

На правах рукописи



Янышев Дмитрий Сергеевич

**Математическое моделирование
высокоэнергетических потоков для теплового и
газодинамического проектирования в
аэрокосмической технике**

1.3.14. – Теплофизика и теоретическая теплотехника

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора технических наук

Москва – 2024

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный консультант: **Молчанов Александр Михайлович**
доктор технических наук, доцент, МАИ.

Официальные оппоненты: **Елизарова Татьяна Геннадьевна**
доктор физико-математических наук, профессор,
ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, главный научный сотрудник.

Рыжков Сергей Витальевич
доктор физико-математических наук, профессор,
МГТУ им. Н.Э.Баумана, профессор.

Тупикин Андрей Викторович
доктор физико-математических наук, ИТ СО РАН,
старший научный сотрудник.

Ведущая организация: **АО «НПО Лавочкина»**

Защита состоится «31» марта 2025 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.327.06 на базе Московского авиационного института, расположенного по адресу: Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке и на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/doctor/?ELEMENT_ID=182973

Автореферат разослан «_____» _____ 2024 г.

Отзывы на автореферат в двух экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д.4, Ученый совет МАИ.

Ученый секретарь

диссертационного совета 24.2.327.06,

д.т.н., доцент



Краев В.М.

Общая характеристика работы

Работа посвящена созданию современных средств математического моделирования неравновесных высокоэнергетических потоков газовых смесей произвольного состава в широком диапазоне определяющих параметров.

Актуальность и степень разработанности темы исследования

В настоящее время хорошо отработанными являются методы моделирования течений газа для двух режимов по числу Кнудсена: сплошного и свободномолекулярного. В первом случае применяется механика сплошной среды, во втором - методы прямого моделирования Монте-Карло (Direct Monte-Carlo Simulation - DSMC). Проблематика переходного режима, когда гипотеза сплошности нарушается, но при этом газ еще слишком плотный, и применение методов DSMC слишком является ресурсоемким, проработана на сегодняшний день недостаточно.

В рамках исследования термически неравновесных течений следует отметить, что большинство практических расчетов на сегодняшний день до сих пор проводится в рамках т.н. «двухтемпературной» модели Ч.Парка, которую, несмотря на ее историческую значимость, трудно назвать физически достоверной. При этом с теоретической точки зрения термически неравновесные течения для чисел Кнудсена менее 0.01 (в рамках соблюдения гипотезы сплошности) являются относительно хорошо изученными. Вопросы о термической неравновесности в разреженных течениях (в особенности - на переходных режимах) исследованы мало.

Исследования в области турбулентности и ее возникновения проводятся достаточно давно. В рамках подходов, основанных на осреднении Рейнольдса-Фавра создано большое количество различных моделей. При этом вопросы применимости указанных подходов и учета эффектов, возникающих в высокоэнергетических потоках, с практической точки зрения проработаны недостаточно.

Перенос излучения в газовых средах - сложная с физической и вычислитель-

ной точки зрения задача. В настоящее время хорошо разработаны методы расчета излучения с применением аппроксимации Куртисса-Годсона (упрощенный подход), а также методы расчета по спектральным линиям (ресурсоемкий подход). Эффективные методы расчета переноса излучения в термически неравновесных газах с ярко выраженным линейчатым спектром развиты недостаточно.

При этом не существует универсальной теории, описывающей все упомянутые эффекты и их взаимное влияние в совокупности (подробный анализ степени разработанности темы исследования представлен в первой главе диссертации).

Более того, существенная разница характерных времен протекания различных физико-химических процессов в газе приводит к существенным проблемам при численном решении уравнений модели (т.н. проблема численной жесткости), что требует применения специальных численных методов. Для общего случая данная проблема является не до конца разрешенной.

До настоящего времени не существует комплексных математических моделей, позволяющих в рамках единого подхода описывать течение потока в широком диапазоне высот с учетом термической и химической неравновесности, а также всей совокупности других факторов, влияющих на высокоэнергетический поток газа.

Объект исследования - высокоэнергетические потоки. Предметами исследования являются различные физические эффекты, возникающие в данных потоках при изменении режимных параметров, а именно: явления переноса в разреженном газовом потоке, термическая и химическая неравновесность, явление турбулентности и ее возникновение, излучение и его перенос в газовой среде.

Учет комплекса возможных изменяющихся с высотой факторов, влияющих на характеристики внутренних и внешних течений и их взаимного влияния позволит с большей степенью достоверности прогнозировать характеристики газового потока для последующего использования этих данных в тепловом и газодинамическом проектировании техники.

Изложенная проблема является фундаментальной и имеет высокую степень

актуальности, так как ее решение позволит установить взаимосвязи различных физических процессов, их влияние друг на друга, создать математическую модель, объединяющую в себе максимальное число значимых факторов и позволяющую прогнозировать возникновение различных явлений и эффектов в газовом потоке как в земной атмосфере, так и в атмосферах других планет.

Цели и задачи диссертационной работы

Цель работы - создание средств математического моделирования высокоэнергетических термохимически неравновесных потоков газа для произвольно высоких чисел Маха, любых режимов по числу Рейнольдса и диапазона чисел Кнудсена от 0 до 10. Для достижения данной цели были сформулированы и решены следующие задачи:

1. Составление физически корректной комплексной модели газового потока, учитывающей протекание неравновесных химических реакций, термическую неравновесность, переменность термических и переносных свойств газа в широком диапазоне высот. В рамках общей задачи поставлены и решены следующие вопросы:
 - 1.1. Корректный учет влияния объемной (второй) вязкости на структуру высокоэнергетического потока.
 - 1.2. Учет нарушения гипотезы сплошности на больших высотах, внесение поправок в уравнения Навье-Стокса с целью расширения их применимости для математического моделирования термохимически неравновесного высокоэнергетического потока газа.
 - 1.3. Моделирование турбулентности с учетом существенной сжимаемости потока и неизотропности турбулентных характеристик.
 - 1.4. Моделирование переносных характеристик потока и прогнозирование местоположения ламинарно-турбулентного перехода.
2. Создание методики детального расчета переноса излучения в газе. В рамках

данной общей задачи поставлены и решены следующие вопросы:

- 2.1. Построение эффективного метода расчета излучения для газов с линейчатым спектром в состоянии термической неравновесности.
- 2.2. Разработка методики расчета излучения разреженного потока.
3. Создание и отработка алгоритма решения и составление расчетной программы для численного решения уравнений комплексной модели с учетом существенной численной жесткости уравнений.

Научная новизна

1. Предложен новый эффективный полностью связанный неявный численный метод решения системы уравнений Навье-Стокса (Рейнольдса-Фавра) для расчета термически и химически неравновесных сверхзвуковых потоков, в котором, в отличие от расщепления системы уравнений по физическим процессам, реализована специальная факторизация матриц, позволившая существенно ускорить процесс обращения матриц.
2. Предложена и реализована методика учета влияния второй вязкости в неравновесных высокоэнергетических потоках со сложной волновой структурой и показана важность ее учета для полетов на большой высоте.
3. Впервые предложена комплексная методика расчета термически неравновесных газовых потоков умеренной разреженности (число Кнудсена $0.01 < Kn < 10$) с произвольной геометрией течения, основанная на использовании квазигазодинамических (КГД) уравнений, в которые включены уравнения, учитывающие колебательную неравновесность.
4. Впервые проведен расчет высотных струй ДЛА (двигателя летательного аппарата) от 100 до 200 км земной атмосферы, основанный на решении полных систем уравнений Навье-Стокса и квазигазодинамических (КГД) уравнений,

включающей уравнения для колебательных энергетических мод, а также учитывающих ненулевую вторую вязкость.

5. Впервые разработана методика расчета неравновесного ИК излучения струй ДЛА на больших высотах, основанная на решении уравнения переноса излучения в термически неравновесном газе и методе k -распределения. Методика включает колебательно-вращательные энергетические переходы различных мод, использование специально построенной неравновесной функции Планка и излучательную дезактивацию колебательной энергии.
6. Предложена новая неизотропная трехпараметрическая модель турбулентного смещения, основанная на аналитически полученных зависимостях взаимодействия между крупномасштабными пульсациями давления и скорости деформации, что позволило получить более достоверное совпадение результатов расчета с экспериментальными данными для высокоэнергетических потоков.
7. Предложена новая упрощенная модель ламинарно-турбулентного перехода в высокоскоростных потоках, основанная на понятии перемежаемости.
8. Разработана новая вычислительная модель и программное обеспечение на языках Fortran 2018 и C для расчёта высокоэнергетических потоков с использованием неструктурированных сеток и распараллеливания на основе MPI и структуры данных DMPLex.

Теоретическая и практическая значимость

В работе развиты различные направления математического моделирования высокоскоростных потоков в рамках механики сплошной среды: моделирование разреженных потоков, моделирование термической неравновесности, моделирование турбулентности и перехода к ней, моделирование переноса излучения в газе.

На основе предлагаемых подходов создана комплексная математическая модель, позволяющая учитывать различные факторы, влияющие на высокоскоростной поток и его взаимодействие с обтекаемыми телами. С помощью разработанной комплексной модели проведена серия вычислительных экспериментов, направленных на решение задач высокоскоростной аэрокосмической тематики. Вычислительные эксперименты показали, что важнейшую роль в решении этих задач играет учет неравновесности физико-химическими процессами. При этом, применение предлагаемой в работе комплексной модели и численных методов позволяет в отдельных случаях существенно увеличить точность расчетов (от 10%-15% до 4-5 раз).

Результаты, изложенные в диссертации, могут быть использованы для проведения теплового и газодинамического проектирования летательных аппаратов.

Материалы и результаты диссертации внедрены и используются в практической работе. Имеются 2 акта внедрения.

Методология и методы исследования

Результаты работы получены на основе методов математического моделирования. В исследованиях использованы подходы и методики механики сплошной среды, физической кинетики и элементы квантовой механики. Численное решение построено на основе метода конечных объемов в полностью связанной постановке.

Положения, выносимые на защиту

На защиту выносятся следующие результаты работы:

1. Методика расчета газотермодинамических и излучательных характеристик высокоэнтальпийного потока газа, а также количественных характеристик его взаимодействия с поверхностью обтекаемого тела в диапазоне чисел Маха от 0.3 и чисел Кнудсена от 0 до 10.
2. Сопоставление результатов расчётов, полученных с помощью разработанной методики с данными экспериментальных исследований высокоскоростных течений.

3. Численный метод решения связанной системы уравнений, описывающих химически и термически неравновесное течение газа с жёсткими источниками на произвольных геометриях.

Степень достоверности и апробация результатов

Достоверность научных положений подтверждается использованием законов сохранения массы химических компонентов, количества движения и энергии, теории численных методов; всесторонним тестированием разработанных численных методов и алгоритмов, исследованием устойчивости и сходимости решений на последовательности сгущающихся сеток; сравнением результатов расчётов с экспериментальными данными и результатами расчётов других авторов.

Основные результаты диссертации докладывались 14 раз на научных конференциях [20–33].

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 44 печатных работах, из них 2 монографии [1, 2], 17 статей в журналах из перечня рецензируемых научных изданий, рекомендуемых ВАК, и приравненных к ним по научной специальности диссертации [3–19], 14 тезисов докладов на научных конференциях [20–33], 7 статей в журналах из перечня рецензируемых научных изданий, рекомендуемых ВАК, по смежным научным специальностям [34–40], 4 учебных пособия [41–44].

Личный вклад автора

Все представленные в диссертации результаты получены лично автором. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 11 глав, заключения, списка обозначений, библиографии и 2 приложений. Общий объем диссертации 400 страниц. Библиография включает 237 наименований.

Содержание работы

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе дан обзор современного состояния вопроса по основным направлениям исследований в рамках рассматриваемой комплексной тематики: традиционное математическое моделирование турбулентных течений со значительным набором химических реакций; исследование и моделирование турбулентности; изучение газовых сред в условиях неравновесного энергетического обмена; изучение и моделирование высокоскоростных потоков газа с учетом термической неравновесности; исследование законов и разработка методик расчета распространения излучения в газе; моделирование течения разреженного газа.

Выделены работы:

- по классическому математическому моделированию высокоскоростных течений А.В. Родионова (1987), Э.И. Виткина (1997), группы С.М. Дэша (2006 – 2013), Р. Маккормака (2009), Г. Кендлера (2015);
- по исследованию турбулентности С.Поупа (1985 – 2000), П.Дарбина (1991), Д.Уилкокса (1992-1998), С.Саркара (1992), Ф.Р.Ментера (1994), А.Н.Секундова (1997), С.Гиримаджи (2014);
- по изучению термически неравновесных течений Э.А.Ашратова (1977), Ч.Парка (1989 – 1993), Р.Н. Гупты (1990), С.Т.Суржикова (2018), Г.Кендлера (2021), М.Ф.Модеста и Т.Озавы (2003-2021);
- по математическому моделированию течений разреженного газа в рамках модифицированной механики сплошной среды Б.Н. Четверушкина, Ю.В. Шеретова и Т.Г. Елизаровой (1985 – 2009).

