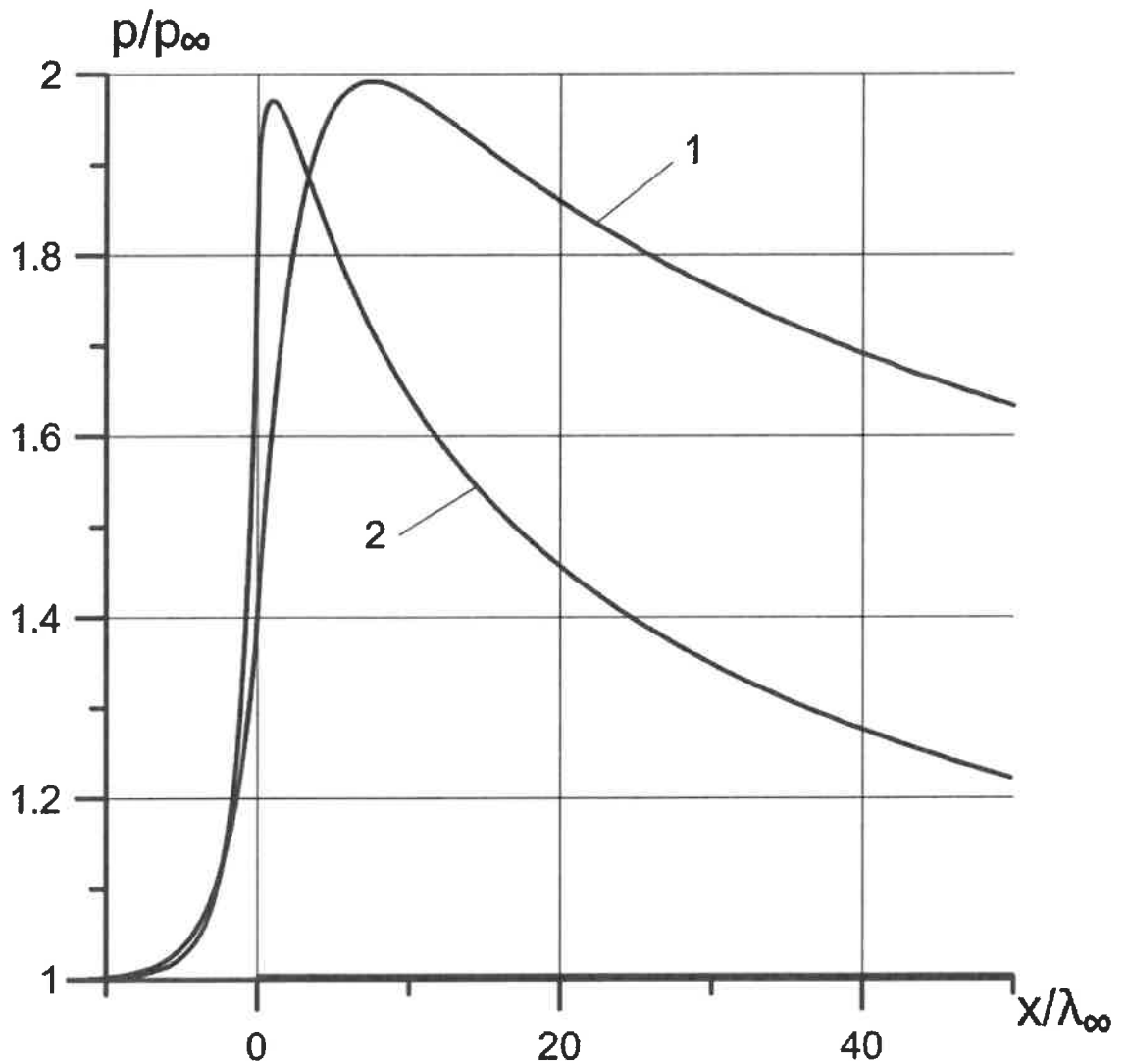


Рисунок 14 – Распределение давления при  $Y=0$ ,  $M=2$ . Линии: 1 – НСФ, 2 – МКУ

Распределение давления над поверхностью пластины сильно отличаются, а пик давления на кромке почти соответствует решению МКУ. Аналогичное соотношение решений наблюдается и при больших числах Маха, но пик давления НСФ по мере увеличения числа Маха начинает существенно превышать пик МКУ. Это представлено на Рисунках 15-17.

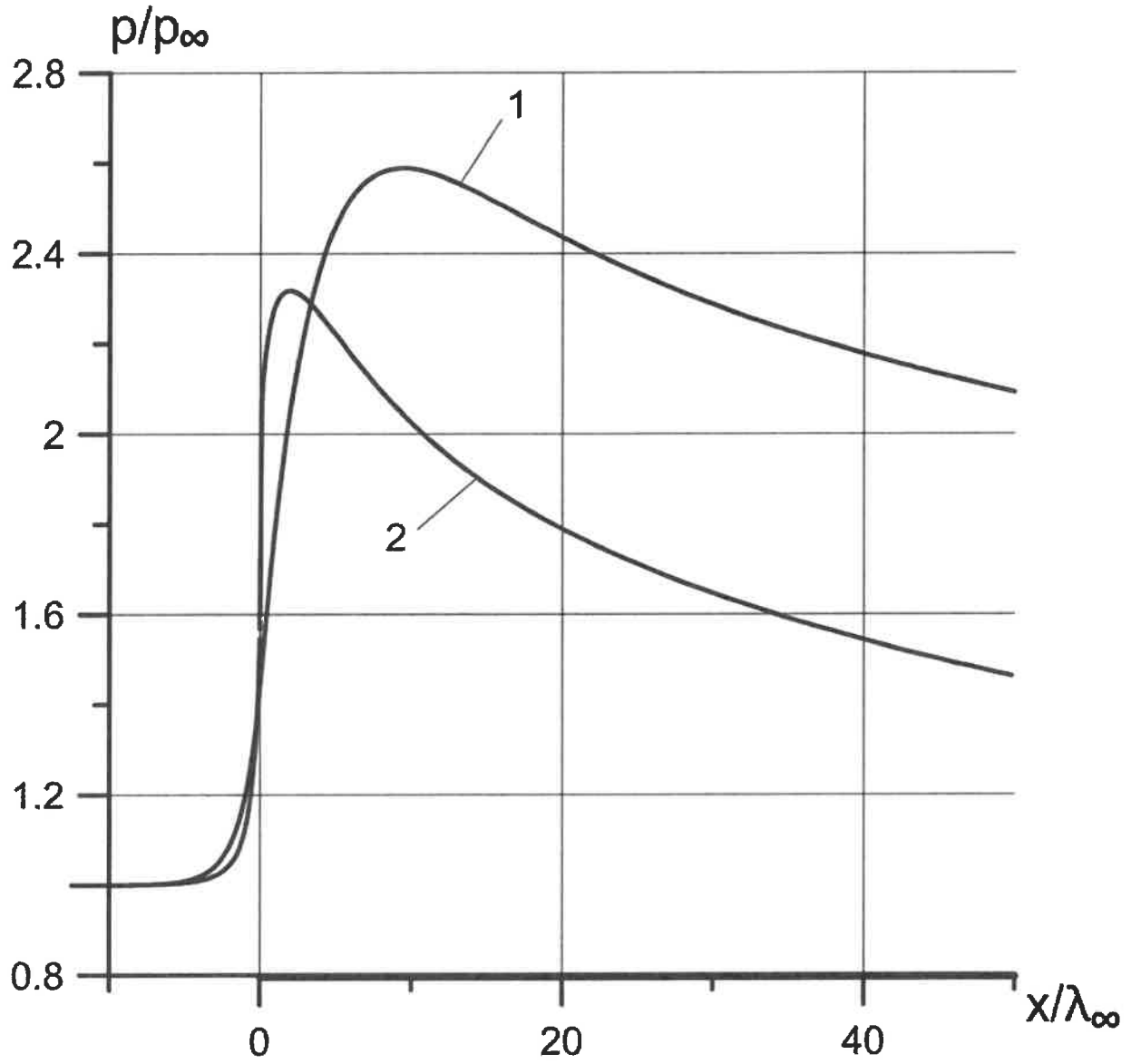


Рисунок 15 – Распределение давления при  $Y=0$ ,  $M=3$ . Линии: 1 – НСФ, 2 – МКУ

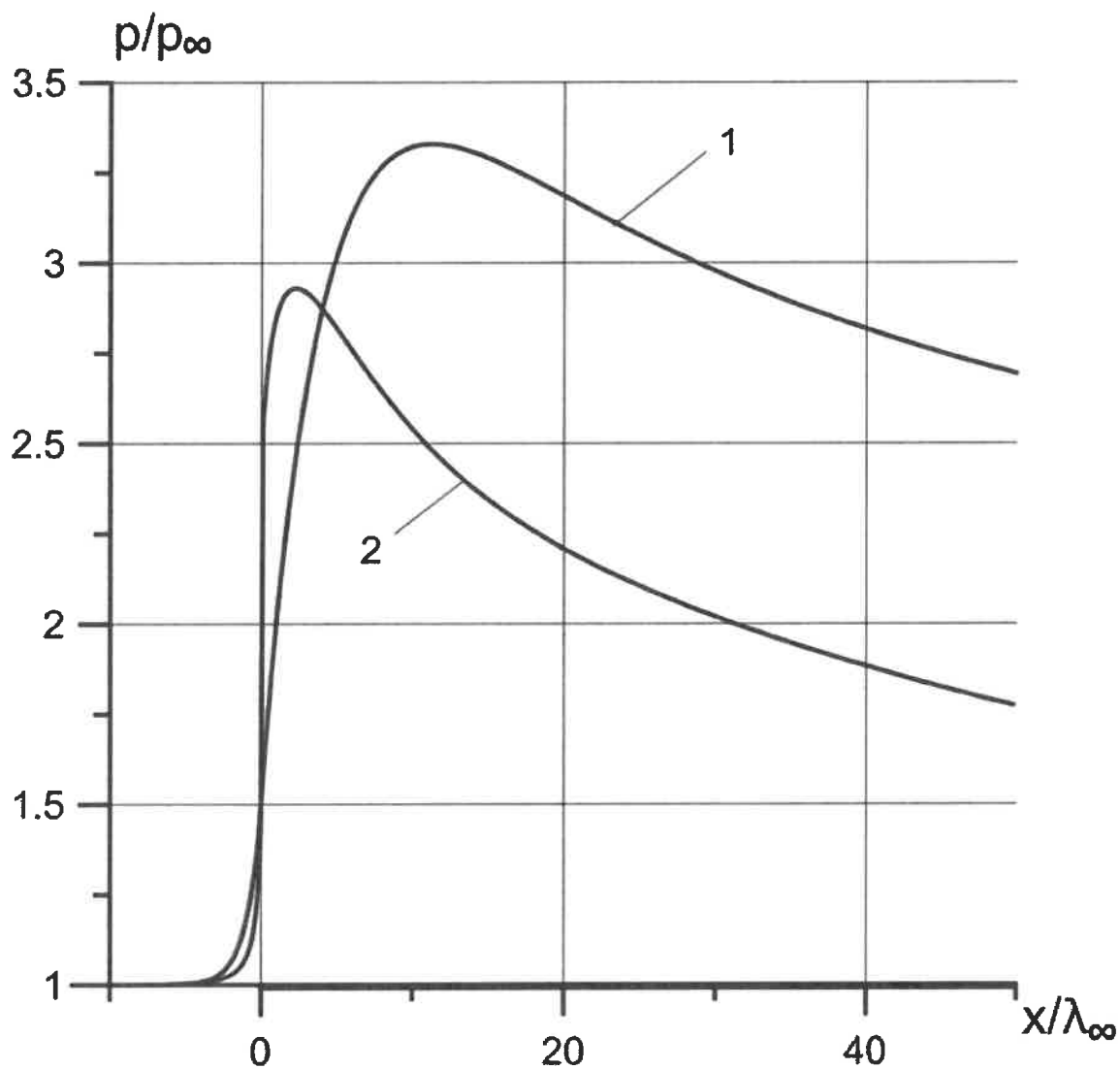


Рисунок 16 – Распределение давления при  $Y=0$ ,  $M=4$ . Линии: 1 – НСФ,  
2 – МКУ

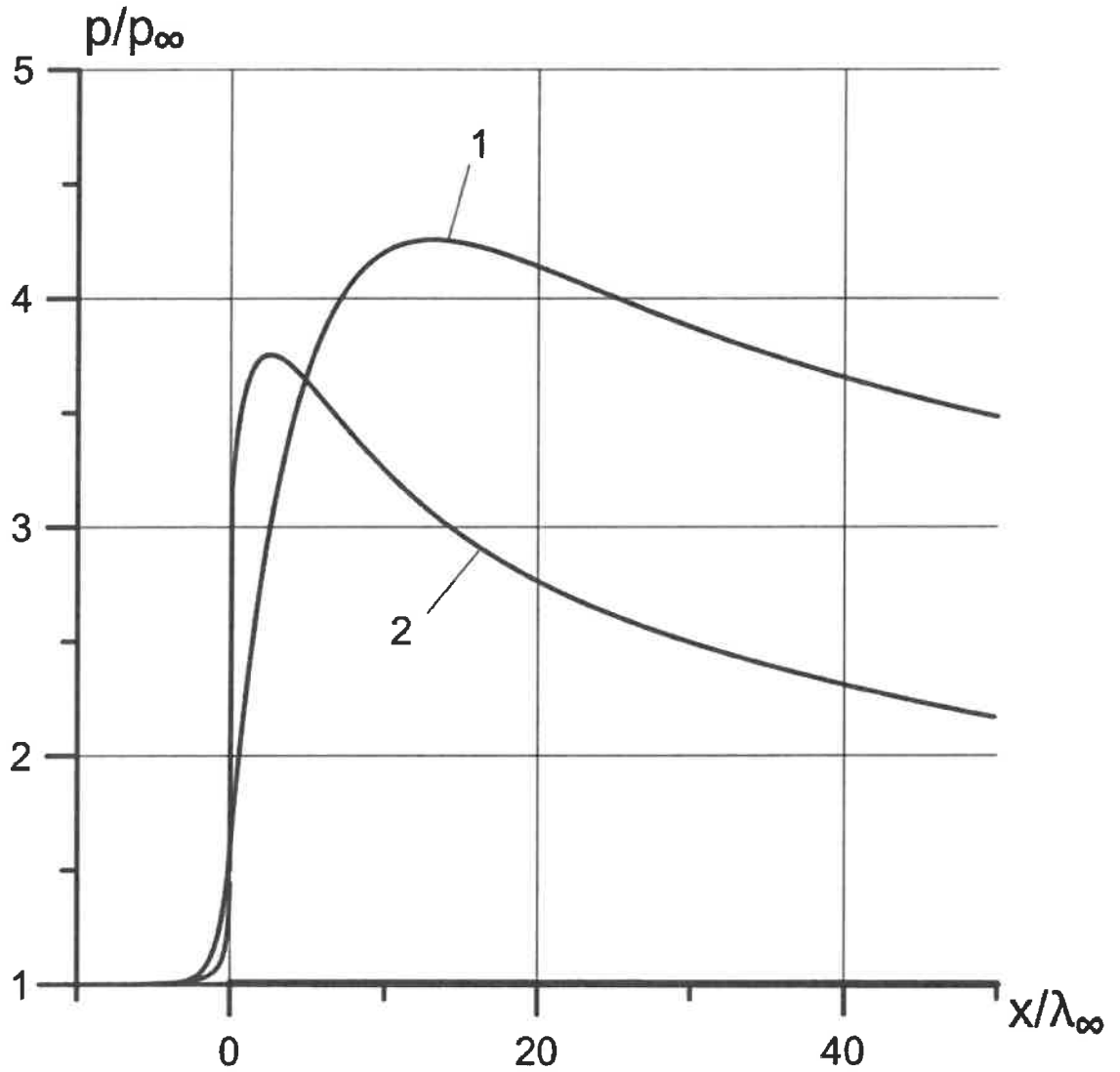


Рисунок 17 – Распределение давления при  $Y=0$ ,  $M=5$ . Линии: 1 – НСФ, 2 – МКУ

На Рисунке 18 представлен график относительной погрешности расчета пика давления, определенного как  $\Delta p = \frac{P_{НСФ} - P_{МКУ}}{P_{МКУ}}$ .

