

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования  
«Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



**Аунг Мьо Тант**

**Проектирование низкоэнергетических перелетов к Луне с  
использованием точек либрации системы Земля-Луна**

Специальность 2.5.16.

«Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов»

Диссертация

на соискание ученой степени кандидата технических наук

Научный руководитель  
доктор технических наук, профессор  
Константинов Михаил Сергеевич

Москва– 2023

## Оглавление

Введение.....	5
1. Постановка задачи проектирования траектории низкоэнергетического перелета КА на окололунную орбиту.....	17
2. Математическая модель, используемая при проектировании траектории низкоэнергетического перелета на окололунную орбиту.....	23
2.1 Математическая модель, описывающая движение КА на траектории перелета на окололунную орбиту.....	23
2.1.1 Система уравнений, описывающая движение на геоцентрическом участке траектории.....	25
2.1.2 Система уравнений, описывающих движение на селеноцентрическом участке траектории.....	27
2.2 Алгоритм определения начальных условий для интегрирования системы дифференциальных уравнений при старте с околоземной орбиты.....	28
2.3 Алгоритм определения текущего положения точек либрации системы Земля-Луна и элементов оскулирующих геоцентрических орбит этих точек.....	29
2.4 Алгоритм определения величин импульсов скорости в начальной и конечной точках траектории перелета.....	32
3. Метод проектирования низкоэнергетических траекторий перелета к Луне.....	35
3.1 Методические идеи разработанного метода проектирования низкоэнергетических лунных перелетов.....	35
3.2 Определение начального приближения для долготы восходящего узла околоземной орбиты и аргумента широты точки старта с неё.....	38
3.3 Использование прямого перебора двух параметров схемы перелета для нахождения областей их значений, обеспечивающих удовлетворение условий пролета точки либрации.....	39
3.4 Использование промежуточного импульса скорости как методическая идея метода проектирования низкоэнергетических схем лунного перелета.....	41
3.5 Численные методы, применяемые при проектировании траекторий перелета на окололунную орбиту.....	42
3.5.1 Численное интегрирование уравнений движения.....	42

3.5.2 Численный алгоритм решения задачи безусловной оптимизации, основанный на модификации эволюционной стратегии с адаптацией матрицы ковариации .....	44
3.5.3 Алгоритм решения задачи на условный минимум с использованием модифицированной эволюционной стратегии с адаптацией матрицы ковариации .....	52
3.5.4 Метод проекции градиента и его использование при оптимизации траектории перелета на окололунную орбиту.....	53
3.6 Этапы разработанного метода проектирования низкоэнергетической траектории перелета .....	56
3.6.1 Алгоритм проектирования низкоэнергетической траектории перелета на окололунную орбиту с использованием промежуточного импульса скорости....	56
3.6.2 Алгоритм проектирования низкоэнергетической траектории перелета на окололунную орбиту без промежуточного импульса скорости .....	61
4. Результаты расчётов и анализ полученных решений.....	63
4.1 Анализ этапов нахождения низкоэнергетической траектории лунного перелета .....	63
4.1.1 Этап 1. Нахождение траектории достижения КА окрестности точки либрации с удовлетворением условий на характеристики оскулирующей геоцентрической орбиты.....	63
4.1.2 Этап 2. Уточнение траектория начального приближения. Минимизация показателя $I(T_{st}, \Omega, u_o, r_a)$ как функции его четырех аргументов .....	67
4.1.3 Этап 3. Уточнение траектория начального приближения. Минимизация показателя $J(T_{st}, \Omega, u_o, r_a, t_1)$ как функции его пяти аргументов .....	68
4.1.4 Этап 4. Анализ селеноцентрической части траектории КА при найденных на предыдущем этапе характеристиках схемы перелета .....	71
4.1.5 Этап 5. Нахождение параметров схемы перелета, при которых КА подлетает к поверхности Луны на расстояние равное заданной высоте окололунной орбиты .....	80
4.1.6 Этап 6. Минимизация требуемого импульса скорости при выходе на окололунную орбиту .....	82
4.2 Анализ низкоэнергетических траекторий перелета нескольких типов.....	83

4.2.1 Анализ перелетной траектории, на селеноцентрическом участке которой КА монотонно сближается с Луной .....	85
4.2.2 Анализ перелетной траектории КА, в промежуточной точке которой КА сближается с Луной.....	93
4.2.3 Анализ перелетной траектории КА с промежуточным импульсом скорости .....	104
4.3 Основные параметры схем перелета найденных низкоэнергетических траекторий.....	116
4.3.1 Основные параметры низкоэнергетических траекторий с промежуточным импульсом скорости .....	117
4.3.2 Основные параметры низкоэнергетических траекторий для исследованного диапазона дат старта, полученные с использованием методики без введения промежуточного импульса скорости.....	121
Заключение .....	124
Список сокращений и условных обозначений.....	128
Список использованных источников .....	129

## Введение

Проблема определения и исследования свойств лунных траекторий КА важна для космонавтики и небесной механики. Она занимает заметное место в исследованиях по механике космического полета ряда российских и зарубежных исследователей и научно-технических коллективов, работающих в области космонавтики [14, 15, 18, 19,21, 16, 76, 77, 78]. Существует множество способов транспортировки космического корабля между Землей и Луной, в том числе быстрые обычные перелеты, спиральные перелеты с малой тягой и низкоэнергетические перелеты. Подавляющее большинство лунных миссий на сегодняшний день осуществляются с помощью быстрых (от 3-х до 6-ти суток) прямых перелетов с Земли на Луну. В миссиях «Аполлон» использовались перелеты продолжительностью 3–3.5 суток [53,54,63]. Лунный разведывательный орбитальный аппарат (Lunar Reconnaissance Orbiter - LRO) [87,100] совершил 4,5-дневный перелет к Луне с выходом на низкую окололунную орбиту [90]. Дополнительная продолжительность перелета позволила сэкономить топливо и сократить оперативный график миссии. Миссии "Аполлон" и "LRO" имели очень ограниченные возможности запуска: они должны были запускаться в течение короткого периода времени каждый месяц. Разработанная НАСА и НОРАД, миссия Клементина, и миссия Индийского национального космического агентства Чандраян-1 совершили несколько витков вокруг Земли, чтобы расширить окна запуска [64,79]. Миссия ЕКА SMART-1 [88,91, 101] также смогла обеспечить более широкое окно запуска, используя двигатель малой тяги. При использовании электроракетных двигателей (двигателей малой тяги) требуемая масса топлива уменьшается по сравнению с использованием традиционных химических двигательных установок. Но при этом существенно увеличивается время перелета [28,30].

В настоящее время, то, что низкоэнергетические траектории захвата КА Луной реальны, доказано не только теоретически, но и практически. Первым реализованным проектом такого типа можно считать японский проект космического аппарата Hiten (MUSE-A). Проект был реализован в 1991 году [106]. Успешной была и реализации проекта ARTEMIS. В рамках этого проекта два космических аппарата после сложной цепочки манёвров, включающих и пролеты в окрестности Луны, вышли в окрестности лунных точек либрации и затем на околулунные орбиты [52,101]. Два космических аппарата проекта GRAIL были первыми аппаратами, которые были выведены на околулунные орбиты по низкоэнергетической схеме в рамках своей основной миссии. Запуск двух КА был осуществлен одной ракетной-носителем Delta II Heavy 10 сентября 2011 года. После запуска КА были разделены и самостоятельно перелетали на околулунные орбиты по низкоэнергетическим траекториям. Миссия GRAIL по изучению лунного гравитационного поля, внутреннего строения Луны, анализа её тепловых характеристик была первой миссией, запущенной на Луну непосредственно при использовании низкоэнергетической траектории перелета. Низкоэнергетическая траектория перелета GRAIL потребовала гораздо меньше топлива, чем обычная траектория перелета, хотя для этого потребовалось существенно увеличить время перелета и обеспечить большое удаление КА от Земли. Более длительный перелет (~90-114 дней) позволил установить широкий, более чем 3-недельный период запуска (расширить окно запуска). Кроме того, GRAIL запустила два спутника на борту одной ракеты-носителя и использовала более длительный полет, чтобы разделить даты их вывода на орбиту более чем на сутки. Наконец, используемая траектория перелета GRAIL уменьшила требуемое изменение скорости вывода на орбиту ( $\Delta V$ ) для каждого транспортного средства, что позволило каждому космическому кораблю выполнить вывод на лунную орбиту с меньшей массой двигательной установки и меньшим количеством топлива [59,84].

В целом, низкоэнергетический перелет — это почти баллистический перелет между Землей и Луной, который использует гравитацию Солнца для снижения потребностей космического аппарата (КА) в топливе. Единственные необходимые маневры при реализации низкоэнергетических траекторий перелета — это обычные маневры коррекции, которые необходимы для устранения ошибок при выводе ракеты-носителя (РН), и небольшие детерминированные маневры, связанные с выполнением конкретных задач реализуемой миссии. Космический корабль, использующий траекторию низкоэнергетического перелета, выходит за пределы орбиты Луны, достаточно далеко от Земли и Луны, чтобы гравитация Солнца позволила значительно увеличить энергию космического корабля. Космический аппарат остается за пределами орбиты Луны в течение 2-4 месяцев, в то время как его радиус перигея увеличивается. Радиус перигея космического аппарата обычно достигает орбиты Луны, что позволяет космическому аппарату сталкиваться с Луной по почти касательной траектории. Эта траектория имеет очень низкую скорость относительно Луны. В некоторых случаях удается добиться того, что константа энергии селеноцентрической траектории космического корабля становится отрицательной по мере его приближения к Луне. Низкоэнергетический перелет даёт много преимуществ для миссий по сравнению с традиционными перелетами [60,61, 62,83, 93, 97].

В литературе отмечаются следующие преимущества схем низкоэнергетического перелета к Луне. Прежде всего, низкоэнергетические перелеты по сравнению с прямыми традиционным перелетами уменьшают требуемый тормозной импульс скорости при переходе на орбиту около Луны. При выведении на круговую окололунную орбиту высотой 100 км можно уменьшать требуемый тормозной импульс на более чем 120 м/с. Есть варианты схемы перелета, где выигрыш оказывается равен 160 м/с, что составляет примерно 20% от требуемого импульса торможения в традиционных схемах перелета при выведении

на низкую окололунную орбиту. Есть публикации, в которых утверждается, что этот выигрыш в энергетике может составить даже 25%.

Низкоэнергетические перелеты являются более гибкими, чем традиционные перелеты. Они могут использоваться для выведения космических аппаратов на многие другие орбиты на определенную фиксированную эпоху. В частности, низкоэнергетические перелёты могут использоваться для достижения полярных орбит с любым положением линии узлов в любую дату прибытия. Традиционные перелеты не имеют такой возможности.

Низкоэнергетические перелеты расширяют окна запуска. Требуется относительно небольшое увеличение требуемой энергетике при отклонении даты старта от оптимальной.

Низкоэнергетические перелеты имеют менее напряженный график работы служб сопровождения и управления движением КА на реализуемой траектории перелета. Время между предполагаемыми моментами коррекции довольно больше, что дает возможность тщательного выполнения навигационных измерений и выработки плана дальнейшего перелета.