Во второй главе сформулирована базовая математическая модель высоко-энергетического потока.

Приводится система уравнений основных уравнений переноса (массы, количества движения и энергии) для сжимаемого термически равновесного газа в матричной форме, записанная для произвольной системы координат:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} \mathbf{F}^j)}{\partial q^j} + \mathbf{G}_j \mathbf{F}^j = \mathbf{R} \quad (1)$$

где по повторяющемуся индексу $j = 1, 2, 3$ производится суммирование, а \mathbf{F}^j , \mathbf{R}^j и \mathbf{G}_j выражаются следующим образом:

$$\mathbf{F}^j = \begin{bmatrix} \rho u^j \\ \rho u^1 u^j - \sigma^{1j} \\ \rho u^2 u^j - \sigma^{2j} \\ \rho u^3 u^j - \sigma^{3j} \\ u^j (p + \rho E) + Q^j - u^k \tau^{ij} g_{ik} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{G}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_{j1}^1 & \Gamma_{j2}^1 & \Gamma_{j3}^1 & 0 \\ 0 & \Gamma_{j1}^2 & \Gamma_{j2}^2 & \Gamma_{j3}^2 & 0 \\ 0 & \Gamma_{j1}^3 & \Gamma_{j2}^3 & \Gamma_{j3}^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho X^1 \\ \rho X^2 \\ \rho X^3 \\ \rho X^j u^k g_{jk} + \tilde{Q}_V \end{bmatrix}$$

где ρ - плотность, u^j - компоненты вектора скорости, σ^{ij} - компоненты тензора напряжений, E - полная энергия, τ^{ij} - компоненты тензора вязких напряжений, X^j - компоненты внешней объемной силы, Γ_{jk}^i - символы Кристоффеля второго рода.

Как видно из (1), уравнения переноса любых скалярных величин в любом случае могут быть сведены к однообразной форме записи, а основную трудность при записи представляют уравнения для тензорных величин первого порядка и

выше, поскольку их запись в дивергентной форме в общем виде не представляется возможной (возникают дополнительные члены, представленные здесь в виде членов вида $G_j F^j$).

Для учета химических реакций, термической неравновесности, турбулентности система (1) дополняется уравнениями переноса соответствующих (как правило - скалярных) величин.

Далее приводятся общие подходы к учету протекания в потоке неравновесных химических реакций.

Затем приводятся данные по термическим и переносным свойствам газовой смеси:

1. Формулируется физическая модель термических свойств газа в условии отсутствия термического равновесия между степенями свободы молекул. Указывается, что внутренняя энергия газа складывается с энергии поступательного (e_{tr}) и вращательного (e_{rot}) движения его частиц. В многоатомных газах сюда следует добавить энергию колебаний (e_{ϑ}) атомов в молекуле:

$$e = e_{tr} + e_{rot} + e_{\vartheta} \quad (2)$$

При достаточно высоких энергиях равновесие между различными степенями свободы нарушается, и в общем случае энергия каждой степени свободы должна рассматриваться отдельно и характеризоваться отдельной температурой.

В этом случае $e_{tr} = f(T_{tr})$, $e_{rot} = f(T_{rot})$, $e_{\vartheta i} = f(T_{\vartheta i})$.

Получить энергию, приходящуюся на единицу массы газа, можно исходя из энергии отдельных молекул.

Поступательная энергия молекулы связывается с поступательной температурой T_T известным соотношением:

$$\varepsilon_T = \frac{3}{2} k T_T, \quad (3)$$

а вращательная - с вращательной температурой T_R :

$$\varepsilon_R = \frac{i_{rot}}{2} k T_R \quad (4)$$

Здесь k - постоянная Больцмана, ε - энергия молекулы.

Для колебательной энергии обычно используется модель гармонического осциллятора.

$$\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2} \right) h \nu, \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

где n - квантовое число, h - постоянная Планка, ν - частота колебаний.

Формулируется уравнение переноса для колебательной энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e_{\vartheta m}) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j e_{\vartheta m}) - \frac{\mu}{Sc} \frac{1}{C_{s(m)}} \frac{\partial C_{s(m)}}{\partial x_j} \frac{\partial e_{\vartheta m}}{\partial x_j} = \rho \dot{e}_{\vartheta m} \quad (6)$$

где

$$\dot{e}_{\vartheta m} = R_s \theta_m \psi_m \quad (7)$$

Как видно из уравнения, перенос колебательной энергии в потоке помимо адвекции и диффузионного переноса, определяется общей скоростью квантовых энергетических переходов.

2. Обсуждается смежный с тематикой термической неравновесности вопрос о второй вязкости и роли данного свойства в газовой динамике.

Обычно для коэффициента второй вязкости применяется гипотеза Стокса, согласно которой $\zeta = 0$. Молекулярно кинетическая теория показывает, что для одноатомного газа это гипотеза справедлива всегда. Тем не менее, есть случаи, когда коэффициент ζ отличен от нуля и даже превышает по своему значению коэффициент μ .

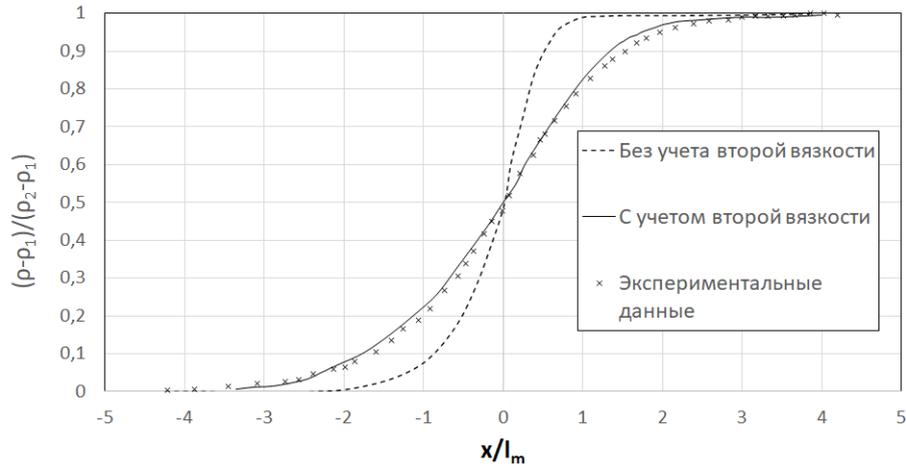


Рис. 1. Распределение плотности в ударной волне при числе Маха $M_1 = 6.1$ (координата x нормирована на длину свободного пробега молекулы l_m)

В работах проф. Г.А.Тирского на примере сравнения расчетных и экспериментальных данных показывается, что учет ненулевой второй вязкости позволяет получить более близкие к экспериментальным данным результаты расчетов структуры отошедшей ударной волны (см. рисунок 1). Профиль, рассчитанный без учета объёмного коэффициента вязкости, во-первых дает заниженное значение толщины скачка, а во-вторых сильно качественно и количественно отличается от экспериментального профиля.

При этом прямое экспериментальное измерение величины данного коэффициента представляется весьма затруднительным.

Общая формула для коэффициента второй вязкости записывается следующим образом:

$$\zeta = \frac{k c_{int}}{m c_v^2} p \tau_E \quad (8)$$

где c_{int} - теплоемкость по внутренним степеням свободы молекулы, τ_E - характерное время релаксации внутренних степеней свободы.

Указанную формулу сложно применять на практике.

Один из упрощенных методов вычисления коэффициента ζ - т.н. "метод шероховатых сфер". Согласно данному методу:

$$\zeta = \left(\frac{mk_bT}{\pi} \right)^{0.5} \frac{1}{\sigma^2} \frac{(1+K)^2}{32K^2} \quad (9)$$

где K - безразмерный момент инерции молекулы, σ - молекулярный кинетический диаметр (может быть взят в частности исходя из значений констант потенциала Леннарда-Джонса).

$$K = \frac{4I_\alpha}{m\sigma^2} \quad (10)$$

3. Формулируется проблема турбулентности и приводятся основные подходы к моделированию турбулентных течений и их переносных свойств.

В заключении делаются выводы по главе.

В третьей главе формулируется численный метод решения уравнений математической модели. Система уравнений (1) в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (E_C - E_V) + \frac{\partial}{\partial y} (F_C - F_V) + \frac{\partial}{\partial z} (G_C - G_V) = H \quad (11)$$

Система легко расширяется в случае добавления дополнительных уравнений переноса.

Конечно-объемное представление уравнения (11) для q -ой ячейки сетки в декартовой системе координат:

$$V_q \frac{\partial U_q}{\partial t} = - \sum_{j \in q} \left(\vec{F}_{C,j} - \vec{F}_{V,j} \right) \cdot \vec{n}_j s_j + V_q H_q \quad (12)$$

где

$\vec{F}_C = E_C \vec{i} + F_C \vec{j} + G_C \vec{k}$ - вектор невязкого потока (через поверхность); $\vec{F}_{C,j}$ - вектор невязкого потока через j -ую грань; $\vec{F}_V = E_V \vec{i} + F_V \vec{j} + G_V \vec{k}$ - вязкий поток; V_q - объем q -ой ячейки сетки; \vec{n}_j - вектор нормали к j -ой грани, направленный наружу по отношению к q -ой ячейке сетки; s_j - площадь поверхности j -ой грани.

Используем гомогенность невязкого потока:

$$\begin{aligned}\vec{F}_C \cdot \vec{n} &= F_{C,n} = \frac{\partial F_{C,n}}{\partial U} U = AU \\ \vec{F}_C \cdot \vec{n} &\equiv E_C \vec{i} \cdot \vec{n} + F_C \vec{j} \cdot \vec{n} + G_C \vec{k} \cdot \vec{n}\end{aligned}\quad (13)$$

где $F_{C,n}$ - нормальная составляющая невязкого потока.

Матрица Якоби A может быть диагонализирована и разделена на положительную и отрицательную часть

$$A^+ = S^{-1} \Lambda^+ S, \quad A^- = S^{-1} \Lambda^- S \quad (14)$$

Здесь Λ - диагональная матрица, состоящая из собственных значений матрицы A .

Для исключения эффекта карбункула и обеспечения численной устойчивости к собственным значениям матрицы A добавляется малая величина e_μ , имеющая смысл искусственной вязкости:

$$\lambda^\pm = \frac{1}{2} \left(\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + e_\mu^2} \right) \quad (15)$$

$$e_\mu = k_\mu \psi (|\vec{u}| + a) \quad (16)$$

где k_μ - калибровочная константа, лежащая в пределах от 0.1 до 1, ψ - функция-переключатель, принимающая значения от 0 до 1.

В настоящей работе предложено два варианта реализации данной функции: "автоматическое" и "ручное". Необходимость функции ψ продиктована тем, что ненулевой параметр e_μ искажает параметры течения в пограничном слое.

"Автоматический" переключатель имеет вид:

$$\psi_q = \frac{1}{1 + \exp[-a_{shock} (s_\epsilon - b_{shock})]} \quad (17)$$

где $s_\epsilon = -k_{shock} * \Delta r_{qp} * \text{div } \vec{u} / c_{crit j}$, $a_{shock} = 5$, $b_{shock} = 0.8$, $k_{shock} = 5$ - калибровочные константы, Δr_{qp} - расстояние между ячейками, между которыми лежит грань j .

"Ручной" переключатель:

$$\psi = \begin{cases} 0 & \text{при } y_w < y_{lim} \\ 1 & \text{при } y_w \geq y_{lim} \end{cases} \quad (18)$$

где y_w - расстояние от ближайшей стенки, y_{lim} - некоторое заранее выбранное значение.

Для представления невязкого потока на j -ой грани предлагается использовать метод Рое, стандартное или модифицированное расщепление Стегера-Уорминга

Значения параметров f в центре грани j экстраполируются из центра ячейки q по формуле

$$f_j = f_q + \phi_q (\nabla f)_q \cdot \Delta r_{jq} \quad (19)$$

где $(\nabla f)_q$ - градиент f в центре ячейки q ; Δr_{jq} - вектор, выходящий из точки q в точку j ; ϕ_q - ограничитель (лимитер).

В качестве ограничителя применяется модифицированный ограничитель Барта-Джесперсена:

$$\phi_q = \psi_q \phi_q^{BJ} \quad (20)$$

где ϕ_q^{BJ} - базовый ограничитель Барта-Джесперсена, а ψ_q - функция-«выключатель», которая в зоне сильных градиентов (таких как, например, скачок уплотнения) сводит схему к схеме «против потока».