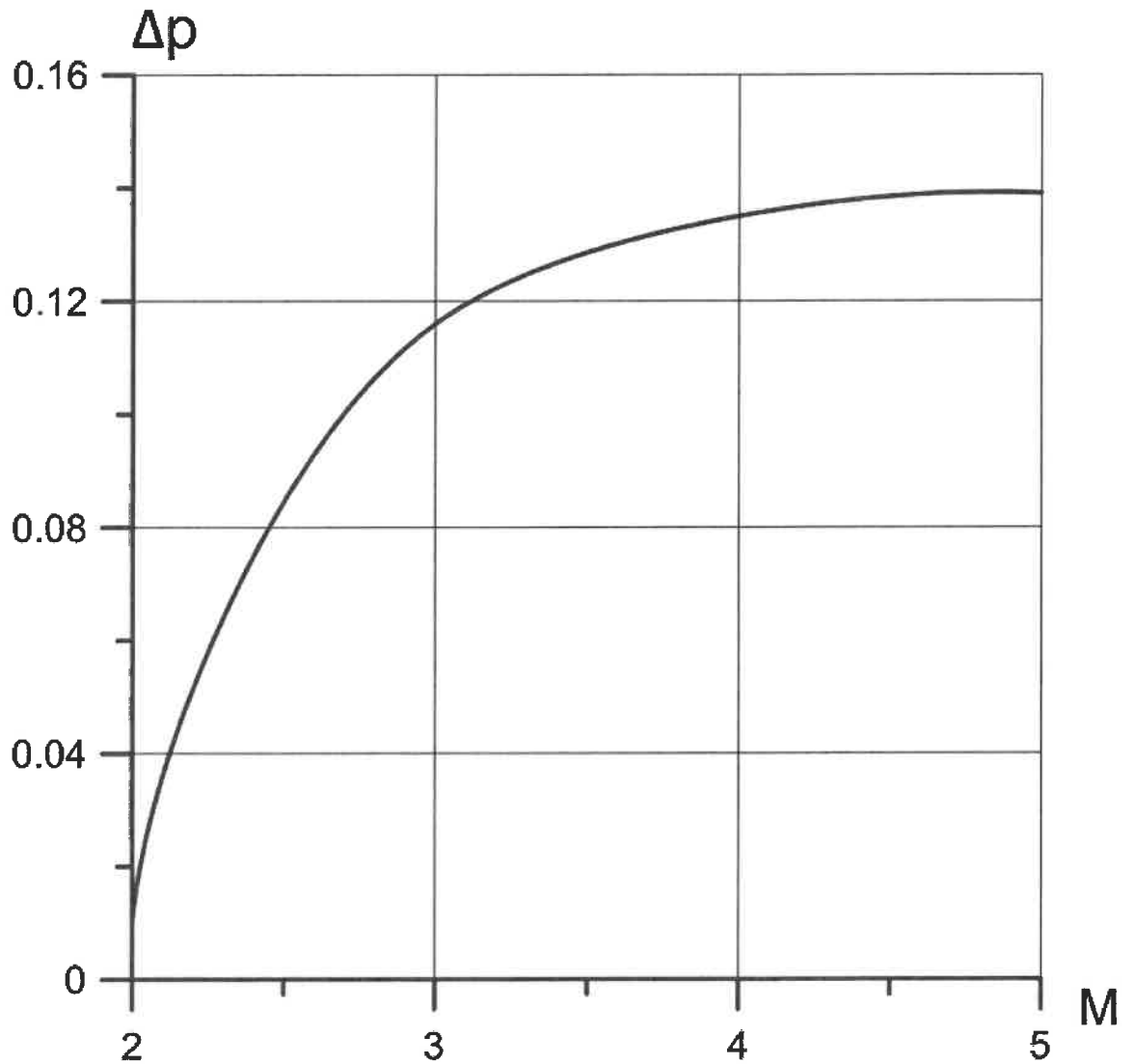


Рисунок 18 – Относительная погрешность определения пика давления

Расчет при  $M_\infty=10.15$  показал, что нормальное напряжение  $P_{yy}$  превышает экспериментальные [73] и расчетные [63] значения примерно в пять раз.

### 3.2 Методика расчета обтекания тонкой пластины с искусственной точкой торможения

Как уже отмечалось, численное моделирование обтекания поверхностей большой кривизны высокоскоростным потоком представляет собой актуальную и сложную задачу. Поверхности такого типа присутствуют в различных технических



устройствах. В авиационной технике это кромки профилей крыла, воздухозаборников. В вакуумной и компрессорной технике это кромки рабочих органов лопаточных насосов и шнеков.

Высокая динамическая неравновесность течения в окрестности таких поверхностей делает применение моделей течения типа Навье-Стокса-Фурье (НСФ) весьма проблематичным. Прямое использование моделей кинетической теории газов для решения инженерных задач в большинстве приложений практически не реализуемо.

Изучению свойств модели НСФ в задачах обтекания поверхностей большой кривизны посвящено большое количество работ различных авторов. Особое место среди этих работ занимает задача обтекания тонкой пластины высокоскоростным потоком. Эта задача является своего рода теоретическим пределом задачи обтекания поверхности большой кривизны, рассматриваемой как абсолютно острая кромка. Такая постановка задачи, помимо теоретического, имеет и практический аспект. При решении прикладных задач с использованием CFD-пакетов кромки технических устройств в большинстве случаев интерпретируются как абсолютно острые, что позволяет значительно снизить требования к вычислительным ресурсам.

Задача обтекания тонкой пластины высокоскоростным потоком рассматривалась, например, в работах [16, 43, 44, 58, 63, 64, 65, 71, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79], что является далеко не полным перечнем работ по данной тематике. В связи с направленностью настоящей работы наиболее интересны работы [16, 44, 43], в которых проводится сопоставление решений модели НСФ с решениями кинетических моделей. В кинетических решениях помимо метода прямого статистического моделирования использовалась модель ВГК. В указанных работах, за исключением работы [74], рассматривались только одноатомные газы.

В настоящей работе предложен метод "улучшения" решений модели НСФ, предусматривающий наличие точки торможения на носике пластины [80]. Численные тесты проведены для течения двухатомного газа. В качестве

кинетической модели используется модельное кинетическое уравнение (МКУ) многоатомных газов [39]. Результаты расчетов течения двухатомного газа при  $M_\infty=10.15$  и температуре поверхности  $T_w=2.16$  сравниваются с экспериментальными данными [73].

### 3.2.1 Постановка задачи

На Рисунке 19 рассматривается обтекание тонкой пластины бесконечного размаха, установленной под нулевым углом атаки. Численное решение задачи строится в прямоугольной декартовой системе координат  $OXY$ , начало которой расположено на носике пластины. Ось  $OY$  – нормаль к поверхности пластины. Ось  $OX$  на отрезке  $x<0$  совмещена с осью симметрии задачи, в остальной области – с поверхностью пластины.

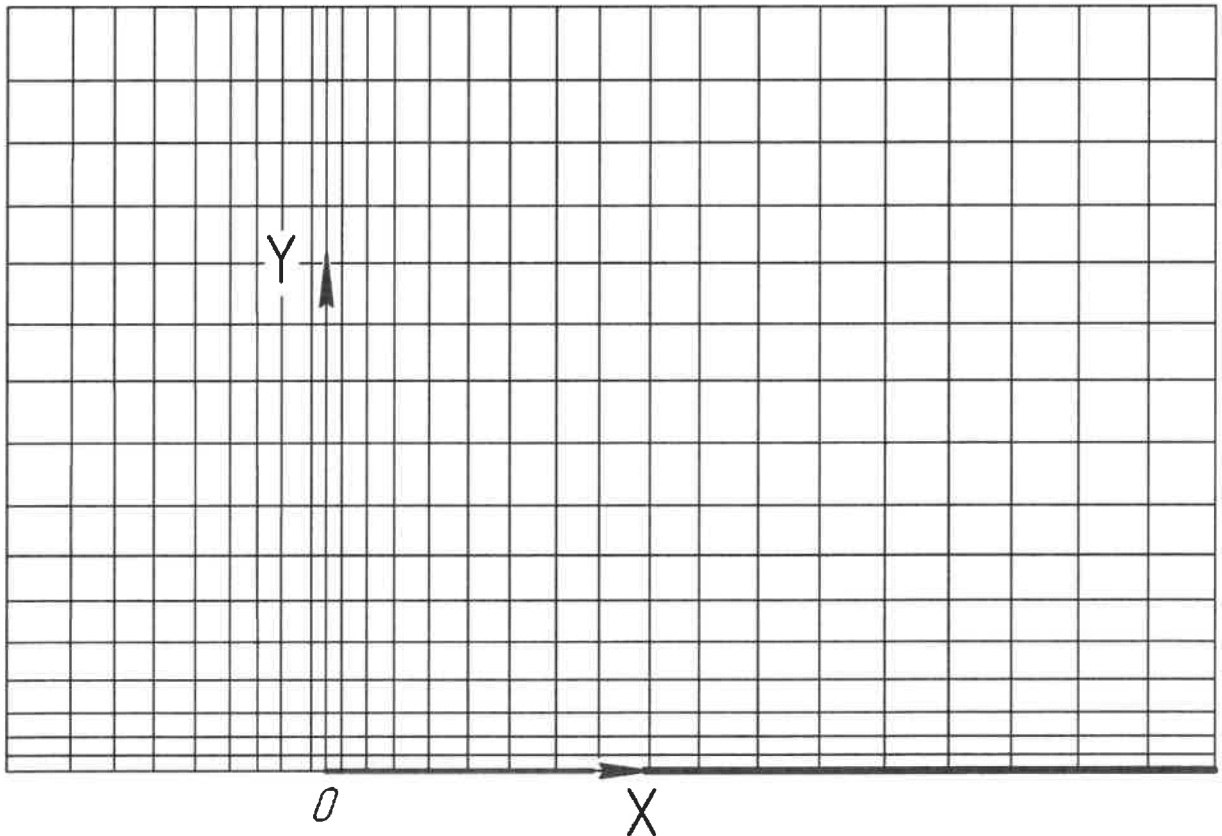


Рисунок 19 – Бесконечно тонкая пластина, установленная под нулевым углом атаки

В настоящей работе основное внимание уделяется обтеканию носовой части пластины, как наиболее неравновесной области течения. В этой связи протяженность пластины по оси  $OX$  не имеет принципиального значения, если она достаточно велика, чтобы не оказывать влияния на обтекание носовой части.

При такой постановке задачи и с учетом того, что толщина пластины пренебрежимо мала, в качестве характерного размера целесообразно принять среднюю длину свободного пробега молекулы в невозмущенном потоке. Специально отметим специфическое свойство задачи, сформулированной указанным образом. Выбор характерного размера и соответствующего ему числа Кнудсена ( $Kn=1$ ) означает только масштаб рассматриваемых процессов, и не относится к степени разреженности газа.

В качестве единиц измерения приняты параметры газовой среды в невозмущенном потоке: плотность –  $\rho_\infty$ ; температура –  $T_\infty$ ; давление и напряжения –  $p_\infty = \rho_\infty RT_\infty$  ( $R$  – удельная газовая постоянная); скорость –  $\sqrt{RT_\infty}$ ; коэффициент вязкости –  $\mu_\infty$ ; время –  $\tau_\infty = \mu_\infty / p_\infty$ ; геометрический размер –  $\lambda_\infty = \tau_\infty \sqrt{RT_\infty}$  (длина свободного пробега молекулы); единица теплового потока –  $p_\infty \sqrt{RT_\infty}$ .

Пластина термостабилизирована и имеет температуру  $T_w$ .

Воспользуемся системой уравнений НСФ в безразмерной форме (2.1) из второй главы настоящей работы.

Для коэффициента вязкости используется аппроксимация  $\mu/\mu_\infty = (T/T_\infty)^s$ . Показатель степени  $s$  принят  $s=1$ , а параметр  $Z$  в коэффициенте объемной вязкости принят  $Z = 2.5$ .

На поверхности пластины выставлялись граничные условия скольжения пограничного слоя [26]:

$$u_x|_{y=0} = \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \left( \zeta_u \frac{\partial u_x}{\partial y} + \zeta_{ut} \frac{1}{\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial x} \right) \quad (3.4)$$

$$T|_{y=0} - T_w = \zeta_T \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (3.5)$$

Значения коэффициентов  $\zeta_{ut}$ ,  $\zeta_T$  соответствовали [26] и при условии равенства единице коэффициентов аккомодации энергии и тангенциального импульса составляли  $\zeta_{ut} = 1.431$ ,  $\zeta_T = 0.2 \dots 0.735$ . Коэффициент  $\zeta_u = 2.862$  был завышен вдвое в соответствии с [81].

Так же, как в разделе 3.1.2, уравнения (3.4) и (3.5) были преобразованы следующим образом:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\rho\sqrt{T}}{\zeta_u \mu} u_x - \frac{\zeta_{ut}}{\zeta_u \sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial x},$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{4(\gamma-1)\rho\sqrt{T}}{(9\gamma-5)\zeta_T \mu} (T - T_W).$$

Было отмечено, что такое преобразование позволяет включить граничные условия в разностную схему решения дифференциальных уравнений  $u_x$  и  $T$ . Кроме этого было учтено, что граничные условия скольжения пограничного слоя предусматривают линейный закон изменения скорости и температуры в кнудсеновском слое [26], т. е.

$$\left. \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

Специфика работы основана на соображениях феноменологического характера. Острая кромка физического тела, даже интерпретируемая как абсолютно острая в силу пренебрежимо малых размеров затупленной области, может содержать точку торможения потока. Параметры газа на линии тока, заканчивающейся в точке торможения (линии торможения), будут существенно отличаться от параметров на соседних линиях, сколь угодно близких к данной линии в случае абсолютно острой кромки.