При проектировании низкоэнергетических перелетов есть возможность обеспечить выведение одной ракетой-носителем нескольких КА на окололунные орбиты, разделяя КА на низкой околоземной орбите и выбирая различные планы полета для каждого из КА. Требуемая энергетика таких космических аппаратов будет очень близкой. Такой возможности практически нет при использовании традиционных прямых перелетов.

Стоит отметить, что при выборе траекторий обратного перелета (перелета от Луны на Землю) использование траекторий аналогичных низкоэнергетическим перелетам к Луне может быть так же целесообразным. Использование таких схем может сделать возможным посадку космического аппарата практически в любое



место на поверхности Земли. Такой возможности не имеют традиционные траектории возврата лунных космических аппаратов.

Имея в виду перечисленные выше преимущества низкоэнергетических траекторий перелета, заметим, что их реализация является сложной проблемой. Такая траектория очень чувствительна к любым ошибкам по начальным условиям движения. Требуется очень высокая точность навигационных измерений и их обработки. Требуется очень высокая точность исполнения коррекций траекторий. Эти обстоятельства вместе с большим увеличением времени перелета должны учитываться при выборе возможных альтернативных схем перелета при выведении КА на окологрунтовые орбиты.

Уменьшение требуемого запаса топлива (уменьшение характеристической скорости маневра, требуемой энергетики) при реализации космической транспортной операции (перелета КА) есть важнейшая задача проектной баллистики. Проблема уменьшения требуемой энергетики при анализе траекторий перелета к Луне начала анализироваться давно. Первые формулировки этой проблемы можно найти в небесной механике при анализе ограниченной задачи трех тел. При обзоре работ, посвященных нахождению низкоэнергетических лунных перелетов, упоминают первые публикации по этой проблеме советских ученых Фесенкова В.Г. и Егорова В. А. [14]. Фесенков В.Г. в работе, опубликованной в 1946 году [48], анализируя интеграл Якоби в ограниченной задаче трех тел, пришел к выводу, что перелет, который мы сейчас называем низкоэнергетическим, невозможно реализовать. В. А. Егоров, в работе, опубликованной в 1957 году [14], на основании анализа ограниченной задачи трех тел, пришел к выводу, что захват Луной КА возможен, при использовании многовитковой траектории перелета. При этом он считал, что этому захвату может помешать возмущение от Солнца. В большом числе работ анализируется возможность использования влияния лунно-солнечных возмущений с целью улучшения энергетических характеристик

перелетной траектории КА. Приводятся некоторые аналитические оценки, качественно и количественно описывающие изменения элементов перелетной орбиты. Осуществляются и попытки оценки вековых уходов элементов орбиты от лунно-солнечных возмущений. Для того чтобы получать оценки вековых уходов элементов перелетной орбиты КА, можно использовать результаты известной работы М.Л. Лидова [27], в которой приведены удобные и весьма универсальные соотношения, позволяющие быстро и удобно получить количественный результат. Аналитические соотношения, полученные М.Л. Лидовым, в первую очередь интересны тем, что являются универсальными с точки зрения описания эллиптического движения, т.е. они могут быть использованы для оценки вековых уходов элементов орбиты КА, которая, равно как и орбита принимаемого во внимание возмущающего тела (или же нескольких тел) обладает произвольным (меньшим 1) эксцентриситетом и наклоном. Отметим, что подавляющее большинство подобных соотношений и оценок было получено исключительно при рассмотрении так называемых планетных задач, то есть в предположении малых относительных наклонов орбит возмущающих тел и их малых эксцентриситетов. Стоит отметить и публикацию [8], дающую общетеоретический подход к анализу возмущенного движения КА и получению аналитических оценок эволюции орбитальных элементов в этом движении. Не отвергая принципиальной возможности оценивать вековые уходы элементов перелетной к Луне траектории для получения некоторых качественных характеристик этой траектории, заметим, что в настоящей работе не удалось активно использовать такие оценки. Низкоэнергетическая траектория полета к Луне очень сильно подвержена лунно-солнечным возмущениям. В настоящей работе не удалось связать эти возмущения с характеристиками траектории (параметрами схемы полета к Луне). Попытки использования методов локальной оптимизации в пространстве параметров схемы полета, как правило, не приводят к положительному результату из-за наличия очень большого количества локальных экстремумов. Осуществить анализ с

использованием перебора в пространстве полного набора параметров схемы полета практически невозможно из-за ограниченных возможностей современных компьютеров. В настоящей работе выбран другой путь решения проблемы. Основная идея разработанного подхода заключается в сужении класса рассматриваемых перелётных траекторий.

Рассматриваемые в настоящей работе низкоэнергетические схемы перелета КА к Луне в целом известны. Однако, к сожалению, в подавляющем большинстве случаев общая методология, необходимая для построения подобных схем перелета, описана довольно расплывчато, и в целом, неясна. Она преимущественно базируется на ряде некоторых чисто эмпирических соображений, полученных посредством простого анализа численных результатов. При этом проблема, как правило, непосредственно сводится к рассмотрению значительного числа траекторий движения КА (их число измеряется десятками тысяч). При этом выявляется некоторый (в целом достаточно частный) критерий, или же некоторое отдельное свойство среди полученных тем или иным образом траекторий перелета КА к Луне, которое и предполагается удовлетворять в дальнейшем, при непосредственном построении низкоэнергетической перелетной траектории. Однако, данные результаты не дают четкого и однозначного представления об общей методологии выбора ряда основополагающих параметров интересующей нас схемы низкоэнергетического перелета Земля-Луна. К ним, в первую очередь, относятся моменты времени, определяющие относительные положения небесных тел в рамках рассматриваемой модельной задачи.

В настоящей работе, осуществляется попытка за счет сужения возможного класса траекторий низкоэнергетических перелетов предложить относительно простую в реализации методику нахождения параметров схемы низкоэнергетического лунного перелета.

**Актуальность и степень разработанности темы** настоящей диссертационной работы связана с целесообразностью повышения эффективности выполнения транспортных космических манёвров при реализации лунных перелетов. Лунные программы США и Китая предполагают реализацию многих проектов, включающих доставку на низкие окололунные орбиты грузов большой массы. Грузовые перевозки допускают увеличение времени выполнения перелета. Использование для таких перевозок низкоэнергетических траекторий является целесообразным. Они позволяют увеличить доставляемую к Луне массу полезной нагрузки или уменьшить затраты на эту доставку. В этих условиях разработка регулярного метода проектирования низкоэнергетических лунных траекторий является важной и актуальной проблемой.

**Объектом исследования** являются траектории низкоэнергетического перелета КА к Луне с его выводением на окололунную орбиту.

**Предметом исследования** являются математические модели оптимального перелета КА к Луне с выводением КА на окололунную орбиту.

**Целью** настоящей диссертационной работы является разработка метода проектирования низкоэнергетических лунных перелетов. Использование этого метода позволит определять эффективные схемы перелета на окололунные орбиты, требующие для своей реализации минимальные затраты топлива. Как результат, повысится эффективность выполнения транспортной операции.

**Научная новизна диссертационной работы** заключается:

- В разработке метода проектирования низкоэнергетических лунных перелетов, предполагающего использование в качестве начального приближения траекторию, которая проходит через окрестность коллинеарных точек либрации L1 или L2 системы Земля-Луна.

- Во введении условий, обеспечивающих близость формы, размера и расположения оскулирующих геоцентрических орбит точки либрации и космического аппарата в момент прохождения космическим аппаратом окрестности точки либрации.
- В использовании характеристик промежуточной орбиты, на которую КА переводится при старте с низкой околоземной орбиты, как оптимизируемых характеристик схемы перелета.
- В использовании положения восходящего узла лунной орбиты по отношению к плоскости земного экватора при нахождении начального приближения оптимизируемой траектории.
- В использовании прямого перебора (при нахождении начального приближения оптимизируемой траектории) двух важнейших выбираемых параметров схемы перелета (даты старта и радиуса апогея промежуточной орбиты) с достаточно малым шагом перебора, что способствует преодолению проблемы застревания в областях локального экстремума при использовании итерационных процедур.
- В использовании промежуточного импульса скорости как методического приема, обеспечивающего большую эффективность разработанного метода.

**Практическая значимость** данной диссертационной работе состоит в следующем:

Разработанная методика может позволить обеспечить более эффективное исследование и освоение Луны при развитии лунных программ. Может позволить реализовывать лунные грузовые перевозки, используя располагаемые и проектируемые транспортные космические средства, доставлять на окололунные орбиты полезную нагрузку большой массы.

**Методология и методы исследования.** Рассматриваемая в данной работе задача формулировалась как задача нелинейного программирования. Для её решения применялся метод множителей Лагранжа. Численный поиск решения осуществлялся с помощью эволюционной стратегии с адаптацией матрицы ковариации CMA-ES [66,67,68,69,]. Для интегрирования уравнений движения КА использовался метод Дормана-Принса 7-8 -го порядка точности Dorm8 [50].

**Основные научные положения, выносимые на защиту:**

- Разработан метод проектирования низкоэнергетических лунных перелетов, предполагающий использование в качестве начального приближения траекторию, проходящую через окрестность коллинеарной точки либрации L1 или L2 системы Земля-Луна.
- Описаны условия, обеспечивающих близость формы, размера и расположения оскулирующих геоцентрических орбит точки либрации и космического аппарата в момент прохождения космическим аппаратом окрестности точки либрации.
- Анализ характеристик промежуточной орбиты, на которую КА переводится при старте с низкой околоземной орбиты, как оптимизируемых характеристик схемы перелета.
- Использование положения восходящего узла лунной орбиты по отношению к плоскости земного экватора при нахождении начального приближения оптимизируемой траектории.
- Использование прямого перебора двух важнейших выбираемых параметров схемы перелета (даты старта и радиуса апогея промежуточной орбиты) для нахождения начального приближения оптимизируемой траектории.

- Использование промежуточного импульса скорости как методического приема, обеспечивающего большую эффективность разработанного метода.
- Анализ характеристик полученных траекторий низкоэнергетических траекторий перелета к Луне с выводением КА на окололунную орбиты высотой 100 км.

**Достоверность** полученных результатов обеспечивается: - использованием математической модели задачи четырех тел при описании траектории перелета к Луне, которая учитывает воздействие на КА Земли, Луны и Солнца на всех этапах перелета; - использованием апробированных методов численного интегрирование при решении задачи Коши и краевой задачи для системы дифференциальных уравнений; - использованием апробированных методов решения задач на условный экстремум; сравнительным анализом численных результатов с результатами, опубликованными в литературе.

**Апробация результатов работы** проводилась на 7 российских и международных конференциях:

- Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» 2019, МАИ, г. Москва, Россия;
- Авиация и космонавтика 2019, МАИ, г. Москва, Россия;
- Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» 2020, МАИ, г. Москва, Россия;
- Авиация и космонавтика 2020, МАИ, г. Москва, Россия;
- Академические чтения по космонавтике 2020, МГТУ, г. Москва, Россия;
- Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» 2021, МАИ, г. Москва, Россия;
- Авиация и космонавтика 2021, МАИ, г. Москва, Россия;

**Личное участие автора.** Все результаты, которые приведены в данной диссертационной работе, получены лично автором или при участии автора. Наиболее значимые достижения по теме исследования представлены в 9 публикациях [22, 23,24, 41, 42, 43, 44, 45, 46], 2 статьи из которых изданы в журналах, рекомендованных ВАК, 7 – в тезисах докладов конференций.

