

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ И ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ НА ОСНОВЕ ВИЗУАЛИЗАЦИИ СЕТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Сергей Владимирович БЕНЕВОЛЬСКИЙ родился в 1951 г. в городе Волковыске Гродненской области. Профессор МГТУ имени Н.Э. Баумана. Доктор технических наук, доцент. Основные научные интересы — в области разработки методов терминального наведения летательных аппаратов, математических моделей движения на активном и пассивном участках траектории, унификации математических моделей движения и выбора программ управления движением летательных аппаратов. Автор более 100 научных работ. E-mail: mgtu-bsv@yandex.ru

Sergey V. BENEVOLSKY, D.Sci., was born in 1951, in the Grodno Region. He is a Professor at the Baumann Moscow State Technical University. His major research interests are in terminal guidance techniques for flying vehicles, mathematical models of movement for powered and free-flying trajectory segments, mathematical model unification for movement and control selection for flying vehicles. He has published about 100 technical papers. E-mail: mgtu-bsv@yandex.ru

Владимир Иванович ГОНЧАРЕНКО родился в 1960 г. в селе Докучаево Устиновского района Кировоградской области. Начальник факультета военного обучения МАИ. Кандидат технических наук, доцент. Основные научные интересы — в области теории полета космических аппаратов и баллистики ракет, прикладных информационных (компьютерных) технологий, организации и управления в системе военного обучения. Автор более 40 научных работ. E-mail: fvo@mai.ru, vladimirgonch@mail.ru.

Vladimir I. GONCHARENKO, Ph. D., was born in 1960, in the Kirovgrad Region. He is the Head of the Military Education School at the MAI. His major research interests are in flight theory for spacecraft and ballistic missiles, applied information technologies, organization and management in military education systems. He has published over 40 technical papers. E-mail: fvo@mai.ru, vladimirgonch@mail.ru

Предложен нестандартный метод решения краевых баллистических задач, основанный на использовании унифицированных математических моделей движения летательных аппаратов на активном участке траектории и средств визуализации поверхностей соответствующих краевых (или оптимизационных) условий. Показано применение предложенного метода для определения максимальной дальности и диапазона реализуемых полетных времен при пуске межконтинентальных баллистических ракет на заданную дальность с учетом ограничений на область входа головной части в атмосферу при фиксированном направлении пусков.

A non-standard method is suggested to solve boundary-value ballistic problems basing on usage of unified mathematical models for flight vehicle motion on powered trajectory segment as well as on a surface visualization for appropriate boundary or optimization conditions. An application is demonstrated for this method to compute maximum flight range and realizable flight time range when launching intercontinental ballistic missiles to reach a predetermined range taking into account some limitations concerning an area of warhead reentry for fixed launch directions.

Ключевые слова: математическая модель движения летательных аппаратов, максимальная дальность полёта, визуализация сеточных функций, программа управления движением, кусочная аппроксимация, графики изолиний.

Key words: mathematical model of flying vehicle motion, maximal flight range, visualization of grid functions, motion control program, piecewise approximation, isoline graphs.

Общая характеристика задач, требующих визуализации расчетов при выработке управленческих решений

Возрастающие требования к оперативности решения вновь возникающих задач, в том числе и несвойственных для штатного применения конкретных авиационных и ракетно-космических систем, приводят к необходимости совершенствования спе-

циального математического и программного обеспечения (СМПО) решения проектных задач и задач отображения воздушно-космической обстановки.

Традиционные формы и способы отображения воздушно-космической обстановки известны, например, по демонстрации в телепередачах возможностей средств обработки и отображения информа-

ции отечественных и зарубежных центров управления полётами космических аппаратов.

Усложнение задач, решаемых при проектировании авиационных, космических и ракетных комплексов, требует интегрированного отображения все большего количества данных, общих и частных показателей и критериев, совершенствования способов визуализации.

В связи с этим возникла необходимость выработки научного подхода к визуализации аэрокосмической обстановки и оперативной разработке специализированных программных систем для обеспечения принятия решений и проектирования авиационных, космических и ракетных комплексов.

Например, при проектировании межконтинентальных баллистических ракет (МБР) или оценке возможностей МБР противоборствующей стороны возникает необходимость многократного решения краевых баллистических задач (КБЗ). По аналогии с названными задачами принятие решений для систем отображения и мониторинга аэрокосмической обстановки базируется на решении оптимизационных задач определения зон досягаемости (ОЗД) МБР в условиях неполного знания ряда проектных характеристик. Разрабатывать в таких условиях СМПО решения КБЗ и ОЗД традиционными способами представляется весьма нерациональным. В то же время от точности предварительного решения таких задач существенно зависят расходы на создание ракетных комплексов (РК) в первом случае и комплексов средств противоракетной обороны (ПРО) — во втором.

На практике на этапе проектирования РК для решения краевых и оптимизационных баллистических задач в традиционной постановке разработчиками соответствующего СМПО предварительно затрачиваются значительные усилия и время на решение трех вспомогательных задач:

1) обоснование алгоритма выбора первого приближения для начала итерационного процесса решения рассматриваемых задач;

2) разработка алгоритма уточнения параметров программы управления и соответствующего краевым (или оптимизационным) условиям момента завершения полета на активном участке траектории (АУТ);

3) уточнение выбранной на более ранних этапах структуры программ управления с учетом специфики области применения разрабатываемого комплекса в интересах оптимизации его интегральных характеристик.

В процессе проектирования (равно как при оценке возможностей МБР эвентуального противника) в ходе разработки математической модели

движения (ММД) МБР приходится вносить изменения в алгоритмы решения КБЗ и задач ОЗД, что связано с дополнительными затратами средств и времени.

Происходит это потому, что в общем случае ММД представляется системой дифференциальных уравнений движения, не имеющей аналитического решения. Поэтому как выбор первого приближения искомых параметров, так и разработка схемы их уточнения в ходе итерационного процесса решения рассматриваемых баллистических задач основываются на весьма грубом оценивании численными методами направления поиска на каждой очередной итерации.

Между тем, на практике часто количество искомых управляющих параметров мало (два—три). Например, азимут пуска (A_0) и время (t_k) окончания АУТ или те же параметры и параметр крутизны траектории (ϑ_3) для МБР с отсечкой тяги в конце АУТ. Использование этого параметра для обобщения свойств траектории и решения конкретных задач пуска впервые предложено в работе [1].