В рассматриваемой задаче обтекания тонкой пластины, установленной под нулевым углом атаки, торможение потока на носике пластины происходит преимущественно за счет касательных напряжений  $P_{xy}$ . Перед носиком пластины

эти напряжения тождественно обращаются в ноль в силу условий симметрии течения.

Нормальные напряжения  $P_{xx}$  значительно меньше напряжений, возникающих в точке торможения. Таким образом, при решении задачи в традиционной постановке поток перед носиком и на нем оказывается "недоторможенным".

В настоящей работе предлагается следующий алгоритм решения системы (2.1) на оси  $OX$ . На участке этой оси, заканчивающимся носиком пластины и являющимся линией торможения, строится решение с точкой торможения на носике пластины. Для уравнения движения — это первая краевая задача, так как в точке торможения заданы значения искомой функции  $u_x$ . Для уравнения энергии — третья краевая задача, связывающая в точке торможения значение температуры с ее производной:

$$T|_{x=0, y=0} - T_w = -\zeta_T \frac{\mu}{\rho\sqrt{T}} \frac{\partial T}{\partial x}$$

Это выражение представляет собой граничное условие на поверхности малой площадки, внешняя нормаль которой направлена против оси  $OX$ .

Затем строится решение второй краевой задачи на всей оси  $OX$ . Коэффициенты ленточной матрицы определяются традиционным способом, а значения искомой функции на участке линии торможения определяются как средневзвешенное традиционного решения и решения с точкой торможения. Весовые коэффициенты определены свободным параметром модели  $\beta$ , представляющим собой весовую долю решения с точкой торможения. Значение этого коэффициента подбирается в процессе тестирования модели.

### 3.2.2 Численная реализация

В численном решении использовалась разностная схема второго порядка точности. Для уравнений движения и энергии системы (2.1) применялся алгоритм Томаса [82] с нестационарным членом, сводящийся к решению ленточной матрицы вдоль направления оси  $OX$  при фиксированном значении координаты  $y$ . Решение

реализовывалось как вторая краевая задача, в которой на нижней по потоку границе вычислительной области принималось

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0.$$

Для уравнения неразрывности ставилась задача Коши на поле скоростей, определенном на предыдущем временном шаге.

Процедура обезразмеривания системы уравнений:

$$x, y \rightarrow \lambda_\infty = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} \sqrt{RT_\infty} = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty \sqrt{RT_\infty}};$$

$$Kn_\infty = 1;$$

$$t \rightarrow \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty};$$

$$u_i \rightarrow \sqrt{RT_\infty}.$$

После ряда преобразований система приобретает следующий вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) \rho = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} \right) = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + u_x \frac{\partial T}{\partial x} + u_y \frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\gamma - 1}{\rho} \left( \begin{array}{l} P_{xx} \frac{\partial u_x}{\partial x} + P_{xy} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \\ P_{yy} \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \end{array} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Здесь принято:

$$\mu = T^s; z = \frac{2}{5 - 3\gamma}, \text{ где } P_r = \frac{4\gamma}{9\gamma - 5}$$

$$p_{xx} = -2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad p_{yy} = -2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad p_{xy} = -\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$$

$$q_x = -\frac{9\gamma - 5}{4(\gamma - 1)} \mu \frac{\partial T}{\partial x} \quad q_y = -\frac{9\gamma - 5}{4(\gamma - 1)} \mu \frac{\partial T}{\partial y}$$

Общая форма дифференциальных уравнений для  $u_x, u_y, T$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + S2X \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + S2Y \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + S1X \frac{\partial F}{\partial x} + S1Y \frac{\partial F}{\partial y} + S0F = Sr$$

Таблица 4 – Коэффициенты дифференциального уравнения

$F$	$S2x$	$S2y$	$S1x$	$S1y$	$S0$
$u_x$	$-\frac{2\mu}{\rho}$	$-\frac{\mu}{\rho}$	$u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x}$	$u_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y}$	0
$u_y$	$\frac{\mu}{\rho}$	$-\frac{2\mu}{\rho}$	$u_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x}$	$u_y - 2 \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y}$	0
$T$	$\frac{9\gamma - 5}{4} \frac{\mu}{\rho}$	$\frac{9\gamma - 5}{4} \frac{\mu}{\rho}$	$u_x - \frac{9\gamma - 5}{4} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial x}$	$u_y - \frac{9\gamma - 5}{4} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mu}{\partial y}$	$(\gamma - 1) \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)$

Таблица 5 – Коэффициенты дифференциального уравнения

$F$	$Sr$
$u_x$	$\frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$
$u_y$	$\frac{1}{\rho} \left( -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$
$T$	$(\gamma - 1) \frac{\mu}{\rho} \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 \right\}$

Аппроксимация производных

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} - \text{противопоточные на 3-х узлах}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \text{центральные на 3-х узлах}$$

Первые V2X, V1X, VX, V2Y, V1Y, VY и вторые W1X, WX, WX1, W1Y, WY, WY1 производные для данной задачи были вычислены в разделе 2.3 Метод численного решения.

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta x_{i-1}(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} F_{i-2} - \frac{\Delta x_{i-1} + \Delta x_i}{\Delta x_{i-1} \Delta x_i} F_{i-1} + \frac{\Delta x_{i-1} + 2\Delta x_i}{\Delta x_i(\Delta x_{i-1} + \Delta x_i)} F_i$$

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right|_i = \frac{2}{\Delta x_i(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} F_{i-1} - \frac{2}{\Delta x_i \Delta x_{i+1}} F_i + \frac{2}{\Delta x_{i+1}(\Delta x_i + \Delta x_{i+1})} F_{i+1}$$

Уровень  $Y=0$  (ось симметрии)

В буфере ( $Nx < i < 0$ )  $LB(Nx2 : -1)$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0$$

$$\left. \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|_{i,0} = \frac{1}{\Delta y_1} u_{yi,1}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = -\frac{2}{\Delta y_1^2} F_0 + \frac{2}{\Delta y_1^2} F_1$$

$$F = u_x, T$$

На пластине ( $0 \leq i \leq Mx$ )  $LP(0 : M1X)$

Дополнительная конечная разность  $F = u_y, \frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial y}, \mu$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_0 = -\frac{2\Delta y_1 + \Delta y_2}{\Delta y_1(\Delta y_1 + \Delta y_2)} F_0 + \frac{\Delta y_1 + \Delta y_2}{\Delta y_1 \Delta y_2} F_1 - \frac{\Delta y_1}{\Delta y_2(\Delta y_1 + \Delta y_2)} F_2$$

Производные  $\frac{\partial u_x}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$  — определены граничными условиями



Уровень  $Y = y_1 = \Delta y_1$  (с учетом условий симметрии)

В буфере  $F = \rho, u_x, T, \mu$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_1 = \frac{2}{\Delta y_1} F_1 - \frac{2}{\Delta y_1} F_0$$

$$\left. \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|_1 = \frac{1}{\Delta y_1} u_{y1}$$

Над пластиной  $F = \rho, u_x, T, \mu$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_1 = -\frac{1}{\Delta y_1} F_0 + \frac{1}{\Delta y_1} F_1$$

$$\left. \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|_1 = \frac{1}{\Delta y_1} u_{y1}$$

Граничные условия на пластине.

Граничные условия в разностной схеме.

$u_y = 0$  – условие непротекания.

$$E_u = \xi_u \frac{\mu}{\rho \sqrt{T}}$$

$$E_{uT} = \xi_{uT} \frac{\mu}{\rho T}$$

$$E_T = \frac{9\gamma - 5}{4(\gamma - 1)} \xi_T \frac{\mu}{\rho \sqrt{T}}$$

$$u_x = E_u \frac{\partial u_x}{\partial y} + E_{uT} \frac{\partial T}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{E_u} u_x - \frac{E_{uT}}{E_u} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$T - T_w = E_T \frac{\partial T}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{E_T} T - \frac{T_w}{E_T}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{3}{E_T} T^{\rho-1} (T - T_w)$$

Для вторых производных принято:  $F = u_x, T$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \Big|_0 = \nu_0 \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_0 + \nu_{01} \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_1 + \nu_{02} \frac{\partial F}{\partial y} \Big|_2$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \Big|_0 = \left( \frac{\nu_0}{E_u} - \frac{\nu_{01}}{\Delta y_1} \right) u_{x0} + \frac{\nu_{01}}{\Delta y_1} u_{x1} + \nu_{02} \frac{\partial u_x}{\partial y} \Big|_2 - \nu_0 \frac{E_{uT}}{E_u} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_0$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_0 = \left( \frac{\nu_0}{E_T} - \frac{\nu_{01}}{\Delta y_1} \right) T_0 + \frac{\nu_{01}}{\Delta y_1} T_1 + \nu_{02} \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_2 - \nu_0 \frac{T_w}{E_T}$$

Вариант 2:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \Big|_0 = \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \Big|_0 = 0$$

В точке торможения:

$$u_x = u_y = 0; T = T_w - E_T \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_0, \text{ так как производная } T \text{ берется по направлению}$$

внешней нормали к площадке, то есть по оси  $0X$ .

На нижней по потоку границе:

$$\frac{\partial^3 F}{\partial x^3} = 0;$$

$$\Delta x_{Mx-2} = \Delta x_{Mx-1} = \Delta x_{Mx};$$

$$F_{Mx} = F_{Mx-3} - 3F_{Mx-2} + 3F_{Mx-1}$$

Задача Коши для плотности в окрестности и на уровне пластины:

Высоко над пластиной ( $y > \Delta y_1$ )

Около пластины ( $y = \Delta y_1$ )

$$\rho_{i,j} = \frac{\frac{\rho_{i,j}^{k-1}}{\Delta t} - u_{xi,j} (V_2 X_i \rho_{i-2,j} + V_1 X_i \rho_{i-1,j}) + \frac{u_{yi,j}}{\Delta y_1} \rho_{i,j-1}}{\frac{1}{\Delta t} + u_{xi,j} \cdot V X_i + \frac{u_{yi,j}}{\Delta y_1} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Big|_{i,j} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \Big|_{i,j}}$$

$\frac{u_{yi,j}}{\Delta y_1}$  заменено на  $u_{yi,j} G_{vy}$ , а должно быть  $\left| \frac{2}{\Delta y_1} \right|$  буфер,  $\left| \frac{1}{\Delta y_1} \right|$  пластина.

Уровень пластины  $y = 0$

Конечно-разностные выражения для  $\rho_{i,j}$  одинаковы для задач с точкой торможения и без нее.

В буфере:

$$\rho_{i,j} = \frac{\rho_{i,j}^{k-1} - u_{xi,j} (V2X_i \rho_{i-2,j} + V1X_i \rho_{i-1,j})}{\frac{1}{\Delta t} + u_{xi,j} \cdot VX_i + \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_{i,j} + \left. \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|_{i,j}}$$

На пластине разница только в определении  $\left. \frac{\partial u_y}{\partial y} \right|_{i,j}$ .

Высоко над пластиной ( $u_x, u_y, T$ ) использовались только центральные разности.

$V1X, VX, VX1$  – коэффициент  $\frac{\partial f}{\partial x}$

$W1X, WX, WX1$  – коэффициент  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$$B_i F_{i-1,j} + A_i F_{i,j} + C_i F_{i+1,j} = R_i$$

$$B_i = S_{2x} X_i \cdot W1X_i + S1X_i \cdot V1X_i$$

$$C_i = S_{2x} X_i \cdot WX1_i + S1X_i \cdot VX1_i$$

$$A_i = \frac{1}{\Delta t} + S2X_i \cdot WX_i + S2Y_i \cdot WY_j + S1X_i \cdot VX_i + S1Y_i \cdot VY_j + S0_i$$

$C_i$  и  $B_i$  имеет общую форму для всех уровней по  $y$ .

$$R_i = \frac{F_{i,j}^{k-1}}{\Delta t} + SR_i - S2Y_i \cdot (W1Y_j \cdot F_{i,j-1} + WY1_j \cdot F_{i,j+1}) - S1Y_i (V1Y_j \cdot F_{i,j-1} + VY1_j \cdot F_{i,j+1})$$

где  $F_{i,j}^{k-1}$  – значение аргумента на предыдущем шаге по времени.

$$F_{Mx,j} = 2 \cdot F_{Mx-1,j} - F_{Mx-2,j}$$

Реализация выполнена в подпрограмме MATRIX(F,j).