### **Структура и объём работы**

Работа состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертационной работы составляет 138 страницы, включая 6 таблиц и 40 рисунков. Список литературы состоит из 106 наименований.



# 1. ПОСТАНОВА ЗАДАЧИ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПЕРЕЛЕТА КА НА ОКОЛОЛУННУЮ ОРБИТУ

Рассматривается задача нахождения рациональной схемы перелета с низкой орбиты искусственного спутника Земли на орбиту искусственного спутника Луны. Двигательная установка КА предполагается химической. Для того, чтобы не привязывать исследование к характеристикам используемой химической двигательной установки, используется импульсная аппроксимация активных участков. Многие характеристики низкой околоземной орбиты считаются известными. Известна высота и наклонение околоземной круговой орбиты. В представленном ниже численном анализе высота этой орбиты принята равной 200 км, а наклонение  $51.6^\circ$ . Целевая орбита искусственного спутника Луны предполагается низкой круговой. Известна высота конечной круговой окололунной орбиты ( $H_f$ ). Высота этой орбиты предполагается заданной. При численном анализе эта высота принята равной 100 км. Требуется найти характеристики оптимальной импульсной схемы перелета КА с околоземной орбиты на окололунную орбиту. Критерием оптимизации рассматривается суммарный импульс скорости или величина второго импульса скорости, которым заканчивается перелет. Заметим, что разработанная методика позволяет проектировать траектории выведения и на высокие круговые окололунные орбиты, но энергетический выигрыш от анализированной схемы лунного перелета может оказаться менее значимым, чем при перелетах на низкую орбиту. Дело в том, что при выведении КА на высокие окололунные орбиты можно использовать трехимпульсную схему маневрирования в окрестности Луны. Такая схема может оказаться выгоднее традиционной одноимпульсной схемы при выведении КА на высокие окололунные орбиты.

Выбираемыми параметрами схемы перелета рассматриваются: долгота восходящего узла околоземной орбиты ( $\Omega$ ), аргумент широты точки старта с

околоземной орбиты ( $u_o$ ), величина чисто разгонного импульса скорости при старте с околоземной орбиты ( $\Delta V_I$ ), время перелета ( $t_p$ ) и время старта с околоземной орбиты ( $T_{st}$ ). Считается известной эпоха старта (год старта). Вместо импульса скорости  $\Delta V_I$  в качестве выбираемого параметра использовался радиус апогея оскулирующей геоцентрической орбиты ( $r_a$ ), на которую этот импульс скорости переводит КА. Целесообразность такой замены связана с тем, что для рассматриваемого маневра диапазон рациональных величин импульса скорости  $\Delta V_I$  очень узок, а диапазон рассматриваемых характеристики  $r_a$  весьма широк (от одного до 1.5 млн км). Оскулирующую геоцентрическую орбиту, на которую КА выводится разгонным импульсом скорости  $\Delta V_I$ , будем называть промежуточной орбитой.  $r_a$  – радиус апогея этой орбиты.

Рассматриваемую постановку задачи можно свести к задаче математического программирования [26,31, 51]. Для этого следует построить математические модели, определяющие как функции перечисленных выше выбираемых параметров траектории перелета (долгота восходящего узла околоземной орбиты  $\Omega$ , аргумент широты точки старта с околоземной орбиты  $u_o$ , время перелета  $t_p$  и время старта с околоземной орбиты  $T_{st}$ , радиус апогея оскулирующей геоцентрической орбиты  $r_a$ ):

1) условия выполнения транспортной операции (выход на окололунную орбиту заданной высоты) и

2) критерий оптимизации (перелет требовал минимальной энергетики).

Вся траектория перелета в рассматриваемой постановке полностью определяется начальными условиями движения КА при старте с низкой околоземной орбиты, то есть значениями четырёх характеристик:  $T_{st}$ ,  $\Omega$ ,  $u_o$ ,  $r_a$ . Условия движения в конечной точке известной траектории перелета зависят от времени перелета  $t_p$ . При такой формулировке проблема выполнения транспортной задачи может сводиться к удовлетворению следующих двух условий типа равенства.

1) В конечной точке траектории перелета расстояние КА от поверхности Луны должно быть равным высоте целевой окололунной орбиты  $H_k$ . То есть величина радиус-вектора КА относительно Луны была равна сумме радиуса Луны  $R_{Moon}$  и высоты орбиты

$$r_{SC\_Moon} = R_{Moon} + H_k. \quad (1.1)$$

2) Радиус вектор КА относительно Луны и вектор его скорости относительно Луны должны обеспечивать заданное наклонение целевой окололунной орбиты. Условие можно записать, используя выражение для орта вектора площадей селеноцентрической орбиты в виде:

$$\frac{[\mathbf{r}_{SC\_Moon} \times \mathbf{V}_{SC\_Moon}]_z}{|\mathbf{r}_{SC\_Moon} \times \mathbf{V}_{SC\_Moon}|} = \cos(i). \quad (1.2)$$

В последнем равенстве выражение в квадратных скобках есть векторное произведение селеноцентрического радиуса вектора КА и его селеноцентрической скорости (вектор площадей). Нижний индекс  $z$  обозначает проекцию вектора площадей на ось  $z$  селеноцентрической экваториальной системы координат (ось вращения Луны). В знаменателе левой части равенства используется модуль вектора площадей.  $i$  в правой части равенства – заданное наклонение плоскости целевой окололунной орбиты. Для часто анализируемого случая полярной окололунной орбиты последнее условие принимает вид  $[\mathbf{r}_{SC\_Moon} \times \mathbf{V}_{SC\_Moon}]_z = 0$ . Последнее равенство может быть переписано в виде:

$$x_{SC\_Moon} V_{y_{SC\_Moon}} - y_{SC\_Moon} V_{x_{SC\_Moon}} = 0,$$

где используются проекции селеноцентрического радиус-вектора КА и его селеноцентрической скорости на оси  $x$  и  $y$  селеноцентрической экваториальной системы координат.

Перечисленные два условия должны быть удовлетворены выбором пяти параметров схемы перелета:  $T_{st}$ ,  $\Omega$ ,  $u_o$ ,  $r_a$ ,  $t_p$ . Таким образом, выполнение транспортной задачи сводится к нахождению пяти параметров схемы перелета,

удовлетворяющих двум перечисленным условиям типа равенства. Понятно, что решений задачи, в которой число неизвестных больше числа условий типа равенства в общем случае много. Нас могут интересовать только те решения, которые требуют минимальной энергетики для перелета (критерия оптимизации схемы перелета). Рассматриваются два варианта критерия оптимизации схемы перелета. В одном из них критерием рассматривается суммарный импульс скорости ( $\Delta V_{\Sigma}$ , сумма величин отлетного от Земли импульса скорости  $\Delta V_1$  и тормозного импульса скорости, осуществляемого в окрестности Луны при выводе КА на орбиту спутника Луны  $\Delta V_{br}$ ):  $\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_{br}$ . Во втором варианте критерием рассматривается только импульс скорости, осуществляемый в окрестности Луны при выводе КА на орбиту спутника Луны ( $\Delta V_{br}$ ).

С точки зрения практической реализации рассматриваемого маневра интересен второй критерий. Дело в том, что первый импульс скорости сообщается КА на стартовой орбите разгонным блоком (РБ), запас характеристической скорости достаточно большой. При этом относительно небольшое увеличение заправки этого блока при рассматриваемом маневре (небольшое увеличение величины первого импульса скорости) приводит к сильному увеличению апогея промежуточной геоцентрической траектории КА, которое требуется для реализации траектории низкоэнергетического перелета к Луне. Тормозной импульс скорости в окрестности Луны выполняется с использованием двигателя самого КА, с использованием топлива двигательной установки самого КА. Именно поэтому часто целесообразность использования низкоэнергетической схемы лунного перелета доказывают, анализируя возможность уменьшения тормозного импульса скорости в окрестности Луны, не обращая внимание на величину отлетного от Земли импульса скорости.

С точки зрения разработанной методики проектирования низкоэнергетических лунных траекторий выбор одного из двух перечисленных критериев является непринципиальным. В процессе численного анализа использовались и первый, и

второй показателя эффективности. Для практики, по-видимому, естественно ставить задачу так: критерием оптимизации рассматривать величину тормозного импульса скорости, но вводить ограничение сверху на величину отлетного от Земли импульса скорости. При анализе конкретной лунной миссии следует от импульсной постановки перейти к постановке задачи с конечной тягой, при этом критерием оптимизации использовать массу, выводимую на окололунную орбиту.

Таким образом, математическая формулировка задачи нахождения схем низкоэнергетических траекторий перелета при выведении КА на окололунные орбиты может быть такой.

Найти такие пять параметров схемы перелета:  $T_{st}$ ,  $\Omega$ ,  $u_o$ ,  $r_a$ ,  $t_p$ , которые обеспечивают удовлетворение двух перечисленных выше условий (1.1), (1.2) и обеспечивают минимум показателя энергетических затрат или в виде

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_{\Sigma}(T_{st}, \Omega, u_o, r_a, t_p) \rightarrow \min \quad (1.3)$$

или в виде

$$\Delta V_T = \Delta V_T(T_{st}, \Omega, u_o, r_a, t_p) \rightarrow \min \quad (1.4)$$

Математическая формулировка задачи предполагает поиск минимума функции пяти переменных при удовлетворении двух условий типа равенства (задача на условный экстремум).

Возможно переформулировать задачу так, что количество условий типа равенств уменьшится до одного условия. Это связано с возможностью выбирать импульс скорости при переходе на окололунную орбиту не чисто тормозным, а произвольного направления. В таком случае единственным условием типа равенства останется условие достижения космическим аппаратом точки окрестности Луны с заданной высотой (условие (1.1)). Выбором вектора импульса скорости  $\Delta V_T$  всегда можно обеспечить последующее движение КА по круговой орбите с заданным наклоном, если склонение селеноцентрического радиуса вектора КА относительно лунного экватора в конечной точке траектории перелета меньше или

равно заданного наклона окололунной орбиты. Для типичного варианта полярной окололунной орбиты это ограничение всегда выполняется.

Принципиально, уменьшение числа удовлетворяемых ограничений типа равенства может благоприятно сказаться на сходимости итерационного процесса поиска рациональной схемы перелета и может рассматриваться как важный методический прием.

## **2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ, ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ТРАЕКТОРИИ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ПЕРЕЛЕТА НА ОКОЛОЛУННУЮ ОРБИТУ**

В разделе приведены соотношения, которые используются для описания движения КА на участках траектории перелета КА, а также соотношения, по которым находятся начальные и конечные характеристики движения КА. Эти соотношения позволяют по выбираемому вектору выбираемых параметров схемы перелета  $(T_{st}, \Omega, u_o, r_a, t_p)$  определить точность выполнения транспортной задачи (в частности, высоту КА над поверхностью Луны в конечной точке траектории перелета  $H_k(T_{st}, \Omega, u_o, r_a, t_p)$  и величину рассматриваемого критерия оптимизации (например,  $\Delta V_{\Sigma}(T_{st}, \Omega, u_o, r_a, t_p)$ ).