Для ракет без отсечки тяги, как правило, используется три параметра: параметр крутизны траектории и два дополнительных угловых параметра, характеризующих маневр в плоскости полета МБР на АУТ, выполняемый в интересах выжигания всех запасов топлива к концу АУТ [2]. Геометрический смысл указанных угловых параметров программы управления кратко поясняется на рис. 1 и 2, соответствующих двум альтернативным структурам программы тангажа. Условно они названы «полу-волна» и «волна». Из-за большого количества конструктивных ограничений [3, 4], рассмотрение которых выходит за рамки данной статьи, в качестве управляющих параметров программы «полу-волна» принимают [5] углы ϑ_6 и ϑ_9 , а для программы типа «волна» — те же углы, дополненные углом ϑ_k . Этот угол обычно выбирается из физических соображений (например, ϑ_k может соответствовать положению продольной оси ракеты, обеспечивающему минимальное рассеивание головных частей (ГЧ) в плотных слоях атмосферы), каждому ϑ_k будет соответствовать «своя» пара значений ϑ_6 и ϑ_9 . Очевидно, что в этом случае при последовательном решении задачи выбора параметров ϑ_6 и ϑ_9 для каждого из требуемых в соответствии со спецификой главной задачи пуска значения ϑ_k возникает своя двухпараметрическая задача. Таким обра-

зом, можно трёхпараметрическую задачу свести к двухпараметрической, задаваясь различными значениями ϑ_k , которых, как показывает практика, не очень много (единицы).

Данное обстоятельство наводит на мысль о возможности графического решения некоторых КБЗ на основе визуализации результатов расчетов серии прямых баллистических задач. (Далее будет пока-

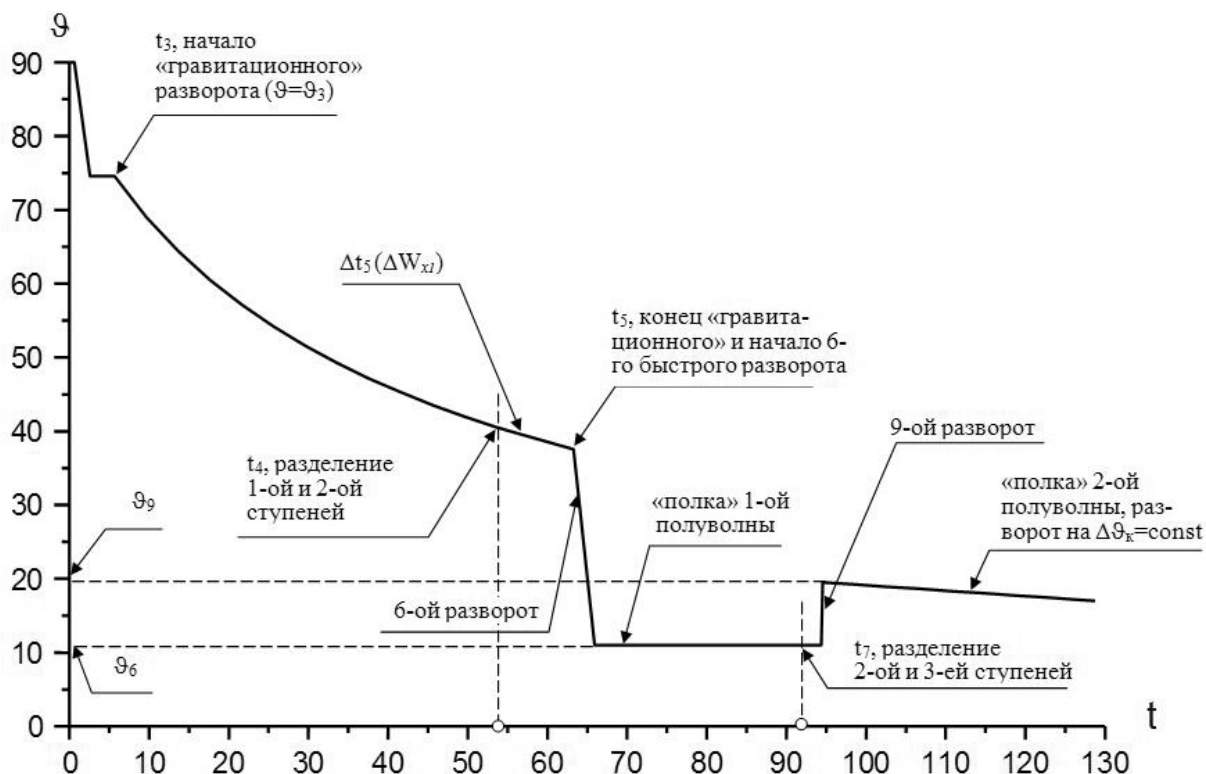


Рис. 1. Расчет основных интервалов времени и параметров, задающих структуру программы «полуволна»