Дополнительная функция ψ_q вводится из соображений численной устойчивости и реализуется аналогично ограничителю искусственной вязкости "ручным" или "автоматическим" способом. При этом, практика показывает, что для течений при числе Маха свыше 10 следует использовать "ручное" ограничение.

При использовании расщепления невязких потоков, гипотезы Тисенджера-Кофи для вязких потоков (в неявной части учитывается вклад в градиент только ячеек, смежных с рассматриваемой гранью) и неявного представления источника,

уравнение (12) преобразуется к следующей форме:

$$\left[\mathbf{A}_q - \alpha \Delta t \left(\frac{\partial H}{\partial U} \right)_q^n \right] \delta U_q^{n+1} + \sum_{j \in q} \mathbf{A}_{qj} \delta U_{qj}^{n+1} = \Delta U_q^n \quad (21)$$

Явное приращение ΔU_q^n определяется формулой

$$\Delta U_q^n = -\frac{\Delta t}{V_q} \sum_{j \in q} \left(\vec{F}_{C,j}^n - \vec{F}_{V,j}^n \right) \cdot \vec{n}_j s_j + \Delta t H_q^n \quad (22)$$

Уравнение (21) представляет систему линейных уравнений с коэффициентами в виде блочных матричных элементов. На каждой итерации в каждой ячейке производить обращение матрицы $\mathbf{B}_q = \left[\mathbf{A}_q - \alpha \Delta t \left(\frac{\partial H}{\partial U} \right)_q^n \right]$, размер которой равен числу уравнений в основной системе (11). Для газовых смесей в условиях неравновесности общее число уравнений системы может достигать 50, что приводит к необходимости многократного обращения матрицы \mathbf{B}_q .

Для решения этой проблемы в работе предлагаются две полностью связанные численные схемы.

Первая схема:

$$\mathbf{A}_q \delta U_q^{n+1} + \sum_{j \in q} \mathbf{A}_{qj} \delta U_{qj}^{n+1} = \Delta U_q^n - \Delta t H_q^n + \delta \bar{U}_q^{n+1} \quad (23)$$

Система (23) быстро и эффективно решается таким же методом, как система (21) с нулевым источником. Предлагаемая численная схема лишена недостатков, присущих схеме с расщеплением по физическим процессам. В областях, где происходят быстрые химические реакции в предлагаемой схеме следует применять неявные многошаговые методы, в частности метод Гира

Вторая схема: Матрицу $\partial H / \partial U$ можно представить в виде:

$$\partial H / \partial U = d + g \quad (24)$$

где d - диагональная часть матрицы $\partial H / \partial U$, а g - недиагональная.

Тогда после преобразований получим:

$$\left[\mathbf{A}_q - \alpha \Delta t d_q^n \right] \delta U_q^{n+1} + \sum_{j \in q} \mathbf{A}_{qj} \delta U_{qj}^{n+1} = \Delta U_q^n + \alpha \Delta t g_q^n \delta \bar{U}_q^{n+1} \quad (25)$$

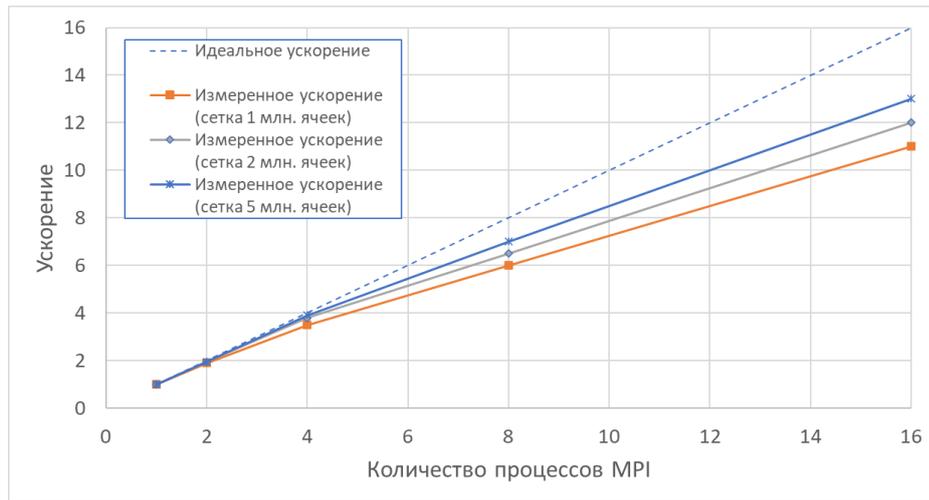


Рис. 2. График сильной масштабируемости

После определения правой части уравнения (25) это уравнение эффективно решается таким же методом, как система (21) с нулевым источником.

В остальном схема реализуется так же, как первая.

Опыт показал, что первая схема более подходит для уравнений хим.кинетики, вторая - для уравнений переноса колебательной энергии.

В четвертой главе проведён анализ современных особенностей вычислительных систем и видов взаимодействия при реализации параллельных вычислений. Описаны архитектурные решения, применённые в последовательной версии программного кода Universe3D, учитывающие современные особенности вычислительных систем. Описаны основные отличия параллельной версии программного кода Universe3D от последовательной. Проведён расчёт сильной масштабируемости параллельной версии программного кода Universe3D (рис. 2).

Материалы данной главы были частично опубликованы в [18]

В пятой главе проводится подробный обзор источников литературы, посвященных свойству второй вязкости.

Вопросы, связанные с влиянием второй вязкости на структуру течения рассматривались еще Дж. Стоксом и Л.Д.Ландау, однако практического применения эти выкладки не нашли. До настоящего времени большинством исследователей применяется гипотеза о нулевом значении данного параметра, которая с физиче-

ской точки зрения справедлива лишь для одноатомных газов.

Общетеоретический подход к проблеме в целом был разработан достаточно неплохо еще в 1940-1950 гг. Большинство авторов сходится на мнении, что природа второй вязкости связана с релаксацией неравновесных процессов, чаще всего – с термической (вращательной или колебательной) релаксацией.

Иначе дело обстоит с прикладной областью. Данные о численных значениях коэффициента второй вязкости весьма разрознены, справочная информация для проведения практических расчетов ограничена несколькими десятками химических соединений. Отсутствуют общепризнанные методики расчета второй вязкости смесей газов.

Вместе с тем, опыт показывает, что в отдельных случаях вторая вязкость имеет весьма существенное влияние на картину течения и взаимодействие потока со стенкой.

Можно с уверенностью утверждать, что учет ненулевой второй вязкости в расчетах позволяет, получать физически адекватную толщину скачков уплотнения, что становится физически значимым при больших числах Маха и числах Кнудсена $Kn > 0,01$. Помимо этого, опыт проведенных расчетов (пример результатов расчета обтекания пластины под углом атаки потоком разреженного газа приведен на рисунке 3) и анализ результатов других авторов показывает, что в указанном случае немаловажным становится влияние второй вязкости на распределение давления, коэффициента трения и числа Стантона вдоль обтекаемой поверхности (в особенности – в области передней критической точки).

Среди перспективных, на взгляд автора настоящей работы, направлений исследований находится вопрос о влиянии второй вязкости на ламинарно-турбулентный переход.

Открытыми также остаются вопросы роли второй вязкости в нестационарных процессах и в гетерогенных потоках.

В шестой главе рассмотрены вопросы неравновесного энергетического обмена в газе. Представлен подробный вывод уравнения для переноса колебательной

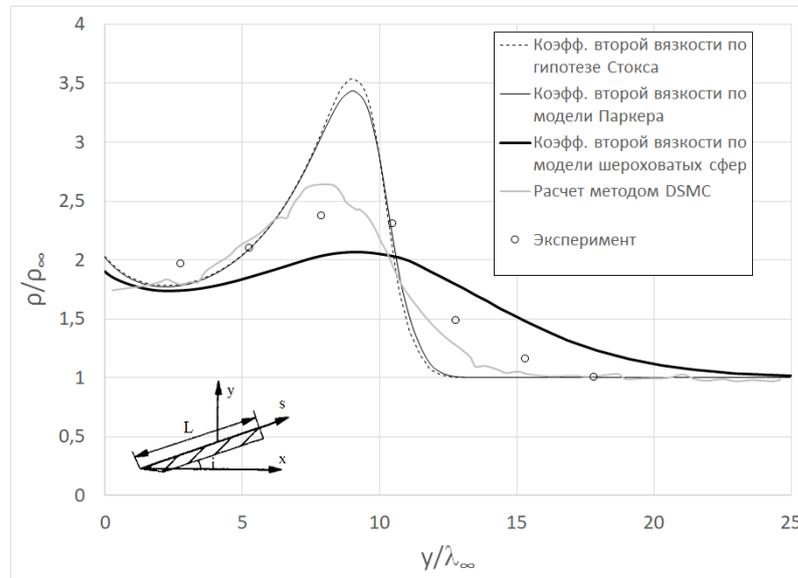


Рис. 3. Профиль плотности в сечении $x = 32\lambda_\infty$ при обтекании пластины под углом атаки 10 градусов в сравнении с данными эксперимента .

энергии в различных формах и уравнение полной энергии для колебательно-неравновесного газа в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x_j} [u_j (\rho E + p) + q_j - u_n \tau_{ij}] = -Q_R \quad (26)$$

Обоснована возможность использования следующей формулы для теплового потока при течениях термически неравновесного газа:

$$q_j = -\frac{\mu}{Pr_{TR}} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (27)$$

Разобраны основные механизмы колебательного энергетического обмена: 1) путем непосредственного перехода кинетической энергии сталкивающихся молекул в колебательную энергию, и наоборот (процесс прямого возбуждения или дезактивации), обозначаемый как T-V (V-T) переход; 2) путем обмена энергией между колебательными степенями свободы сталкивающихся молекул (процесс колебательно-колебательного обмена), обозначаемый как V-V переход. V-V переходы бывают как внутримолекулярные, так и межмолекулярные; 3) вследствие спонтанной излучательной дезактивации.

Обобщены данные по энергетическим переходам Дж.Блауэра, О.В.Ачасова,

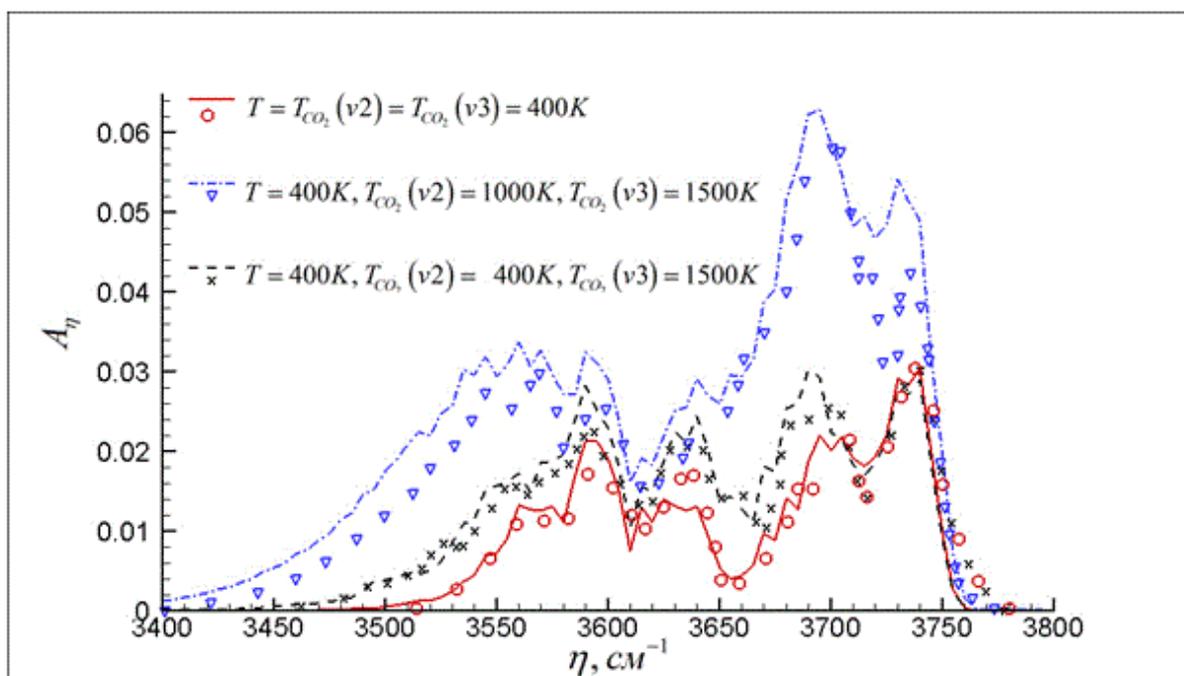


Рис. 4. Спектральный коэффициент поглощения слоя CO_2 (мольная доля 0,2) толщиной 1 м при давлении 1 кПа при различных соотношениях поступательной и колебательных температур. Линии - результаты данной работы; значки - результаты Виткина Е.И.