### **2.1 Математическая модель, описывающая движение КА на траектории перелета на окололунную орбиту**

Движение КА на траектории перелета на окололунную орбиту исследуется в импульсной постановке. То есть активные участки, на которых включаются двигательная установка химического разгонного блока или двигательная установка собственно КА не интегрируются. Считается, что время работы двигателя небольшое и КА мгновенно получает импульс скорости, изменяющий в общем случае и величину, и направление скорости КА. При этом на перелетной траектории на КА действуют силы притяжения трех небесных тел (Земли, Луны и Солнца). Для описания движения КА используется модель ограниченной задачи 4-х тел. На основной стадии расчета траектории ни одной из сил притяжения не пренебрегается. То есть независимо от положения КА по отношению к перечисленным телам гравитационные силы притяжения ими космического аппарата учитываются. Модели гравитационных сил выбраны следующими. Силы притяжения Луны и Солнца рассматриваются ньютоновскими. То-есть эти силы направлены к центру притягивающего тела и по величине обратно пропорциональны расстоянию от центра небесного тела до КА. Гравитационный потенциал Земли рассматривается

как потенциал сжатого сфероида, то есть учитывается вторая зональная гармоника. Более аккуратное отношение к земному гравитационному потенциалу, по отношению к гравитационным потенциалам других небесных тел объясняется тем, вторая зональная гармоника на начальном этапе перелета относительно сильно влияет на движение КА. Немало важным является и то обстоятельство, что учет второй зональной гармонике земного потенциала при исследовании траектории КА в геоцентрической экваториальной системе относительно несильно усложняет правые части уравнений движения КА, незначительно увеличивая трудоемкость исследования [25].

Вся траектория КА разбивается на два участка: геоцентрический и селеноцентрический участки. Процедура выбора точки разделения траектории на эти участки будет объяснена ниже. Но еще раз подчеркнем, что на обоих участках учитывается притяжение всех трех рассматриваемых небесных тел (Земли, Луны и Солнца). Поэтому точность анализируемой траектории очень слабо зависит от выбора этой граничной точки. Положение небесных тел определяется с использованием эфемеридного обеспечения DE-405 [103, 1]. Для участков используются свои наборы безразмерных характеристик, что обеспечивает достаточно высокую точность используемых методов численного интегрирования. Для геоцентрического участка при переходе к безразмерным характеристикам использовался следующий набор величин: единица расстояния - 100000 км, единица скорости – местная круговая геоцентрическая скорость на введенной единице расстояния (1.996 км/с). Для селеноцентрического участка за единицу расстояния принималось расстояние 10000 км, за единицу скорости местная круговая селеноцентрическая скорость на введенной единице расстояния (0.700 км/с). Единицы времени и ускорения на обоих участках принимались согласованными с выбранными единицами расстояния и скорости.



Анализ участков траектории проводится в эклиптической геоцентрической и эклиптической селеноцентрической системах координат [3, 105]. То есть основной плоскостью рассматриваемых систем является плоскость эклиптики на эпоху J2000 [17]. Одноименные оси рассматриваемых систем координат параллельны.

### **2.1.1 Система уравнений, описывающая движение на геоцентрическом участке траектории**

Система дифференциальных уравнения, описывающих движение КА на участках траектории перелета традиционна [6, 11, 25, 33]. Так, для геоцентрического участка она использовалась в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} &= -\frac{1}{r^3} x + \Phi_{xMoon} + \Phi_{xSun} + \Phi_{x2Zon}, \\ \frac{dV_y}{dt} &= -\frac{1}{r^3} y + \Phi_{yMoon} + \Phi_{ySun} + \Phi_{y2Zon}, \\ \frac{dV_z}{dt} &= -\frac{1}{r^3} z + \Phi_{zMoon} + \Phi_{zSun} + \Phi_{z2Zon}, \\ \frac{dx}{dt} &= V_x, \quad \frac{dy}{dt} = V_y, \quad \frac{dz}{dt} = V_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

В приведенных дифференциальных уравнениях используются безразмерные характеристики.  $x, y, z$  – компоненты геоцентрического радиус-вектора КА в эклиптической системе координат;  $r$  – величина этого радиус-вектора КА ( $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ );  $V_x, V_y, V_z$  – компоненты геоцентрической скорости КА в эклиптической системе координат;  $\Phi_{Moon\ x}, \Phi_{Moon\ y}, \Phi_{Moon\ z}$  – компоненты возмущающего ускорения от притяжения КА Луной;  $\Phi_{Sun\ x}, \Phi_{Sun\ y}, \Phi_{Sun\ z}$  – компоненты возмущающего ускорения от Солнца;  $\Phi_{x2Zon}, \Phi_{y2Zon}, \Phi_{z2Zon}$  – компоненты возмущающего ускорения от второй зональной гармоники земного потенциала,  $t$  – безразмерное время перелета.

Выражения для компонент возмущающего ускорения использовались такими. Компоненты лунного возмущающего ускорения:

$$\begin{aligned}
\Phi_{Moon x} &= \mu_{Moonb} \left( \frac{x_{Moon} - x}{r_{SC\_Moon}^3} - \frac{x_{Moon}}{r_{Moon}^3} \right); \\
\Phi_{Moon y} &= \mu_{Moonb} \left( \frac{y_{Moon} - y}{r_{SC\_Moon}^3} - \frac{y_{Moon}}{r_{Moon}^3} \right); \\
\Phi_{Moon z} &= \mu_{Moonb} \left( \frac{z_{Moon} - z}{r_{SC\_Moon}^3} - \frac{z_{Moon}}{r_{Moon}^3} \right).
\end{aligned} \tag{2.2}$$

В равенствах  $\mu_{Moonb}$  – безразмерная гравитационная постоянная Луны ( $\mu_{Moonb} = \frac{\mu_{Moon}}{\mu_{Earth}} = 0.01229985$ );  $x_{Moon}$ ,  $y_{Moon}$ ,  $z_{Moon}$  – компоненты радиус-вектора Луны относительно Земли,  $r_{Moon}$  – величина этого радиус-вектора ( $r_{Moon} = \sqrt{x_{Moon}^2 + y_{Moon}^2 + z_{Moon}^2}$ );  $r_{SC\_Moon}$  – величина радиус-вектора КА относительно Луны ( $r_{SC\_Moon} = \sqrt{(x - x_{Moon})^2 + (y - y_{Moon})^2 + (z - z_{Moon})^2}$ ).

Компоненты солнечного возмущающего ускорения:

$$\begin{aligned}
\Phi_{Sun x} &= \mu_{Sunb} \left( \frac{x_{Sun} - x}{r_{SC\_Sun}^3} - \frac{x_{Sun}}{r_{Sun}^3} \right); \\
\Phi_{Sun y} &= \mu_{Sunb} \left( \frac{y_{Sun} - y}{r_{SC\_Sun}^3} - \frac{y_{Sun}}{r_{Sun}^3} \right); \\
\Phi_{Sun z} &= \mu_{Sunb} \left( \frac{z_{Sun} - z}{r_{SC\_Sun}^3} - \frac{z_{Sun}}{r_{Sun}^3} \right);
\end{aligned} \tag{2.3}$$

В равенствах  $\mu_{Sunb}$  – безразмерная гравитационная постоянная Солнца ( $\mu_{Sunb} = \frac{\mu_{Sun}}{\mu_{Earth}} = 3.32946382 \cdot 10^5$ );  $x_{Sun}$ ,  $y_{Sun}$ ,  $z_{Sun}$  – компоненты радиус-вектора Солнца относительно Земли,  $r_{Sun}$  – величина этого радиус-вектора ( $r_{Sun} = \sqrt{x_{Sun}^2 + y_{Sun}^2 + z_{Sun}^2}$ );  $r_{SC\_Sun}$  – величина радиус-вектора КА относительно Солнца ( $r_{SC\_Sun} = \sqrt{(x - x_{Sun})^2 + (y - y_{Sun})^2 + (z - z_{Sun})^2}$ ).

Компоненты возмущающего ускорения от второй зональной гармоники земного потенциала [42]:

$$\begin{aligned}
\Phi_{x2Zon} &= \frac{\delta_{Earth} x}{r^5} \left( \frac{5z^2}{r^2} - 1 \right); \\
\Phi_{y2Zon} &= \frac{\delta_{Earth} y}{r^5} \left( \frac{5z^2}{r^2} - 1 \right); \\
\Phi_{z2Zon} &= \frac{\delta_{Earth} z}{r^5} \left( \frac{5z^2}{r^2} - 3 \right).
\end{aligned} \tag{2.4}$$

В приведенных соотношениях  $\delta_{Earth}$  – коэффициент, связанный со второй зональной гармоникой земного потенциала.

### ***2.1.2 Система уравнений, описывающих движение на селеноцентрическом участке траектории***

Движение на селеноцентрическом участке траектории анализируется с использованием системы, аналогичной приведенной системе дифференциальных уравнений. При этом центральным телом рассматривается Луна, а возмущающими телами являются Земля и Солнце.

Начальные условия для движения КА на селеноцентрическом участке (вектор положения КА и вектор его скорости) определяются с помощью соотношений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}(t_{geo+}) &= \mathbf{r}(t_{geo-}) + \mathbf{r}_{Moon}(t_{geo}); \\
\mathbf{V}(t_{geo+}) &= \mathbf{V}(t_{geo-}) + \mathbf{V}_{Moon}(t_{geo}).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

В приведенных равенствах:

$\mathbf{r}(t_{geo-})$  и  $\mathbf{V}(t_{geo-})$  – геоцентрический радиус вектор и геоцентрический вектор скорости КА в конце геоцентрического участка траектории;

$\mathbf{r}(t_{geo+})$  и  $\mathbf{V}(t_{geo+})$  – селеноцентрический радиус вектор и селеноцентрический вектор скорости КА в начале селеноцентрического участка траектории;

$\mathbf{r}_{Moon}(t_{geo})$  и  $\mathbf{V}(t_{geo})$  – геоцентрический радиус вектор и геоцентрический вектор скорости Луны в дату начала селеноцентрического участка траектории  $t_{geo}$ .

Так как исследование участков траектории проводится в различных безразмерных переменных, то правые части приведенных соотношений умножаются

на масштабные коэффициенты. Например, в первом соотношении, определяющем селеноцентрический радиус вектор КА, этот масштабный коэффициент равен 10. Отметим, что использование систем координат с параллельным расположением осей дает возможность обойтись без специальных матриц перехода.

## 2.2 Алгоритм определения начальных условий для интегрирования системы дифференциальных уравнений при старте с околоземной орбиты

Параметрами, определяющими траектории перелета к Луне, нами были выбраны дата старта ( $T_{st}$ ), долгота восходящего узла стартовой орбиты ( $\Omega$ ), аргумент широты точки старта ( $u_o$ ), величина радиуса апогея промежуточной орбиты ( $r_a$ ). При этом предполагается известным наклонение стартовой орбиты ( $i$ ). Приведем соотношения, которые позволяют вычислить начальные условия для интегрирования системы дифференциальных уравнений, описывающих лунный перелет. Использовался алгоритм со следующей последовательностью операций:

- Определяется большая полуось промежуточной орбиты

$$a = \frac{r_o + r_a}{2} \quad (\text{здесь } r_o - \text{ радиус низкой околоземной орбиты}).$$

- Определяется эксцентриситет промежуточной орбиты

$$e = \frac{r_a - r_o}{2a}.$$

- Определяется фокальный параметр промежуточной орбиты

$$p = a(1 - e^2).$$

- Определяется скорость (безразмерная) КА в начальной точке траектории перелета (в начальной точке промежуточной орбиты)

$$V_o = \frac{1+e}{\sqrt{p}}.$$

- Определяется косинус и синус наклонения промежуточной орбиты к плоскости эклиптики

$$\begin{aligned}\cos(i_{ecliptic}) &= \cos(\varepsilon)\cos(i) + \cos(\Omega)\sin(\varepsilon)\sin(i); \\ \sin(i_{ecliptic}) &= \sqrt{1 - \cos(i_{ecliptic})^2}\end{aligned}$$

(здесь  $\varepsilon$  – угол между плоскостью земного экватора и эклиптики на эпоху J2000).