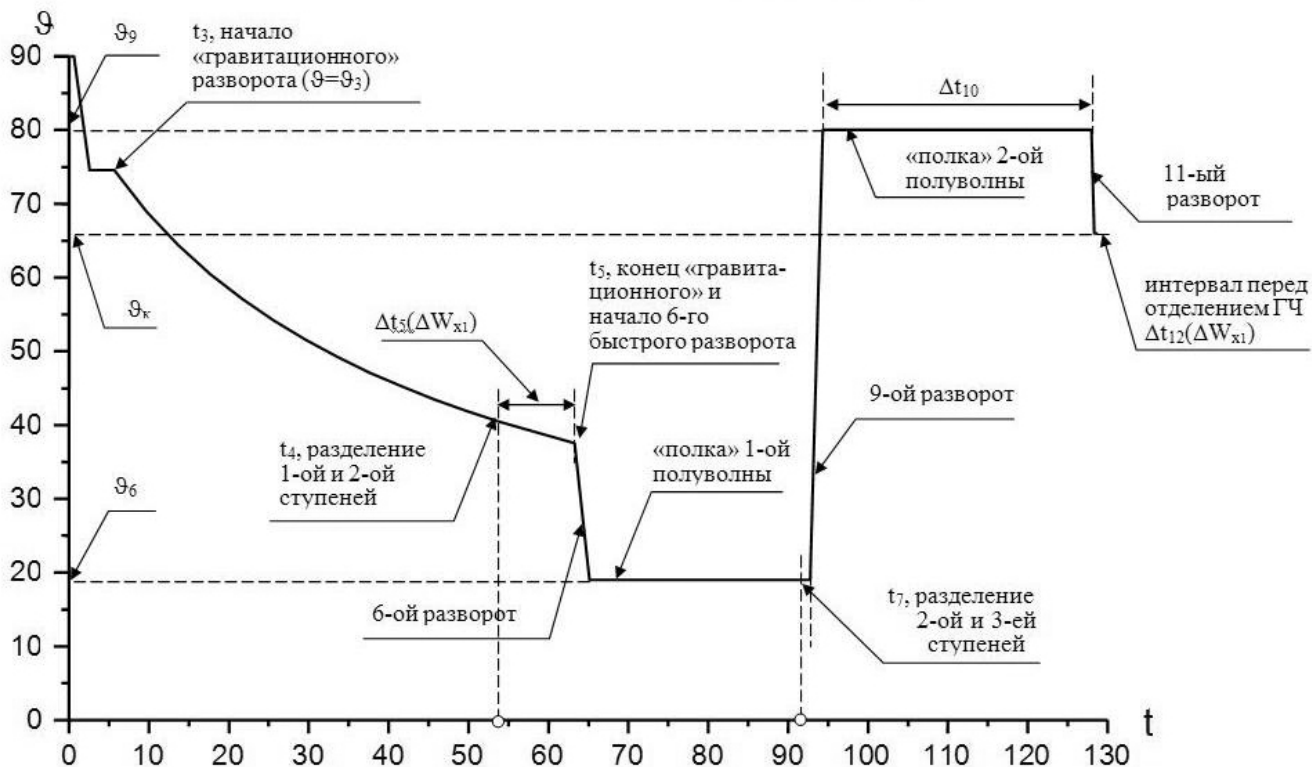


Рис. 2. Расчет основных интервалов времени и параметров, задающих структуру программы «волна»

зано, что и задачи ОЗД можно решать таким же образом.) Удобнее всего визуализировать не сами поверхности концевых условий, которые неявно используются при решении рассматриваемых КБЗ классическими методами, а *изолинии* равных значений того или иного концевого условия: например, дальности полета $S_{\text{сф}}$ или полного полетного времени $T_{\text{п}}$. В первом случае для визуализации требуется построить сеточную функцию $S_{\text{сф}}(\vartheta_6, \vartheta_9)$, а во втором — $T_{\text{п}}(\vartheta_6, \vartheta_9)$. Каждая точка пересечения указанных изолиний для заданных условий применения некоторой МБР ($S_{\text{сф}} = S_{\text{зад}}$ и $T_{\text{п}} = T_{\text{зад}}$) дает параметры программы тангажа, обеспечивающие ее полет на дальность $S_{\text{зад}}$ за время $T_{\text{зад}}$.

Разумеется, необходимо обеспечить выполнение и других концевых условий КБЗ, помимо указанных. Однако все остальные условия, как правило, формализуются так называемой «областью входа» ГЧ в плотные слои атмосферы. Особенность ее заключается в том, что принадлежность траектории полета к данной области фиксируется при попадании значений угла и скорости входа в заданные для этих параметров границы. Известна методика пересчета угла и скорости входа, а также пересчета любой граничной точки «области входа» непосредственно в пространство управляющих параметров $\{\vartheta_6, \vartheta_9\}$ [5]. Это позволяет визуально отображать границы области всех ограничений $G(\vartheta_6, \vartheta_9)$ на фоне рассмотренных выше изолиний. Последнее позволяет контролировать принадлежность рассмотренных выше точек пересечения изолиний к «области входа».

Алгоритм решения задачи о пересечении изолиний между собой и с границами области входа предлагается построить следующим образом. Для соединения точек линий уровня удобно использовать кубические сплайны [6]. Соединив все точки, можно получить искомую линию уровня либо ее фрагмент в интересующей нас области пространства $\{\vartheta_6, \vartheta_9\}$. Так как для соединения точек используется кубический сплайн, то для определения точки или точек пересечения достаточно решить кубическое уравнение, для чего целесообразно использовать тригонометрическое решение кубических уравнений. В общем случае может существовать три действительных корня, однако анализ побочных корней обычно не вызывает затруднений по

физическим соображениям: побочные корни, как правило, находятся вне «области входа».

Поэтому далее для демонстрации практически реализуемых возможностей предложенного выше метода сформулируем достаточно сложную с точки зрения получения рациональных алгоритмов её решения нетипичную КБЗ, характерную для МБР «без отсечки тяги». Она возникает как на этапе проектирования РК, так и в процессе планирования их применения. Не менее характерны такие задачи при оценивании возможностей МБР эвентуального противника с целью выработки направлений совершенствования отечественных средств противодействия этим МБР.

Постановка задачи

Пусть с использованием заданной ММД¹ рассчитаны сеточные функции $S_{\text{сф}}(\vartheta_6, \vartheta_9)$, $T_{\text{п}}(\vartheta_6, \vartheta_9)$ и $G(\vartheta_6, \vartheta_9)$. Считаем известным в общих чертах описанный выше алгоритм вычисления координат:

$$\{\vartheta_6, \vartheta_9\}_i, \quad i \in [1, N_i], \quad (1)$$

отвечающих условиям

$$S_{\text{сф}}(\vartheta_6, \vartheta_9) \cap T_{\text{п}}(\vartheta_6, \vartheta_9) \in G(\vartheta_6, \vartheta_9). \quad (2)$$

Требуется:

1) определить диапазон располагаемых полетных времен $[T_{\text{мин}}, T_{\text{макс}}]$, которые могут быть обеспечены при пусках на заданную дальность $S_{\text{зад}}$, в интересах синхронизации (одновременного подлета к цели или заданному рубежу ПРО) нескольких МБР, запускаемых из разных районов дислокации, имеющих различное время старта;

2) сравнить две альтернативные структуры программы управления («волна» и «полуволна») для выбора рациональной программы управления для более качественного решения рассматриваемой в п.1 задачи.

Метод решения задачи и краткий анализ результатов

С использованием математических моделей, существо которых поясняется далее (формулы (4) и (5)), были рассчитаны сеточные функции, перечисленные в постановке задачи.

Изобразим совместно множество изолиний дальности полета $S_{\text{сф}}(\vartheta_6, \vartheta_9)$, полного времени полета $T_{\text{п}}(\vartheta_6, \vartheta_9)$ и границ «области входа» ГЧ в

¹ Ниже будет предложена идеология разработки унифицированных ММД, существенно повышающих эффективность процесса решения рассматриваемого класса КБЗ и расширяющих область применимости рассматриваемого подхода.

атмосферу» $G(\vartheta_6, \vartheta_9)$ (далее для краткости при ссылках на эту область будем использовать сокращение ОВх) в одинаковом масштабе для варианта применения программы управления типа «полуволна». Результат представлен на рис. 3.