Скорость  $u_y$ 

$$u_y(:, 0) = 0$$

$$u_y(:, j > 0) \rightarrow \text{MATRIX}$$

Скорость  $u_x$ 

$$\Delta y_1 = \Delta y(1)$$

Уровень  $y = 0$  :

перед пластиной:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = -\frac{2}{\Delta y_1^2} u_{xi,0} + \frac{2}{\Delta y_1^2} u_{xi,1}$$

$$\text{В коэффициентах } s_{1y} \text{ и } s_r \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\Delta y_1} \frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_{y(1)}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$$

На пластине:

$$E_u = \xi_u \frac{\mu}{\rho \sqrt{T}} \quad E_{uT} = \xi_u \frac{\mu}{\rho T} \quad E_T = \frac{9\gamma - 5}{4(\gamma - 1)} \xi_T' \frac{\mu}{\rho \sqrt{T}}$$

Условия скольжения пограничного слоя:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{E_u} u_x - \frac{E_{uT}}{E_u} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \end{array} \right.$$

В коэффициентах  $s_{1y}$  и  $s_r$ 

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{1}{\Delta y_1} (\mu_{i,1} - \mu_{i,0});$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\Delta y_1} \frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_{y(1)}; \quad ;$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$$

Общая форма уровня:

$$A_i = \frac{1}{\Delta t} + S2X_i \cdot WX_i - S2Y_i \cdot \alpha \cdot \frac{2}{\Delta y_1^2} + S1X_i \cdot VX_i + S1Y_i \cdot (1 - \alpha) \frac{1}{E_u}$$

$$R_i = \frac{u_{xi,0}^{k-1}}{\Delta t} - S2Y_i \cdot \alpha \cdot \frac{2}{\Delta y_1^2} u_{xi,0} + S1Y \cdot (1 - \alpha) \frac{E_{uT}}{E_u} \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{i,0} + SR_i$$

Уровень  $y = y(1)$ :

перед пластиной:  $\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{2}{\Delta y_1} u_{xi,0} + \frac{2}{\Delta y_1} u_{xi,1}$

В коэффициентах  $s_{1y}$  и  $s_r$   $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ ;  $\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} = \frac{1}{\Delta y_1} \frac{\partial u_y}{\partial x} \Big|_{y(1)}$ ;  $\frac{\partial u_y}{\partial x} = 0$

Над пластиной: только центральные разности

Общая форма уровня:

$$A_i = \frac{1}{\Delta t} + S2X_i \cdot WX_i - S2Y_i \cdot WY_j + S1X_i \cdot VX_i + S1Y_i \cdot \left[ \alpha \frac{2}{\Delta y_1} + (1 - \alpha) VY_j \right]$$

$$R_i = \frac{u_{xi,1}^{k-1}}{\Delta t} + SR_i - S2Y_i \cdot (W1Y_j \cdot u_{xi,0} + WY1_j \cdot u_{xi,2}) - S1Y_i \cdot \left[ (1 - \alpha)(V1Y_j u_{xi,0} + VY1_j u_{xi,2}) - \alpha \frac{2}{\Delta y_1} u_{xi,0} \right]$$

### Температура

Уровень  $y = 0$ :

перед пластиной:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0; \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = -\frac{2}{\Delta y_1^2} T_{i,0} + \frac{2}{\Delta y_1^2} T_{i,1}$$

на пластине:

Условия скольжения пограничного слоя:

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{E_T} T - \frac{T_w}{E_T};$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Общая форма уровня:

$$A_i = \frac{1}{\Delta t} + S2X_i \cdot WX_i - S2Y_i \cdot \alpha \cdot \frac{2}{\Delta y_1^2} + S1X_i \cdot VX_i + S1X_i \cdot (1 - \alpha) \frac{1}{E_T}$$

$$R_i = \frac{T_{i,0}^{k-1}}{\Delta t} + SR_i - S0_i - S2Y_i \cdot \alpha \cdot \frac{2}{\Delta y_1^2} T_{i,1} + S1Y_i \cdot (1 - \alpha) \frac{T_w}{E_T}$$

Уровень  $y = y(1)$ :

перед пластиной: 
$$\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{2}{\Delta y_1} T_{i,0} + \frac{2}{\Delta y_1} T_{i,1}$$

над пластиной: только центральные разности.

Общая форма уравнения:

$$A_i = \frac{1}{\Delta t} + S2X_i \cdot WX_i + S2Y_i \cdot WY_j + S1X_i \cdot VX_i + S1Y_j \cdot \left[ \alpha \frac{2}{\Delta y_1} + (1 - \alpha) VY_j \right]$$

$$R_i = \frac{T_{i,0}^{k-1}}{\Delta t} + SR_i - S0_i - S2Y_i \cdot (W1Y_j \cdot T_{i,0} + WY1_j \cdot T_{i,2}) -$$

$$- S1Y_i \cdot \left[ (1 - \alpha) (V1Y_j \cdot T_{i,0} + VY1_j \cdot T_{i,2}) - \alpha \frac{2}{\Delta y_1} T_{i,0} \right]$$

Плотность (Задача Коши)

Уровень  $y = 0$

$$u_y \frac{\partial \rho}{\partial y} = 0$$

$$\rho_{i,0} = \frac{\rho_{i,0}^{k-1} - u_{xi,0} (V2C_i \rho_{i-2,0} + V1C_i \rho_{i-1,0})}{\frac{1}{\Delta t} + u_x \cdot VC_i + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}}$$

Уровень  $y = y(1)$ :

$$\text{перед пластиной: } \frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{2}{\Delta y_1} (\rho_{i,1} - \rho_{i,0})$$

$$\text{над пластиной: } \frac{\partial \rho}{\partial y} = V1Y_j \rho_{i,0} + VY_j \rho_{i,1} + VY1_j \rho_{i,2}$$

$$\rho_{i,1} = \frac{\frac{\rho_{i,1}^{\kappa-1}}{\Delta t} - u_x (V2C_i \rho_{i-2,1} + V1C_i \rho_{i-1,1}) + u_y \left[ \alpha \frac{2}{\Delta y_1} \rho_{i,0} - (1-\alpha) (V1Y_j \rho_{i,0} + VY1_j \rho_{i,2}) \right]}{\frac{1}{\Delta t} + u_x \cdot VC_i + u_y \left[ \alpha \frac{2}{\Delta y_1} + (1-\alpha) VY_j \right] + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}}$$

Высоко над пластиной:

$$\rho_{i,j} = \frac{\frac{\rho_{i,j}^{\kappa-1}}{\Delta t} - u_x (V2C_i \rho_{i-2,j} + V1C_i \rho_{i-1,j}) - u_y (V1Y_j \rho_{i,j-1} + VY1_j \rho_{i,j+1})}{\frac{1}{\Delta t} + u_x \cdot VC_i + u_y \cdot VY_j + \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}}$$

### 3.2.3 Результаты расчетов

Размер вычислительной области задавался следующим образом. Ввиду симметрии рассматривалась верхняя часть поля течения. Максимальное значение координаты  $Y$  составляло  $250\lambda_\infty$ , что позволило на верхней границе вычислительной области выставить условия невозмущенного потока. Длина пластины составляла  $200...250\lambda_\infty$ . Протяженность вычислительной области по координате  $X$  перед передней кромкой пластины составляла  $10...15\lambda_\infty$ .

Расчеты по МКУ [39] проводились с использованием программного пакета [72]. Рассматривались значения свободного параметра модели  $\beta=0.1 \dots 0.3$ . Наилучшее согласование с кинетическим решением было получено при  $\beta=0.12 \dots 0.14$ .

На Рисунке 20 представлены распределения нормального напряжения  $P_{yy}$  на линии  $y=0$ , при  $M_\infty=10.15$  и  $T_w=2.16T_\infty$ .

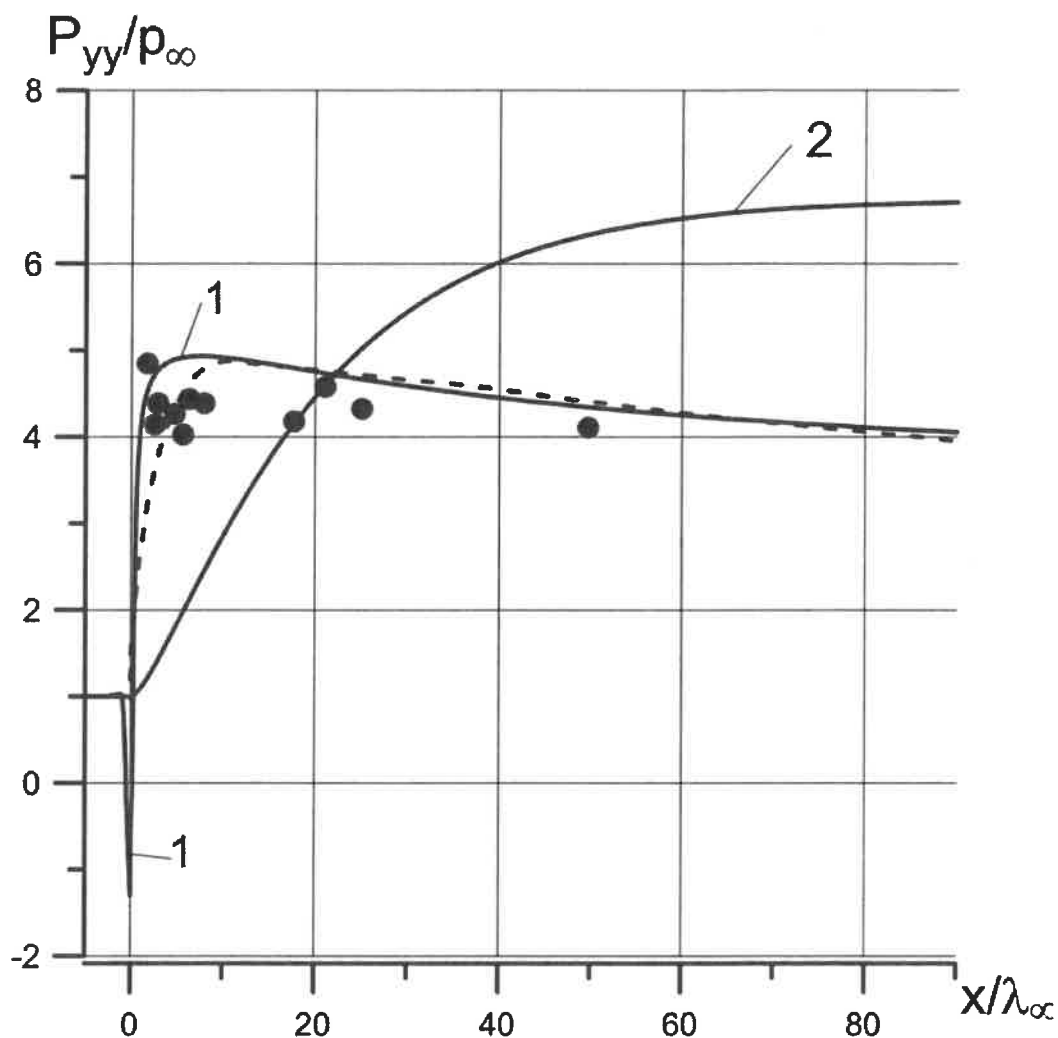


Рисунок 20 – Распределение нормального напряжения  $P_{yy}$  на линии  $y=0$ ,  $M_{\infty}=10.15$ . Пунктирная линия – МКУ [39], маркеры – экспериментальные данные [73], 1 – решение НСФ с точкой торможения, 2 – решение НСФ без точки торможения

В окрестности носика пластины у решения с точкой торможения наблюдается осцилляция решения. Кинетическое решение в этой области имеет разрыв, показанный на Рисунке 21 в увеличенном виде. График взят из работы [63]. Координата  $R$  соответствует координате  $x$  настоящей работы.



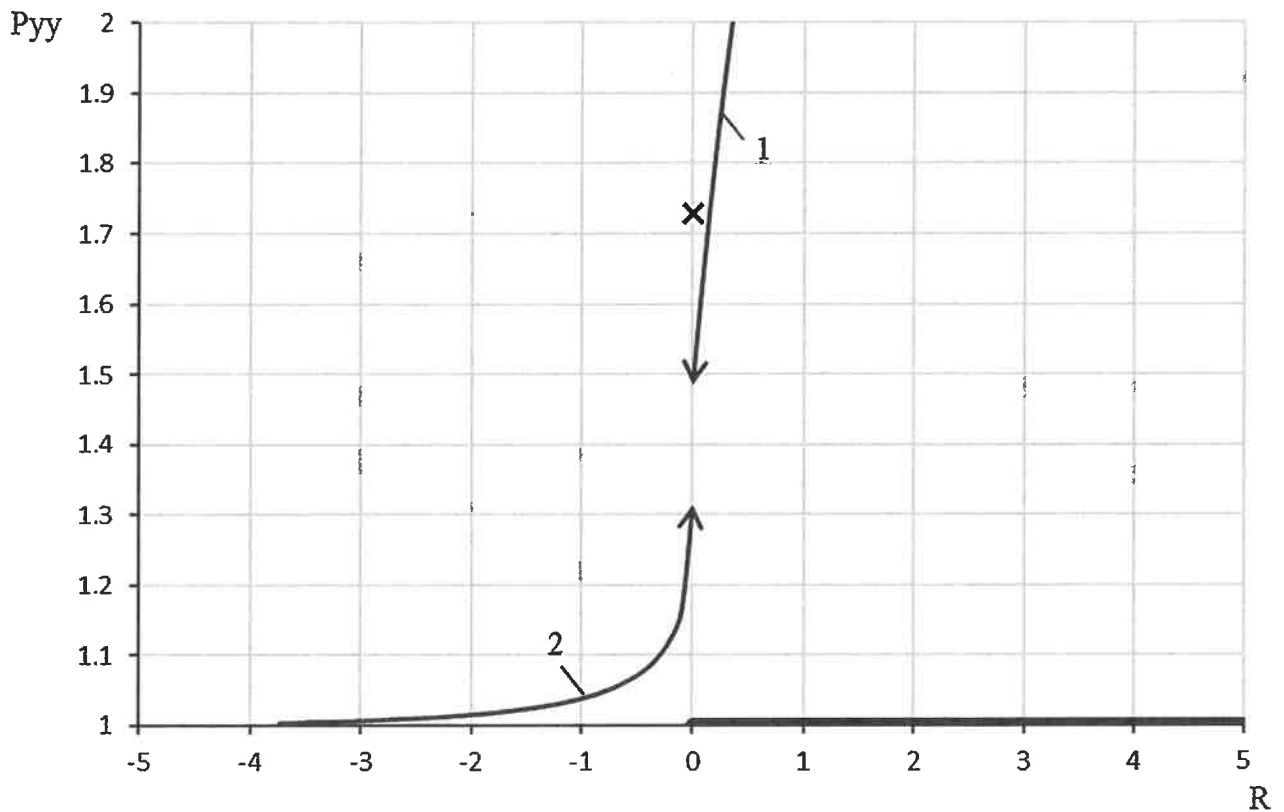


Рисунок 21 – Разрыв линии нормального напряжения  $P_{yy}$  [63]. 1 – на поверхности пластины, 2 – перед носиком пластины, крестик – значение напряжения в точке, разделяющей газ и поверхность пластины

Разрыв, показанный на Рисунке 21, имеет физическую природу в той степени, в которой термин "физическая природа" может быть применим к данной гипотетической задаче. Осцилляция кривой 1 на Рисунке 20 является особенностью численного решения в окрестности точки разрыва параметров газа на носике пластины. В частности, изменение шага расчетной сетки у носика приводит к существенным изменениям минимального напряжения. При этом распределение по поверхности пластины остается практически неизменным.

Аналогичный характер имеют распределения давления, показанные на Рисунке 22.