- Определяется косинус и синус долготы восходящего узла промежуточной орбиты относительно плоскости эклиптики

$$\begin{aligned}\cos(\Omega_{ecliptic}) &= \frac{\cos(\Omega)\cos(\varepsilon)\sin(i) - \sin(\varepsilon)\cos(i)}{\sin(i_{ecliptic})}; \\ \sin(\Omega_{ecliptic}) &= \frac{\sin(\Omega)\sin(i)}{\sin(i_{ecliptic})}\end{aligned}$$

- Определяется геоцентрический радиус вектор КА в начальной точке траектории перелета

$$\mathbf{r}_o = r_o \begin{pmatrix} \cos(\Omega_{ecliptic})\cos(u) - \sin(\Omega_{ecliptic})\sin(u)\cos(i_{ecliptic}) \\ \sin(\Omega_{ecliptic})\cos(u) + \cos(\Omega_{ecliptic})\sin(u)\cos(i_{ecliptic}) \\ \sin(u)\sin(i_{ecliptic}) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

- Определяется геоцентрический вектор скорости КА в начальной точке траектории перелета (в начальной точке промежуточной орбиты)

$$\mathbf{V}_o = V_o \begin{pmatrix} -\cos(\Omega_{ecliptic})\sin(u) - \sin(\Omega_{ecliptic})\cos(u)\cos(i_{ecliptic}) \\ -\sin(\Omega_{ecliptic})\sin(u) + \cos(\Omega_{ecliptic})\cos(u)\cos(i_{ecliptic}) \\ \cos(u)\sin(i_{ecliptic}) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

В процессе интегрирования уравнений движения КА проводилась оценка текущих значений оскулирующих элементов орбиты. При этом использовались соотношения, приведенные в разделе 2.1 учебника [25] и в статье [81].

### 2.3 Алгоритм определения текущего положения точек либрации системы Земля-Луна и элементов оскулирующих геоцентрических орбит этих точек

Алгоритм определения геоцентрического радиус-вектора коллинеарных точек либрации L1 и L2 системы Земля – Луна [29] и их геоцентрических скоростей предлагается следующим.

Используя эфемеридное обеспечение DE-405, для текущей даты (JDt) определяется геоцентрический радиус-вектор Луны  $\mathbf{r}_{Moon}(JDt)$  и вектор её геоцентрической скорости  $\mathbf{V}_{Moon}(JDt)$ .

Определяется величина геоцентрического радиус-вектор Луны  $r_{Moon}$  и орт этого радиуса вектора:

$$\mathbf{r}_{Moon}^o = \frac{\mathbf{r}_{Moon}}{r_{Moon}}. \quad (2.8)$$

Используя скалярное произведение векторов, определяется величина (со знаком) радиальной компоненты геоцентрической скорости Луны:

$$V_{r Moon} = (\mathbf{r}_{Moon}^o, \mathbf{V}_{Moon}). \quad (2.9)$$

Вектор трансверсальной компоненты геоцентрической скорости Луны определяется с использованием векторной разности:

$$\mathbf{V}_{n Moon} = \mathbf{V}_{Moon} - V_{r Moon} \mathbf{r}_{Moon}^o. \quad (2.10)$$

Определяется величина трансверсальной компоненты геоцентрической скорости Луны, и угловая скорость геоцентрического радиус-вектора Луны:

$$V_{n Moon} = |\mathbf{V}_{n Moon}|; \quad \omega_{r Moon} = \frac{V_{n Moon}}{r_{Moon}}.$$

Определяется расстояния от барицентра системы Земля-Луна до центра Луны и центра Земли:

$$r_{B Moon} = r_{Moon} \frac{\mu_{Earth}}{\mu_{Earth} + \mu_{Moon}}; \quad r_{B Earth} = r_{Moon} \frac{\mu_{Moon}}{\mu_{Earth} + \mu_{Moon}}. \quad (2.11)$$

В приведенных соотношениях используются гравитационные постоянные Земли  $\mu_{Earth}$  и Луны  $\mu_{Moon}$ .

Безразмерное расстояние от барицентра системы Земля-Луна до точки либрации L1 ( $r_{B\_L1}$ ) находится как корень следующего алгебраического уравнения, в котором должны использоваться безразмерная угловая скорость радиус-вектора Луны, безразмерные  $r_{B\_Earth}$  и  $r_{B\_Moon}$ :

$$\omega_{r_{Moon}}^2 r_{B\_L1} - \frac{1}{(r_{B\_Earth} - r_{B\_L1})^2} + \frac{\mu_{Moon}}{\mu_{Earth} (r_{B\_Moon} - r_{B\_L1})^2} = 0. \quad (2.12)$$

Безразмерное расстояние от барицентра системы Земля-Луна до точки либрации L2 ( $r_{B\_L2}$ ) находится как корень другого алгебраического уравнения:

$$\omega_{r_{Moon}}^2 r_{B\_L2} - \frac{1}{(r_{B\_Earth} + r_{B\_L2})^2} - \frac{\mu_{Moon}}{\mu_{Earth} (r_{B\_Moon} - r_{B\_L2})^2} = 0. \quad (2.13)$$

При решении приведенных уравнений следует для точки либрации L1 находить такое решение приведенного уравнения, которое меньше величины безразмерного геоцентрического радиус-вектора Луны, то есть  $r_{B\_L2} < r_{Moon}$ . Напротив, для нахождения положения точки либрации L2 нужно учитывать, что  $r_{B\_L2} > r_{Moon}$ .

Геоцентрический радиус-вектор точек либрации находится с использованием следующего соотношения:

$$\mathbf{r}_L = r_L \mathbf{r}_{Moon}^o, \quad \text{где } r_L = r_{B\_Earth} + r_{BL} \quad (2.14)$$

Геоцентрический вектор скорости точек либрации находится с использованием следующего соотношения:

$$\mathbf{V}_L = \frac{r_L}{r_{Moon}} \mathbf{V}_{Moon}. \quad (2.15)$$

Используемые в анализе величины радиуса перигея и радиуса апогея оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации ( $r_{pL}$ ,  $r_{aL}$ ) определяются с так:

$$k = \frac{r_L}{r_{Moon}}; \quad V_{nL} = k V_{nMoon}; \quad p_L = (r_L V_{nL})^2; \quad h_L = |\mathbf{V}_L|^2 - \frac{2}{r_L}; \quad e_L = \sqrt{1 + h_L p_L}$$

$$r_{pL} = \frac{p_L}{1 + e_L}; \quad r_{aL} = \frac{p_L}{1 - e_L}.$$

В последних соотношениях используются фокальный параметр ( $p_L$ ), константа энергии ( $h_L$ ), эксцентриситет ( $e_L$ ) оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации.

#### 2.4 Алгоритм определения величин импульсов скорости в начальной и конечной точках траектории перелета

Определение величины разгонного импульса скорости (безразмерного) при старте с околоземной орбиты проводится с использованием следующего соотношения:

$$\Delta V_1 = \sqrt{\frac{2a - r_o}{a r_o}} - \frac{1}{\sqrt{r_o}}. \quad (2.16)$$

Здесь  $a$  - найденная выше большая полуось промежуточной орбиты.

При удовлетворении условия выполнения транспортной задачи (условие (1.1)) величина и направление второго импульса скорости, переводящего КА на круговую окололунную орбиту, однозначно определяется селеноцентрическим радиусом вектором  $\mathbf{r}_f$  и вектором селеноцентрической скорости КА  $\mathbf{V}_f$  в конечной точке траектории перелета. При этом алгоритм вычисления требуемой величины импульса скорости рассматривается следующим:

- Определяется орт селеноцентрического радиуса вектора КА

$$\text{ort } \mathbf{r}_f = \frac{\mathbf{r}_f}{|\mathbf{r}_f|}. \quad (2.17)$$



- Определяется (с использованием скалярного произведения векторов) вектор радиальной компоненты селеноцентрической скорости КА в конечной точке траектории перелета

$$\mathbf{Vr}_f = (\mathbf{V}_f, \mathbf{or}\mathbf{r}_f) \mathbf{or}\mathbf{r}_f. \quad (2.18)$$

- вектор трансверсальной компоненты селеноцентрической скорости КА в конечной точке траектории перелета

$$\mathbf{Vn}_f = \mathbf{V}_f - \mathbf{Vr}_f. \quad (2.19)$$

- величина импульса скорости при выходе на окололунную орбиту

$$\Delta V_{br} = \sqrt{|\mathbf{Vr}_f|^2 + \|\mathbf{Vn}_f\| - V_{cel}}^2 \quad (2.20)$$

В последнем соотношении  $V_{cel}$  – величина селеноцентрической круговой скорости на конечной окололунной орбите ( $V_{cel} = \frac{1}{\sqrt{r_f}}$ ).

Приведенный алгоритм позволяет найти требуемый импульс скорости при переходе на круговую окололунную орбиту без обеспечения её наклона. Для того, чтобы описать условия обеспечения требуемого наклона окололунной орбиты нужно перевести радиус-вектор КА и вектор его скорости КА в конечной точке перелета в экваториальную лунную систему координат. При этом появится и бинормальная компонента импульса скорости КА. В любом случае величина импульса скорости, переводящая КА на окололунную орбиту является функцией вектора скорости КА в конечной точке траектории перелета, которая определяется параметрами схемы перелета:  $\Delta V_{br} = \Delta V_{br}(T_{st}, r_a, \Omega, u_o, t_p)$ .

Сформулированную задачу можно рассматривать как задачу математического программирования в пространстве пяти выбираемых параметров, одного ограничения типа равенства и ограничений типа неравенства, обеспечивающих не столкновение КА с Луной и Землей и, возможно, с величиной склонения

селеноцентрического радиус-вектора КА относительно лунного экватора в конечной точке перелета (оно должно быть не больше наклона окололунной орбиты). Несмотря на то, что число выбираемых параметров существенно больше числа ограничений, попытки использовать стандартные методы решения задачи математического программирования (без использования свойств рассматриваемого маневра) оказались безуспешными.