Так как использованный авторами прием отображения границ ОВх в пространство параметров управления $\{\vartheta_6, \vartheta_9\}$ не является общепринятым, кратко поясним его идею. В практике баллистических расчетов ОВх задается в виде замкнутого многоугольника, вершины которого соответствуют значениям модуля вектора относительной скорости входа ГЧ в атмосферу $V_{\text{вх}}$ и угла его наклона к плоскости местного горизонта $\theta_{\text{вх}}$. Обозначим эту область $\Omega_{\text{вх}}$. Тогда условие принадлежности произвольной траектории полета МБР с параметрами входа в плотные слои атмосферы на пассивном участке полета $\{V_{\text{вх}}, \theta_{\text{вх}}\}$ к ОВх принимает вид

$$\{V_{\text{вх}}, \theta_{\text{вх}}\} \in \Omega_{\text{вх}}. \quad (3)$$

Имеется несколько часто применяемых на практике алгоритмов проверки условия (3) для случая

указанной выше конфигурации ОВх ([8] и др.). Введем по определению функцию двух переменных $f_{\text{вх}}(x, y)$, такую, что при выполнении условия (3)

$$f_{\text{вх}}(\vartheta_6, \vartheta_9) = 1,$$

а во всех остальных случаях

$$f_{\text{вх}}(\vartheta_6, \vartheta_9) = 0.$$

Для любой траектории АУТ, полученной с использованием программы управления рассматриваемого класса и оговоренной в исходных данных ММД, можно однозначно рассчитать параметры $\{V_{\text{вх}}, \theta_{\text{вх}}\}$ и соответствующие значения $f_{\text{вх}}(\vartheta_6, \vartheta_9)$. Построением изолиний² $f_{\text{вх}}(\vartheta_6, \vartheta_9) = 0,99$ реализуется однозначное отображение границ ОВх на область определения рассмотренных выше сеточных функций $\{\vartheta_6, \vartheta_9\}$.

С использованием изложенной идеи отображения границ ОВх в пространство координат $\{\vartheta_6, \vartheta_9\}$ были построены графики изолиний, отвечающих сеточной функции $G(\vartheta_6, \vartheta_9)$. На рис. 3 эти графики соответствуют изолинии функции $f_{\text{вх}}(\vartheta_6, \vartheta_9) = 0,99$ и

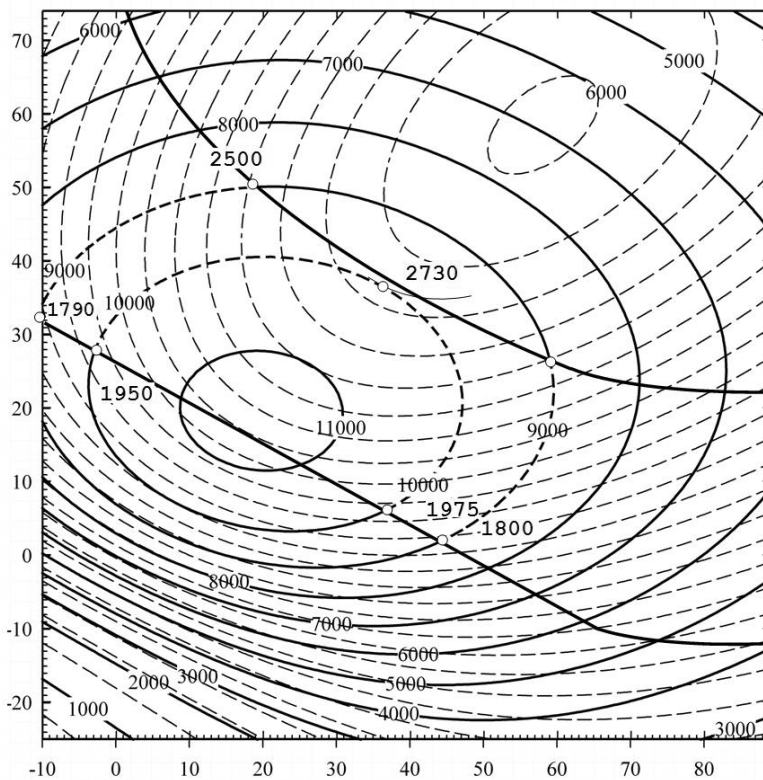


Рис. 3. Изолинии $S_{\text{сф}}, T_{\text{п}}$ и границы области входа в атмосферу (полуволна)

² Хотя рассматриваемая функция определялась выше по типу сигнальной функции, не существует препятствий для чисто формального построения изолинии $f_{\text{вх}}(\vartheta_6, \vartheta_9) = 0,99$.

представлены в виде двух линий, пересекающихся по полю всех графиков сверху вниз и слева направо, имеющих толщину, несколько превышающую толщину линий всех остальных графиков. Верхняя из этих линий напоминает фрагмент дуги эллипса, а нижняя похожа на сопряжение прямой линии с параболой.

Тонкими пунктирными линиями отображаются изолинии сеточной функции $T_{\Pi}(\vartheta_6, \vartheta_9)$. Они построены для значений уровня изолиний 300—2900 с с шагом $\Delta T_{\Pi} = 100$ с. Сплошными линиями средней толщины отображены изолинии $S_{\text{сф}}(\vartheta_6, \vartheta_9)$ для значений уровня изолиний 1000—11000 км с шагом $\Delta S_{\text{сф}} = 1000$ км. Значения уровня нанесены на всех изолиниях дальности полета, а на изолиниях полного полетного времени они нанесены выборочно: только в тех местах, которые позволяют определить на графиках координаты точек пересечения интересующих нас изолиний. Фрагменты изолиний, построенных не прямым расчетом траекторий АУТ и ПУТ, а интерполяцией между соседними изолиниями, отображаются тонкими сплошными линиями.

Для иллюстрации технологии решения рассматриваемой задачи выбраны две контрольные дальности пусков: 9000 и 10 000 км. Такой выбор обусловлен стремлением авторов отразить наиболее типичные случаи взаимного расположения изолиний дальности и границ ОВх. Из рис. 3 видно, что часть изолинии дальности $S_{\text{сф}} = 10\,000$ км, находящаяся в пределах ОВх, по форме похожа на фрагмент эллипса с большой полуосью, ориентированной почти перпендикулярно направлению вытянутости изолиний полного полетного времени. Лежащая в пределах реализуемости с точки зрения конструктивных ограничений часть рассматриваемой изолинии дальности выделена путем прочерчивания ее пунктирной линией средней толщины. Для рассматриваемой задачи это существенно, так как можно сформулировать следующее правило оценки диапазонов располагаемого времени полета на заданную дальность, основываясь на подмеченной геометрической особенности.

