

На правах рукописи



**Кольжанова Дарья Юрьевна**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ  
СЛОИСТЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ  
НА ОСНОВЕ МЕТОДА АСИМПТОТИЧЕСКОГО ОСРЕДНЕНИЯ**

Специальность 01.02.04 – «Механика деформируемого твердого тела»

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Москва, 2021 г.

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (Национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

**Научный руководитель:** доктор физико-математических наук, профессор  
**Димитриенко Юрий Иванович**

**Официальные оппоненты:** **Зингерман Константин Моисеевич**  
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования и вычислительной математики федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Тверской государственной университет»

**Волков-Богородский Дмитрий Борисович,**

кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник Федерального государственного бюджетного учреждения науки «Институт прикладной механики РАН»

**Ведущая организация:** **Акционерное общество «Композит»**

Защита диссертации состоится «29» сентября 2021 года в 15<sup>30</sup> на заседании диссертационного совета Д 212.125.05, созданного на базе Московского авиационного института (национального исследовательского университета), в зале заседаний Ученого совета МАИ по адресу: 125993, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» и на сайте:

[http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT\\_ID=156807](http://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=156807)

Автореферат разослан «\_\_» июля 2021 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета



Федотенков  
Григорий Валерьевич

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** В разных отраслях промышленности применяют композиты, состоящие из резиноподобных или эластомерных матриц. Такие материалы представляют значительный интерес, так как обладают удачными сочетаниями свойств и используются для изготовления различных амортизаторов, виброизоляторов, теплоизолирующих покрытий двигателей и внешних поверхностей ЛА, в качестве соединительных элементов и герметизирующих уплотнений.

Экспериментальное определение всех, в особенности нелинейных, свойств композитов с различными схемами армирования требует достаточно сложных экспериментов. Поэтому наряду с экспериментальными исследованиями важны также вычислительные методы нахождения эффективных нелинейных свойств композитов. Также существует потребность развития нелинейных математических моделей и методов, которые позволили бы определять не только общие характеристики таких материалов, но и локально описывать происходящие в них процессы деформирования.

Проблеме формулировки уравнений состояния при конечных деформациях (КД), посвящены работы А.А. Ильюшина, А.И. Лурье, И.И. Гольденблатта, В.В. Новожилова, Ю.Н. Работнова, Локетта, Дзя, Кристенсена, К.Ф. Черных, К.М. Зингермана, В.А. Левина, Г.Л. Боровко и др. Эти работы в основном посвящены построению определяющих соотношений для изотропных сред с КД. Моделям анизотропных сред с КД посвящено значительно меньше работ, здесь, прежде всего, следует указать на работы К.Ф. Черных. Однако обычно рассматривается какая-либо одна из так называемых энергетических пар тензоров, чаще всего – мера деформации Коши-Грина и энергетический тензор напряжений.

Новый подход в теории определяющих соотношений для сред с КД был предложен в работах Ю.И. Димитриенко. Им были предложены так называемые универсальные модели определяющих соотношений, которые позволяют решать задачи одновременно для целых классов моделей, соответствующих сразу нескольким парам энергетических тензоров напряжений – деформаций.

Диссертационная работа посвящена развитию этого подхода для расчета точных эффективных упругих характеристик несжимаемых и сжимаемых слоистых композиционных материалов (СКМ).

**Объектом исследования** являются СКМ с КД, рассматриваемые как неоднородная твердая упругая среда с периодической структурой.

**Цель диссертационной работы** состоит в разработке алгоритма построения определяющих соотношений для анизотропных СКМ с КД и периодической структурой, с использованием универсальных моделей сред и метода асимптотического осреднения (МАО), для совершенствования расчетов диаграмм деформирования нелинейных композитов.

**Задачами настоящей работы** являются:

– разработка варианта МАО СКМ при КД, с использованием универсального представления определяющих соотношений, для комплекса различных моделей нелинейно упругих сред;

– разработка численного алгоритма решения задач на ячейке периодичности (ЯП) для СКМ с КД;

– разработка методики построения эффективных определяющих соотношений для трансверсально-изотропных сжимаемых и несжимаемых композитов с КД на основе численного решения серии локальных задач;

– проведение численного моделирования эффективных диаграмм деформирования СКМ с КД.

**Методы исследования.** В диссертационной работе для решения сформулированных задач использованы МАО, методы оптимизации, численные итерационные методы решения нелинейных систем алгебраических уравнений.

**Достоверность и обоснованность результатов** и выводов гарантируется применением теоретически обоснованного математического аппарата и подтверждена сравнением результатов численного моделирования с аналитическим решением.

**Научная новизна.** В диссертации получены следующие новые научные результаты, выносимые на защиту:

– разработка варианта МАО СКМ при КД, с использованием универсального представления определяющих соотношений, для комплекса различных моделей сред;

– разработка алгоритма построения эффективных определяющих соотношений для трансверсально-изотропных сжимаемых и несжимаемых композитов с КД на основе численного решения серии локальных задач на ЯП;

– модели эффективных определяющих соотношений для трансверсально-изотропных сжимаемых и несжимаемых композитов с КД, относящихся к классу универсальных моделей.

**Практическая значимость диссертационной работы.** Метод расчета эффективных диаграмм деформирования и напряжений в слоях композита может быть использован при проектировании композитов с заданными свойствами для конструкций ЛА, многослойных шин, амортизаторов.

**Апробация результатов работы.** Результаты диссертационной работы докладывались на:

Всероссийской научно-технической конференции «Механика и математическое моделирование в технике», посвященной 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева, Москва, 17-19 мая 2016;

Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FARM-2017) МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2017;

VII Международной научно-технической конференции «Аэрокосмические технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, май 2018;

Международном научном форуме «Ключевые тренды в композитах: наука и технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 5-8 декабря 2018;

2-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2019;

Международной научной конференции «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (FARM-2019) МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, 2019;

3-м Международном научном форуме: Ключевые тренды в композитах: наука и технологии, МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, декабрь 2020;

научных семинарах кафедры «Вычислительная математика и математическая физика» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана (Москва, 2015-2020 гг.).

**Публикации.** По теме диссертации автором опубликованы 7 публикаций, в том числе 3 в изданиях из списка ВАК и 2 статьи в журнале, индексируемом в Scopus.

**Структура и объем.** Диссертация состоит из введения, четырех разделов, выводов и списка литературы из 123 наименований. Работа изложена на 160 листах, содержит 64 рисунка.

## СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследования, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, их достоверность, основные положения, выносимые на защиту, а также приведены данные о структуре и объеме диссертационной работы.