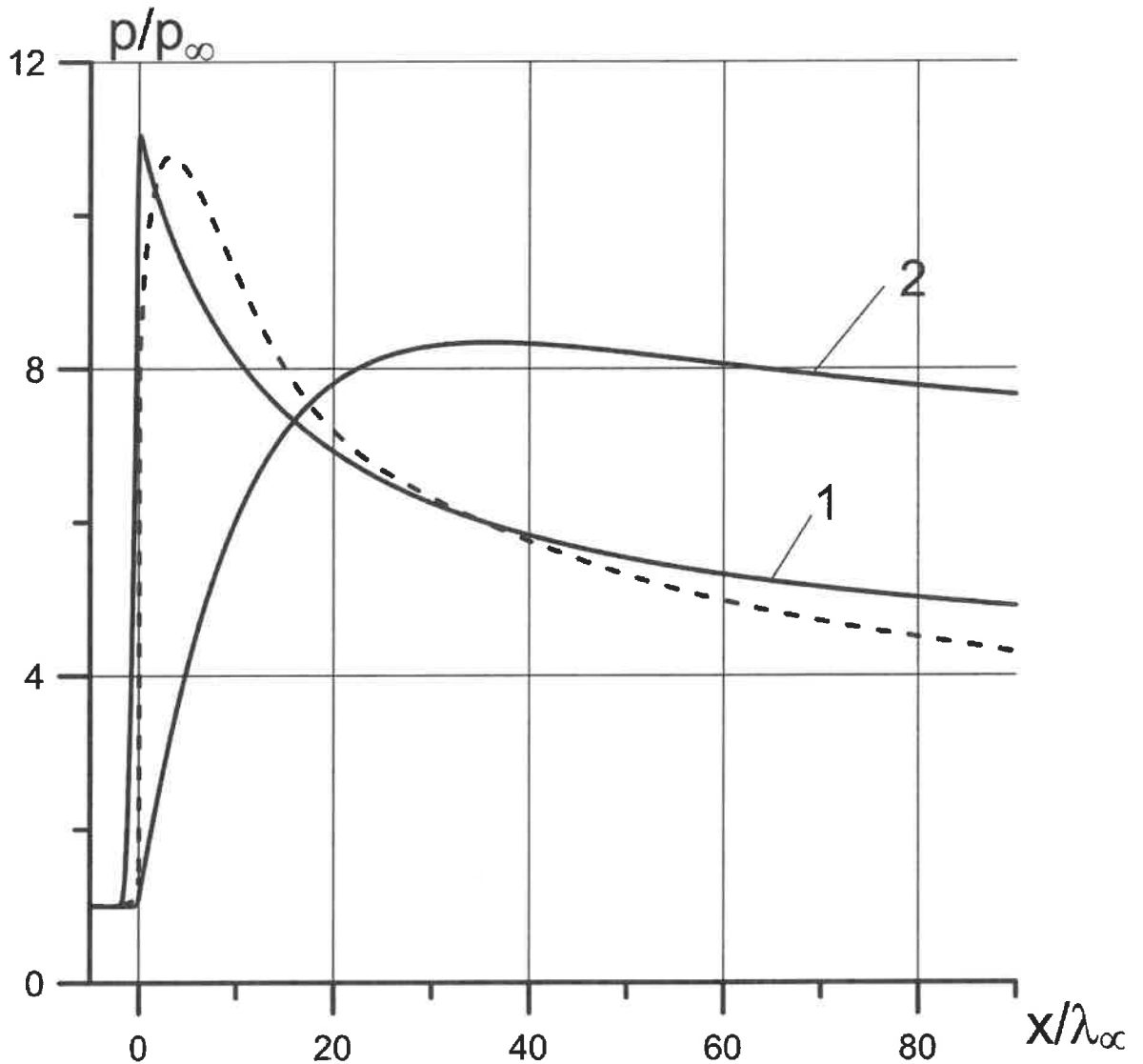


Рисунок 22 – Распределение давления на линии  $y=0$ ,  $M_\infty=10.15$ . Пунктирная линия – МКУ, 1 – решение с НСФ точкой торможения, 2 – решение НСФ без точки торможения

Кривые распределений давления не содержат осцилляции и разрыва, что связано с тем, что давление является осредненной величиной нормальных напряжений, подчиняющейся закону сохранения энергии.

По данным Рисунков 20 и 22 можно сделать вывод о том, что внесение в расчет точки торможения позволяет существенно улучшить решение модели НСФ. Менее существенное улучшение наблюдается для температуры и плотности газа. Распределение этих параметров показано на Рисунках 23 и 24.

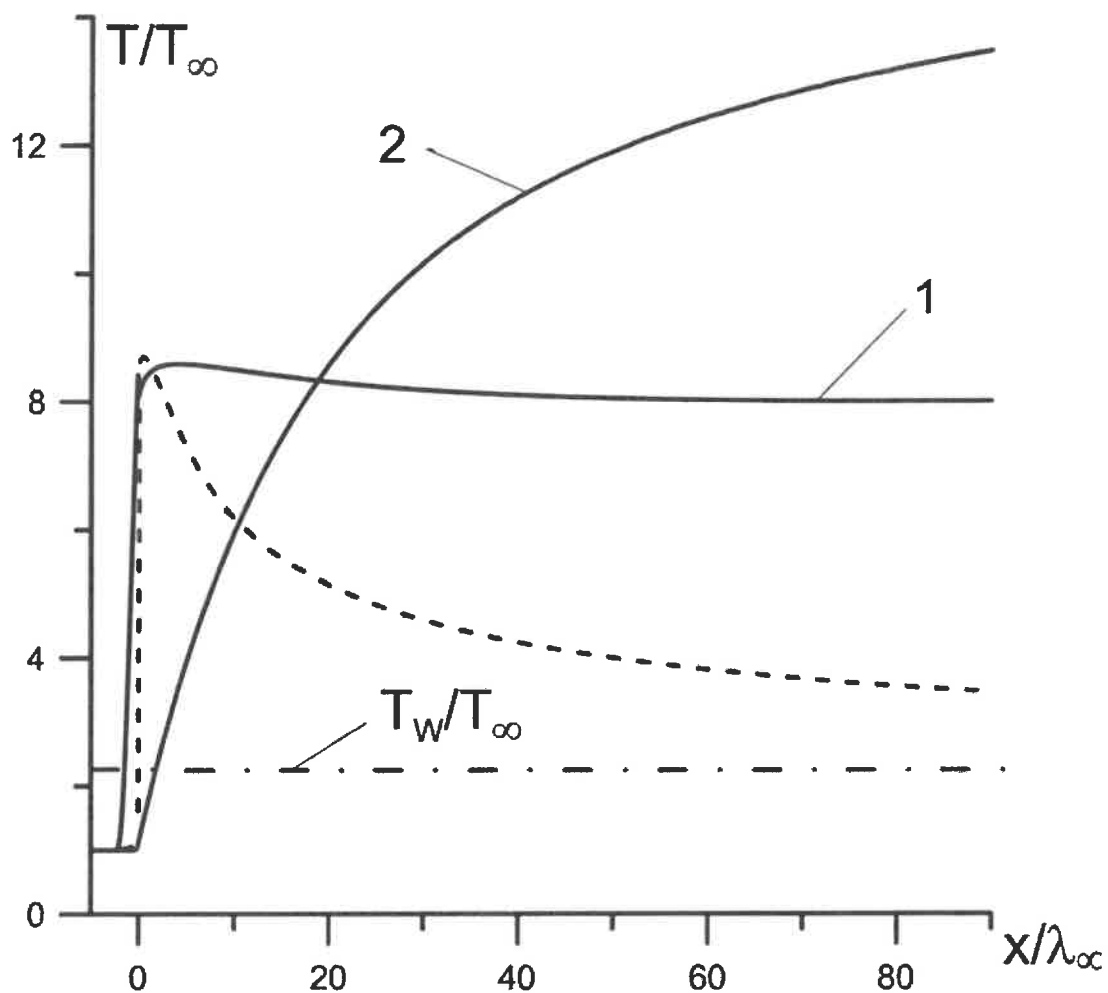


Рисунок 23 – Распределение температуры на линии  $y=0$ ,  $M_\infty=10.15$ .

Пунктирная линия – МКУ, штрихпунктирная линия – температура поверхности, 1 – решение НСФ с точкой торможения, 2 – решение НСФ без точки торможения

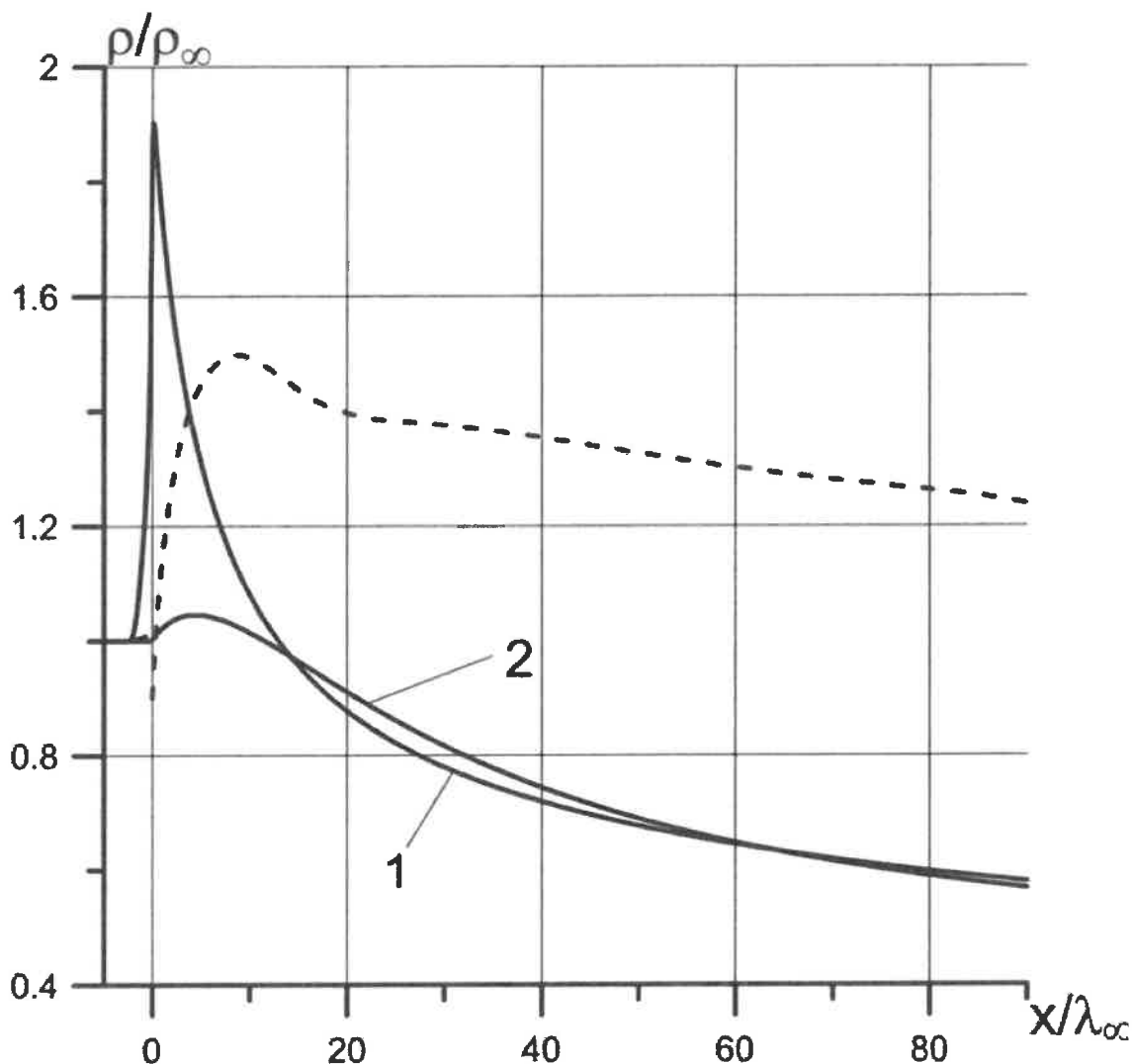


Рисунок 24 – Распределение плотности на линии  $y=0$ ,  $M_\infty=10.15$ .

Пунктирная линия – МКУ, 1 – решение НСФ с точкой торможения,  
2 – решение НСФ без точки торможения

Обращает на себя внимание тот факт, что температура вдоль поверхности пластин не уменьшается даже на графиках модели НСФ с точкой торможения, хотя температура пластины в этой области существенно ниже температуры газа.

Похожие результаты получены для умеренных сверхзвуковых течений. На Рисунках 25-27 показаны распределения давления, температуры и плотности при  $M_\infty=3$  и  $T_w=1.2T_\infty$ .

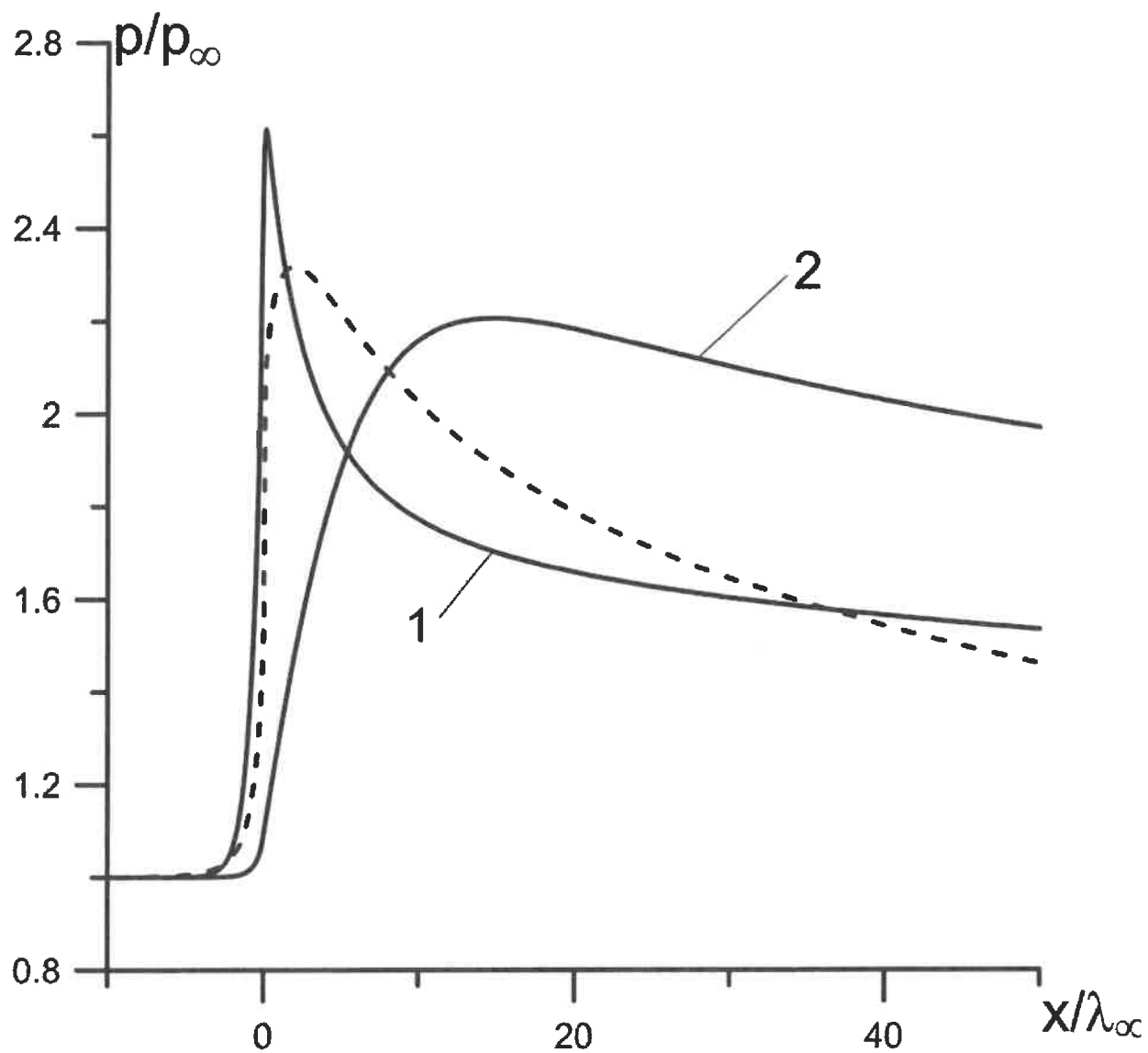


Рисунок 25 – Распределение давления на линии  $y=0$ ,  $M_\infty=3$ . Пунктирная линия – МКУ, 1 – решение с НСФ точкой торможения, 2 – решение НСФ без точки торможения