Путем интерполяции построим фрагмент изолинии $T_{\Pi}(\vartheta_6, \vartheta_9) = T_{\text{max}}$. Такой изолинии соответствует значение уровня $T_{\Pi} = 2730$ с. Она касается изолинии $S_{\text{сф}}(\vartheta_6, \vartheta_9) = 10\,000$ км в точке, обозначенной белым кружком. Еще двумя такими же кружками обозначены точки пересечения рассматриваемой изолинии с нижней границей ОВх.левой из этих точек соответствует значение изолинии

времени $T_{\Pi} = 1950$ с, а правой — значение изолинии времени $T_{\Pi} = 1975$ с. Тогда очевидно, что диапазонами располагаемых (т.е. допустимых по конструктивным ограничениям) полетных времен являются диапазоны [1950, 2730] с и [1975, 2730] с, т.е. поддиапазоны, определяемые соответственно левой и правой дугами, на которые делит реализуемый участок изолинии дальности точка касания этой изолинии изолинией $T_{\Pi}(\vartheta_6, \vartheta_9) = T_{\text{max}}$.

Изолиния дальности $S_{\text{сф}}(\vartheta_6, \vartheta_9) = 9\,000$ км пересекается границами ОВх на два не связанных между собой фрагмента. Эти фрагменты, как и в случае с изолинией дальности, рассмотренной выше, отображаются пунктирной линией средней толщины. Очевидно, что точки пересечения этих участков изолинии дальности с соответствующими границами ОВх и определяют границы интервалов реализуемых полетных времен. В рассматриваемом на рис. 3 случае получаются диапазоны: [1790, 2500] с и [1800, 2500] с.

Рассчитывая длину полученных диапазонов располагаемых полетных времен, можно легко оценить протяженность временных интервалов, которые планирующая пуски сторона может использовать для синхронизации подлета к целям МБР, стартующих в различных геофизических условиях пусков. Для $S_{\text{сф}} = 9\,000$ км получаем $\Delta T_{\Pi} = 710$ с или 11,8 мин (т.е. 2500—1790 с, так как не имеет значения на одном и том же допустимом участке изолинии или на разных выбирать значения управляющих параметров, обеспечивающих полет на заданную дальность).

Применим разработанную технологию оценивания диапазонов располагаемых полетных времен для исследования соответствующих свойств программы типа «волна». Особенность заключается в том, что данная программа является трехпараметрической. Поэтому зададимся двумя различными значениями третьего параметра этой программы: $\vartheta_{\text{к}} = 70^\circ$ и $\vartheta_{\text{к}} = 50^\circ$. Это позволит применить уже отработанную технологию решения двухпараметрических задач.

Соответствующие $\vartheta_{\text{к}} = 70^\circ$ семейства рассматриваемых изолиний представлены на рис. 4, а семейства изолиний для $\vartheta_{\text{к}} = 50^\circ$ представлены на рис. 5.

Последовательно проанализируем результаты с использованием той же технологии анализа величин реализуемых временных интервалов. Для $S_{\text{сф}} = 10\,000$ км при $\vartheta_{\text{к}} = 70^\circ$ получаем $\Delta T_{\Pi} = 667$ с

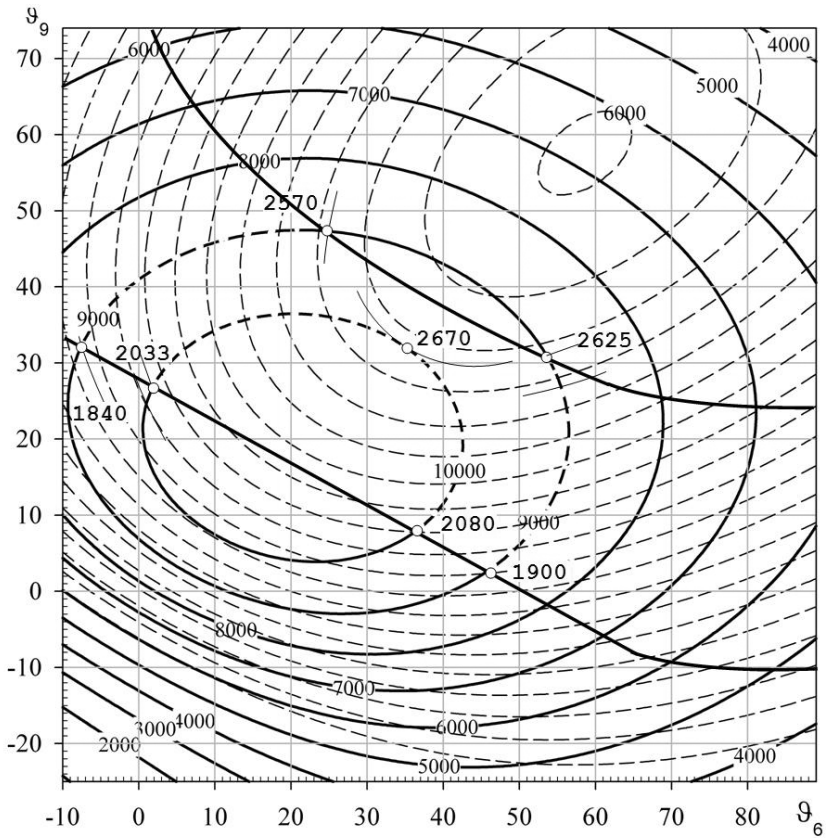


Рис. 4. Изолинии S_{cf} , T_n и границы области входа в атмосферу (волна, $\vartheta_k = 70^\circ$)