**Первый раздел** посвящен разработке математической модели СКМ с периодической структурой и КД. Для неоднородной среды рассматривается задача нелинейной теории упругости в лагранжевом описании в общей формулировке с использованием универсальных моделей класса  $A_n$ , для сжимаемых сред с КД

$$\begin{aligned}
 \overset{\circ}{\nabla}_i P^{ij} + \overset{\circ}{\rho} f^j &= 0, \quad X^i \in \overset{\circ}{V} \\
 P^{ij} &= \overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}(F^{kl}, X^m), \quad X^i \in \overset{\circ}{V} \cup \overset{\circ}{\Sigma}, \\
 F^k{}_l &= \delta_l^k + \overset{\circ}{\nabla}_l u^k, \quad X^i \in \overset{\circ}{V} \cup \overset{\circ}{\Sigma}, \\
 \overset{\circ}{n}_i [P^{ij}] &= 0, \quad [u^i] = 0, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \\
 \overset{\circ}{n}_i P^{ij} &= t^j, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad u^i = u_e^i, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_2
 \end{aligned} \tag{1}$$

состоящая из уравнения равновесия, определяющих соотношений нелинейно-упругой среды, кинематического соотношения, условий идеального контакта на поверхностях  $\overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}$  раздела слоев и граничных условий на внешней поверхности композита.

Компоненты тензора определяющих соотношений  $\overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}(F^{kl}, X^m)$  компонент композита в рамках универсальных моделей  $A_n$  зависят от компонент градиента деформаций  $F^k{}_l$  и лагранжевых координат  $X^i$  (разрывным образом) и имеют вид:

$$\begin{aligned}
 \overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}(F^k{}_l, X^m) &= \sum_{\gamma=1}^3 \overset{\circ}{\varphi}_\gamma \overset{(n)}{E}^{0ijsq} I_{\gamma sq}, \\
 \overset{(n)}{C}^{np} &= \frac{1}{n-III} \sum_{\alpha=1}^3 \lambda_\gamma^{(n-III)/2} \overset{\circ}{Q}_\alpha^n \overset{\circ}{Q}_\alpha^p - \frac{1}{n-III} \delta^{np}, \\
 \overset{(n)}{E}^{0ijsq}(F^k{}_l) &= \sum_{\alpha, \beta=1}^3 \overset{\circ}{E}_{\alpha\beta} \overset{\circ}{Q}_\alpha^i \overset{\circ}{Q}_\beta^j \overset{\circ}{Q}_\beta^s \overset{\circ}{Q}_\alpha^q, \quad \psi_{sq} = \partial \psi(I_\gamma(C^{ij}), X^m) / \partial C^{sq}, \\
 I_{\gamma sq} &= \partial I_\gamma(C^{ij}) / \partial C^{sq}, \quad \overset{\circ}{\varphi}_\gamma = \overset{\circ}{\rho} \left( \frac{\partial \psi}{\partial I_\gamma} \right),
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\psi(I_\gamma(C^{ij}), X^m)$  – упругий потенциал,  $C^{np}$  – компоненты энергетических тензоров деформаций, а  $I_\gamma(C^{ij})$  – его главные инварианты,  $E^{0ijsq}$  – компоненты тензоров энергетической эквивалентности,  $Q_\alpha^i$  – матрицы собственных векторов левого тензора искажений,  $E_{\alpha\beta}^0(\lambda_\alpha)$  – функции собственных значений  $\lambda_\alpha$  тензоров искажений.

Для случая неоднородной слоистой среды, каждый слой которой является несжимаемым материалом, аналогичная задача в лагранжевом описании с использованием универсальных моделей класса  $B_n$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathring{\nabla}_i P^{ij} + \mathring{\rho} f^j &= 0, \quad X^i \in \mathring{V} \\ P^{ij} &= -pF^{-1ij} + \mathcal{F}^{0ij}(F^{kl}, X^m), \quad X^i \in \mathring{V} \cup \mathring{\Sigma} \\ F^k_l &= \delta_l^k + \mathring{\nabla}_l u^k, \quad X^i \in \mathring{V} \cup \mathring{\Sigma} \\ \det(F^k_l) &= 1 \\ n_i[P^{ij}] &= 0, \quad [u^i] = 0, \quad X^i \in \mathring{\Sigma}_{\alpha\beta} \\ \mathring{n}_i P^{ij} &= t_e^j, \quad X^i \in \mathring{\Sigma}_1, \quad u^i = u_e^i, \quad X^i \in \mathring{\Sigma}_2 \end{aligned} \quad (3)$$

где  $p$  – гидростатическое давление.

Для моделей  $B_n$  тензор определяющих соотношений нелинейно-упругих компонент композита имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{0ij}(F^k_l, X^m) &= \rho(X^m) E^{0ijsq}(F^k_l) \psi_{sq}(G^{pr}, X^m) \\ \psi_{sq} &= \partial \psi(I_\gamma(G^{pr}), X^m) / \partial G^{sq} E^{0ijsq}(F^k_l) = \sum_{\gamma, \omega=1}^3 E_{\gamma\omega}^0 Q_\gamma^i Q_\omega^j Q_\omega^s Q_\gamma^q \\ G^{pr} &= \frac{1}{n-3} \sum_{\gamma=1}^3 \lambda_\gamma^{n-3} Q_\gamma^p Q_\gamma^r (F^{-1})^{ij} = \sum_{\gamma=1}^3 \lambda_\gamma^{-1} \mathring{Q}_\gamma^i Q_\gamma^j \end{aligned} \quad (4)$$

здесь  $\psi(I_\gamma(G^{pr}), X^m)$  – упругий потенциал, являющийся функцией двух главных инвариантов  $I_\gamma(G^{pr})$  энергетических мер деформации  $G^{pr}$ .

Для СКМ с периодической структурой решение задачи (1), (2) ищется в виде асимптотического разложения перемещений по малому параметру  $\kappa = l/L$ ,

$$u^k(X^i, \xi) = u^{(0)k}(X^i) + \kappa u^{(1)k}(X^i, \xi) + o(\kappa), \quad (5)$$

С помощью разложения (5) получены рекуррентные последовательности локальных задач  $L_k$   $k=0, 1, 2, \dots$  на ЯП. Задача  $L_0$  имеет вид:

$$\begin{aligned}
P^{(0)3j}{}_{/3} &= 0 \\
P^{(0)ij} &= \overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}(F^{(0)k}{}_l, \xi), \quad F^{(0)k}{}_l(X^i, \xi) = \bar{F}_l^k + u^{(1)k}{}_{/3} \delta_{3l}, \\
n_i [P^{(0)ij}] &= 0, \quad [u^{(1)k}] = 0, \quad \xi \in \overset{\circ}{\Sigma}_{\alpha\beta}, \\
\langle u^{(1)k} \rangle &= 0, \quad \left[ [u^{(1)k}] \right] = 0
\end{aligned} \tag{6}$$

и рассматривается относительно неизвестных перемещений  $u^{(1)\kappa}$ , при этом компоненты осредненного тензора градиента деформаций  $\bar{F}_l^k = \delta_l^k + u^{k(0)}{}_{,l}$  рассматриваются как «входные данные» этой задачи. Здесь обозначены:  $\langle f \rangle = \int_{-0.5}^{0.5} f d\xi$ , а  $\left[ [u^{(1)k}] \right]$  – условие периодичности. Для вычисления перемещений  $u^{(0)k}$  получена осредненная задача нелинейной упругости для сжимаемого композита:

$$\begin{aligned}
\bar{P}_{,i}^{ij} + \langle \rho f^j \rangle &= 0, \\
\bar{P}^{ij} &= \overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}(\bar{F}_l^k), \quad \bar{F}_l^k = \delta_l^k + u^{(0)k}{}_{,l}, \\
n_i \bar{P}^{ij} &= \langle t_e^j \rangle, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad u^{(0)k} = \langle u_e^k \rangle, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_2
\end{aligned} \tag{7}$$

где  $\bar{P}^{ij} = \langle P^{(0)ij} \rangle$  – компоненты осредненного тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа, а  $\overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}(\bar{F}_l^k) = \langle \overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}(F_l^{k(0)}, \xi) \rangle$  – компоненты тензора эффективных определяющих соотношений композита.