Е.И.Виткина, С.Р.Леоне (см. таблицу 1 и 2).

В седьмой главе показана разработанная в рамках настоящей работы методика расчета теплового излучения колебательно неравновесного газа на основе метода k -распределения. Предложены формулы для расчета средних по полосе пропускательной способности и эффективной функции Планка для колебательно неравновесной газовой смеси. Проведено сопоставление расчета неравновесного излучения с результатами других авторов и с экспериментальными данными, которое показало удовлетворительное совпадение (см. рисунки 4 и 5).

Показано, что результаты расчета интенсивности излучения по неравновесной методике существенно отличаются от равновесной (расхождение может превышать порядок).

Показано, что подход, основанный на равновесной методике расчета излучения с использованием колебательной температуры в качестве определяющей

Таблица 1. Основные энергетические переходы в многокомпонентной газовой смеси

V-T процессы	
1. $N_2(1) + M \rightleftharpoons N_2(0) + M$	8. $H_2O(100) + M \rightleftharpoons H_2O(000) + M$
2. $CO_2(01^10) + M = CO_2(00^00) + M$	9. $H_2O(001) + M \rightleftharpoons H_2O(000) + M$
3. $CO(1) + M \rightleftharpoons CO(0) + M$	10. $O_2(1) + M \rightleftharpoons O_2(0) + M$
4. $H_2O(010) + M \rightleftharpoons H_2O(000) + M$	11. $OH(1) + M \rightleftharpoons OH(0) + M$
5. $H_2(1) + M \rightleftharpoons H_2(0) + M$	12. $CO_2(00^01) + M = CO_2(00^00) + M$
6. $HCl(1) + M \rightleftharpoons HCl(0) + M$	13. $Cl_2(1) + M \rightleftharpoons Cl_2(0) + M$
7. $NO(1) + M \rightleftharpoons NO(0) + M$	
внутримолекулярные V-V процессы:	
14. $CO_2(00^01) + M = \begin{cases} CO_2(03^10) + M \\ CO_2(11^10) + M \end{cases}$	16. $H_2O(100) + M \rightleftharpoons H_2O(020) + M$
15. $CO_2(10^00) + M = CO_2(02^00) + M$	17. $H_2O(001) + M \rightleftharpoons H_2O(020) + M$
	18. $H_2O(001) + M \rightleftharpoons H_2O(100) + M$
межмолекулярные V-V' процессы:	
19. $CO_2(00^01) + N_2(0) = CO_2(00^00) + N_2(1)$	27. $N_2(1) + O_2(0) = N_2(0) + O_2(1)$
20. $CO_2(00^01) + CO(0) = CO_2(00^00) + CO(1)$	28. $CO_2(01^11) + N_2(0) = CO_2(01^10) + N_2(1)$
21. $CO(1) + N_2(0) = CO(0) + N_2(1)$	29. $CO(1) + O_2(0) = CO(0) + O_2(1)$
22. $N_2(1) + NO(0) = N_2(0) + NO(1)$	30. $CO_2(01^11) + CO(0) = CO_2(01^10) + CO(1)$
23. $CO(1) + NO(0) = CO(0) + NO(1)$	31. $H_2(1) + H_2O(000) = H_2(0) + H_2O(001)$
24. $CO_2(00^01) + NO(0) = CO_2(00^00) + NO(1)$	32. $H_2(1) + H_2O(000) = H_2(0) + H_2O(100)$
25. $CO_2(00^00) + N_2(1) = \begin{cases} CO_2(03^10) + N_2(0) \\ CO_2(11^10) + N_2(0) \end{cases}$	33. $H_2(1) + OH(0) = H_2(0) + OH(1)$
26. $CO_2(00^00) + CO(1) = \begin{cases} CO_2(03^10) + CO(0) \\ CO_2(11^10) + CO(0) \end{cases}$	34. $H_2O(001) + OH(0) = H_2O(000) + OH(1)$
	35. $H_2O(100) + OH(0) = H_2O(000) + OH(1)$
V-V' процессы с участием HCl:	
36. $HCl(1) + CO(0) = HCl(0) + CO(1)$	40. $HCl(1) + NO(0) = HCl(0) + NO(1)$
37. $HCl(1) + N_2(0) = HCl(0) + N_2(1)$	41. $HCl(1) + O_2(0) = HCl(0) + O_2(1)$
38. $HCl(1) + CO_2(00^00) = HCl(0) + CO_2(00^01)$	42. $HCl(1) + H_2O(000) = HCl(0) + H_2O(001)$
39. $HCl(1) + H_2(0) = HCl(0) + H_2(1)$	43. $HCl(1) + H_2O(000) = HCl(0) + H_2O(100)$

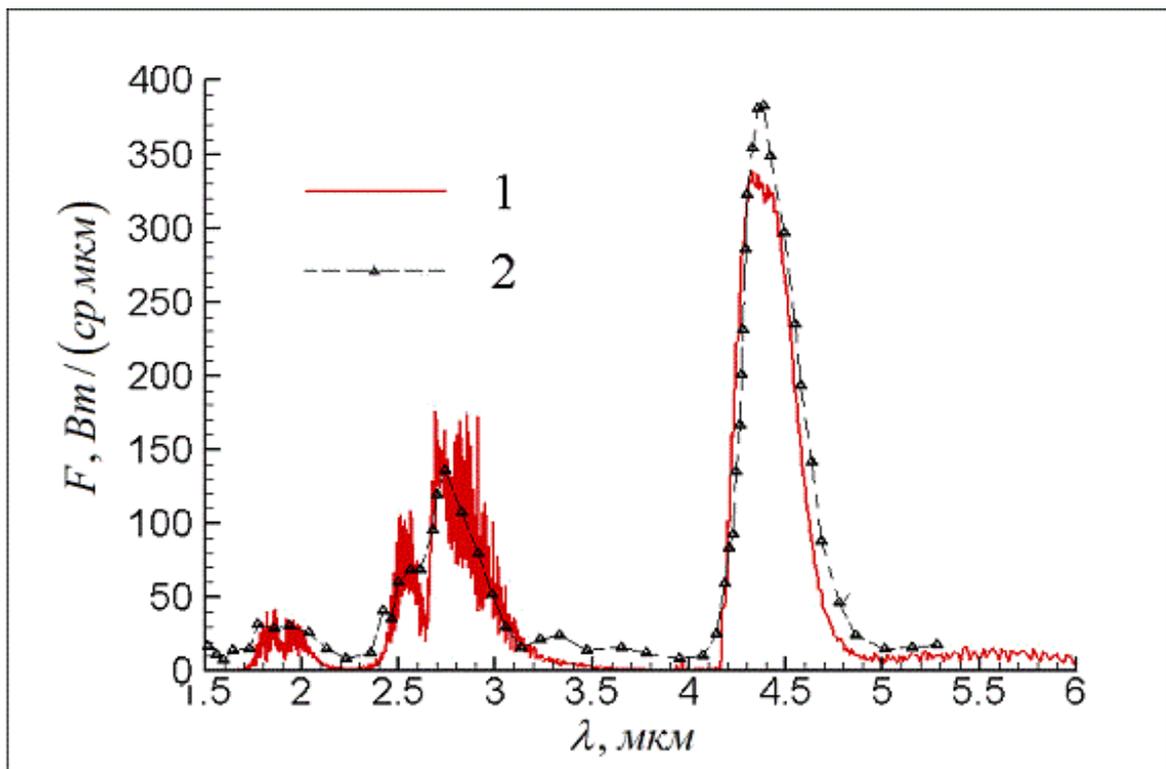


Рис. 5. Спектральная интенсивность излучения, проинтегрированная по длине факела 1 м. 1 - результаты расчета данной работы; 2 - экспериментальные измерения Дж.Авитала и др.

Таблица 2. Колебательные моды и характерные колебательные температуры

m	1	2	3	4	5	6	7
Кол.мода	CO	$CO_2 (v_2)$	$CO_2 (v_3)$	N_2	$H_2O (v_1)$	$H_2O (v_2)$	$H_2O (v_3)$
θ_m, K	3083	960	3380	3357	5254	2295	5404
m	8	9	10	11	12	13	14
Кол.мода	$CO_2 (v_1)$	H_2	O_2	NO	OH	HCl	Cl_2
θ_m, K	1920	5964	2234	2700	5286	4143	811

вместо поступательной (равновесной), может приводить к грубым ошибкам. Показано, что с уменьшением давления эффекты колебательной неравновесности усиливаются. Причем, в первую очередь это проявляется для CO и CO_2 , и только на больших высотах начинает проявляться для H_2O .

Показано, что колебательные температуры симметричной и асимметричной мод воды $T_{H_2O(v1)}$ и $T_{H_2O(v3)}$ очень близки друг к другу даже при сильной колебательной неравновесности, что говорит о равновесии между этими модами.

Сделан вывод, что константы скоростей энергетических переходов существенно влияют на колебательные температуры, поэтому в дальнейшем желательно их уточнение.

Материал данной главы ранее был опубликован автором в [25] и [10].

В восьмой главе на основе базовой системы уравнений КГД была сформулирована система уравнений КГД для термически неравновесного газа (см уравнения (28)).

Система была использована для решения ряда задач по течению разреженного газа и расчету излучающих свойств. Сходимость с известными опубликованными результатами - удовлетворительная (см. рис. 6, 7).

Термически неравновесная система КГД позволяет проводить расчеты в широком диапазоне чисел Кнудсена (до 10). Важный полученный результат - существенное снижение интенсивности излучения газа на больших высотах по срав-

нению с расчетами с использованием уравнений Навье-Стокса (см. рис. 7), что согласуется с известными наблюдаемыми данными. При этом показано, что расчет с использованием системы Навье-Стокса с ненулевым коэффициентом второй вязкости так же позволяет приблизиться к данным эксперимента, но не так эффективно как система КГД.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} (y^\kappa \rho v) &= \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} (y^\kappa g_y) \\
\frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u^2 + p) + \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} (y^\kappa \rho v u) &= \frac{\partial \Pi_{xx}}{\partial x} + \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} (y^\kappa \Pi_{yx}) \\
\frac{\partial}{\partial t} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v^2 + p) + \kappa \frac{\rho v^2}{y} &= \frac{\partial \Pi_{xy}}{\partial x} + \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} (y^\kappa \Pi_{yy}) - \kappa \frac{\Pi_{\phi\phi}}{y} \\
\frac{\partial}{\partial t} (\rho E) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u H) + \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} (y^\kappa \rho v H) &= \frac{\partial F_{Ex}}{\partial x} + \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} (y^\kappa F_{Ey}) \\
\frac{\partial}{\partial t} (E_{\vartheta(m)}) + \frac{\partial}{\partial x} (u E_{\vartheta(m)}) + \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} (y^\kappa v E_{\vartheta(m)}) &= \\
= \frac{\partial F_{m,x}}{\partial x} + \frac{1}{y^\kappa} \frac{\partial}{\partial y} (y^\kappa F_{m,y}) + \dot{E}_{\vartheta(m)}, \quad m = 1, 2, \dots, N_M \\
\frac{\partial}{\partial t} (\rho C_s) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho C_s u_i) &= \frac{\partial g_{s,i}}{\partial x_i} + \dot{w}_s, \quad s = 1, 2, \dots, N_C - 1
\end{aligned} \tag{28}$$

Материалы данной главы публиковались автором в [19].

В девятой главе В главе детально рассмотрены подходы к моделированию турбулентных характеристик на основе осреднения Рейнольдса-Фавра.

Предложена модификация метода пристеночных функций с применением функции Ламберта, позволяющая сократить время счета.