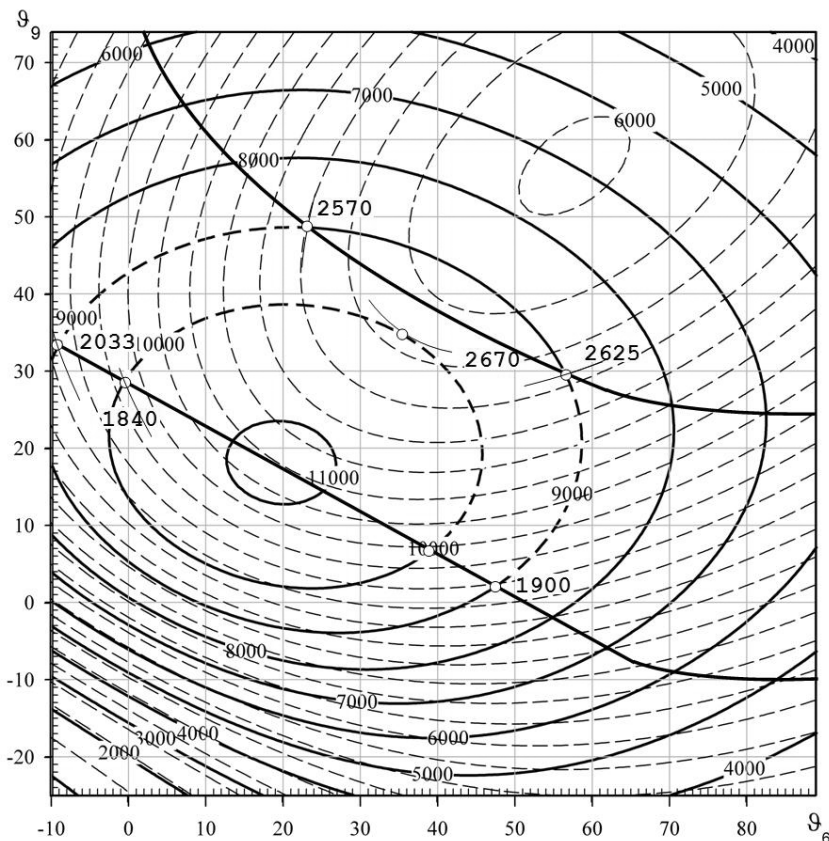


Рис. 5. Изолинии S_{cf} , T_n и границы области входа в атмосферу (волна, $\vartheta_k = 50^\circ$)

или 11,12 мин (т.е. 2670—2033 с), а для $\vartheta_k = 50^\circ$ — интервал $\Delta T_{\text{п}} = 675$ с или 11,25 мин (т.е. 2725—2050 с). Видно, что использование дополнительного параметра ϑ_k позволяет расширить максимальную ширину временного диапазона в целом: получаем $\Delta T_{\text{п}} = 692$ с или 11,53 мин (т.е. 2725—2033 с). Обнаруживается эффект «сложения интервалов» (наибольшее полетное время 2725 с достигается при $\vartheta_k = 50^\circ$, а наименьшее — при $\vartheta_k = 70^\circ$, т.е. 2033 с). Для $S_{\text{сф}} = 9\,000$ км при $\vartheta_k = 70^\circ$ получаем $\Delta T_{\text{п}} = 785$ с или 13,08 мин, а для $\vartheta_k = 50^\circ$ — интервал $\Delta T_{\text{п}} = 790$ с или 13,17 мин (т.е. 2630—1840 с). Так как левые концы интервалов совпали, принимаем наибольший из располагаемых интервалов, т.е. отмеченный выше эффект вырождается в простое увеличение одного из интервалов. Окончательно остается констатировать, что для обеих рассмотренных дальностей лучших результатов позволяет достигнуть программа типа «волна». Таким образом, решена и задача выбора наилучшей из рассматриваемых структур программы управления. Кроме того, очевидно, что интуитивно назначенные значения параметра ϑ_k не могут рассматриваться как окончательные. Дальнейшее понижение крутизны траектории (уменьшение ϑ_k) либо ее повышение может привести к изменению полученных размеров суммарного интервала полетных времен. Поэтому ясно, что выполнена только первая итерация про-

цесса определения искомого интервала. Дальнейший ход итерационного процесса аналогичный.

Остается рассмотреть ранее отложенное решение оптимизационной задачи. Сравнивая рассмотренные выше графики, легко прийти к выводу, что для получения максимальной дальности полета необходимо принять $\vartheta_k = 50^\circ$. Из рис. 5 видим, что параметры программы «волна», отвечающие искомому решению, гарантированно принадлежат области в пространстве управляющих параметров $\vartheta_6 \in [10^\circ, 30^\circ]$, $\vartheta_9 \in [10^\circ, 30^\circ]$. По сеточным функциям $S_{\text{сф}}(\vartheta_6, \vartheta_9)$ и $G(\vartheta_6, \vartheta_9)$, соответствующим «сгущению» области определения сеток до указанной области, построены графики, представленные на рис. 6 и 7. На них с помощью пересечения двух изображенных пунктирными линиями перпендикуляров к осям координат отображено графическое решение задачи. Ответ: $S^* = S_{\text{сф}}(\vartheta_6^*, \vartheta_9^*)$, где

$\vartheta_6^* = 16,60$, $\vartheta_9^* = 17,90$. Из анализа характера изменения изолиний дальности (расстояние между ними растет по мере приближения к экстремуму из-за пологого характера целевой функции) следует, что погрешность определения экстремума менее 25 м. Очевидно, что достигнутая точность решения значительно превосходит практическую потребность при решении задач рассматриваемого класса. Аналогичная ситуация возникает при решении методом «сгущения» сеток рассмотренной выше задачи о синхронизации подлета к цели двух или более ра-

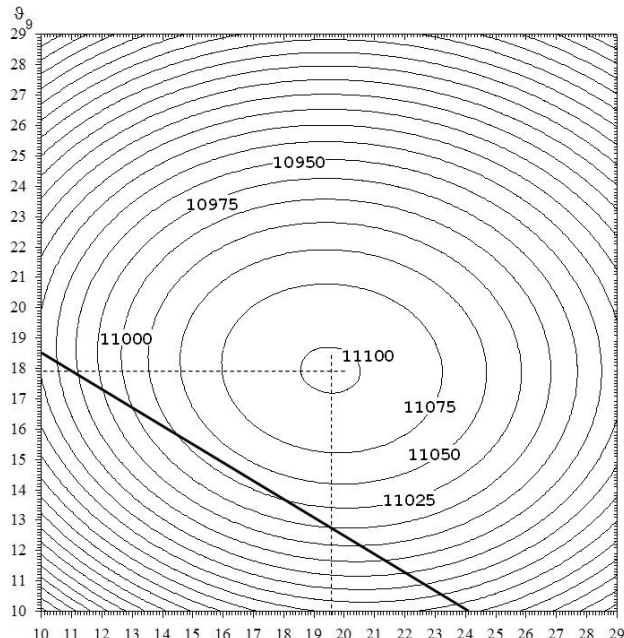


Рис. 6. Сгущение изолиний $S_{\text{сф}}$ и область входа в атмосферу (волна, $\vartheta_k = 50^\circ$)