Решение задачи (3), (4) ищется в виде асимптотических разложений по малому параметру  $u^k(X^i, \xi) = u^{(0)k}(X^i) + \kappa u^{(1)k}(X^i, \xi) + o(\kappa)$ ,  $p = p^{(0)}(X^m, \xi) + \kappa p^{(1)}(X^m, \xi) + o(\kappa)$

Локальная задача  $L_0$  для моделей  $B_n$  имеет вид

$$\begin{aligned}
P^{(0)3j}{}_{/3} &= 0 \\
P^{ij(0)} &= -p^{(0)}(F^{-1})^{(0)ij} + \overset{(n)}{\mathcal{F}^{0ij}}(F_l^{k(0)}, \xi), \\
\det(F^{(0)k}{}_l) &= 1 \\
F_l^{k(0)}(X^i, \xi) &= \bar{F}_l^k + u^{k(1)}{}_{/3} \delta_{l3} \\
[P^{3j(0)}] &= 0, \quad [u^{k(1)}] = 0, \quad \xi = \xi_\alpha, \quad \alpha = 1, \dots, n-1 \\
\langle u^{(1)k} \rangle &= 0, \quad \langle p^{(0)} \rangle = \bar{p}, \quad \left[ [u^{k(1)}] \right]_3 = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

Осредненная задача для композита с несжимаемыми компонентами получена в следующем виде



$$\begin{aligned}
& \langle P^{(0)ij} \rangle_{,i} + \langle \overset{\circ}{\rho} f^j \rangle = 0 \\
& \bar{P}^{ij} = -\langle p^{(0)} (F^{-1})^{(0)ij} \rangle + \overset{(n)}{\mathcal{F}}^{0ij}(\bar{F}^k_l) \\
& \langle \det(F^{(0)k}_l (X^i, \xi)) \rangle = 1 \\
& \langle F^{(0)k}_l \rangle = \delta_l^k + u^{(0)k}_{,l} \\
& n_i \langle P^{(0)ij} \rangle = \langle t_e^j \rangle, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_1, \quad u^{(0)k} = \langle u_e^i \rangle, \quad X^i \in \overset{\circ}{\Sigma}_2
\end{aligned} \tag{9}$$

Показано, что композит в целом является несжимаемым, если все его слои являются несжимаемыми.

Для эффективного тензора истинных напряжений Коши  $\bar{T}^{ij} = \bar{F}^{im} \langle P^{mj(0)} \rangle$  получено следующее представление определяющих соотношений:

$$\bar{T}^{ij} = \bar{F}^{im} \overset{(n)}{\mathcal{F}}^{0mj}(\bar{F}^k_l) \tag{10}$$

– для моделей  $A_n$  сжимаемых композитов,

$$\bar{T}^{ij} = -\bar{p} \delta^{ij} + \bar{F}^{im} \overset{(n)}{\mathcal{F}}^{0mj}(\bar{F}^k_l) \tag{11}$$

– для моделей  $B_n$  несжимаемых композитов.

**Второй раздел** посвящен разработке алгоритма построения эффективных определяющих соотношений сжимаемых нелинейно-упругих композитов, на основе разработанного в первом разделе диссертации варианта МАО.

Для сжимаемых композитов в качестве примера реализации алгоритма рассмотрены так называемые полулинейные модели  $A_n$ , в которых тензоры определяющих соотношений (2) задаются в виде

$$\overset{(n)}{\mathcal{F}}^{0ij}(F^{kl}, X^m) = E^{0ijsp} \left( l_1 I_1(C_{kl}) \delta_{sp} + 2l_2 C_{sp} \right) \tag{12}$$

где  $l_1, l_2$  – константы моделей.

Для оценки различия результатов, получаемых с помощью различных моделей  $A_n$ , предварительно проведен сравнительный анализ диаграмм деформирования при одноосном растяжении для двух материалов, которые использовались в качестве компонентов (слоев) композита при дальнейшем численном анализе: дуотан–полиуретанового эластомера Duothan QA965 (дуотан) (рис.1а) и бутадиен-нитрильного каучука матрицы СКН-40 (каучук) (рис.1б). Показано, что, например, для дуотана наилучшая аппроксимации экспериментальных данных достигается с помощью модели  $A_{II}$ , а для каучука – с помощью модели  $A_{IV}$ .

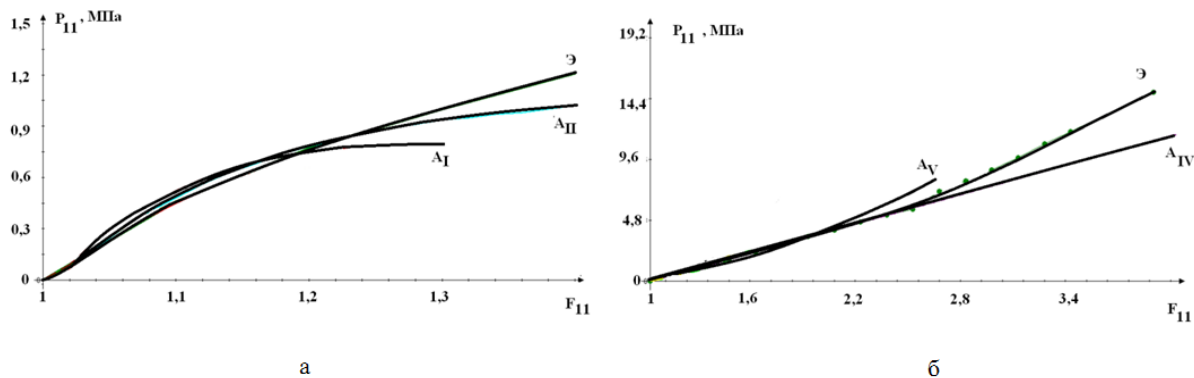


Рис. 1 – Аппроксимация экспериментальных диаграмм (Э) деформирования

Предложен численно-аналитический алгоритм решения локальных задач  $L_0$  (6) на ЯП при различных вариантах задания осредненного градиента деформации  $\bar{F}_i^k$ . На основе решения этих задач построены диаграммы деформирования сжимаемого композита при одноосном нагружении (при растяжении в плоскости укладки слоев композита, при растяжении в перпендикулярном направлении к плоскости укладки слоев, а также при межслойном сдвиге)

$$\bar{P}^{\alpha\alpha} = \bar{\mathcal{F}}^{0\alpha\alpha}(\bar{F}_\alpha^\alpha), \quad \alpha = 1, 3, \quad \bar{P}^{13} = \bar{\mathcal{F}}^{013}(\bar{F}_3^1) \quad (13)$$

Для каждого из этих вариантов используется соответствующее решение осредненной задачи (7).