Часто при применении метода пристеночных функций возникает необходимость получения решения уравнения следующего вида:

$$\frac{\kappa u_{PUP}}{\nu} = y^+ \ln E y^+. \tag{29}$$

Данное уравнение обычно решают итерационным методом. Автором настоящей работы было найдено аналитическое решение уравнения такого типа с использованием функции Ламберта [37]. Точное решение выглядит следующим образом:

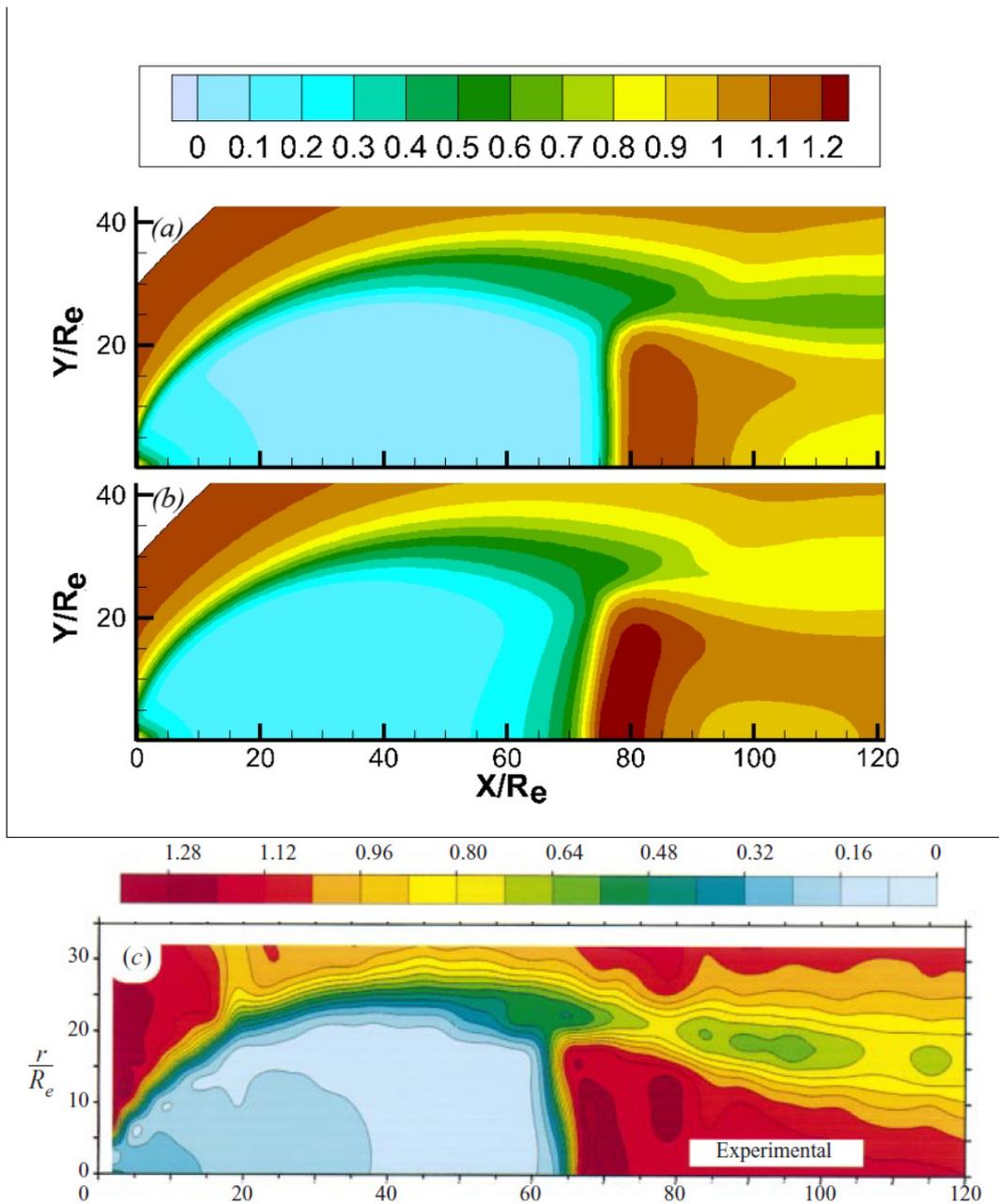


Рис. 6. Пространственное распределение относительных температур T/T_∞ для варианта I.

(a) - результаты расчета поступательно-вращательной температуры при использовании уравнений Навье-Стокса;

(b) - результаты расчета поступательно-вращательной температуры при использовании квазигазодинамических уравнений;

(c) - результаты экспериментального исследования вращательной температуры Б.Мате и др.

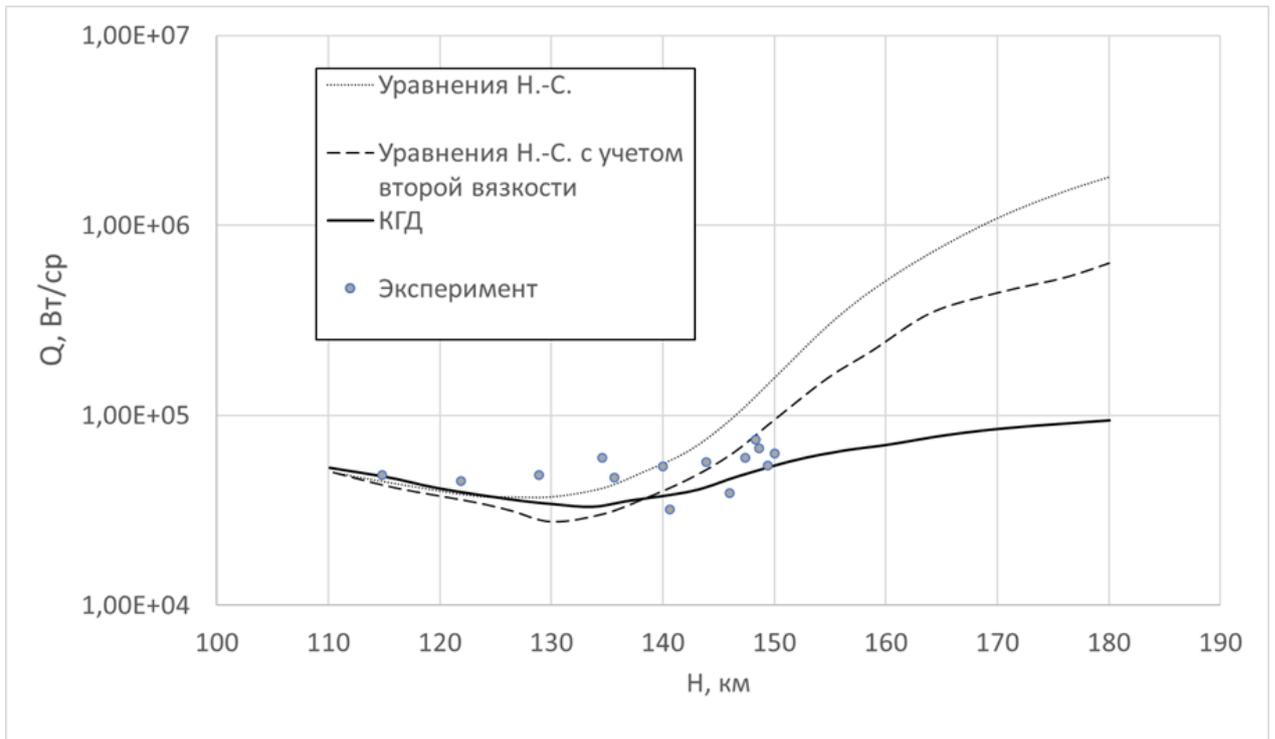


Рис. 7. Зависимость интегрального излучения струи по высоте для изделия Titan–IIIВ в сравнении с летным экспериментом по данным Ф.Симмонса

$$y^+ = \frac{\exp \left[LamW \left(\frac{EkuPUP}{\nu} \right) \right]}{E} \quad (30)$$

Очевидно, что аналитические решения могут быть найдены и для многих других форм пристеночных функций, содержащих слагаемые вида $y^+ \ln(Ey^+)$.

С учетом того, что вычисления y^+ необходимо проводить на каждом шаге по времени, приведенный метод имеет очевидные преимущества над итерационным.

Затронута проблема влияния сжимаемости на турбулентные характеристики.

Сформулирована и валидирована трехпараметрическая модель турбулентности, учитывающая влияние неизотропности турбулентности и сжимаемости газа на турбулентные характеристики.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho K) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho} \tilde{u}_k K) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial K}{\partial x_k} \right] + P^* - \frac{\rho K}{g^2}, \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}g) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho}\tilde{u}_k g) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_g} \right) \frac{\partial g}{\partial x_k} \right] - \\ &- \frac{\alpha}{2} \frac{g}{K} P^* + \frac{\beta\rho}{2\beta^*g} - \frac{3}{g} \left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_g} \right) \frac{\partial g}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_k} + \\ &+ \frac{(1-F_1)}{K} \left\{ \frac{2\mu_T}{\sigma_g} \frac{\partial K}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial x_k} + \frac{g}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\mu_T \left(\frac{1}{\sigma_K} - \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial K}{\partial x_k} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\rho}\widetilde{V}_n'^2) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\bar{\rho}\tilde{u}_k \widetilde{V}_n'^2) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{\mu_T}{\sigma_K} \right) \frac{\partial \widetilde{V}_n'^2}{\partial x_k} \right] + \\ &+ \frac{2}{3} C_{\text{Пл}} C_2 P - \left[C_1 \frac{\widetilde{V}_n'^2}{K} + \frac{2}{3} (1-C_1) \right] \frac{\rho K}{g^2}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\mu_T = \min \left(C_D \rho \widetilde{V}_n'^2 g^2; \frac{\rho a_1 K}{S F_2} \right). \quad (34)$$

где $a_1 = 0.31$ - константа Брэдшоу, а функции сопряжения определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} F_1 &= \tanh(\arg_1^4); \\ \arg_1 &= \min \left[\max \left(\frac{g^2 \sqrt{K}}{y}, \frac{500 \mu \beta^* g^2}{\rho y^2} \right), \frac{1}{C D_{K\omega}} \frac{4\rho K}{\sigma_\varepsilon y^2} \right]; \\ C D_{K\omega} &= \max \left(-\frac{4\rho}{\sigma_\varepsilon g} \frac{\partial K}{\partial x_j} \frac{dg}{dx_j}, 1.0 \times 10^{-10} \right); \quad F_2 = \tanh(\arg_2^2); \\ \arg_2 &= \max \left(2 \frac{g^2 \sqrt{K}}{y}, \frac{500 \mu \beta^* g^2}{\rho y^2} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

Коэффициенты модели определяются с использованием функций сопряже-

Таблица 3. Коэффициенты модели для "внешней" области течения

σ_{K2}	σ_ε	$C_{\varepsilon1}$	$C_{\varepsilon2}$	C_1	C_2
1.0	1.3	1.44	1.92	1.8	0.6

Таблица 4. Коэффициенты модели для "пристеночной" области течения

α_1	β^*	β_1	σ_{g1}	σ_{K1}
5/9	0.09	0.075	2.0	1.176

ния:

$$\begin{aligned}
 \alpha &= F_1 \alpha_1 + (1 - F_1)(C_{\varepsilon1} - 1) \\
 \frac{\beta}{\beta^*} &= F_1 \frac{\beta}{\beta^*} + (1 - F_1)(C_{\varepsilon1} - 1) \\
 \frac{1}{\sigma_g} &= F_1 \frac{1}{\sigma_{g1}} + (1 - F_1) \frac{1}{\sigma_\varepsilon} \\
 \frac{1}{\sigma_K} &= F_1 \frac{1}{\sigma_{K1}} + (1 - F_1) \frac{1}{\sigma_{K2}} \\
 C_D &= F_1 \frac{(1 - C_2)}{C_1} + (1 - F_1) \frac{(1 - C_{\Pi1} C_2 - C_{\Pi2})}{C_1}
 \end{aligned} \tag{36}$$

Значения $C_{\varepsilon1}$, $C_{\varepsilon2}$, σ_ε and σ_{K2} , C_1 , C_2 берутся в соответствии с таблицей 3.

Остальные коэффициенты берутся в соответствии с таблицей 4.

Источник турбулентной энергии модифицируется следующим образом:

$$P^* = P [1 - (1 - F_1) C_{\Pi2}] \tag{37}$$

$C_{\Pi 1}$ и $C_{\Pi 2}$ являются функциями турбулентного числа Маха:

$$C_{\Pi 1}(M_T) = \begin{cases} 1, & M_T \leq \alpha_{\Pi 1} \\ 1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3, & \zeta = \frac{(M_T - \alpha_{\Pi 1})}{(\beta_{\Pi 1} - \alpha_{\Pi 1})}, \quad \alpha_{\Pi 1} < M_T < \beta_{\Pi 1} \\ 0, & M_T \geq \beta_{\Pi 1} \end{cases}$$

$$C_{\Pi 2}(M_T) = \begin{cases} C_{\Pi 2, \max} (3\zeta^2 + 2\zeta^3), & \zeta = \frac{(M_T - \alpha_{\Pi 2})}{(\beta_{\Pi 2} - \alpha_{\Pi 2})}, \quad \alpha_{\Pi 2} < M_T \leq \beta_{\Pi 2} \\ C_{\Pi 2, \max} (1 - 3\zeta^2 + 2\zeta^3), & \zeta = \frac{(M_T - \beta_{\Pi 2})}{(\gamma_{\Pi 2} - \beta_{\Pi 2})}, \quad \beta_{\Pi 2} < M_T < \gamma_{\Pi 2} \\ 0, & M_T \leq \alpha_{\Pi 2} \cup M_T \geq \gamma_{\Pi 2} \end{cases}$$

$$\alpha_{\Pi 1} = 0.1; \quad \beta_{\Pi 1} = 0.27; \quad \beta_{\Pi 2} = 0.315; \quad \gamma_{\Pi 2} = 10; \quad C_{\Pi 2, \max} = 0.65 \quad (38)$$

В данной работе с учетом эффектов стенки турбулентное число Маха выбрано следующим образом:

$$M_T = \frac{\min \left(0.2857 L_T S; \sqrt{2K} \right)}{a} \quad (39)$$

где $S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}}$ - инвариант тензора скоростей деформаций $S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$,
 $L_T = \min \left(g^2 \sqrt{K}; y \right)$ - масштаб длины, где y расстояние до ближайшей стенки.