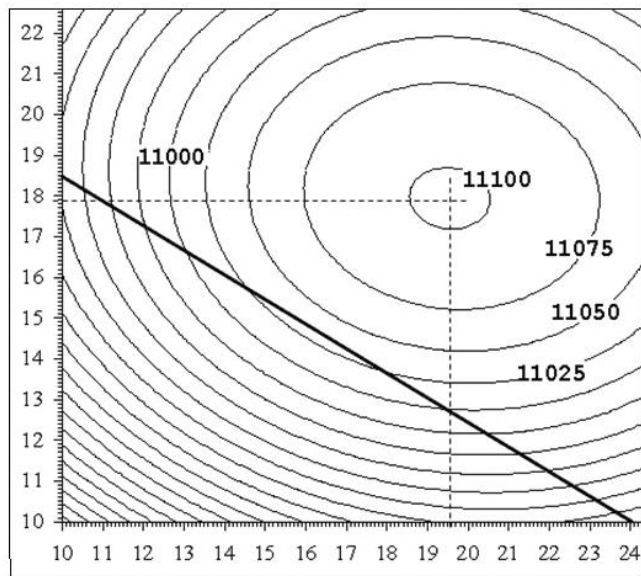


Рис. 7. Сгущение изолиний $S_{\text{сф}}$ и область входа в атмосферу (волна, $\vartheta_k = 50^\circ$) (локализация области пересечения)

кет. Этот метод вполне может конкурировать с методом, основанным на строгом вычислении точек пересечения соответствующих изолиний, если оценивается диапазон времен и дальностей, для которых может потребоваться синхронизация, а не конкретные значения параметров ϑ_6 и ϑ_9 , соответствующих требуемому полётному времени при полёте на заданную дальность.

Представляется практически важным оценить трудоемкость решения рассматриваемых задач на основе предлагаемого метода. Все сеточные функции, использованные выше, имеют размер 100×100 , т.е. требуется рассчитать 10000 траекторий для получения каждой группы изолиний. Более того, для получения высокой точности интерполяции необходимо выполнять операцию «сгущения» сеток, которая увеличивает объем выполняемых расчетов почти в два раза (для трехпараметрических задач — на 33%, поскольку «сгущение» выполняется уже после выбора параметра ϑ_k). Однако для решения проектных задач с большим количеством параметров управления объем вычислений существенно увеличится не за счет «сгущения», а в результате лавинообразного увеличения количества вариантов. Поэтому целесообразно рассмотреть вопрос о выборе или принципах построения ММД, которые позволят оперативно решать такие задачи на основе рассматриваемого метода. Для некоторых параметров может оказаться приемлемым укрупнение ячеек сеточных функций, но при рассматриваемых оценках трудоемкости принято исходить из ситуации с наилучшими условиями поиска решения.

Для оценочных расчетов, рассматриваемых в настоящей статье, не требуется точность, которая соответствует задачам подготовки данных на пуски [5], однако и ММД середины XX века [3, 4] для этих целей тоже непригодны. Поэтому предлагается новая технология моделирования полета МБР, позволяющая достигать быстрого действия, соизмеримого с ММД [3, 4] при точности расчета времени и дальности полета, соизмеримой с ММД [5]. Суть ее состоит в том, что для исследуемого типа ЛА (МБР, РН и т.п.) по общепринятым ММД предварительно оценивается изменение продольной кажущейся скорости $W_{x1}(t)$. Для достижения точности вычисления вектора кажущейся скорости менее 10 м/с при известной кусочно-линейной программе управления оказывается достаточным участок полета каждой ступени разбить на четыре-пять участков. Тогда при использовании традиционной «идеальной схемы» [5] оказывается возможным на любом из участков с постоянным наклоном «гибкой»

($\vartheta = \vartheta_0 + b_\vartheta \Delta W_{x1}$) программы тангажа строго аналитически рассчитать приращения фазовых координат кажущегося движения центра масс ЛА на оси начальной стартовой системы координат (НССК):

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta W_{x_{\text{нр}}}(t) = (\sin \vartheta - \sin \vartheta_0) / b_\vartheta; \\ \Delta W_{y_{\text{нр}}}(t) = (\cos \vartheta_0 - \cos \vartheta) / b_\vartheta; \\ \Delta S_{x_{\text{нр}}}(t) = [T(b_\vartheta u \cos \vartheta_0 + \sin \vartheta_0) - \\ - (T - \tau)(b_\vartheta u \cos \vartheta + \sin \vartheta)] \gamma - (\tau \sin \vartheta_0) / b_\vartheta; \\ \Delta S_{y_{\text{нр}}}(t) = [T(b_\vartheta u \sin \vartheta_0 - \cos \vartheta_0) + \\ + (T - \tau)(\cos \vartheta - b_\vartheta u \sin \vartheta)] \gamma + (\tau \cos \vartheta_0) / b_\vartheta, \end{array} \right. \quad (4)$$

где $\gamma = \frac{1}{b_\vartheta [1 + (b_\vartheta u)^2]}$, а T и u — параметры кусоч-

ной аппроксимации $W_{x1}(t)$ по формуле К.Э. Циолковского. Тогда схема вычисления параметров действительного движения в НССК может быть в данном случае записана в виде

$$\left\{ \begin{array}{l} R = R_0 + V_0 h + \Delta R_g + \Delta S; \\ V = V_0 + \Delta V_g + \Delta W, \end{array} \right. \quad (5)$$

где ΔW , ΔS — приращения параметров кажущегося движения, рассчитываемые по формулам (4); ΔV_g , ΔR_g — первый и второй интегралы от вектора гравитационного ускорения.

Для вычисления названных интегралов применялись специализированные алгоритмы, изложенные в [9]. Они построены на основе новой трактовки принципа «раздельного интегрирования» быстро и медленно меняющихся элементов правых частей системы дифференциальных уравнений движения, составляющих основу любой ММД, применяемой для решения задач рассматриваемого класса.

В 1980-е гг. в МГУ ([10] и др.) были обоснованы и практически разработаны первые методы «раздельного интегрирования». Эта идея была развита специалистами 4-го ЦНИИ МО и реализована в нескольких программных комплексах специального назначения. При реализации данного подхода в правых частях дифференциальных уравнений (или систем дифференциальных уравнений) выделялись компоненты, которые изменяются во времени с различной скоростью. После этого использовались стандартные методы численного интегрирования (в частности, методы Рунге—Кутты), но при расче-

те правых частей интегрируемых уравнений быстро меняющиеся параметры рассчитывались на каждом подшагивании, а медленно меняющиеся составляющие на некоторых подшагиваниях вычислялись, а на остальных условно «замораживались», т.е. считались неизменными. За счет этого обеспечивалось значительное (более 100%) повышение быстродействия методов интегрирования при решении широкого класса задач динамики полета ЛА. Разумеется ошибка, допускаемая из-за применения «замораживания» соответствующих параметров, учитывалась при определении величины шага интегрирования.