На рис.2 представлены диаграммы деформирования (13) композита, ЯП которого состоит из трех слоев: дуотан-каучук-дуотан, при одноосном деформировании для различных моделей  $A_n$  ( $A_{IV}$  (рис.2а) и  $A_V$  (рис.2б)), полученные с помощью разработанного алгоритма.

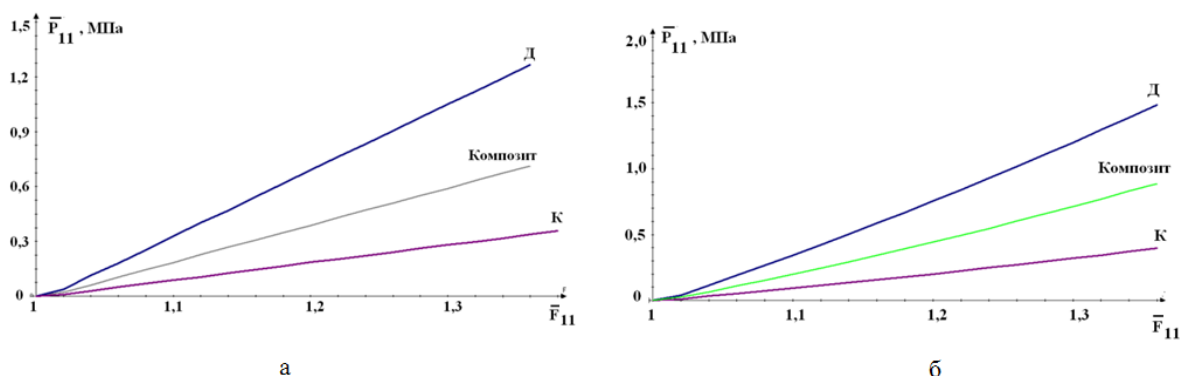


Рис. 2 – Диаграммы деформирования композита дуотан-каучук-дуотан

Для аналитического представления осредненных определяющих соотношений сжимаемых СКМ предложен алгоритм аппроксимации этих соотношений с помощью

следующих уравнений нелинейно-упругой сжимаемой эффективной трансверсально-изотропной среды (ЭТИС)

$$\begin{aligned} \bar{P}^{ij} &= \mathcal{F}^{0ij}(\bar{F}_l^k) = E^{0ij sq} T_{sq}^{(n)}, \\ T_{ij}^{(n)} &= \varphi_1 (\delta_{ij} - \delta_{i3} \delta_{j3}) + \varphi_2 \delta_{i3} \delta_{j3} + \\ &+ (\varphi_3 - 2\varphi_4) \left( C_{13}^{(n)} (\delta_{i1} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j1}) + C_{23}^{(n)} (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}) \right) + 2\varphi_4 \left( C_{ij}^{(n)} - C_{33}^{(n)} \delta_{i3} \delta_{j3} \right) \\ \varphi_1 &= \rho \partial \psi / \partial I_1 = J(n_1 l_{11} I_1^{(3)2n_1-1} + n_1 l_{12} I_1^{(3)n_1-1} I_2^{(3)n_2}), \\ \varphi_2 &= \rho \partial \psi / \partial I_2^{(3)} = J(n_2 l_{22} I_2^{(3)2n_2-1} + n_2 l_{12} I_1^{(3)n_1} I_2^{(3)n_2-1}), \\ \varphi_3 &= \rho \partial \psi / \partial I_3^{(3)} = J n_3 l_{33} I_3^{(3)n_3-1}, \quad \varphi_4 = \rho \partial \psi / \partial I_4^{(3)} = J n_4 l_{44} I_4^{(3)n_4-1}, \quad J = \rho / \overset{\circ}{\rho}, \\ \overset{\circ}{\rho} \psi &= \overset{\circ}{\rho} \psi_0 + \frac{1}{2} (l_{11} I_1^{(3)2n_1} + 2l_{12} I_1^{(3)n_1} I_2^{(3)n_2} + l_{22} I_2^{(3)2n_2}) + l_{33} I_3^{(3)n_3} + l_{44} I_4^{(3)2n_4}, \\ I_1^{(3)} &= C_{11}^{(n)} + C_{22}^{(n)}, \quad I_2^{(3)} = C_{33}^{(n)}, \quad I_3^{(3)} = C_{13}^{(n)2} + C_{23}^{(n)2}, \quad I_4^{(3)} = C_{11}^{(n)2} + 2C_{12}^{(n)2} + C_{22}^{(n)2} \end{aligned} \quad (14)$$

где  $I_1^{(3)}, \dots, I_4^{(3)}$  – инварианты тензора  $C_{kl}^{(n)}$  относительно группы трансверсальной изотропии,  $l_{\alpha\beta}, n_\alpha$  – константы модели. Для определения этих констант предложена серия решений осредненных задач (7) с однородным напряженно-деформируемым состоянием.

На рис. 3 в качестве примера представлены графики диаграмм деформирования  $\bar{P}_{11} = P_{11}^{(s)}(k_1)$ ,  $\bar{P}_{33} = P_{33}^{(s)}(k_3)$ , где  $k_\alpha = \bar{F}_{\alpha\alpha}$ , полученные с помощью численного «эксперимента» (на основе прямого решения локальных задач на ЯП) для модели  $A_I$  и с помощью аппроксимации на основе модели ЭТИС.

Погрешность аппроксимации рассмотренных «экспериментальных» данных составляла – 10-12%.

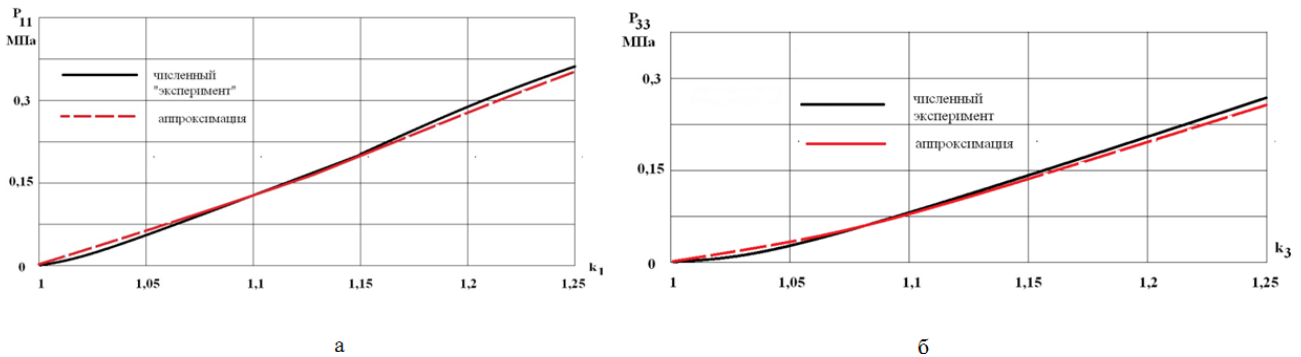


Рис. 3 – Аппроксимация численного «эксперимента» – диаграмм деформирования при одноосном растяжении пластины для двухслойного композита дуотан-каучук

**Третий раздел** посвящен разработке алгоритма построения эффективных определяющих соотношений для несжимаемых композитов с применением МАО.