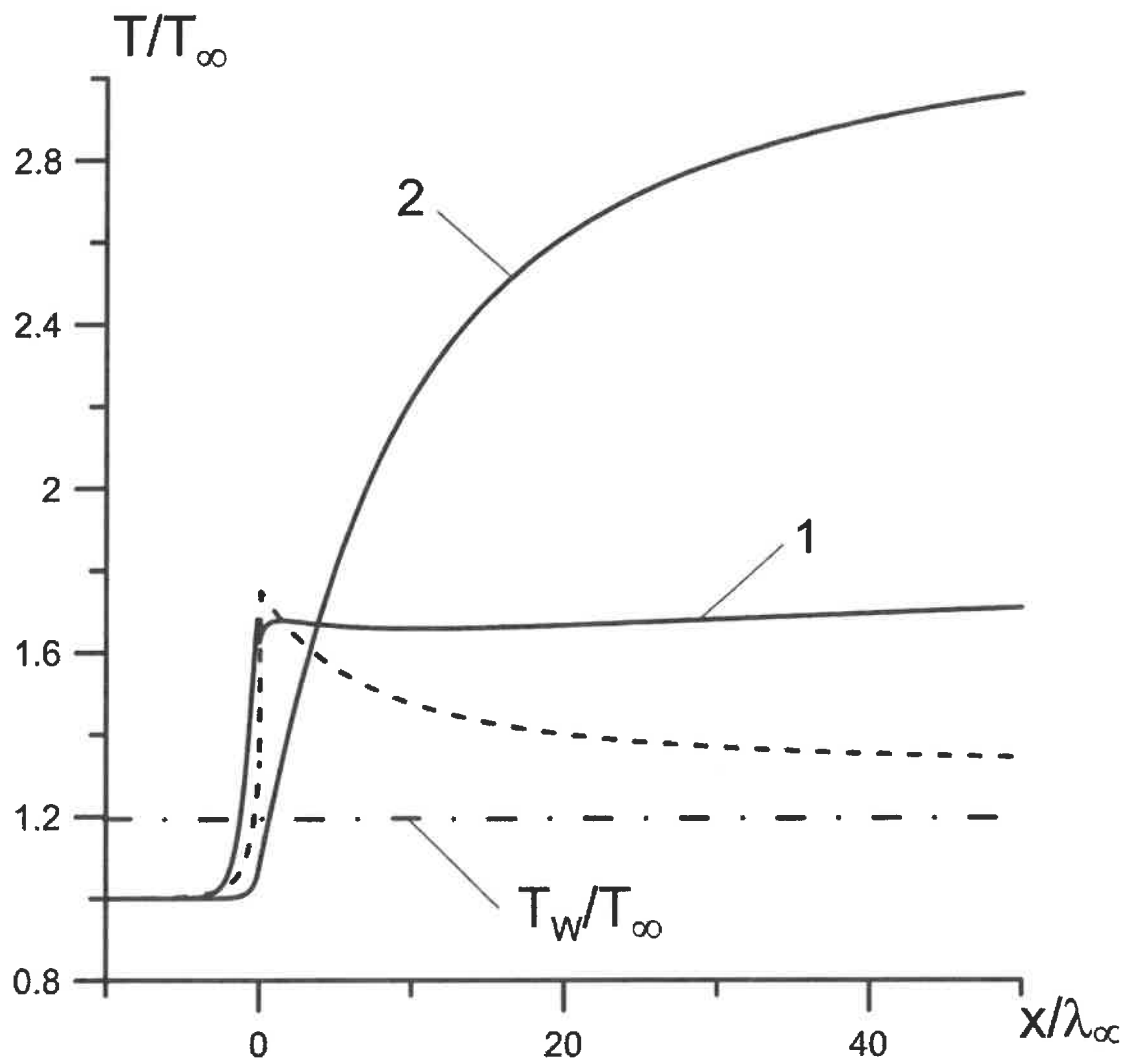


Рисунок 26 – Распределение температуры на линии  $y=0$ ,  $M_\infty=3$ . Пунктирная линия – МКУ, штрихпунктирная линия – температура поверхности, 1 – решение НСФ с точкой торможения, 2 – решение НСФ без точки торможения

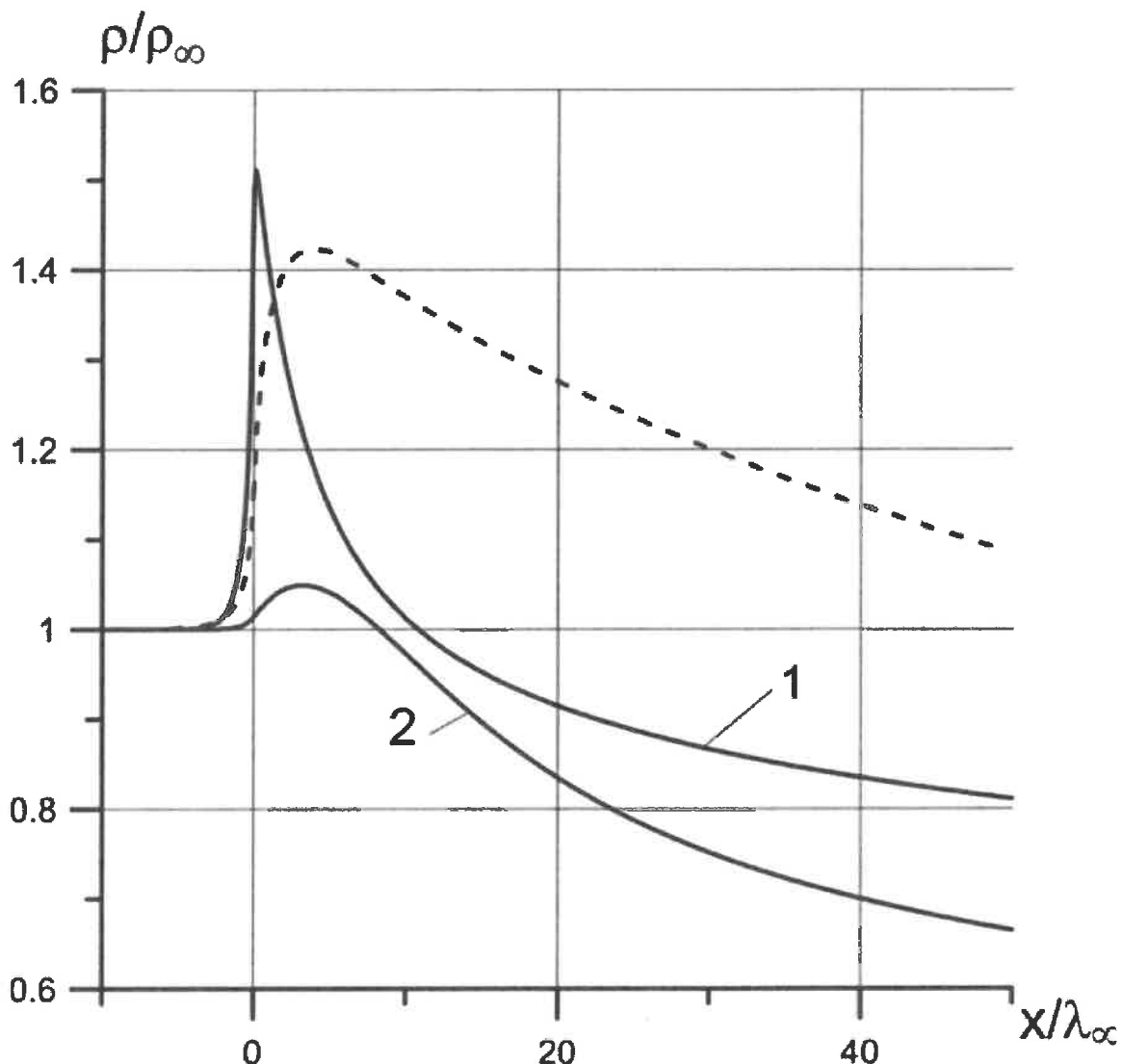


Рисунок 27 – Распределение плотности на линии  $y=0$ ,  $M_\infty=3$ . Пунктирная линия – МКУ, 1 – решение НСФ с точкой торможения, 2 – решение НСФ без точки торможения

### 3.3 Заключение к Главе 3

Предложенный метод решения системы уравнений модели НСФ позволяет получать гладкие, без осцилляций в окрестности острой кромки, решения. Проведенные расчеты показывают, что плотность газа на передней кромке пластины существенно занижена во всем рассмотренном интервале чисел Маха. Температура, напротив – значительно завышена. Удовлетворительное совпадение

с точки зрения практических задач имеет место для распределения давления. Наилучшие результаты получены для умеренных чисел Маха.

Отмеченный эффект является естественным свойством модели НСФ, представляющей собой модель первого приближения в смысле процедуры Чепмена-Энскога. Модели этого приближения теоретически не обоснованы в высоко неравновесных течениях, возникающих в окрестности острой кромки.

Предложенный вариант решения модели НСФ в задаче обтекания острой кромки позволяет существенно улучшить результаты расчета.

Анализ графиков распределения температуры и плотности позволяет предположить, что граничные условия скольжения пограничного слоя недостаточно адекватны физическим процессам, притекающим в условиях столь высокой динамической неравновесности.



## ГЛАВА 4 ОЦЕНКА СТЕПЕНИ НЕРАВНОВЕСНОСТИ ГАЗА В СВЕРХЗВУКОВЫХ ПОТОКАХ

### 4.1 Особенности течений, содержащих ударные волны

В окрестности острой кромки возникает высоконеравновесное течение газа, что характерно при больших числах Маха. В таком случае происходит высокоградиентное изменение энергии как внутренних, так и поступательных степеней свободы молекул. По данной причине появляется немонотонность в распределении параметров газа в окрестности острой передней кромки [58].

В гиперзвуковой ударной волне возможен перехлест функции распределения пар молекул в одноатомном газе, как показано в работе [83] на основе аналитических методов. Стоит отметить, что если рассмотреть обтекание пластины многоатомным газом, то учет вращательного движения молекул приводит к уменьшению температуры в возмущенной области и нормального импульса на поверхности пластины [74]. Если рассматривать фронт ударной волны при обтекании газовой смесью, то важно учитывать компоненты с малой концентрацией, как показано в работе [84].

Возникновение ударной волны сопровождается значительным увеличением градиентов газодинамических параметров, что указывает на поступательную (динамическую) неравновесность [85]. Одной из особенностей обтекания острой кромки является появление сильно сжатой области по длине и ширине пластины, когда ударная волна максимально приближается к носовой части летательного аппарата и локализуется в окрестности одной точки [16, 75].

Возмущенная область вблизи острой кромки порядка длины свободного пробега молекулы, поэтому наиболее важно проанализировать картину обтекания в окрестности острой кромки. Определение газодинамических параметров в этой

области становится особенно затруднительным, если расчет производится при больших числах Маха.

Если рассмотреть тела более сложной геометрии, например тонкий острый клин, то в окрестности носика наблюдается резкое изменение газодинамических параметров [60], сопровождающееся высоким разогревом поверхности. Учет изменения формы кромки вследствие высокотемпературной эрозии необходим при решении ряда практических задач.

Кинетические модели, описывающие течение на молекулярном уровне, имеют удвоенную по сравнению с гидродинамическими моделями размерность, что для практических задач сложно реализуемо. Применимость кинетических моделей в высоконеравновесной области также обусловлена очень мелкими сетками, что сопровождается значительным увеличением необходимых вычислительных ресурсов [63,73].

## 4.2 Определение степени неравновесности течения

Под степенью неравновесности будем понимать, определенную на единичном отрезке величину [47, 86]:

$$W = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{6 - 2\gamma}} \sqrt{\frac{P_{\alpha\beta} P_{\alpha\beta} + \frac{9}{4}(5 - 3\gamma)(\gamma - 1)(\rho R(T_t - T_r))^2}{\rho}}$$

В этом выражении: повторяющиеся греческие индексы подразумевают нотацию Эйнштейна;

$\gamma$  – показатель адиабаты;

$T_t$  – поступательная температура молекул;

$T_r$  – вращательная температура молекул;

$\rho$  – плотность газа;

$R$  – удельная газовая постоянная;

$p = \rho RT$  – термодинамическое давление;

$T = \frac{3}{2}(\gamma - 1)T_t + \frac{5 - 3\gamma}{2}T_r$  – термодинамическая температура;

$p_{ij} = P_{ij} - p$  – неравновесное напряжение (компонент девиатора напряжений);

$P_{ij}$  – компонент тензора напряжений.

Определенная таким образом степень неравновесности имеет простой физический смысл, наиболее наглядный на примере одноатомного газа, в котором множитель  $5 - 3\gamma$  обращается в ноль. В этом случае дробь содержит два инварианта тензора напряжений: его свертку и квадрат его девиатора. Множитель перед дробью выбран так, чтобы в теоретическом пределе степень неравновесности равнялась единице.

Теоретический предел неравновесного состояния имеет место в том случае, если вся энергия теплового движения молекул сосредоточена на одной поступательной степени свободы.

### 4.3 Результаты расчетов

Расчеты проводились на базе модельного кинетического уравнения многоатомных газов [39]. Задача о профиле плоской ударной волны решалась с использованием программного пакета [55].

Обтекание тонкой пластины, установленной под нулевым углом атаки, рассчитывалась программным пакетом [72].

Рассматривались течения двухатомного газа в интервале чисел Маха  $M_\infty = 2 \dots 8$ . Параметр поступательно-вращательной релаксации принимался постоянным и составлял  $Z = 5$ . При решении задачи обтекания пластины температура поверхности принималась равной 0.1 от температуры торможения потока.

Расчеты показали, что в плоской ударной волне максимальное значение степени неравновесности достигается примерно на середине профиля скорости. В задаче обтекания тонкой пластины максимум неравновесности наблюдается на носике пластины.