В непосредственной близости от стенки сжимаемость перестает оказывать существенное влияние на турбулентную структуру, в связи с чем в модели заложено, что функции $C_{\Pi 1}$ и $C_{\Pi 2}$ в данной области обнуляются.

Результаты валидационных расчетов приведены на рис. 8 (слой смешения), 9 (пристенное течение сжимаемого газа) и 10 (взаимодействие со скачком уплотнения).

Материалы данной главы ранее публиковались автором в [24, 27], а также в [11, 13], [30] и [41].

В десятой главе рассматривается проблема определения положения ламинарно-турбулентного перехода при течении жидкостей и газов. Дан обширный обзор литературы, выделены основные факторы, влияющие на устойчивость течения.

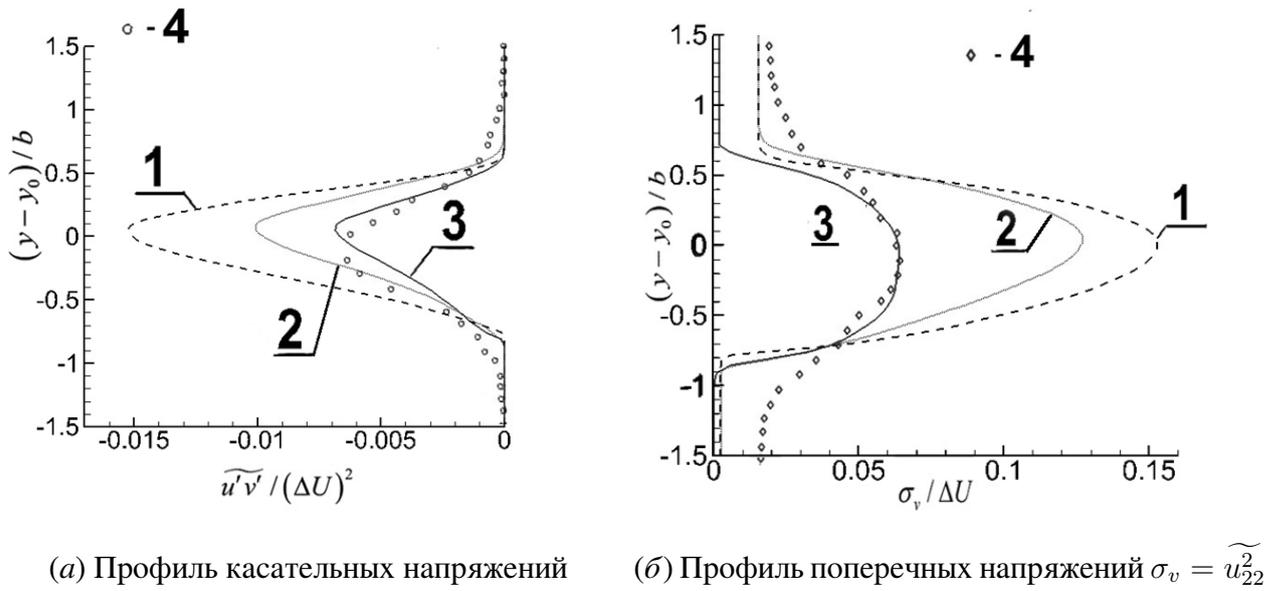


Рис. 8. Безразмерные профили основных компонент тензора напряжений Рейнольдса для плоского смешения двух параллельных потоков. 1 - результаты расчета с использованием модели SST, 2 - результаты расчета с использованием модели Саркара 3 - результаты расчета с использованием представленной модели, 4 - результаты эксперимента Гобела и Даттона

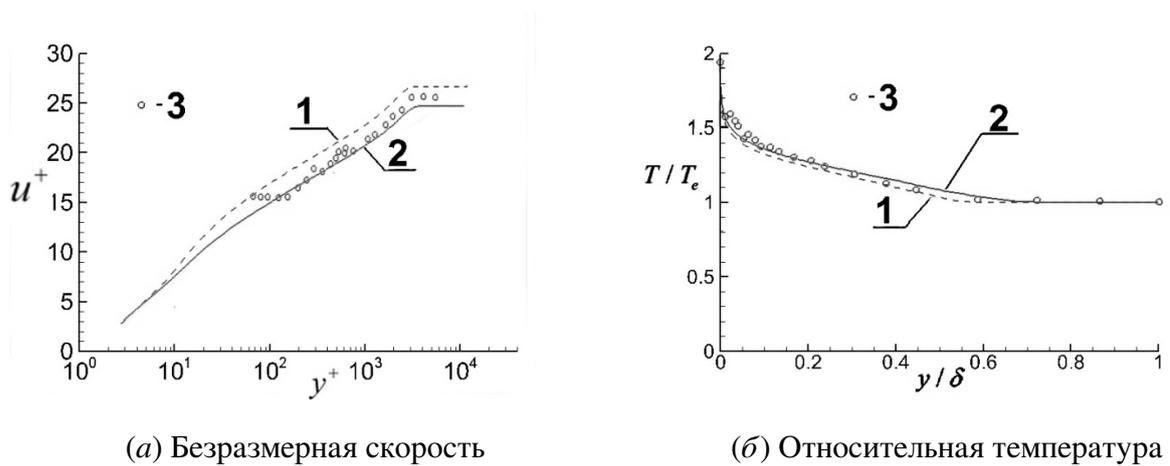


Рис. 9. Безразмерные профили скорости и температуры для режима (2). 1 - результаты расчета с использованием модели SST, 2 - результаты расчета с использованием представленной модели, 3 - результаты эксперимента Г.Фернхольца и П.Финли

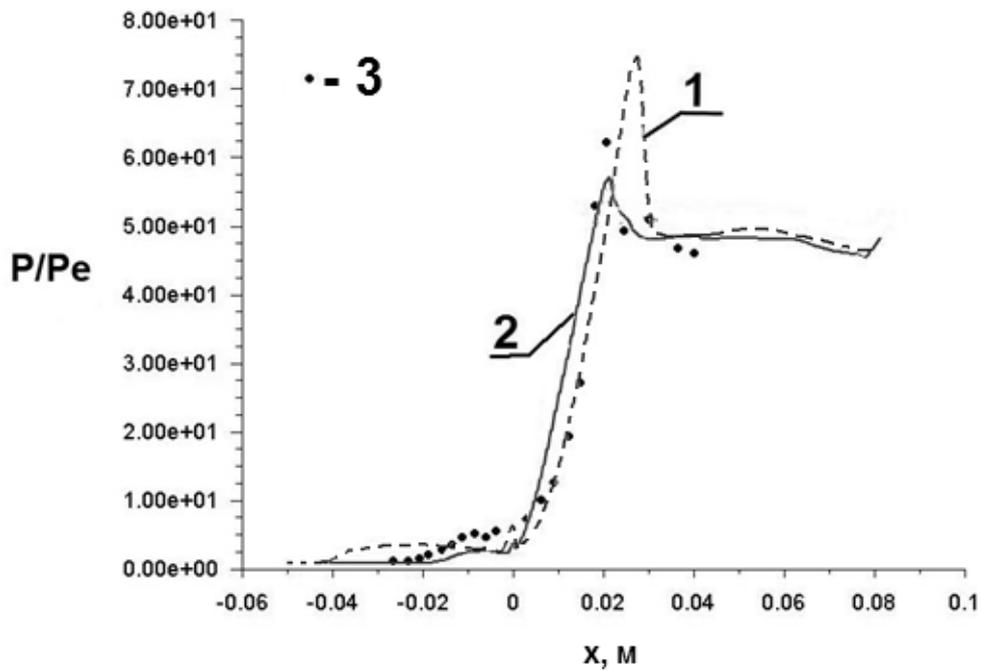


Рис. 10. Распределение статического давления по поверхности клина. 1 - расчет с использованием модели SST, 2 - расчет с использованием представленной модели, 3 - эксперимент Дж.Эльфстрема

Выделены два основных подхода к проблеме.

«Классический» подход основан на рассмотрении пограничного слоя как некоторой системы, преобразующей внешние возмущающие «сигналы». Направленность данного подхода – определение физических механизмов, ответственных за перемежаемость.

«Инженерно-технический» подход основан на методах вычислительной гидродинамики и искусственно вводит дополнительные полуэмпирические уравнения переноса для характеристик, определяющих состояние погранслоя (например – перемежаемость). Направленность данного подхода – обеспечение определения зоны ламинарно-турбулентного перехода при использовании автоматизированных средств инженерного анализа (программных комплексов вычислительной гидродинамики) без глубокого анализа механизмов перехода.

В рамках данной работы предложена инженерная модель ламинарно-турбулентного перехода, построенная с использованием понятия перемежаемости и

величин временных масштабов, характерных для различных мод возмущений.

В данном разделе приводится модель ламинарно-турбулентного перехода, разработанная автором на основе подхода, предложенного Дж. Паппом и С.Дэшем, а также Л. Вангом и С.Фу . Данный подход основан на использовании понятий перемежаемости и эффективной вязкости, как и подход Лэнгтри-Ментера, с тем отличием, что в модель дополнительно вносятся члены, моделирующие вклад нетурбулентных пульсаций (возмущения первой и второй моды).

Для эффективной вязкости используется формула (40):

$$\mu_{eff} = \mu + (1 - \gamma) \mu_{nt} + \gamma \mu_T \quad (40)$$

Турбулентная вязкость в данном уравнении определяется соответствующей моделью турбулентности, а для «нетурбулентной» вязкости μ_{nt} применяется формула:

$$\mu_{nt} = C_\mu \rho K \tau_{nt} \quad (41)$$

где $C_\mu = 0.09$ - константа, K - кинетическая энергия турбулентности.

Характерное время τ_{nt} складывается из двух частей:

$$\tau_{nt} = \tau_{nt1} + \tau_{nt2} \quad (42)$$

где τ_{nt1} , τ_{nt2} - характерные времена первой и второй моды возмущений соответственно.

Они определяются по формулам :

$$\tau_{nt1} = \frac{C_2 \zeta_{eff}^{1.5}}{\left[(2E_u)^{0.5} \nu \right]^{0.5}}, \quad (43)$$

$$\tau_{nt2} = \frac{C_3 \cdot 2\zeta_{eff}}{U_P} \quad (44)$$

Здесь ζ_{eff} - эффективный масштаб турбулентности, ν - коэффициент кинематической вязкости, $E_u = 0.5 |U_e|^2$ - кинетическая энергия внешнего потока, U_P - фазовая скорость для второй моды. Для нее используется формула :

$$U_P = 0.94U_e \quad (45)$$

где U_e - скорость внешнего потока.

Для определения коэффициента перемежаемости используется уравнение переноса:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\gamma) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho u_k \gamma) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(\mu + \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\gamma} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial x_k} \right] + P_\gamma (F_{onset}) - \varepsilon_\gamma, \quad (46)$$

где

$$P_\gamma (F_{onset}) = P_\gamma = C_4 \rho F_{onset} [-\ln(1-\gamma)]^{0.5} \left(1 + C_5 \sqrt{\frac{K}{2E_u}} \right) \frac{d}{\nu} |\nabla \tilde{E}_u|, \quad \varepsilon_\gamma = \gamma P_\gamma \quad (47)$$

$$F = 1 - \exp \left(-C_6 \frac{\mu_{eff} K^{0.5} |\nabla K|}{\nu |\nabla E_u|} \right), \quad (48)$$

d - расстояние от стенки.

Используются следующие значения числовых констант, входящих в модель:

C_μ	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	σ_γ
0.09	0.7	0.35	0.005	8e-5	0.07	1.2	1.0

Для тестирования модели проведено сопоставление результатов расчетов с экспериментальными данными работы Д.Ми, в которой исследовался высокоскоростной ламинарно-турбулентный переход на пластине.