Для несжимаемых композитов в качестве примера реализации алгоритма рассмотрены полулинейные модели  $B_n$ , в которых тензоры определяющих соотношений (4) задаются в виде:

$$\mathcal{F}^{0ij} (F^{kl}, X^m) = E^{(n)0ijsp} \left( -\frac{P}{n-III} \mathbf{G}_{sp}^{(n)-1} + \mu(n-III)^2 \left( \left( \frac{1+\beta}{n-III} + (1-\beta)I_1(\mathbf{G}_{kl}^{(n)}) \right) \delta_{sp} - (1-\beta)\mathbf{G}_{sp}^{(n)} \right) \right) \quad (15)$$

где  $\mu, \beta$  – константы моделей.

Предложен численно-аналитический алгоритм решения локальных задач  $L_0$  (8) на ЯП при различных вариантах задания осредненного градиента деформации  $\bar{F}_i^k$ . На основе решения этих задач построены диаграммы деформирования несжимаемого композита при одноосном нагружении (при растяжении в плоскости укладки слоев композита, при растяжении в перпендикулярном направлении к плоскости укладки слоев, а также при межслойном сдвиге) в результате получены соотношения вида (13). Для каждого из этих вариантов используется соответствующее решение осредненной задачи (8).

На рис. 4 представлены диаграммы деформирования (13) композита, ЯП которого состоит из трех слоев со следующими значениями констант: слой 1 –  $\mu = 0.8 \text{ МПа}$ ,  $\beta = 1$ , слой 2 –  $\mu = 1.4 \text{ МПа}$ ,  $\beta = 1$ , слой 3 –  $\mu = 0.7 \text{ МПа}$ ,  $\beta = 0.9$ . Относительные толщины слоев  $h_1 = 0.2$ ,  $h_2 = 0.6$ ,  $h_3 = 1 - h_1 - h_2 = 0.2$ .

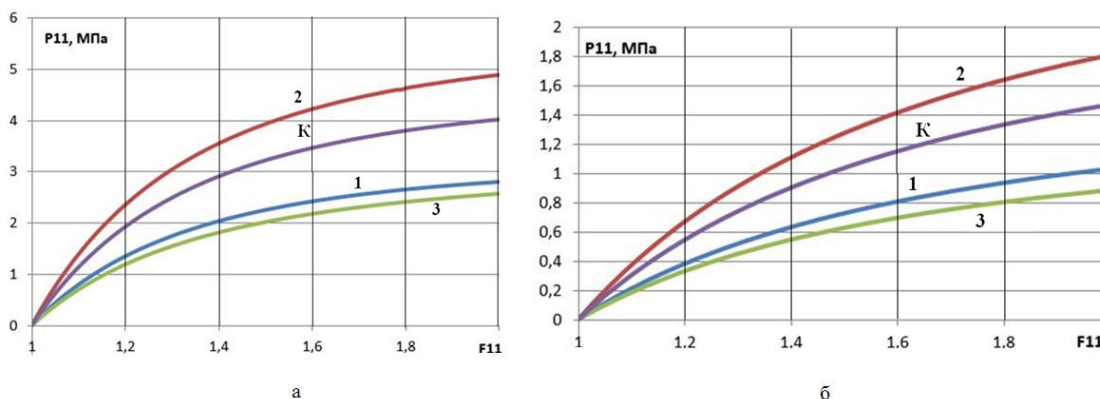


Рис. 4 – Диаграммы одноосного деформирования композита с использованием моделей  $B_I$  (а) и  $B_{IV}$  (б), цифры – диаграммы деформирования отдельных слоев

Для аналитического представления осредненных определяющих соотношений в системе (9) для слоистых несжимаемых композитов предложен алгоритм

аппроксимации этих соотношений с помощью следующих уравнений нелинейно-упругой несжимаемой ЭТИС

$$\begin{aligned}
\bar{P}^{ij} &= \bar{\mathcal{F}}^{0ij}(\bar{F}_l^k) = E^{0ij sq} T_{sq}^{(n)}, \\
T^{ij} &= -\frac{P}{n-III} (G^{-1})^{ij} + \varphi_1 (\delta_{ij} - \delta_{i3} \delta_{j3}) + \varphi_2 \delta_{i3} \delta_{j3} + \\
&+ (\varphi_3 - 2\varphi_4) \left( G_{13} (\delta_{i1} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j1}) + G_{23} (\delta_{i2} \delta_{j3} + \delta_{i3} \delta_{j2}) \right) + 2\varphi_4 \left( G_{ij} - G_{33} \delta_{i3} \delta_{j3} \right), \\
\varphi_1 &= \rho \partial \psi / \partial I_1^{(3)} = n_1 l_{11} (I_1^{(3)} - k_1)^{2n_1-1} + n_1 l_{12} (I_1^{(3)} - k_1)^{n_1-1} (I_2^{(3)} - k_2)^{n_2}, \\
\varphi_2 &= \rho \partial \psi / \partial I_2^{(3)} = n_2 l_{22} (I_2^{(3)} - k_2)^{2n_2-1} + n_2 l_{12} (I_1^{(3)} - k_1)^{n_1} (I_2^{(3)} - k_2)^{n_2-1}, \\
\varphi_3 &= \rho \partial \psi / \partial I_3^{(3)} = n_3 l_{33} (I_3^{(3)} - k_3)^{n_3-1}, \quad \varphi_4 = \rho \partial \psi / \partial I_4^{(3)} = n_4 l_{44} (I_4^{(3)} - k_4)^{n_4-1}, \\
\overset{\circ}{\rho} \psi &= \overset{\circ}{\rho} \psi_0 + \frac{1}{2} \left( l_{11} (I_1^{(3)} - k_1)^{2n_1} + 2l_{12} (I_1^{(3)} - k_1)^{n_1} (I_2^{(3)} - k_2)^{n_2} + l_{22} (I_2^{(3)} - k_2)^{2n_2} \right) + \\
&+ l_{33} (I_3^{(3)} - k_3)^{n_3} + l_{44} (I_4^{(3)} - k_4)^{2n_4}. \\
I_1^{(3)} &= G_{11}^{(n)} + G_{22}^{(n)}, \quad I_2^{(3)} = G_{33}^{(n)}, \quad I_3^{(3)} = G_{13}^{(n)2} + G_{23}^{(n)2}, \quad I_4^{(3)} = G_{11}^{(n)2} + 2G_{12}^{(n)2} + G_{22}^{(n)2}, \\
k_1 &= \frac{2}{n-III}, \quad k_2 = \frac{1}{n-III}, \quad k_3 = 0, \quad k_4 = \frac{2}{(n-III)^2}
\end{aligned} \tag{16}$$

Здесь  $I_1^{(3)}, \dots, I_4^{(3)}$  – инварианты тензора  $G_{kl}^{(n)}$  относительно группы трансверсальной изотропии,  $l_{\alpha\beta}, n_\alpha$  – константы модели. Для определения этих констант также предложена серия решений осредненных задач (8) с однородным напряженно-деформируемым состоянием.