На Рисунке 28 приводится график зависимости максимального значения степени неравновесности от числа Маха. Сплошная линия соответствует задаче обтекания пластины, пунктирная – плоской ударной волне.

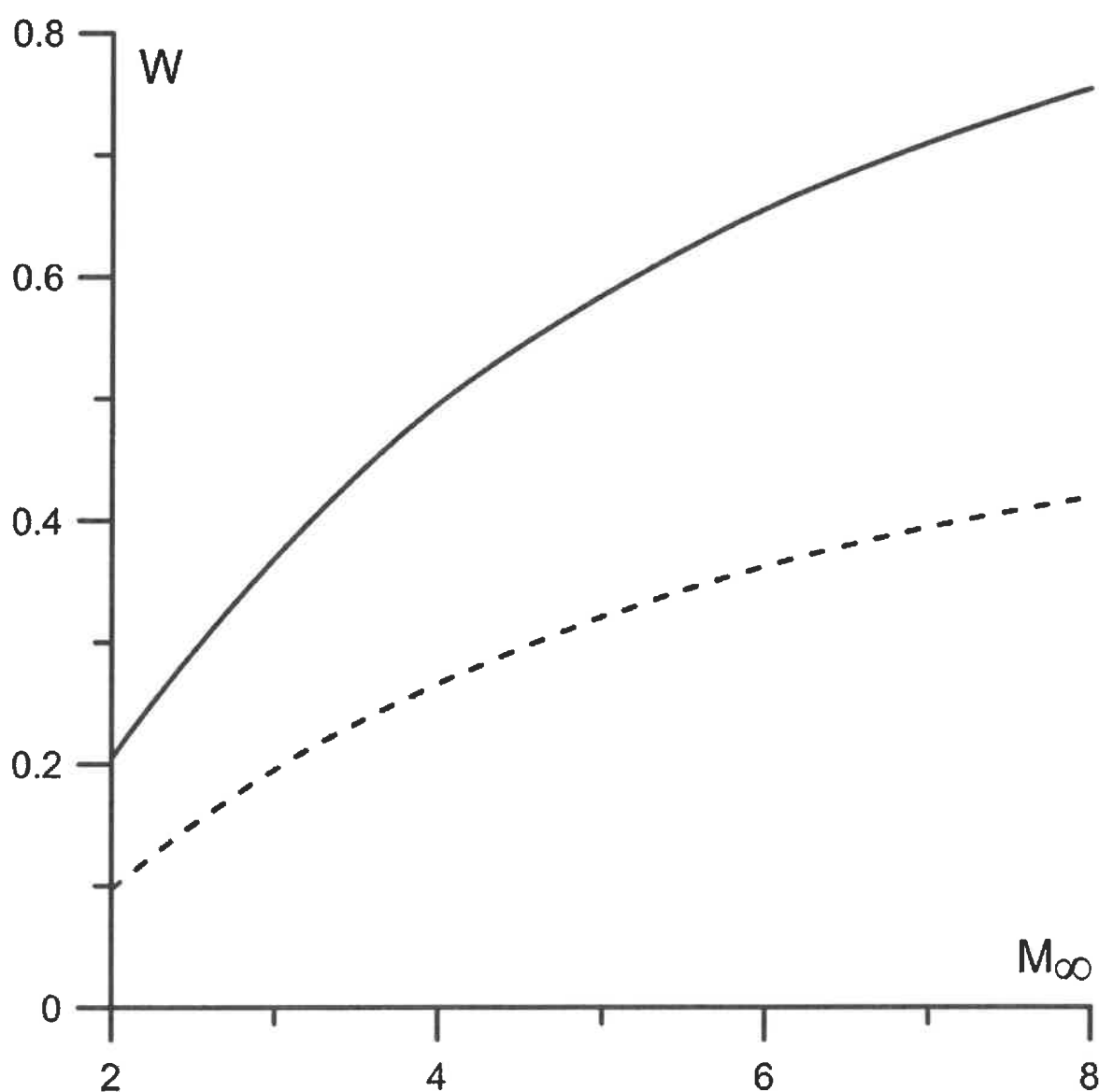


Рисунок 28 – Зависимость максимального значения степени неравновесности от числа Маха. Сплошная линия соответствует задаче обтекания пластины[72], пунктирная – плоской ударной волне[55]

#### 4.4 Заключение к Главе 4

Проведенные расчеты показывают, что течение в области носика тонкой пластины (острой кромки), существенно более неравновесно, чем в плоской ударной волне. Максимальные степени неравновесности отличаются примерно вдвое.

Из теории скачков уплотнения, используемой в механике сплошной среды, известно, что прямой скачок (плоская ударная волна) более интенсивен, чем косые скачки. При обтекании тонкой пластины возникает косой скачок. При гиперзвуковых числах Маха скачок почти прижат к обтекаемой поверхности.

С точки зрения молекулярно-кинетической теории газов ударная волна (скачок уплотнения) представляет собой высокоградиентную и, следовательно, высоко неравновесную область. При обтекании острой кромки на неравновесность течения оказывает влияние не только большие скорости потока, но и малые размеры обтекаемого объекта, т.е. острой кромки.

Модели первого приближения, например, модель НСФ, теоретически обоснованы только в области слабо неравновесных течений. При расчете профилей ударных волн модель НСФ дает слишком малые возмущенные области. В ряде работ, в том числе приведенных во Введении, показано, что модель НСФ может давать даже качественно неверные результаты при описании обтекания поверхностей большой кривизны, интерпретируемых как острые кромки.

Полученные результаты позволяют провести количественную оценку применимости моделей первого приближения.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

**Разработана физико-математическая модель высокоскоростного обтекания поверхностей большой кривизны.**

**Основные новые научные результаты, полученные в диссертационной работе, состоят в следующем:**

1. Предложен метод решения модели НСФ при обтекании острой кромки пластины.

Внесение в расчет точки торможения позволяет существенно улучшить решение модели НСФ.

Анализ графиков распределения температуры и плотности позволяет предположить, что граничные условия скольжения пограничного слоя недостаточно адекватны физическим процессам, протекающим в условиях столь высокой динамической неравновесности.

2. Проведена оценка моделей первого приближения по числам Кнудсена.

Проведенные расчеты показали, что при  $Kn > 10^{-2}$  модели НСФ и M2T показали различные распределения температуры. Распределения плотности достаточно близки во всем интервале. Расширение области применимости модели НСФ до  $Kn = 10^{-1}$  при расчете обтекания острых кромок может приводить к существенным погрешностям.

### **Перспективы дальнейшей разработки темы**

1. Создание физико-математических моделей тел с более сложной геометрией, например клин.

2. Постановка граничных условий, которые физически адекватно характеризуют течение в высоко неравновесной области.

**СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

1. Аржаников Н.С., Садекова Г.С. Аэродинамика летательных аппаратов: Учебник для студентов авиационных специальностей вузов. – М.: Высш.шк., 1983. – 359 с.
2. Никитченко Ю.А. О целесообразности учета коэффициента объемной вязкости в задачах газовой динамики // Изв. РАН. МЖГ. – 2018. – № 2. – С. 128-138.
3. Никитченко Ю.А. Модели первого приближения для неравновесных течений многоатомных газов [Электронный ресурс] // Труды МАИ. – 2014. – №77.– Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=52938>.
4. Бузыкин О.Г., Галкин В.С. О модификациях газодинамических уравнений высших приближений метода Чепмена-Энскога // Изв. РАН. МЖГ. – 2001. – №3. – С.185-199.
5. Галкин В.С., Шавалиев М.Ш. Газодинамические уравнения высших приближений метода Чепмена-Энскога// Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 1998. – № 4. – С.3-28.
6. Никитченко Ю.А. Вариант замыкания системы моментных уравнений произвольного порядка // ЖВМ и МФ. – 2022. – Том 62. – № 3. – С. 499–520.
7. Fisco K.A., Chapman D.R. Comparison of Burnett, super-Burnett and Monte Carlo solutions for hypersonic shock structure// Rare field Gas Dynamics: Progr. in Astronaut. and Aeronaut. Washington: AIAA, 1989. V. 118. –P. 374-395.
8. Probstein RF, Kemp NH. Viscous aerodynamic characteristics in hypersonic rarefied gas flow // J Aero/Space Sciences. –1960. –27(3):174–92.
9. Ho H-T, Probstein RF. The compressible viscous layer in rarefied hypersonic flow. Proc. 2nd Intern. Symp. Rarefied Gas Dynamics. Ed. L. Talbot, N.Y.: Acad. Press, 1961. – Pp. 525–52.

10. Tolstykh AI. The aerodynamic characteristics of a cooled spherical bluntness in a hypersonic flow of a slightly rarefied gas // *IzvAkadNauk SSSR MZhG.* –1969. –6:163–6.
11. Davis RT. Numerical solution of the hypersonic viscous shock layer equations // *AIAA Journal.* –1970. –8(5):843–51.
12. Седов Л.И. Доклады АН СССР. –1965. – Т. 165. – №3.
13. Гусев В.Н., Егоров И.В., Ерофеев А.И., Провоторов В.П. Верификация моделей и методов в динамике разреженных газов // *Изв. РАН. МЖГ.* – 1999. – №2. – С.128-137.
14. Жданов, В.М. Процессы переноса и релаксации в молекулярных газах / В.М.Жданов, М.Я.Алиевский. –М.: Наука, 1989. – 336 с.
15. Pearson K. Mathematical contributions to the theory of evolution: – X. Supplement to a memoir on skew variation / K.Pearson // *Phil. Trans. Royal Soc. London A* 197, 1901. – 443.
16. Шершнева А.А., Кудрявцев А.Н., Бондарь Е.А. Численное моделирование сверхзвукового течения газа около плоской пластины на основе кинетических и континуальных моделей // *Вычислительные технологии.* – 2011. – Т. 16. – № 6. – С. 93-104.
17. Баранцев Р.Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. –М.: Наука, 1975. – 343 с.
18. Nocilla, S. The surface re-emission law in free molecular flow / S.Nocilla // *Proc. of 3rd Int. symp. on rarefied gas dynamics.* –1963. –V.1. –Pp. 327-346.
19. Черчиньяни, К. Математические методы в кинетической теории газов / К.Черчиньяни. –М.: Наука, 1973. –245 с.
20. Gross, E.F. Boundary value problems in kinetic theory of gases / E.F.Gross, E.A.Jackson, S.Ziering // *Ann. Phys.* – 1957. – V. 1. – № 2. – Pp. 141-167.
21. Кошмаров, Ю.А. Прикладная динамика разреженного газа / Ю.А.Кошмаров, Ю.А.Рыжов. – М.: Машиностроение, 1977. – 184 с.



22. Е.Н.Бондарев, В.Т. Дубасов, Ю.А.Рыжов, С.Б. Свирщевский, Н.В.Семенчиков. Аэрогидромеханика – М.: Машиностроение, 1993.–608 с.
23. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов: перевод с английского / Г.Грэд // Механика. – 1952. – №4. – С.71-97.
24. Enskog, D.The kinetic theory of phenomena in fairly rare gases / D.Enskog – Upsala, 1917. – 279 p.
25. Chapman, S. On the law of distribution of velocities and on the theory of viscosity and thermal conduction in a non-uniform simple monatomic gas / S.Chapman // Phil. Trans. Roy. Soc.. – 1916. – A 216. – Pp.279.
26. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. – М.: Наука, 1967. - 440 с.
27. Torrilhon, Hyperbolic moment equations in kinetic gas theory based on multivariate Pearson-IV-distributions / M.Torrilhon // Commun. comput.Phys. – 2010. – V7. – № 4. – Pp. 639-673.
28. Шахов Е. М. Об обобщении релаксационного кинетического уравнения Крука // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1968. – № 5. – С. 142-145.
29. Шахов Е.М. Метод исследования движений разреженного газа. –М.: ВЦ АН СССР, 1975. – 207 с.
30. Satofuka N, Morinishi K, Oishi T. Numerical solution of the kinetic model equations for hyper sonic flow. Comput Mech 1993;11(5/6):452–64.
31. Titarev VA, Shakhov Ye M. Numerical calculation of the transverse hypersonic flow of a rarefied gas over a cold plate. IzvAkadNaukMZhG 2005;5: 139–54.
32. Bhatnagar P.L., Gross E.P., Krook M. A model for collision processes in gases. Phys Rev 1954;94(3):511–25.
33. Continuum equations in the dynamics of rarefied gases. JFluidMech 1959;6(Pt 4):523–41.
34. Holway, L.H. New statistical model in kinetic theory: methods of construction / L.H.Holway // Phys. Fluids. – 1966. – V. 3. – № 3.

35. Рыков, В.А. Модельное кинетическое уравнение для газа с вращательными степенями свободы / В.А.Рыков // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. – 1975. – № 6. – С. 107-115.

36. Блохинцев, Д.И. Акустика неоднородной движущейся среды / Д.И.Блохинцев. – М.: Наука, 1981. – 206 с.

37. Титарев, В.А. Течение Пуазейля и термокрип в капилляре на основе кинетической R-модели / В.А.Титарев, Е.М.Шахов // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. – 2012. – № 5. – С. 114-125.

38. Черемисин, Ф.Г. Метод решения кинетического уравнения Больцмана для многоатомного газа / Ф.Г.Черемисин // Ж. вычислит.матем. и матем. физ.. – 2012. – Т. 52. – № 2. – С. 270-287.

39. Никитченко Ю.А. Модельное кинетическое уравнение многоатомных газов // ЖВМ и МФ. – 2017. –Т. 57. – № 11.

40. Берд, Г. Молекулярная газовая динамика / Г.Берд.– М.: Мир, 1981. – 320с.

41. Aristov VV. Direct Methods for Solving the Boltzmann Equation and Study of Nonequilibrium Flows. Dordrecht: Kluwer; 2001. –p. 298.

42. Yen SM. Numerical solution of the nonlinear Boltzmann equation for nonequilibrium gas flow problems. Annu Rev Fluid Mech 1984;16:67–97.

43. Егоров И.В., Ерофеев А.И. Сопоставление моделирования гиперзвукового обтекания плоской пластины на основе метода Монте-Карло и уравнений Навье-Стокса // Изв. РАН, МЖГ. – 1997. – № 1. – С. 133-145.

44. Егоров И.В., Ерофеев А.И. Исследование гиперзвукового обтекания плоской пластины на основе сплошнородного и кинетического подходов // Ученые записки ЦАГИ. Том XXVIII. – 1997. – № 2. – С. 23-40.

45. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Решетникова Ю.Г., Смотрова Л.В. Условия возникновения и величина эффекта высокоскоростного перехлёста в ударно-сжатой смеси газов [Электронный ресурс] // Труды МАИ. Выпуск №95.– Режим доступа: <https://trudymai.ru/abstracts-keywords.php?ID=83562>.