### **3. МЕТОД ПРОЕКТИРОВАНИЯ НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ТРАЕКТОРИЙ ПЕРЕЛЕТА К ЛУНЕ**

#### **3.1 Методические идеи разработанного метода проектирования низкоэнергетических лунных перелетов**

Общая идея снижения энергетических затрат на перелет, связана с возможностью использования при перелете к Луне гравитационных возмущений в ограниченной задаче четырех тел (Земля-Луна-Солнце-КА). Прежде всего, траектория перелета должна быть выбрана так, чтобы солнечные гравитационные возмущения обеспечили подлет КА к окрестности Луны с небольшой величиной селеноцентрической скорости. Поэтому, на первом этапе работы были предприняты попытки оценивать гравитационные солнечные возмущения как функции относительного положения Солнца в момент запуска космического аппарата и элементов промежуточной орбиты, на которую переводится КА при старте с низкой околоземной орбиты. К сожалению, предпринятые попытки не дали положительного результата. По-видимому, существуют две причины этого:

- Дело в том, что сами солнечные возмущения очень большие. Поэтому использование методики, позволяющей оценивающей возмущения как квадратуры от функций, зависящих от элементов невозмущенной орбиты, оказываются некорректными.
- Одновременно с гравитационными солнечными возмущениями геоцентрическая траектория сильно возмущается и Луной. Имеет место наложение (интерференция) солнечных и лунных возмущений. Это затрудняет оценку солнечных возмущений.

Попытка рассматривать сформулированную задачу, как задачу математического программирования, и использовать локальные методы поиска её решения [20, 32, 95] без дополнительных предварительных исследований, не привели к положительному результату. Скорее всего, причина этого в большом числе локальных экстремумов. Число локальных экстремумов такое большое, что,

даже используя методы поиска, ориентированные на поиск глобального экстремума (например, генетические алгоритмы) [10, 40, 80, 92], не удастся справиться с решением задачи без выбора хорошего начального приближения. И основная идея предлагаемого метода – найти это начальное приближение, существенно сужая область возможных решений.

Основное предположение для определения этого начального приближения (и можно считать, предлагаемого метода) – сужение пространства перелетных траекторий. Вводится предположение, что КА попадает в окрестность Луны через «горловины» в окрестности точек либрации системы Земля–Луна  $L_1$  или  $L_2$ . Дополнительно предполагается, что при прохождении КА окрестности точки либрации радиус перигея и радиус апогея оскулирующей геоцентрической траектории близки к аналогичным элементам геоцентрической оскулирующей орбиты точки либрации. Идея такого предположения заключается в том, чтобы обеспечить прохождение горловины окрестности точки либрации («пробраться» в окололунное пространство) с небольшой величиной селеноцентрической энергии. Это может обеспечить временный захват КА Луной.

Введение таких ограничений можно объяснить и так. Из интеграла Якоби ограниченной задачи трех тел (Земля–Луна–КА) следует, что в рамках этой задачи КА может «проникнуть» в окрестность Луны через окрестность точки либрации. При этом вектор геоцентрической скорости КА должен быть близок вектору геоцентрической скорости точки либрации. Принципиально можно было пойти на вариант, когда ограничения вводились и на расстояния КА до точки либрации, и на компоненты вектора скорости. Останавливает от такой операции то обстоятельство, что тогда (при использованном подходе) пришлось бы сравнивать величины разной размерности (расстояние и скорость). Поэтому был выбран описанный вариант. В нем анализируется (минимизируется) сумма трех положительных величин одной размерности (трех расстояний):

$$J = \Delta r_L + |r_{SCp} - r_{Lp}| + |r_{SCa} - r_{La}|, \quad (3.1)$$

где первое слагаемое  $\Delta r_L$  есть расстояние КА от точки либрации (оно находится как разность геоцентрических векторов космического аппарата и точки либрации);  $r_{SCp}$  и  $r_{SCa}$  - радиус перигея и апогея оскулирующей геоцентрической орбиты космического аппарата;  $r_{Lp}$  и  $r_{La}$  - радиус перигея и апогея оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации.

Заметим, что в некоторых случаях может оказаться целесообразным не использовать модули в выражении введенного функционала  $J$ . Для этого можно изменить функционал, используя квадраты каждого из слагаемых.

Слагаемые функционала  $J$  зависят от четырех параметров схемы перелета  $T_{st}$ ,  $\Omega$ ,  $u_o$ ,  $r_a$ , определяющих условия движения космического аппарата после его старта с околоземной орбиты, и текущего времени движения КА  $t$ :  $J(T_{st}, \Omega, u_o, r_a, t)$ . На каждой траектории перелета существует такой момент времени  $t^*$ , когда  $J$  минимально. Обозначим это минимальное значение как  $I$  и будем называть суммарным промахом точки либрации:

$$I(T_{st}, \Omega, u_o, r_a) = \min_t J(T_{st}, \Omega, u_o, r_a, t), \quad (3.2)$$

Принципиально, есть возможность ввести в выражение для суммарного промаха и наклонение оскулирующей орбиты (контролировать не только оскулирующие радиусы перигея и апогея, но и наклонение оскулирующей орбиты). В настоящей работе эта возможность не использовалась. Причина этого заключается в том, что введенный суммарный промах есть сумма невязок нескольких расстояний. Введение в эту невязку расстояний невязку по наклонению (по углу) потребовало бы введение размерных «весовых» множителей, что может привести к дополнительным неопределенностям и сложностям.

Суммарный промах  $I$  является функцией четырех аргументов. Нахождение начального приближения для этих аргументов является важным элементом

разработанного метода. Опишем предлагаемый подход к нахождению начального приближения для аргументов функции  $I(T_{st}, \Omega, u_o, r_a)$ .

### **3.2 Определение начального приближения для долготы восходящего узла околоземной орбиты и аргумента широты точки старта с неё**

Определение начального приближения долготы восходящего узла околоземной стартовой орбиты и аргумента широты точки старта (двух параметров схемы перелета и аргументов суммарного промаха точки либрации) предлагается осуществить следующим образом. Считаем, что для рациональной траектории перелета справедливо следующее предположение: линия узлов начальной геоцентрической орбиты близка к линии узлов лунной орбиты. При выполнении этого условия уменьшается до минимума угол между плоскостью промежуточной орбиты и плоскостью лунной орбиты. Анализ показывает, что долгота восходящего узла лунной орбиты относительно плоскости земного экватора изменяется в относительно небольшом диапазоне ( $-13.4^\circ \dots +13.4^\circ$ ) с периодом 18.5 лет. За 2024 год долгота восходящего узла лунной орбиты изменяется от  $3.77^\circ$  до  $0.137^\circ$ , то есть в течение всего года она близка к нулю. Анализ долготы восходящего узла лунной орбиты дает возможность получить начальное приближение для долготы восходящего узла начальной околоземной орбиты. Для дат старта в 2024 году допустимо для выбираемого параметра схемы лунного перелета  $\Omega$  начальное приближение рассматривать равным нулю.

Обратим внимание и на то, что при таком выборе долготы восходящего узла начальной околоземной орбиты оказывается минимальным угол между плоскостью эклиптики и плоскостью промежуточной орбиты (угол наклона промежуточной орбиты к плоскости эклиптики). Это, в общем случае, приводит к увеличению возмущения промежуточной геоцентрической орбиты космического аппарата солнечным гравитационным ускорением.

Выбор начального приближения для широты точки старта с околоземной орбиты проводится так, чтобы гравитационное солнечное возмущающее ускорение могло сильно деформировать траекторию перелета КА. Начальное приближение для точки старта с околоземной орбиты целесообразным выбирать так, чтобы она находилась вблизи плоскости эклиптики. При этом апогей промежуточной орбиты будет находиться в плоскости эклиптики и при удачном выборе даты старта солнечные гравитационные возмущения будут предельно большими. Учитывая это обстоятельство, было принято решение о том, чтобы аргумент широты точки старта с околоземной орбиты отсчитывался от линии узлов околоземной орбиты относительно плоскости эклиптики. При таком определении этого параметра схемы перелёта ( $u_0$ ) как начальные приближения для него естественно рассматривать два значения:  $0^\circ$  и  $180^\circ$ .

Интересно и то, что, если долгота восходящего узла промежуточной орбиты выбрана нулевой, то аргументы широты точки старта, отсчитанный по отношению к плоскости земного экватора будет иметь те же значения ( $0^\circ$  и  $180^\circ$ ).

### **3.3 Использование прямого перебора двух параметров схемы перелета для нахождения областей их значений, обеспечивающих удовлетворение условий пролета точки либрации**

Серьезной проблемой при проектировании схем лунных перелетов является многоэкстремальность. Так попытка использовать подход, при котором используются методы поиска локального экстремума, как правило, не бывает удачной. Решение не обеспечивает нулевое значение невязки краевых условий. Процесс поиска «застревает» в локальном минимуме. При этом, чаще всего, не выполняются условия транспортной задачи. Или, если они выполняются, то требуемый импульс для перехода на окололунную орбиту оказывается большим, не соответствующим низкоэнергетической траектории перелета.

Чтобы преодолеть эту трудности идеальным является полный перебор в пространстве всех параметров схемы перелета (с малым шагом по каждому

параметру), нахождение таких наборов параметров, при котором транспортная задача решается с относительно неплохой точностью (таких наборов будет конечное небольшое число). Затем уточнять значения параметров каждого полученного набора, используя локальные методы. Современный компьютер позволить реализовать такой подход не в состоянии. Чтобы преодолеть описываемую трудность предлагается использовать такой подход.

Из четырех параметров, определяющих траекторию лунного перелета КА: дата старта  $T_{st}$ , радиус апогея орбиты КА после старта с низкой околоземной орбиты  $r_a$ , долгота восходящего узла околоземной орбиты  $\Omega$ , аргумент широты точки старта  $u_o$  выбираются два, рациональные значения которых трудно предвидеть. Этими параметрами рассматриваются  $T_{st}$  и  $r_a$ . Условно назовем эти параметры основными. Для остальных параметров выбирается конечное небольшое число наборов значений, описанных выше. Для основных параметров схемы перелета осуществляется полный перебор их значений из возможного диапазона. Дата старта варьируется во всем анализируемом диапазоне дат старта (например, годовом диапазоне) с достаточно малым шагом (например, один час). Радиус апогея орбиты КА после старта с низкой околоземной орбиты  $r_a$  варьируется в диапазоне 1...1.5 млн. км с шагом, например, 5 тыс. км. Для каждой точки плоскости параметров  $T_{st} - r_a$  при фиксированных значениях двух других параметров, выбранных из рациональных соображений, анализируется траектория КА и вычисляется значение суммарного промаха точки либрации  $I(T_{st}, \Omega, u_o, r_a)$ . Одновременно находится и время  $t_l$  максимального сближения КА с точкой либрации.

Анализ изолиний суммарного промаха точки либрации на плоскости  $T_{st} - r_a$  дает возможность найти такие даты старта и радиусы апогея промежуточной геоцентрической орбиты, при которых КА может достичь окрестность рассматриваемой точки либрации и при этом вектор скорости КА имеет такую величину и направление, что форма и размер оскулирующей геоцентрической



траектория КА близки к форме и размеру оскулирующей геоцентрической траектории точки либрации. Именно такие траектории рассматриваются как начальное приближение для низкоэнергетических перелетов. Дата достижения минимального суммарного промаха точки либрации  $t_l$  рассматривается как граничная точка геоцентрического и селеноцентрического участков траектории.

На дальнейших этапах анализа осуществляется переход к постановке, где суммарный промах точки либрации не анализируется, показателем решения транспортной задачи рассматривается достигнутая высота над лунной поверхностью. Требуемая высота обеспечивается с использованием локальных поисковых методов.