В качестве численного примера были рассмотрены значения констант  $\mu, \beta$ , полученные при использовании различных моделей  $B_n$ . (таб. 1 и таб. 2)

Таб. 1 – Упругие характеристики резины в моделях  $B_n$

$n$	$\mu$ , МПа	$\beta$
I	5,145	0,13
II	19,11	1
IV	19,11	-1
V	5,145	-0,13

Таб. 2 – Упругие характеристики полиуретана в моделях  $B_n$

$n$	$\mu$ , МПа	$\beta$
I	3,15	0,616
II	11,56	-0,45
IV	11,45	0,45
V	3,15	-0,616

Для расчетов был выбран двухслойный композит из резины и полиуретана с толщинами слоев  $h_p = 2/3$ ,  $h_n = 1/3$ . В результате расчетов получены диаграммы деформирования композитов для моделей  $(B_I, B_V)$  (рис. 5а) и  $(B_{II}, B_{IV})$  (рис. 5б).

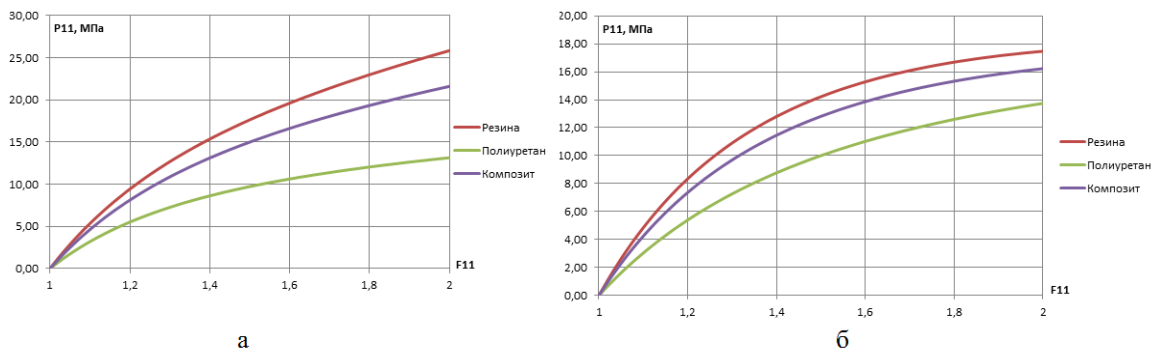


Рис. 5 – Диаграмма деформирования несжимаемого композита

На основании полученных диаграмм деформирования и предложенного алгоритма, был осуществлен поиск эффективных параметров модели СКМ, ЯП которого состояла из трех слоев резина-полиуретан-резина, как трансверсально-изотропной среды.

По найденным параметрам модели были построены эффективные диаграммы деформирования. Сравнительные диаграммы деформирования, полученные в прямом «численном эксперименте», и аппроксимации с помощью модели трансверсально-изотропной среды, приведены на рис.б.

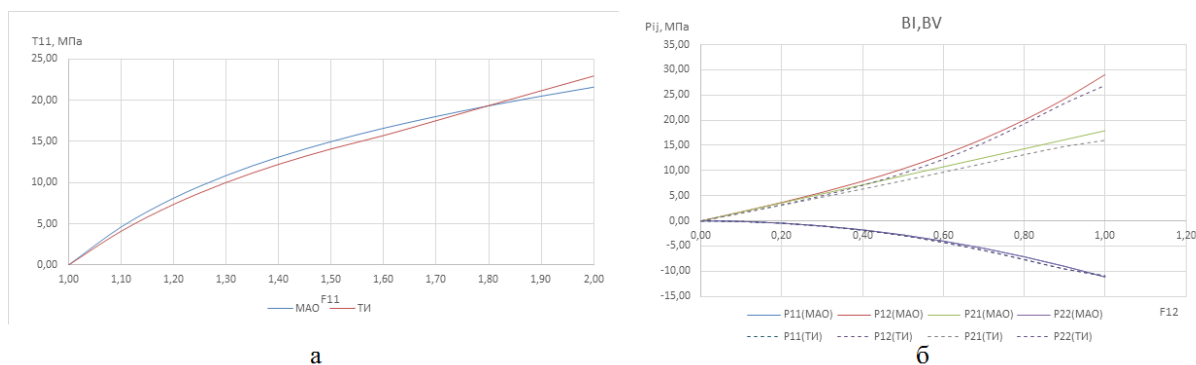


Рис. 6 – а) сравнительная диаграмма одноосного деформирования;  
б) сравнительная диаграмма сдвигового деформирования

Максимальные относительные погрешности в полученных диаграммах составляют 11% и 13% соответственно.

**Четвертый раздел** посвящен решению задачи о цилиндрическом изгибе несжимаемой слоистой композитной пластины. Рассматривается закон движения осредненной пластины в рамках задачи (9), соответствующий цилиндрическому изгибу пластины в цилиндрическую панель.

$$z = x^1, \quad \varphi = B x^2, \quad r = \sqrt{2A x^3} \quad (17)$$

где  $x^i = \overset{\circ}{X}^i$  – декартовы координаты, совпадающие с лагранжевыми,  $z, \varphi, r$  – цилиндрические координаты пластины в актуальной конфигурации, а  $A, B$  – неизвестные константы. При преобразовании (17), боковые поверхности пластины, имеющие в  $\overset{\circ}{K}$  координаты  $x^3 = x_0^3 \pm h_3/2$ , при переходе в  $K$ , описываются уравнениями постоянного радиуса

$$r = r_{\pm} = \sqrt{2A \left( x_0^3 \pm h_3/2 \right)} \quad (18)$$

где  $h_3$  – толщина всей пластины в  $\overset{\circ}{K}$ .

Осредненный градиент деформации в данной задаче имеет вид

$$\bar{F} = r_i \otimes r^i = \frac{A}{r} e_r \otimes \bar{e}_3 + r B e_\varphi \otimes \bar{e}_2 + \bar{e}_1 \otimes \bar{e}_1 \quad (19)$$

где  $\bar{e}_i$  – декартов базис,  $e_r, e_\varphi, e_z$  – базис цилиндрической системы координат.