В формуле (5) рассматриваемый принцип реализуется иначе. Быстро меняющиеся параметры ΔW , ΔS не содержат методической ошибки интегрирования, присущей любому методу численного интегрирования, поскольку они рассчитываются по строгим (в рамках рассматриваемых моделей движения) аналитическим зависимостям. Поэтому шаг интегрирования с точки зрения расчета быстро меняющихся параметров может быть любым! В частности, шаг интегрирования может равняться времени полета ступени ракеты, если допустимо принять, что на данном этапе проектирования параметры U и T можно считать постоянными для этой ступени, а параметр программы тангажа b_θ из (4) является постоянным (что повсеместно применяется при решении задач баллистического проектирования [3, 4]). Последнее может оказаться приемлемым также в других частных случаях, например, при моделировании полета некоторых разгонных блоков.

В общем случае участки постоянства параметров b_θ имеют, как правило, протяженность 4–15 с³. Именно в таком диапазоне величин шага интегрирования осуществлялось моделирование при построении рассмотренных в статье сеточных функций. Причиной, порождающей такой радикальный выигрыш в быстродействии, являются аналитические выражения (5). В [11 и др.] получены аналогичные выражения для пространственных маневров ГЧ (с учетом одновременного вращения ЛА по углам рыскания и вращения).

Благодаря применению рассмотренных аналитических алгоритмов и стала возможной разработка новой технологии решения проектных задач и задач моделирования аэрокосмической обстановки, включая ее визуализацию. Каждая группа всех се-

точных функций, рассмотренных выше ($S_{\text{сф}}(\vartheta_6, \vartheta_9)$, $T_{\text{п}}(\vartheta_6, \vartheta_9)$ и $G(\vartheta_6, \vartheta_9)$), рассчитывалась при подготовке данной статьи менее, чем за 10 с. При этом использовался процессор с тактовой частотой 3,2 ГГц.

Выводы

1. При проектировании ЛА и оценке зоны их досягаемости возникает необходимость создания СМПО решения краевых и оптимизационных задач баллистического проектирования. В таких задачах для конкретных типов траекторий количество искомых управляющих параметров обычно мало, что допускает графическую интерпретацию результатов решения этих задач.

2. Для оперативного решения вышеназванных задач предложен новый метод, основанный на визуализации результатов расчетов серии ПБЗ. Показано, что удобнее всего визуализировать не сами поверхности конечных условий, которые неявно используются при решении рассматриваемых КБЗ классическими методами, а изолинии равных значений того или иного конечного условия: дальности полета или полного полетного времени. Точки пересечения изолиний соответствующих уровней для заданных условий применения конкретной МБР дают требуемые параметры программы тангажа.

3. Для выбора оптимальных параметров рассчитываются параметры скорости и угла входа ГЧ в плотные слои атмосферы, отвечающие любой приемлемой для решения рассматриваемого класса задач математической модели полета ГЧ на ПУТ. При этом реализуется отображения границ области входа в пространство координат угловых параметров. С ее использованием были построены графики изолиний.

4. Предложена новая технология моделирования полета МБР, позволяющая достигать точности, соизмеримой с ММД, используемыми при подготовке данных на пуски ракет, и достичь повышения оперативности на два порядка. Суть ее состоит в том, что для исследуемого типа ЛА по общепринятым ММД предварительно оценивается изменение продольной кажущейся скорости. Для достижения точности вычисления вектора кажущейся скорости менее 10 м/с для кусочно-линейной программы управления участок полета каждой ступени разбит на четыре-пять участков. Каждый

³ В рассмотренном выше подходе для расчета быстро меняющихся параметров используется шаг интегрирования в диапазоне 0,01–0,1 с. Здесь же именно методическая погрешность численного интегрирования ΔR_g в [5] ограничивает величину шага интегрирования.

из них аппроксимируется таким образом, чтобы произведение аппроксимирующего продольного кажущегося ускорения на направляющие косинусы, проецирующие его на оси инерциальной СК, допускало получение в аналитическом виде.

5. В качестве примера реализации разработанного метода и технологии проведено сравнение двух альтернативных структур программы управления («волна» и «полуволна») для выбора рациональной для синхронизации времени подлета или «подлётных времен» программы управления. Приведенный пример иллюстрирует преимущества и эффективность предложенного метода. Разработанные метод и технологию предложено использовать и реализовать в системах баллистического проектирования авиационных и ракетно-космических комплексов и средствах отображения аэрокосмической обстановки.

Статья подготовлена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 09-08-00750-а.

Библиографический список

1. Лебедев А.А., Герасюта Н.Ф. Баллистика ракет. — М.: Машиностроение, 1970.
2. Беневольский С.В., Гончаренко В.И. и др. Методический аппарат визуализации маневров летательных аппаратов // Тез. докладов XII Междунар. конф. по вычислительной механике и современным прикладным программным системам, Владимир, 30 июня-5 июля 2003 г. / МАИ. М., 2003. С. 104-105.

3. Анпазов Р.Ф., Сытин О.Г. Методы проектирования траекторий носителей и спутников Земли. — М.: Наука, 1987.

4. Проектирование и испытание баллистических ракет / Под. ред. В.И. Варфоломеева, М.И. Копытова. — М.: Воениздат, 1970.

5. Баллистика: Учебник / С.В. Беневольский, В.В. Бурлов, В.П. Казаковцев и др. — Пенза: ПАИИ, 2005.

6. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: Учебник для вузов. — М.: Высш. шк., 2002.

7. Фаронов В.В. Программирование на языке высокого уровня: Учебник для вузов. — СПб.: Изд-во Питер, 2003.

8. Библиотека алгоритмов 101-150. (Справочное пособие). Вып. 2 / М.И. Агеев, В.П. Алик, Ю.И. Марков. — М.: Сов. радио, 1976.

9. Беневольский С.В. Математические модели движения для синтеза методов наведения перспективных баллистических ракет // Оборонная техника. 2007. № 3-4. С. 12-16.

10. Окунев Ю.М., Парусников Н.А. Структурные и алгоритмические аспекты моделирования для задач управления. — М.: Изд-во МГУ, 1983.

11. Беневольский С.В. О новых технологиях моделирования полета ЛА // Тез. докладов III Международного аэрокосмического конгресса IАС'2000. — М., 2000. С.291.

Московский авиационный институт
Статья поступила в редакцию 19.05.2009