На конечном этапе анализа, когда удастся добиться заданной высоты КА над лунной поверхностью, используется метод проекции градиента, позволяющий итерационно улучшать параметры схемы перелета (по критерию затрат топлива), оставаясь на траектории, переводящей КА на окололунную орбиту заданной высоты.

### **3.4 Использование промежуточного импульса скорости как методическая идея метода проектирования низкоэнергетических схем лунного перелета**

При проектировании низкоэнергетических лунных перелетов был использован методический прием, связанный с введением в схему перелета промежуточного импульса скорости на траектории перелета ( $\Delta V_c$ ). Идея состояла в том, чтобы сделать более простым решение краевой задачи (удовлетворение условий транспортной задачи). При введении промежуточного импульса скорости размерность вектора выбираемых параметров схемы перелета увеличивается сразу на четыре единицы: (дата импульса скорости, его величина и направление, характеризуемое двумя углами). При этом сильно расширяется класс возможных траекторий перелета, и упрощается решение краевой задачи. При введении промежуточного импульса скорости предполагалось, что в итоговом решении его величина будет уменьшена до очень малых (бесконечно малых) величин и это введение рассматривалось как методический прием. В процессе анализа было

решено считать траекторией низкоэнергетического перелета и такие перелетные траектории, на которых промежуточный импульс скорости не бесконечно мал, а просто мал (например, равен 20...30 м/с), а сумма этого импульса  $\Delta V_c$  и импульса торможения у Луны меньше тормозного импульса скорости у традиционных прямых лунных перелетов.

Введение промежуточного импульса скорости предлагается проводить на границе геоцентрического и селеноцентрического участка перелета. При этом начальным приближением для даты сообщения промежуточного импульса скорости рассматривается дата достижения точки траектории с минимальным суммарным промахом точки либрации. То есть он вводится после нахождения траектории перелета, достигающей окрестности точки либрации с минимальным суммарным промахом. Эта траектория рассматривается как начальное приближение и при дальнейшем анализе не контролируется пролет окрестности точки либрации.

### **3.5 Численные методы, применяемые при проектировании траекторий перелета на окололунную орбиту**

В данном разделе диссертационной работы приведено описание численного алгоритма решения задачи поиска безусловного минимума скалярной функции векторного аргумента; описание численного алгоритма решения задачи поиска условного минимума, описание метода проекции градиента, использующегося для поиска условного минимума; также кратко представлено описание численного метода интегрирования уравнений движения космического аппарата.

#### ***3.5.1 Численное интегрирование уравнений движения***

Математическое моделирование движения КА в задачах механики космического полета естественным образом приводит нас к системам дифференциальных или же интегро-дифференциальных уравнений, которые в зависимости от типа конкретной рассматриваемой задачи могут быть записаны с использованием как обыкновенных, так и частных производных. В настоящей работе

ограничимся рассмотрением задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Система этих уравнений может быть представлена в следующем виде:

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(x, \mathbf{y}(x)). \quad (3.3)$$

Для системы вида (3.3) задача Коши может быть сформулирована следующим образом:

найти вектор-функцию вида

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x), \quad x \in [a, b],$$

Удовлетворяющую системе (3.3) и начальному условию

$$\mathbf{y}(a) = \mathbf{y}_0. \quad (3.4)$$

По-другому можно сказать, что требуется найти интегральную кривую вида  $y = y(x)$ , проходящую через заданную точку  $M(a, y_0)$ .

Многие авторы предлагают различные методы/алгоритмы численного решения задачи Коши для систем ОДУ вида (3.3) с требуемой точностью интегрирования [69, 70, 71, 72, 73, 74, 75].

Среди них, отдельно можно выделить семейство явных методов Рунге-Кутта с адаптивным выбором длины шага, использующих для контроля относительной точности интегрирования (в рамках каждой итерации метода) аппроксимационные коэффициенты большего или меньшего порядка по отношению к базовому. Подобная группа методов Рунге-Кутта носит название «вложенные» [50, 65]. Несмотря на общий рост числа арифметических операций по сравнению с методами, использующими иной механизм выбора шага, или же вовсе шаг постоянной длины [50, 65], рассматриваемая группа методов (в процессе численного интегрирования систем ОДУ вида (3.3)) обладает высокой эффективностью - как с точки зрения общей вычислительной устойчивости алгоритма, так и с точки зрения потребного количества итераций метода, т.к. адаптивный механизм выбора длины шага позволяет (в большинстве случаев) существенно увеличивать расстояние между

узлами сетки значений независимой переменной, оставляя его «необходимо малым» только в «узких» местах.

Группа методов Рунге-Кутты, построенных на идее, предложенной Дормандом и Принсом [50, 65] использует для оценки погрешности (на каждом шаге) решение  $y$ , соответствующее коэффициентам разложения меньшего порядка, а для получения решения  $y$  на следующем шаге – более высокого порядка.

В рамках настоящей диссертационной работы использовался алгоритм Дорманда и Принса Dorm853 [50, 65], реализующий явный вложенный метод Рунге-Кутты с базовым порядком равным восьмому.

### ***3.5.2 Численный алгоритм решения задачи безусловной оптимизации, основанный на модификации эволюционной стратегии с адаптацией матрицы ковариации***

В настоящей работе используется алгоритм модифицированной эволюционной стратегии с адаптацией матрицы ковариации (Covariance Matrix Adaptation-Evolution Strategy (CMA-ES)) для решения задачи поиска безусловного минимума [66, 75]. Реализация рассматриваемого метода представляет собой эвристический алгоритм [34] «нулевого порядка», основные шаги которого воспроизводят базовые процессы биологической эволюции, т.к. мутация и селекция. Данный метод не является *локальным* по своему построению, в отличие от, например, квазиньютоновских [9]; поэтому при его надлежащем использовании можно надеяться на возможность отыскания *глобального* экстремума целевой функции, даже в случае существенной многоэкстремальности последней. Помимо этого, рассматриваемый метод обладает еще одним немаловажным преимуществом, по сравнению с «классическими» методами и алгоритмами, использующими производные для построения локальных линейных или квадратичных аппроксимаций многообразия значений целевой функции (с целью определения пространства направлений убывания (или возрастания)): для его функционирования вовсе не требуется вычисление производных ввиду отсутствия необходимости построения последних (именно

«локальных аппроксимаций»). Поведение функции оценивается только исходя из ее значений, и при том – не локально. Это снимает требование к, вообще говоря, непрерывной дифференцируемости целевого функционала задачи на области определения задачи, что присуще подавляющему большинству классических алгоритмов. Это позволяет при практическом применении метода для решения отдельных задач оптимизации рассматривать *недифференцируемые* целевые функционалы; последнее широко используется в рамках настоящей работы.

Далее, приведем общее описание алгоритма CMA-ES и ряда его отдельных составляющих. Алгоритм предназначен для минимизации скалярной функции векторного аргумента  $f(\mathbf{x})$  вида:

$$f : \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \rightarrow y \in \mathbf{R}^1$$

Теперь кратко опишем основные шаги рассматриваемого численного алгоритма. Как уже было сказано ранее, в своей основе он воспроизводит основные процессы биологической эволюции. Наиболее важными из которых являются мутация и селекция. Их «модельное» воплощение и позволяет воспроизводить данные естественные процессы в ходе решения задачи оптимизации. При этом, как и в ходе анализа биологической эволюции, выявляется специальный общий признак, например, определяющий собой элемент фенотипа, изменение которого и отслеживается на протяжении нескольких поколений популяции некоторых особей. И с помощью «математического аналога» для процессов мутации, селекции и рекомбинации, в рамках рассматриваемого численного алгоритма реализуется процесс своего рода *направленной эволюции*. Естественно, при решении задач оптимизации в качестве подобного общего признака рассматривается значение целевой функции, которое в ходе направленной эволюции должно быть минимизировано или максимизировано. А в качестве особей популяции рассматриваются точки рабочего пространства анализируемой скалярной функции  $n$ -мерного векторного аргумента.

Итак, в процессе численного решения задачи поиска безусловного минимума скалярной функции векторного аргумента в рамках рассматриваемого алгоритма на каждой итерации генерируется популяция, состоящая из некоторого числа  $\lambda$  особей, и каждая особь представляет собой случайный вектор из области определения целевой функции. Для этого используется многомерное нормальное распределение:

$$\mathbf{x}^{(g+1)} \sim N(\mathbf{m}^{(g)}, \mathbf{C}^{(g)})$$

которое в свою очередь полностью определяется двумя параметрами математическим ожиданием случайного вектора  $\mathbf{m}^{(g)}$  и матрицей его ковариации  $\mathbf{C}^{(g)}$ . Последняя характеризует облако рассеяния для  $n$ -мерного случайного вектора, или говоря иными словами, определяет геометрические характеристики гиперэллипсоида рассеяния последнего. Итерационно изменяя определенным образом параметры  $\mathbf{m}^{(g)}$  и  $\mathbf{C}^{(g)}$  в процессе работы алгоритма, удается полностью воспроизвести направленную биологическую эволюцию, в результате которой исследуемый признак будет улучшен (т.е. будет найден экстремум целевой функции). При этом каждая следующая итерация алгоритма отвечает следующему поколению рассматриваемой популяции. С точки зрения численных методов оптимизации, параметры  $\mathbf{m}^{(g)}$  и  $\mathbf{C}^{(g)}$  непосредственно определяют нелокальный шаг в пространстве решения задачи, задавая его длину и направление. При построении алгоритма в процессе итерационного переопределения основных управляющих параметров последнего используются специальные соотношения. Так, для математического ожидания  $\mathbf{m}^{(g)}$  применяется следующая средневзвешенная оценка, в рамках которой анализируются значения целевой функции только лишь для некоторого числа  $\mu$  из  $\lambda$  ( $\mu < \lambda$ ) т.н. «элитных» особей, для которых на данном этапе эволюционного процесса (в текущем поколении) последние (значения целевой функции) оказались наилучшими.