Энергетические меры деформации  $G^{(n)}$ , энергетические тензоры напряжений  $T^{(n)}$  и осредненный тензор напряжений Коши имеют следующий вид:

$$G^{(n)} = \frac{1}{n-III} \left( \left( \frac{A}{r} \right)^{n-III} \bar{e}_3^2 + \left( \frac{r}{A} \right)^{n-III} \bar{e}_2^2 + \bar{e}_1^2 \right), \quad T^{(n)} = \sum_{\alpha=1}^3 T_{\alpha\alpha}^{(n)} \bar{e}_\alpha^2, \quad \bar{T} = T_{11} e_z^2 + T_{22} e_\varphi^2 + T_{33} e_r^2, \quad (20)$$

$$T_{11}^{(n)} = T_{11}, \quad T_{22}^{(n)} = \left( \frac{r}{A} \right)^{III-n} T_{22}, \quad T_{33}^{(n)} = \left( \frac{A}{r} \right)^{III-n} T_{33}, \quad n = I, II, IV, V$$

где  $\bar{e}_i^2 = \bar{e}_i \otimes \bar{e}_i$ . Компоненты тензора напряжений Коши являются функциями только радиуса

$$T_{\alpha\alpha} = -p(r) + \Phi_\alpha(r), \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\Phi_1 \equiv \varphi_1 + \frac{2\varphi_4}{n-III}, \quad \Phi_2 \equiv \varphi_1 \left( \frac{A}{r} \right)^{III-n} + \frac{2\varphi_4}{n-III} \left( \frac{A}{r} \right)^{2(III-n)}, \quad \Phi_3 \equiv \varphi_2 \left( \frac{r}{A} \right)^{III-n}, \quad (21)$$

$$p = \Phi_3 + \int_{r_-}^r \frac{\Phi_3 - \Phi_2}{r} dr$$

Изгибающий момент в цилиндрической панели вычисляется следующим образом

$$M_2 = \frac{1}{2} \int_{r_-}^{r_+} r (\Phi_2 - \Phi_3) dr + \frac{r_+^2}{2} \int_{r_-}^{r_+} \frac{(\Phi_2 - \Phi_3)}{r} dr \quad (22)$$

Эта формула представляет собой соотношение между  $M_2$  и  $A$ , по заданному значению момента  $M_2$  она позволяет найти  $A$ , т.е. фактически – радиус  $r$  изгиба пластины.

На рис. 7 показаны зависимости момента  $M_2$ , вычисленного по формуле (22) от кривизны  $k_0 = 1/r_0$  цилиндрического изгиба панели, где  $r_0$  радиус цилиндрического изгиба пластины в  $K$ , соответствующий срединной поверхности  $\overset{\circ}{x}^3 = \overset{\circ}{x}_0^3$  в  $K$ , для двух различных толщин панели  $\overset{\circ}{h}_3 = 0,01 \text{ м}$  (рис. 7а) и  $\overset{\circ}{h}_3 = 0,05 \text{ м}$  (рис. 7б).

С увеличением толщины панели в пять раз, значение момента возрастает в три раза для всех моделей  $V_n$ . Таким образом, зависимость момента  $M_2$  от начальной толщины пластины  $\overset{\circ}{h}_3$  является кубической, как и для изотропных материалов.

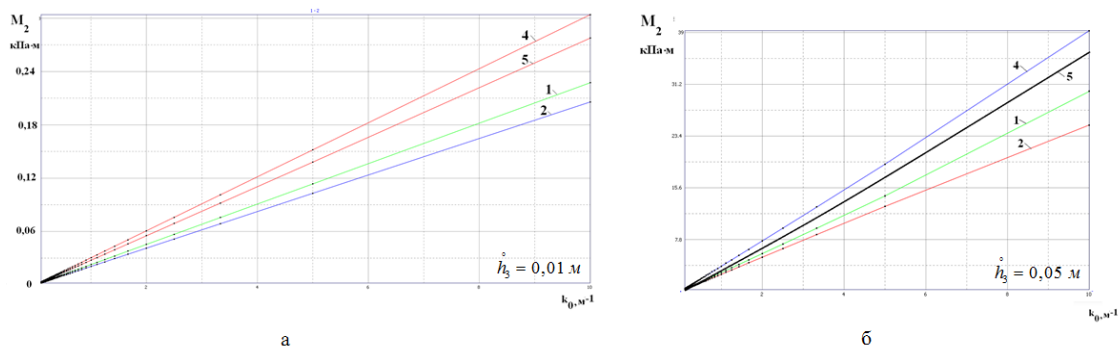


Рис. 7 – Зависимость момента от кривизны цилиндрического изгиба панели, цифры у кривых – номер модели  $V_n$

На рис. 8 показаны осредненные напряжения Коши  $T_{22}(r)$  в трансверсально-изотропной пластине при цилиндрическом изгибе. Для относительно тонкой пластины распределение компоненты  $T_{22}(r)$  близко к линейному для всех моделей  $V_n$ , что соответствует линейной теории (рис. 8а). Для толстой пластины распределение компоненты напряжений  $T_{22}(r)$  является нелинейным (рис. 8б).

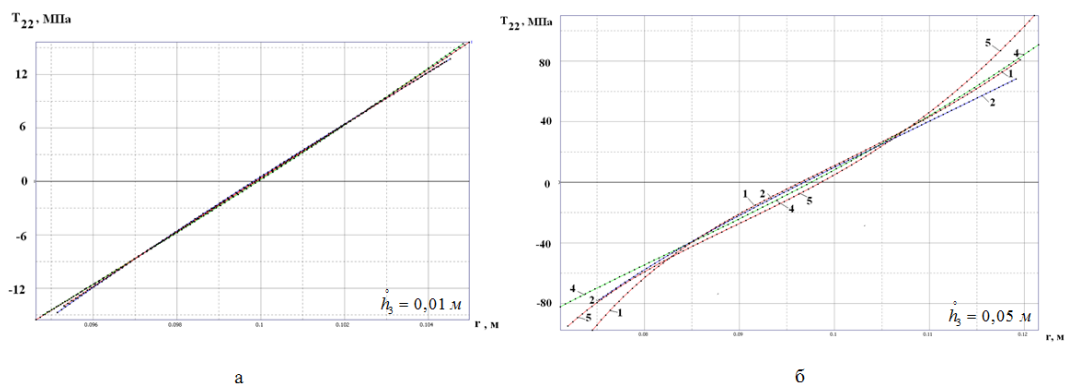


Рис. 8 – Распределение компоненты  $T_{22}$  тензора напряжений Коши по радиусу  $r$



Для вычисления компонент тензора напряжений Пиолы-Кирхгофа  $P^{ij(0)}$  и Коши  $T^{ij(0)}$  в слоях пластины решена локальная задача  $L_0$  (8):

$$T^{(0)} = T_{11}^{(0)} e_z^2 + T_{22}^{(0)} e_\varphi^2 + T_{33}^{(0)} e_r^2 \quad (23)$$

где

$$T_{\alpha\alpha}^{(0)} = -p^{(0)} + \Phi_\alpha^{(0)}, \quad \alpha = 1, 2, 3,$$

$$\Phi_1^{(0)} = a - \frac{b}{n-III}, \Phi_2^{(0)} = \left( a - \frac{b}{n-III} \left( \frac{r}{A} \right)^{n-III} \right) \left( \frac{r}{A} \right)^{n-III}, \Phi_3^{(0)} = \left( a - \frac{b}{n-III} \left( \frac{A}{r} \right)^{n-III} \right) \left( \frac{A}{r} \right)^{n-III}, \quad (24)$$

$$a = \mu(n-III)^2 \left( \frac{1+\beta}{n-III} + (1-\beta)I_1^{(n)}(G) \right), \quad b = \mu(n-III)^2(1-\beta).$$