Некоторые результаты расчетов числа Стантона St представлены на рисунках 11 и 12.

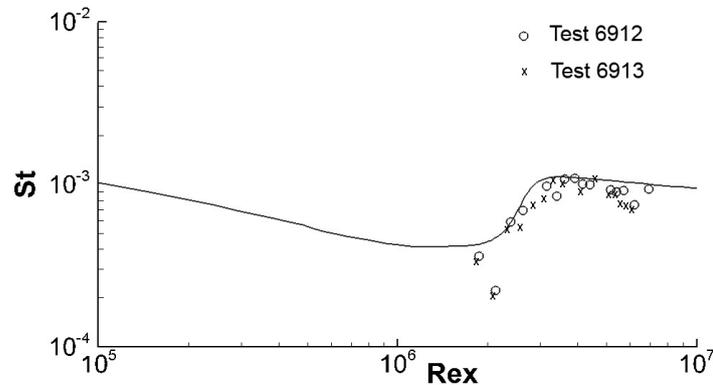


Рис. 11. Распределение числа Стантона вдоль пластины для режима 6912 и 6913. Значки - эксперимент ; сплошная линия - результаты расчета

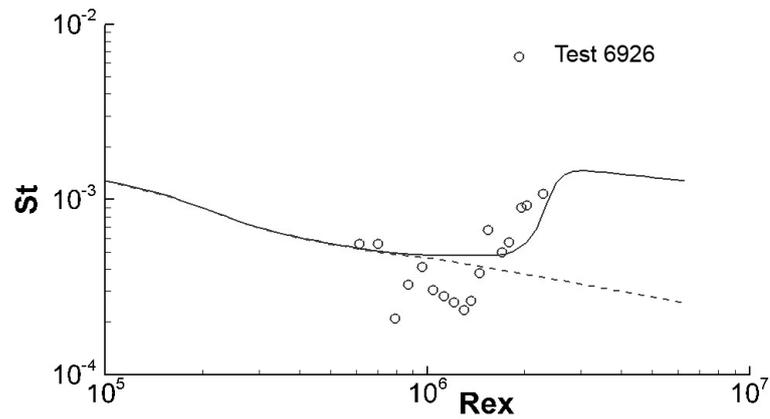


Рис. 12. Распределение числа Стантона вдоль пластины для режима 6926.

Значки - эксперимент ; сплошная линия - результаты расчета; пунктир - расчет ламинарного течения (без учета ЛТП)

Материалы данной главы были опубликованы автором в [26] и [5] - в сокращенном виде и в [2] - в расширенном виде.

В одиннадцатой главе решен ряд валидационных задач и проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

Обтекание сферы.

Условия расчетов: давление и температура окружающей среды соответствовали параметрам атмосферы на высоте 10 км (температура - 223.252 К, давление - 2.65×10^4 Па).

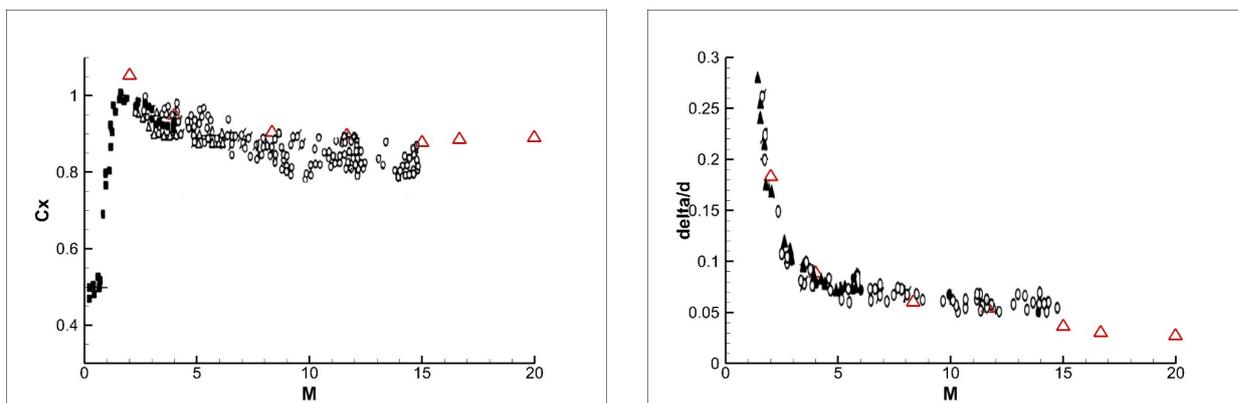
Результаты расчета сравнивались с экспериментальными данными ЦАГИ, приведенными Красилицыковым А. П. (см. рис. 13, а-13, б).

Обтекание аппарата OREX. Спускаемый аппарат OREX представляет собой сферически затупленный конус с углом наклона 50° , с радиусом носовой части 1.35 м и диаметром основания 3.4 м.

Расчеты проводились для высот полета $H=79.9, 84, 88.4, 92.8, 96.8$ и 101.1 км.

Проанализировано влияние различных факторов на результаты расчета. Показано, что:

1) При задании значений колебательных температур у стенки равными температуре стенки плотность теплового потока выше, чем при условии нулевого градиента



(а) Коэффициент сопротивления

(б) Приведенное расстояния отхода ударной волны от поверхности сферы вблизи ПКТ

Рис. 13. Результаты расчетов обтекания сферы в сравнении с экспериментальными данными (\triangle - данные расчетов, \bullet – экспериментальные данные)

этих температур на стенке; это обусловлено тем, что во втором случае отсутствует вклад колебательных температур в перенос тепла возле стенки. С ростом высоты это отличие несколько уменьшается, что объясняется небольшими значениями колебательных температур по сравнению с поступательной и, соответственно, меньшим их вкладом в общий тепловой поток.

2) Увеличение каталитической активности стенки для высот меньше 90 км приводит к существенному росту плотности теплового потока; это обусловлено тем, что возле стенки усиливается рекомбинация молекул O_2 и N_2 и происходит переход химической энергии в тепловую. Однако, на больших высотах происходит постепенное "замораживание" химических реакций, и, следовательно, влияние каталитической активности пропадает.

3) При использовании модели термического равновесия, т.е. предположения, что все энергетические моды находятся в равновесии, температура в сжатом слое за скачком уплотнения получается существенно ниже по сравнению с поступательной температурой в неравновесном расчете ($\sim 15000K$ и $\sim 18000K$ соответственно). Причем это явление наблюдается на всем диапазоне рассматриваемых высот. В непосредственной близости от стенки, однако, это отличие становится незначительным, и температура в равновесном расчете даже несколько выше на высотах

до 90 км, что приводит к увеличению теплового потока.

4) колебательные температуры различных компонентов сильно отличаются друг от друга. Таким образом, двухтемпературная модель колебательной неравновесности не соответствует действительности.

Обтекание аппарата Pioneer-Venus

Было проведено численное моделирование обтекания спускаемого в атмосфере Венеры аппарата «Pioneer-Venus», по которому имеются данные летного эксперимента о тепловых потоках в окрестности передней критической точки в ходе спуска. Рассчитывался участок траектории спуска с высоты 90 км до высоты 75 км.

На рисунке 14 показана зависимость теплового потока в окрестности передней критической точки по времени. За нулевой момент времени в источниках принимается время, когда аппарат находился на высоте в 200 км. Полученные расчетные данные сравниваются с данными летного эксперимента. При расчете тепловых потоков учитывалась поправка на тепловой эффект пиролиза теплозащитного покрытия аппарата в соответствии с данными Ч.Парка.

Течение в донной области

Приводится анализ применимости различных моделей турбулентности для расчета течений в донной области и турбулентном следе.

На рисунке 15 представлены результаты расчета скорости по оси в области дна и в следе с использованием различных моделей турбулентности.

Наиболее близкие к экспериментам данные позволяет получить модель переноса напряжений Рейнольдса RSM и трехпараметрическая модель $k - g - V_n$ автора, результаты которой слабо отличаются от семипараметрической модели RSM.

В Заключении формулируются достигнутые в работе результаты:

1. Сформулирована полностью связанная система уравнений динамики высокоэнтальпийного газа в произвольной системе координат.

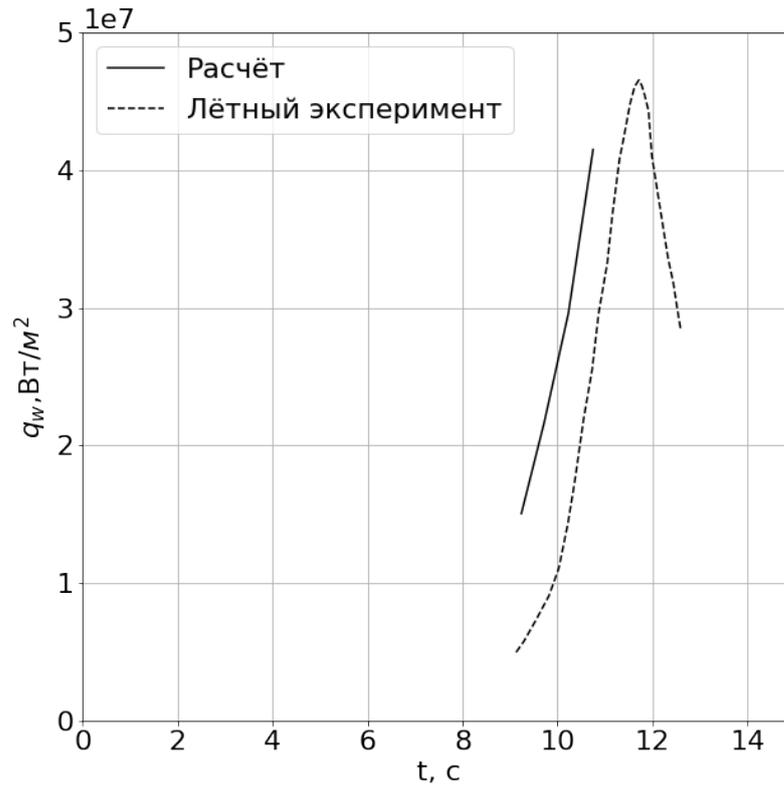


Рис. 14. Зависимость теплового потока в окрестности передней критической точки от времени спуска ($t=0$ с. соответствует высоте 200 км) в сравнении с летными данными

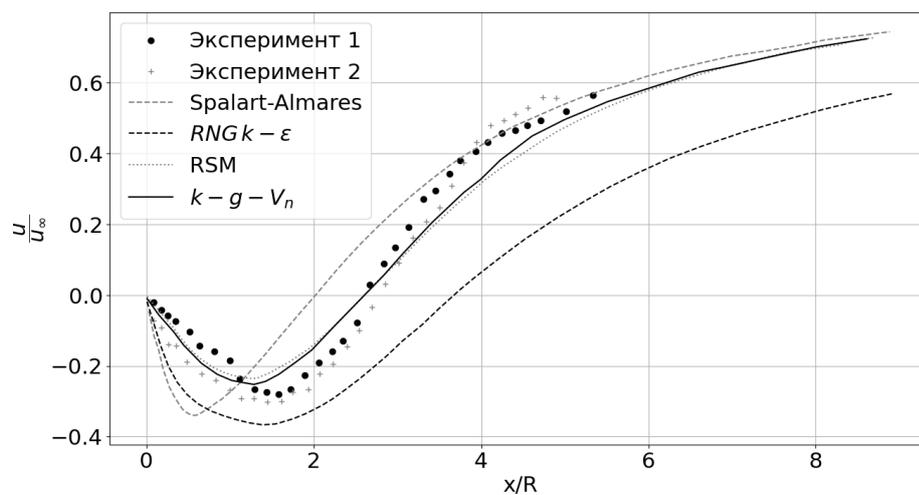


Рис. 15. Распределение скорости в донной области цилиндрической модели в сверхзвуковом потоке $M = 2,5$. Экспериментальные данные - Дж.Даттон

2. Разработана математическая модель, позволяющая описать высокоэнтальпийное химически и термически неравновесное течение газа, позволяющая производить расчеты в диапазоне чисел Кнудсена от 0 до 10 и широком диапазоне чисел Маха.
3. Построен численный метод решения связанной системы уравнений, описывающих химически и термически неравновесное течение газа с жёсткими источниками на произвольных геометриях. С точки зрения теории разностных схем, метод обладает безусловной устойчивостью, что позволяет с его помощью эффективно проводить численное решение задач с высокой степенью химической и термической неравновесности.
4. Выработаны методические рекомендации по организации параллельных вычислений при численном решении уравнений механики сплошной среды, направленные на ускорение расчётов.
5. Исследовано влияние коэффициента второй вязкости на газодинамические характеристики. Сформулирован критерий необходимости учета ненулевого коэффициента второй вязкости. Показано, что на больших высотах (при низких давлениях) корректный учет влияния второй вязкости позволяет получить картину течения и взаимодействия потока со стенкой гораздо более близкую к наблюдаемой в эксперименте.
6. Разработана методика расчета излучения термически неравновесной газовой смеси, основанная на принципах метода k-распределения, позволившая получить результаты по точности сопоставимые с методом прямого расчета по спектральным линиям (LBL), но существенно более эффективная с точки зрения использования вычислительных ресурсов.
7. Построена система квазигазодинамических уравнений для термически неравновесного газа.