46. Хатунцева О.Н. Аналитический метод определения профиля скорости турбулентного течения жидкости в плоской задаче Куэтта [Электронный ресурс] // Труды МАИ. Выпуск №104. – Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=102091>.

47. Никитченко Ю.А. Модели неравновесных течений. –М.: Изд-во МАИ, 2013. – 160 с.

48. Брыкина И.Г. Приближенные аналитические решения для тепловых потоков при трехмерном гиперзвуковом обтекании затупленных тел // Изв. РАН, МЖГ. – 2017. – №4. – С. 125-139.

49. Брыкина И.Г., Рогов Б.В., Тирский Г.А., Титарев В.А., Утюжников С.В. Сравнительный анализ подходов к исследованию гиперзвукового обтекания затупленных тел в переходном режиме // ПИММ. – 2013. – 77(1). – С. 15-26.

50. Никитченко Ю.А. Снижение коротковолновой неустойчивости системы моментных уравнений за счет ее расширения // Уч. записки ЦАГИ. – 2015.– Т.XLVI. – №1.– С. 72-84.

51. Буданова С.Ю., Красавин Е.Э., Никитченко Ю.А. Варианты модели Навье-Стокса-Фурье для сверх- и гиперзвуковых течений [Электронный ресурс] // Труды МАИ. – 2020. – №112. – Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=116323>.

52. Грэд Г. О кинетической теории разреженных газов: Пер. с англ. // Механика. – 1952. – Вып. №5. – С. 62-96.

53. Robben F., Talbot L. Experimental study of the rotational distribution function of nitrogen in a shock wave // Phys. Fluids. – 1966. – V. 9. – № 4. – Pp. 653-662.

54. Holtz T., Muntz E.P. Molecular velocity distribution functions in an argon normal shock wave at Mach number 7 // Phys. Fluids 26 (9). – September 1983. –Pp. 2425-2436.

55. Никитченко Ю.А., Попов С.А., Тихоновец А.В. Комбинированная кинетико-гидродинамическая модель течения многоатомного газа // Математическое моделирование. – 2019 г. –Т. 31. – № 2. –С. 18-32.

56. Rovenskaya O.I., Croce G. Numerical simulation of gas flow in rough micro channels: hybrid kinetic–continuum approach versus Navier–Stokes // *MicrofluidNanofluid* (2016) 20:81.

57. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа/ Л.Г.Лойцянский.– М.: Наука, 1987. – 840 с.

58. Кузнецов М.М., Липатов И.И., Никольский В.С. Асимптотический анализ эффектов поступательной неравновесности в гиперзвуковом течении около плоской поверхности с острой передней кромкой // *Письма в ЖТФ*. – 2008. – Т. 34. – Вып. 8. – С. 21-28.

59. Никитченко Ю.А., Березко М.Э., Красавин Е.Э. Сравнение модели Навье-Стокса-Фурье и двухтемпературной модели на примере задачи обтекания поверхности большой кривизны [Электронный ресурс] // *Труды МАИ*.– 2023.– № 131. – Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=175915>.

60. Кузнецов А.А., Лунев В.В. Нагрев тонкого острого клина в сверхзвуковом потоке // *Изв. РАН. МЖГ*. – 2021. – № 1. – С. 115-119.

61. Попов С.А., Гуереш Дж., Кузнецов А.В. Экспериментальное исследование аэродинамических характеристик крыла с треугольным выступом различной конфигурации // *Изв. ВУЗов, Авиационная техника*. – 2016. – №3. – С. 76-79.

62. Гараев К.Г., Дараган М.А., Осадчая Д.М. К задаче минимизации сопротивления трения на клиньях в сверхзвуковом потоке // *Изв. ВУЗов, Авиационная техника*. – 2006. – №3. – С. 23-25.

63. Березко М.Э., Никитченко Ю.А. Численное решение задачи гиперзвукового обтекания тонкой пластины // *Изв. РАН, МЖГ*. – 2022. – №2. – С.87-95. DOI: 10.31857/S0568528122020025

64. Aoki K., Kanba K., Takata Sh. Numerical analysis of a supersonic rarefied gas flow past a flat plate // *Physics of Fluids* (1994-present) 9, 1144 (1997); doi: 10.1063/1.869204.

65. Nagamatsu H.T., Messitt D.G., Myrabo L.N., Sheer R.E. Computational, theoretical and experimental investigation of flow over a sharp flat-plate,  $M=10 - 25$  // AIAA Paper 94-2350. – 1994.

66. В. А. Рыков, В. А. Титарев, Е. М. Шахов. Численное исследование поперечного обтекания пластины сверхзвуковым потоком двухатомного разреженного газа // ЖВМ и МФ. – 2007. – Т.47. – №1. – С.140-154.

67. В. А. Титарев, Е. М. Шахов. Сверхзвуковое течение разреженного газа за задней кромкой гладкой пластины // ЖВМ и МФ. – 2000. – Т. 40. – № 3. – С.483-494.

68. В. А. Титарев, Е. М. Шахов, Расчет донного вакуума за пластиной, обтекаемой гиперзвуковым потоком разреженного газа// ЖВМ и МФ. – 2001. – Т. 41. – № 9. – С.1444-1456.

69. Tannehill J.C., Mohling R.A., Rakich J.V. Numerical computation of the hypersonic rarefied flow near the sharp leading edge of a flat plate // AIAA Paper. –1973. –№73-200. –P.1-13.

70. Никитченко Ю.А., Красавин Е.Э. Расчет обтекания кромки тонкой пластины высокоскоростным потоком с использованием модели Навье-Стокса-Фурье и модельного кинетического уравнения //Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. – 2023. – № 4.

71. Выонг Ван Тьен, Горелов С.Л., Русаков С.В. Эффекты немонотонности аэродинамических характеристик пластины в гиперзвуковом потоке разреженного газа [Электронный ресурс] // Труды МАИ. – 2020. – Вып. 110. – Режим доступа: <https://trudymai.ru/published.php?ID=112844>.

72. Никитченко Ю.А., Березко М.Э. Программа расчета гиперзвукового обтекания тонкой пластины, установленной параллельно потоку. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2022612341. 2022 г.

73. Becker M., Boyland D.E. Flow field and surface pressure measurements in the fully merged and transition flow regimes on a cooled sharp flat plate, Rarefied Gas

Dynamics, Suppl. 4, V. 2 / Ed. by C.L. Brundin. New York: Academic Press, 1967. P. 993–1014.

74. Горелов С.Л., Ерофеев А.И. Расчет обтекания пластины потоком разреженного газа с учетом вращательных степеней свободы молекул // Ученые записки ЦАГИ. – 1979. – Т. X. – № 2. – С. 59 - 64.

75. Ерофеев А.И., Перепухов В.А. Расчет обтекания пластины бесконечного размаха потоком разреженного газа // Ученые записки ЦАГИ. – 1976. – Т. VII. – № 1. – С. 102-106.

76. Балашов А.А., Дубинин Г.Н. Исследование обтекания пластины в режиме сильного взаимодействия // Изв. РАН. МЖГ. – 2018. – № 3. – С. 63-70.

77. Сумбатян М.А., Бердник Я.А., Бондарчук А.А. Итерационный метод для решения уравнений Навье-Стокса в задаче об обтекании тонкой пластинки потоком вязкой несжимаемой жидкости // Вестник Томского государственного университета. – 2020. – № 66.

78. Рыжов Ю.А., Никитченко Ю.А., Парамонов И.В. Численное исследование гиперзвукового обтекания острой кромки на основе модели Навье-Стокса-Фурье [Электронный ресурс] // Труды МАИ. – 2012. – № 55. – Режим доступа: <http://trudymai.ru/published.php?ID=30027&eng=N>

79. В. А. Титарев, Е. М. Шахов, Сверхзвуковое течение разреженного газа за задней кромкой гладкой пластины. // ЖВМ и МФ. – 2000. – Т. 40. – № 3. – С. 483–494.

80. Красавин Е.Э., Никитченко Ю.А. Вариант расчета обтекания тонкой пластины с использованием модели Навье-Стокса-Фурье // Ученые записки ЦАГИ. – 2024. – №3.

81. Gokcen T., McCormack R. W., Chapman D. R. Computational fluid dynamics near the continuum limit // AIAA 8-th Computational Conference. – 1987, AIAA Paper 87-1115.

82. Флетчер, К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: том 1 / К.Флетчер. – М.: Мир, 1991. – 502с.

83. Кузнецов М.М., Кулешова Ю.Д., Смотрова Л.В, Решетникова Ю.Г. О максимуме эффекта высокоскоростной поступательной неравновесности в ударной волне // Вестник МГОУ. Физика-математика. – 2016. – № 3. – С. 84-95.

84. Генич А.П., Куликов С.В., Манелис Г.Б., Черешнев С.Л. Распределение молекулярных скоростей во фронте ударной волны в газовых смесях // Механика жидкости и газа. –1990. –№ 2. –С. 144-150.

85. Куликов С.В., Терновая О.Н., Черешнев С.Л. Специфика поступательной неравновесности во фронте ударной волны в однокомпонентном газе // Химическая физика. –1993. –Т. 12. – № 3.– С. 340-342.

86. Красавин Е.Э. Оценка степени неравновесности газа в сверхзвуковых потоках // Вестник Государственного университета просвещения. Серия: Физика-математика.–2024. –№1.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Операции

Интегралы по пространству молекулярных скоростей и пространству внутренних энергий молекул:

$$\int \dots d\bar{c} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \dots dc_1 dc_2 dc_3,$$

$$\int \dots d\bar{\xi} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \dots d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3,$$

$$\int \dots d\bar{c} d\varepsilon = \iiint_{-\infty}^{\infty} dc_1 dc_2 dc_3 \int_0^{\infty} \dots \varepsilon,$$

$$\int \dots d\bar{\xi} d\varepsilon = \iiint_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \int_0^{\infty} \dots \varepsilon.$$

Повторяющиеся греческие подстрочные индексы, используемые в одночленах, подразумевают суммирование от 1 до 3, например:

$$P_{\alpha\alpha} = P_{11} + P_{22} + P_{33}.$$

Подстрочный символ «звёздочка» обозначает симулирование одночленов по всем «различимым» перестановкам индексов («неразличимыми» считаются перестановки, различающиеся транспозицией индексов в пределах одного симметрического тензора), например:

$$M_{**\alpha}^{(3)} \equiv M_{ij\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} + M_{ki\alpha}^{(3)} \frac{\partial u_j}{\partial x_\alpha} + M_{jka}^{(3)} \frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}.$$

Здесь  $M^{(3)}$  – симметрический тензор третьего ранга. Полученная сумма представляет собой симметрический тензор. Таким образом, подстрочные звёздочки обозначают операцию симметрирования с исключением повторений



тождественных по значению членов. Количество звёздочек в одночлене равно рангу тензорного уравнения.

### Надстрочные и подстрочные символы

$\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

$X^+$  (надстрочный символ) обозначает принадлежность величины ( $X$ ) к процессу обратных столкновений молекул.

$X^*$  (надстрочный символ) обозначает величину ( $X$ ), приведённую к единичному отрезку.

$X'$  (надстрочный символ) обозначает безразмерные величины ( $X$ ).

$X_\infty$  (подстрочный символ) используется для обозначения величины ( $X$ ), относящейся к невозмущённому потоку.

$X^{[...]}$  надстрочные квадратные скобки обозначают номер приближения, соответствующего приближению процедуры Чепмена-Энскога, например:  $q_i^{[1]}$  тепловой поток в гидродинамическом (первом) приближении.

### Символы микроскопических величин

$m_0$  – масса молекулы.

$\xi_i = c_i + u_i$  – молекулярная, тепловая и групповая (макроскопическая) скорости.

$\varepsilon$  – внутренняя энергия молекулы.

$f \equiv f(t, x_1, x_2, x_3, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \varepsilon)$  – функция распределения, фазовое пространство, которой дополнено подпространством вращательной энергии молекулы  $\varepsilon$ .

$f_0 = \frac{n}{(2\pi RT_t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{c^2}{2RT_t}\right)$  – равновесная функция распределения.

$J_{down}$  – интеграл прямых столкновений.

$J_{reflect}$  – интеграл обратных столкновений.

$\tau$  – среднее время свободного пробега молекулы.

$\frac{1}{\tau^+}$  - средняя частота обратных столкновений молекул.

$\tau_p$  – время релаксации напряжений.

$\lambda = \frac{\mu}{p} \sqrt{RT}$  – средняя длина свободного пробега молекулы.

$n_w$  – концентрация отражённых поверхностью молекул.

### Символы макроскопических величин

$n$  – концентрация молекул.

$\rho = m_0 n$  – плотность газа.

$u_i$  – проекция вектора макроскопических скорости газа.

$P_{ij} = p_{ij} + \delta_{ij} p$  – тензор напряжений.

$T_{ij} = \frac{P_{ij}}{\rho R}$  – удельные напряжения.

$p^m$  – «механическое» давление

$p$  – «термодинамическое» давление.

$T_t$  – «поступательная» температура.

$T_r$  – температура внутренних степеней свободы молекул.

$\theta = T_t - T_r$ .

$T$  – «термодинамическая» температура.

$p_{ij}^m$  – компонент тензора неравновесных напряжений (механических).

$p_{ij}$  – компонент тензора неравновесных напряжений (термодинамическая форма).

$q_i$  – проекция вектора теплового потока.

$\varphi_i$  – проекция вектора теплового потока, обусловленного только поступательным движением молекул.

$\omega_i$  – проекция вектора теплового потока, обусловленного переносом внутренней энергией молекул.

$\varphi_{ijk}$  – моменты третьего порядка (по поступательным степеням свободы).

$\mu = \mu(T^s)$  – коэффициент вязкости.

$s$  – свободный параметр модели.

$h$  – свободный параметр модели, имеющий смысл отношения времени релаксации разности поступательной и вращательной температур к времени релаксации напряжений.

$\alpha$  – коэффициент поглощения поверхности.

### Основные константы и критерии подобия

$k$  – постоянная Больцмана.

$c_p, c_v$  – изобарная и изохорная удельные теплоёмкости.

$R = \frac{k}{m_0}$  – удельная газовая постоянная.

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  – показатель адиабаты.

$Pr$  – число Прандтля.

$M$  – число Маха.

$Kn$  – число Кнудсена.

### Аббревиатуры

НСФ – модель Навье-Стокса-Фурье.

БГК – кинетическая модель Бхатнагара-Гросса-Крука.

DSMC – методы прямого статистического моделирования (Direct simulation MonteCarlo–DSMC)

M2T – двухтемпературная модель.

M3 – система моментных уравнений третьего порядка.

КИН\_НСФ – комбинация гидродинамической модели НСФ и кинетической модели.

КИН\_МЗ – комбинация модели моментных уравнений третьего порядка МЗ и кинетической модели.

ES – эллиптическая статистическая модель.

S – модель– кинетическая модель Шахова.

ЭВМ – электронно-вычислительная машина.