Функции  $\Phi_\alpha^{(0)}$  нулевого приближения в цилиндрической системе координат зависят только от глобальной радиальной координаты  $r$ , а функция  $p^{(0)}$  – от локальной радиальной координаты  $\xi_r$  и от  $r$ , как от параметра.

$$p^{(0)} = p_0 + (\Phi_3^{(0)} - \Phi_2^{(0)}) \ln \frac{\xi_r}{r_-} \quad (25)$$

Константа  $p_0$  определяется из условия нормировки по ЯП  $p_0 = \bar{p} - \frac{2(\Phi_3^{(0)} - \Phi_2^{(0)})}{r_+^2 - r_-^2} \int_{r_-}^{r_+} \ln \frac{\xi_r}{r_-} \xi_r d\xi_r$

Результаты расчетов напряжений для пластины, ЯП которой состоит из двух слоев с константами моделей  $B_n$ , приведены на рис. 9. Модели  $B_I$  (рис.9а, 9б) и  $B_{II}$  (рис.9в,9г) приводят качественно к одинаковым результатам, но численное различие между этими моделями по значениям напряжений  $T_{22}^{(0)}$  составляет около 15%.

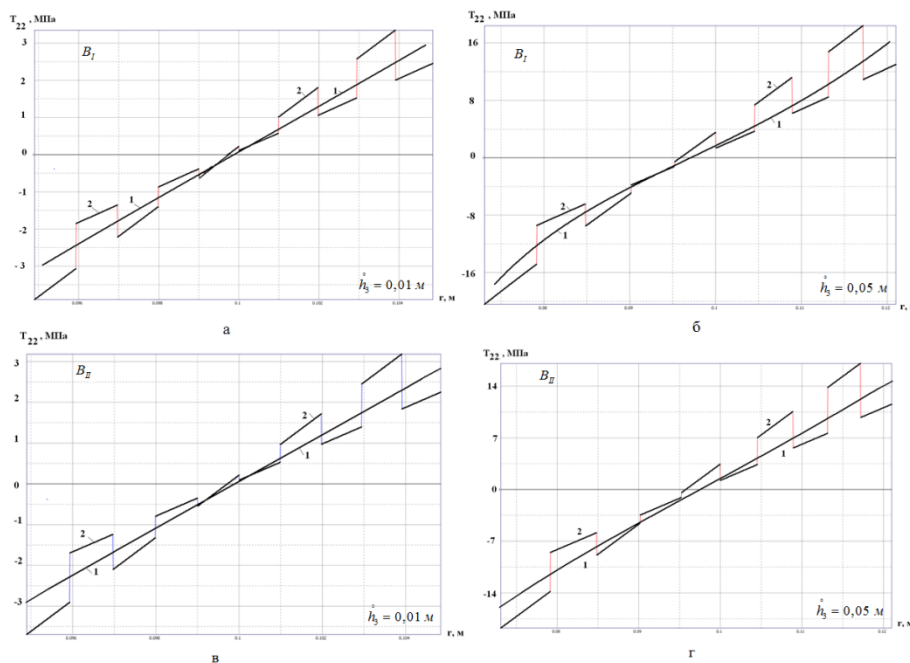


Рис. 9 – Распределение по радиусу  $r$  компоненты  $T_{22}$

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

1) Разработан вариант МАО СКМ при КД с использованием универсального представления определяющих соотношений для комплекса различных моделей сжимаемых и несжимаемых сред;

2) Разработан алгоритм численного решения задач на ЯП для СКМ с КД и с использованием комплекса различных универсальных моделей, для сжимаемых и несжимаемых сред;

3) Предложена методика построения эффективных определяющих соотношений для трансверсально-изотропных сжимаемых и несжимаемых композитов с КД на основе аналитической аппроксимации серий численного решения локальных задач;

4) Предложены упругие потенциалы для трансверсально-изотропных сжимаемых и несжимаемых композитов с КД с использованием универсальных моделей определяющих соотношений;

5) Проведены серии численного моделирования эффективных диаграмм деформирования слоистых сжимаемых и несжимаемых композитов с КД, демонстрирующие реализуемость предложенных методик построения эффективных определяющих соотношений для трансверсально-изотропных композитов;

6) Решена задача о цилиндрическом изгибе слоистой композитной пластины, на которой продемонстрирована реализуемость предложенной методики расчета напряженно-деформированного состояния конструкций из СКМ путем разделения осредненной задачи нелинейной теории упругости анизотропных сред и локальных задач на ЯП.

## ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ ОТРАЖЕНЫ В РАБОТАХ

1. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А., Кольжанова Д.Ю. Моделирование слоистых композитов с конечными деформациями методом асимптотической гомогенизации.

*Инженерный журнал: наука и инновации*, 2015, вып. 5(29). URL: (<http://engjournal.ru/catalog/msm/pmcm/1405.html> DOI: 10.18698/2308-6033-2015-5-1405

2. Димитриенко, Е.А. Губарева, Д.Ю. Кольжанова Моделирование эффективных характеристик слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотической гомогенизации. Труды Всероссийской научно-технической

конференции «Механика и математическое моделирование в технике», посвящённой 100-летию со дня рождения В.И. Феодосьева, Москва, 17-19 мая. 2016

3. Димитриенко Ю. И., Губарева Е. А., Кольжанова Д. Ю., Каримов С. Б., Моделирование несжимаемых слоистых композитов с конечными деформациями на основе метода асимптотического осреднения, *Математическое моделирование и численные методы*, 2017, выпуск 13, с.32–54

4. Ю.И. Димитриенко, Е.А. Губарева, С.Б. Каримов, Д.Ю. Кольжанова Моделирование эффективных характеристик трансверсально изотропных несжимаемых композитов с конечными деформациями *Математическое моделирование и численные методы*, 2018, № 4, выпуск 20, с.16–34

5. Димитриенко Ю.И., Каримов С.Б., Кольжанова Д.Ю. Моделирование эффективных упругих характеристик для слоистых композиционных материалов с конечными деформациями. *Ключевые тренды в композитах: наука и технологии. Сборник материалов Международной научно-практической конференции*. 2019. С. 183-192

6. Yu I Dimitrienko, S B Karimov, D Yu Kolzhanova Modeling of the effective universal constitutive relations for elastic laminated composites with finite strains *IOP Journal of Physics: Conference Series*, 2019, Vol. 683 , Issue 1 .- Art.no 012006, <https://iopscience.iop.or...57-899X/683/1/012006>, DOI: 10.1088/1757-899X/683/1/012006

7. Yu I Dimitrienko, E A Gubareva, S B Karimov and D Yu Kolzhanova Universal models of the constitutive relations for transversely isotropic compressible composites with finite strains *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2020, 934 (2020) 012012, <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/934/1/012012/pdf>, DOI: 10.1088/1757-899X/934/1/012012