8. Проведены расчеты разреженных течений с учетом термической неравновесности. Сопоставление результатов указанных расчетов с экспериментальными данными показало хорошую степень сходимости. В отдельных случаях удалось увеличить точность расчетов до 4 раз.
9. Разработана и апробирована неизотропная трехпараметрическая модель турбулентности для высокоскоростных течений, позволяющая адекватно учитывать влияние сжимаемости на турбулентные характеристики. Показано, что предлагаемая модель турбулентности может быть эффективно применена для расчета свободных и пристеночных течений в широком круге задач авиационной и космической техники.
10. Разработана и апробирована инженерная модель перемежаемости (ламинарно-турбулентного перехода) для высокоскоростных течений.
11. Проведены расчеты и сопоставление с экспериментами для ряда задач обтекания тел высокоэнтальпийным потоком. Сопоставление результатов указанных расчетов с экспериментальными данными показало хорошую степень сходимости.

Список публикаций по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 44 научных работах:

Монографии

1. Краев В. М., Янышев Д. С. Нестационарные турбулентные течения в каналах энергоустановок. — Красноярск : СибГАУ, 2014. — С. 276.
2. Быков Л. В., Молчанов А. М., Янышев Д. С. Пути перехода к турбулентности // Гиперзвуковые летательные аппараты / под ред. Дегтяря В. Г., Сона Э. Е. — Москва : Янус-К, 2018. — Т. 2. — С. 647–685 с.

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК и приравненных к ним

3. Краев В. М., Мякочин А. С., Янышев Д. С. Эмпирическая модель расчета вихревой вязкости при течении газов в каналах в условиях монотонного изменения расхода // *Тепловые процессы в технике*. — 2012. — Т. 4, № 2. — С. 50–55.
4. Molchanov A., Yanyshv D., Bykov L. Numerical modeling of two-phase high speed jet with non-equilibrium solid phase crystallization // *Materials Science and Engineering*. — 2016. — Vol. 158, no. 1. — P. 012070.
5. Современные подходы к расчету характеристик течения при ламинарно-турбулентном переходе в пограничном слое / Быков Л. В., Молчанов А. М., Янышев Д. С. и Платонов И. М. // *Теплофизика высоких температур*. — 2018. — Т. 56, № 1. — С. 104–120.
6. Molchanov A., Yanyshv D., Bykov L. Simulation of high-speed nonequilibrium heterogeneous turbulent flows with phase transition // *Journal of Physics*. — 2017. — Vol. 891, no. 1. — P. 012051.
7. Molchanov A., Yanyshv D., Bykov L. Influence of turbulent fluctuations on non-equilibrium chemical reactions in the flow // *Journal of Physics*. — 2017. — Vol. 891, no. 1. — P. 012106.
8. Molchanov A. M., Yanyshv D. S., Bykov L. V. Influence of channel geometrical properties and turbulence on propellant ignition in hypersonic ramjet combustion chamber // *Journal of Physics*. — 2017. — Vol. 891, no. 1. — P. 012107.
9. Influence of geometric parameters and chemical kinetics model on combustion in a supersonic flow / Molchanov A. M., Bykov L. V., Platonov I. M., and Yanyshv D. S. // *International Journal of Fluid Mechanics Research*. — 2017. — Vol. 44, no. 6.
10. Молчанов А. М., Быков Л. В., Янышев Д. С. Расчет теплового излучения колебательно-неравновесного потока газа методом k-распределения // *Теплофизика и аэромеханика*. — 2017. — Т. 24, № 3. — С. 411–432.

11. Молчанов А. М., Быков Л. В., Янышев Д. С. Трехпараметрическая модель турбулентности для высокоскоростных течений // Инженерно-физический журнал. — 2018. — Т. 91, № 3. — С. 720–727.
12. Математическое моделирование динамического отделения полезной нагрузки от самолета-носителя / Быков Л. В., Пашков О. А., Правидло М. Н., Тишков В. В. и Янышев Д. С. // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. — 2018. — № 2. — С. 45–52.
13. On the V2-Based Turbulence Model for Free-Stream and Wall-Bounded High-Speed Compressible Flows / Molchanov A. M., Yanyshv D. S., Bykov L. V., and Platonov I. M. // International Journal of Fluid Mechanics Research. — 2019. — Vol. 46, no. 6.
14. Молчанов А. М., Янышев Д. С., Тушканов А. С. Влияние турбулентности на скорости химических реакций // Тепловые процессы в технике. — 2019. — Т. 11, № 2. — С. 61–68.
15. Быков Л. В., Янышев Д. С. Особенности моделирования работы пироприводов // Тепловые процессы в технике. — 2019. — Т. 11, № 12. — С. 541–549.
16. Молчанов А. М., Грибиненко Д. В., Янышев Д. С. Численное моделирование воспламенения горючего в камере сгорания ГПВРД // Тепловые процессы в технике. — 2021. — Т. 13, № 4. — С. 148–154.
17. Molchanov A., Yanyshv D., Bykov L. Numerical investigation of a supersonic flow in the near wake region of a cylindrical afterbody // Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Natural Sciences. — 2022. — no. 3 (102). — P. 86–95.
18. Utilization of parallel computing for mathematical modeling of high-enthalpy flows / Gribinenko D., Molchanov A., Siluyanov M., and Yanyshv D. // Journal of Physics. — 2022. — Vol. 2308, no. 1. — P. 012010.
19. Янышев Д. С. О роли диссипативных слагаемых при математическом моделировании разреженных потоков газа // Тепловые процессы в технике. — 2023. — Т. 15, № 11. — С. 504–514.

Доклады в трудах конференций

20. Краев В. М., Янышев Д. С. К вопросу о расчёте турбулентных течений с переменным расходом в каналах ЭУ ЛА и оптимизации процессов с ними связанных // Решетневские чтения. — Красноярск. — 2009. — Т. 1. — С. 116–117.
21. Kraev V. M., Yanyshev D. S. On the Analysis of Turbulent Transient Flows in Channels // International Heat Transfer Conference. — 2010. — Vol. 49378. — P. 395–401.
22. Краев В. М., Янышев Д. С. Обобщение экспериментальных данных о вихревой вязкости при течении газов в каналах в условиях монотонного изменения расхода // Решетневские чтения. — Красноярск. — 2011. — Т. 1. — С. 182–183.
23. Краев В. М., Янышев Д. С. Разработка модели турбулентности для гидродинамически нестационарного течения газа в каналах // Труды Шестой Российской национальной конференции по теплообмену. — Москва. — 2014. — Т. 1. — С. 224–227.
24. Молчанов А. М., Быков Л. В., Янышев Д. С. Модель турбулентности k - ϵ - V для высокоскоростных свободных и пристеночных течений // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2016). — Москва : МАИ. — 2016. — С. 100–103.
25. Молчанов А. М., Быков Л. В., Янышев Д. С. Характеристики газовой динамики и неравновесного излучения сверхзвуковой струи // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2016). — Москва : МАИ. — 2016. — С. 103–105.
26. Молчанов А. М., Быков Л. В., Янышев Д. С. Расчет ламинарно-турбулентного перехода на пластине в гиперзвуковом потоке // Материалы XI Международной конференции по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ-2016). — Москва : МАИ. — 2016. — С. 257–260.
27. Молчанов А. М., Быков Л. В., Янышев Д. С. Трехпараметрическая модель турбулентности для высокоскоростных течений // Тезисы докладов и сообщений

- XV Минского международного форума по тепло- и массообмену. — Минск : НАН РБ. — 2016. — С. 145–149.
28. Молчанов А. М., Быков Л. В., Янышев Д. С. Математическая модель гидродинамики и тепломассообмена продуктов сгорания в полостях переменного объема // Тезисы докладов и сообщений XV Минского международного форума по тепло- и массообмену. — Минск : НАН РБ. — 2016. — С. 44–48.
29. Молчанов А. М., Быков Л. В., Янышев Д. С. Влияние турбулентности на скорости реакций в химически неравновесных течениях // Материалы XX Юбилейной Международной конференции по вычислительной механике и прикладным программным системам. — Москва : МАИ. — 2017. — С. 515–516.
30. Molchanov A. M., Bykov L. V., Yanyshev D. S. Effective turbulence model for high speed flow for general engineering applications // J. Eng. Appl. Sci. — 2018. — Vol. 13. — P. 5556–5560.
31. Математическое моделирование рабочего процесса в прямоточном двигателе гипотетического космического летательного аппарата, предназначенного для работы в атмосфере Юпитера / Грибиненко Д. В., Мякочин А. С., Молчанов А. М. и Янышев Д. С. // Математическое моделирование (Тезисы II Международной конференции). — Москва : Изд-во Перо. — 2021. — С. 38–39.
32. Молчанов А. М., Янышев Д. С., Грибиненко Д. В. Влияние закрутки на устойчивость горения в струйном диффузионном пламени // Тепломассообмен и гидродинамика в закрученных потоках. — Москва. — 2021. — С. 177–179.
33. Молчанов А. М., Янышев Д. С., Быков Л. В. О роли второй вязкости и справедливости гипотезы Стокса при математическом моделировании теплообмена и гидродинамики в высокоскоростных течениях // Материалы Восьмой Российской национальной конференции по теплообмену. — 2022. — С. 24–25.

Статьи в журналах, рекомендованных ВАК по смежным специальностям

34. Краев В. М., Янышев Д. С. О расчёте гидродинамики и теплообмена в случае нестационарного турбулентного течения в каналах ЭУ ЛА // Вестник Московского авиационного института. — 2009. — Т. 16, № 5. — С. 8–8.
35. Краев В. М., Янышев Д. С. Проблемы расчёта переходных процессов в при турбулентном течении в каналах электроустановок ЛА // Труды МАИ. — 2010. — № 37. — С. 1.
36. Быков Л. В., Молчанов А. М., Янышев Д. С. Численный метод расчета сверхзвуковых турбулентных течений с химическими реакциями // Вестник Московского авиационного института. — 2010. — Т. 17, № 3. — С. 14–14.
37. Янышев Д. С. Применение функции Ламберта в теории турбулентного трения // Труды МАИ. — 2012. — № 50.
38. Янышев Д. С., Быков Л. В. Модель динамики пневматического привода и ее неопределенности // Вестник Московского авиационного института. — 2014. — Т. 21, № 4. — С. 87–92.
39. Разработка инженерной методики моделирования динамики пиропроводов / Правидло М. Н., Быков Л. В., Тихонов К. М. и Янышев Д. С. // Автоматизация. Современные технологии. — 2015. — № 11. — С. 16–22.
40. Математическое моделирование аэродинамической интерференции между отделяемой полезной нагрузкой и самолетом-носителем / Быков Л. В., Пашков О. А., Правидло М. Н. и Янышев Д. С. // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. — 2018. — Т. 19, № 1. — С. 22–37.

Учебные пособия

41. Вычислительная механика сплошных сред в задачах авиационной и космической техники / Быков Л. В., Молчанов А. М., Щербаков М. А. и Янышев Д. С. — Москва : URSS, 2019. — С. 668.

42. Янышев Д. С., Быков Л. В., Молчанов А. М. Сеточные модели для решения инженерных теплофизических задач в среде ANSYS. — Москва : URSS, 2021. — С. 264.
43. Янышев Д. С., Быков Л. В., Молчанов А. М. Основы вычислительного теплообмена и гидродинамики. — Москва : URSS, 2021. — С. 200.
44. Численное моделирование аэродинамики высоких скоростей / Пашков О. А., Янышев Д. С., Молчанов А. М., Зубко А. А. и Платонов И. М. — Москва : Знанием-М, 2023. — С. 186.

Научное издание

Янышев Дмитрий Сергеевич

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора технических наук на тему:

Математическое моделирование высокоэнергетических потоков для теплового и газодинамического проектирования в аэрокосмической технике

Подписано в печать 10.12.2024. Формат 60 × 90 1/16. Тираж 100 экз. Заказ 256.

Отдел полиграфии Научной библиотеки МГУ имени М.В. Ломоносова, 119192
Москва, Ломоносовский проспект 27. <https://print-mgu.ru/>