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{m}^{(g)} &\rightarrow \mathbf{m}^{(g+1)} : \\
 \mathbf{m}^{(g+1)} &= \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i \cdot \mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)}, \\
 \omega_i &\geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i = 1, \\
 \omega_i &= \frac{\omega'_i}{\sum_{k=1}^{\mu} \omega'_k}, \quad \omega'_i = \ln(\mu + 0.5) - \ln(i).
 \end{aligned} \right\}$$

В приведенных соотношениях  $\omega_i$  – весовые коэффициенты. Для выявления элитных особей используется следующий простой алгоритм сортировки:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathcal{S}^{(g+1)} &= \bigcup_{j=1}^{\lambda} \mathbf{x}_j^{(g+1)}, \\
 \mathbf{x}_{1:\lambda}^{(g+1)} &= \arg \min_{\mathbf{x}_j^{(g+1)} \in \mathcal{S}^{(g+1)}} f(\mathbf{x}_j^{(g+1)}), \\
 \forall i : i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, i \leq \mu &\Rightarrow \\
 \mathcal{S}^{(g+1)} &= \mathcal{S}^{(g+1)} \setminus \{\mathbf{x}_{i-1:\lambda}^{(g+1)}\} \\
 \mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)} &= \arg \min_{\mathbf{x}_j^{(g+1)} \in \mathcal{S}^{(g+1)}} f(\mathbf{x}_j^{(g+1)}),
 \end{aligned} \right\}$$

Последний моделирует селекцию и играет важную роль в процессе закрепления и улучшения признака в процессе «эволюции». Для обновления ковариационной матрицы при смене поколения предлагается использовать следующее соотношение:

$$\left. \begin{aligned}
 \mathbf{C}^{(g+1)} &= (1 - c_{\text{cov}}) \mathbf{C}^{(g)} + c_{\text{cov}} \frac{1}{(\sigma^{(g)})^2} \mathbf{C}_{\mu}^{(g+1)} = \\
 &= (1 - c_{\text{cov}}) \mathbf{C}^{(g)} + c_{\text{cov}} \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i \mathbf{y}_{i:\lambda}^{(g+1)} \mathbf{y}_{i:\lambda}^{(g+1)\top}, \\
 \mathbf{y}_{i:\lambda}^{(g+1)} &= (\mathbf{x}_{i:\lambda}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)}) / \sigma^{(g)}.
 \end{aligned} \right\}$$

которое в общем на каждом шаге алгоритма определяет ковариацию значений случайного вектора в рамках его текущего облака распределения относительно значений, для которых было определено наилучшие  $\mu$  значений целевой функции. Т.е., говоря иными словами, итерационно (из поколения в поколение) определяется ковариация всех особей популяции относительно  $\mu$  т.н. «элитных» особей. Приведенные соотношения для  $\mathbf{m}^{(g+1)}$  и  $\mathbf{C}^{(g+1)}$  вместе и моделируют биологические процессы «направленной эволюции» - мутации, селекции и рекомбинации, а также закрепляют наследственный признак. С точки же зрения методов оптимизации, последние полностью определяют шаг алгоритма, который, окончательно может быть представлен следующим соотношением:

$$\mathbf{x}^{(g+1)}_j \sim \mathbf{m}^{(g)} + \sigma^{(g)} N(\mathbf{0}, \mathbf{C}^{(g)}), \quad j = 1.. \lambda$$

где  $\sigma^{(g)}$  – скалярный масштабирующий параметр, задающий в процессе «эволюции» величину гиперэллипсоида облака распределения случайного вектора. Данный параметр влияет на длину условного шага численного алгоритма, и в свою очередь может быть определен следующим образом (эвристическое соотношение):

$$\sigma^{(g+1)} = \sigma^{(g)} \exp \left( \frac{c_\sigma}{d_\sigma} \left( \frac{\|p_\sigma^{(g+1)}\|}{E\|N(\mathbf{0}, I)\|} - 1 \right) \right)$$

Схематично, «работу» численного метода оптимизации на каждом шаге СМА-ES можно продемонстрировать с помощью изображения, представленного на рисунке 3.1.



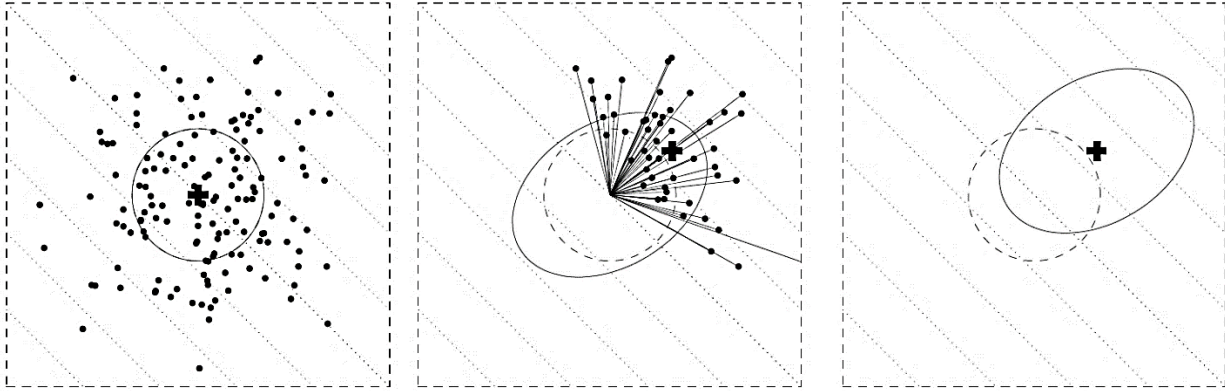


Рисунок 3.1 Обновление управляющих параметров распределения ( $m^{(g)}$ ,  $C^{(g)}$ ) в ходе базового шага алгоритма

На приведенных изображениях, построенных на плоскости изолиний целевой функции (линейной в рассматриваемом примере) показано: математическое ожидание (толстый «жирный» крестик) для набора признаков отдельных особей популяции (точки на графике); гиперэллипсоиды облака распределения случайного вектора (тонкие сплошные линии), определяющие форму данных эллипсоидов, отвечают равному значению плотности вероятности многомерного нормального распределения. На левой части рисунка показано первое поколение популяции, характеризующееся изотропным облаком распределения случайного вектора. В центре изображены процессы направленного смещения математического ожидания (селекции) и адаптации ковариационной матрицы (деформация эллипсоида распределения), основанные на информации о значениях целевой функции в точках, отвечающих «элитным» особям. Представлен механизм отслеживания *направлений*. В правой части рисунка изображены адаптированные параметры распределения, которые будут использованы при генерации фенотипа особей следующего поколения. Видно, что потомство элитных особей с большей вероятностью унаследует удачный набор признаков. При этом возрастет и число особей, девиация фенотипа которых скоррелирована с направлением убывания целевой функции.

Подводя некоторый итог к описанию алгоритма, можно сказать, что в процессе поиска минимума целевой функции он воспроизводит три базовых процесса биологической эволюции:

- **метизация** - выбор особей текущего поколения для генерации потомства;
- **мутация** - на этапе мутации особи подвергаются некоторым случайным независимым изменениям; величина этих изменений напрямую зависит от внутренних параметров алгоритма, среди которых в первую очередь следует отметить параметр масштабирования облака рассеяния —  $\sigma$ ;
- **селекция** – отбор особей, позволяющих обеспечить закрепление наследуемого признака при генерации следующего поколения

Численная реализация метода может быть упрощенно проиллюстрирована с помощью следующего «шаблона» алгоритма:

*Вход*:  $m \in R^n; \delta \in R_1; \lambda \in N \geq 2$ , обычно  $\lambda \geq 5$ ,  $\rightarrow (4 + [3 \log n])$

*Set*  $c_m = 1; c_1 \approx 2/n^2; c_\mu \approx \mu_0/n^2; c_c \approx 4/n; c_\sigma \approx 1/\sqrt{n}; d_\sigma \approx 1; \omega_{i=1.. \lambda}$

*уменьшение в  $i$  and  $\sum_i \omega_i = 1, \omega_i > 0$*   $\omega_{\mu+1}, \mu^{-1} = \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i^2 \approx \omega_i^2 \approx 3/\lambda$

*Инициализирование*  $C = I$ , and  $p_c = 0, p_\sigma = 0$

*При этом не прекращать*

$x_i = m + \sigma y_i$ , where  $y_i \sim N_i(0, C)$  for  $i = 1, \dots, \lambda$  *выборка*

$m \leftarrow m + c_m \sigma y_\omega$ , where  $y_\omega = \sum_{i=1}^{\mu} \omega_{rk(i)} y_i$  *обновление средние значение*

$p_\sigma \leftarrow (1 - c_\sigma) p_\sigma + \sqrt{1 - (1 - c_\sigma)^2} \sqrt{\mu_\omega} C^{\frac{1}{2}} y_\omega$  *путь для  $\sigma$*

$p_c \leftarrow (1 - C_c) p_c + 1_{[0, 2n]} \{ \|p_\sigma\| \} \sqrt{1 - (1 - C_c)^2} \sqrt{\mu_\omega} y_\omega$  *путь для  $C$*

$\sigma \leftarrow \sigma \times \exp \left( \frac{c_\sigma}{d_\sigma} \left( \frac{\|p_\sigma\|}{E \|N(0, 1)\|} - 1 \right) \right)$  *обновление  $\sigma$*

$C \leftarrow C + c_\mu \sum_{i=1}^{\lambda} \omega_{rk(i)} (y_i y_i^T - C) + c_1 (p_c p_c^T - C)$  *обновление  $C$*

На рисунке 3.2 приведена графическая интерпретация основных шагов алгоритма:

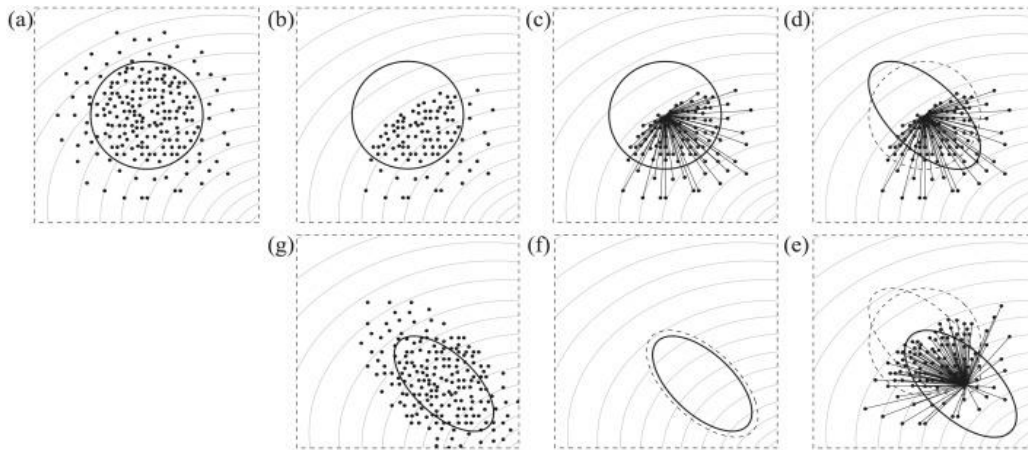


Рисунок 3.2 Основные процедуры алгоритма CMA-ES (a) генерирование облака распределения случайного вектора; (b) селекция «элитных» особей (c) вычисление ковариации случайного вектора  $y_{i,\lambda}^{(g)} = (\phi_{i,\lambda}^g - m^{g-1}) / \sigma^{(g-1)}$  (d) и как следствие этого, последующее обновление матрицы ковариации – т.е. изменение геометрической формы облака распределения (e); изменение математического ожидания облака распределения случайных векторов (f) масштабирование облака распределения (g)

В заключении описания алгоритма стоит отметить, что для повышения его устойчивости используется т.н. концепция «эволюционного пути»; за счет этого обеспечивается стабилизация и более плавное изменение матрицы ковариации на каждом шаге алгоритма, что позволяет избежать резких деформаций гиперэллипсоида облака распределения и как следствие этого – вырождения алгоритма, особенно в случае, когда форма облака распределения близка к  $n$ -мерной гиперсфере (отсутствие возможности выбора доминирующего направления поиска). Для этого авторы алгоритма предлагают использовать специальный вектор  $\mathbf{p}_c$ , реализующий концепцию «эволюционного пути» и «отслеживающий» направления шагов алгоритма по изменению математического ожидания облака распределения на предшествующих текущему поколениях популяции:

$$\mathbf{p}_c^{(g+1)} = (1 - c_c) \mathbf{p}_c^{(g)} + \sqrt{c_c (2 - c_c)} \mu_{eff} \frac{\mathbf{m}^{(g+1)} - \mathbf{m}^{(g)}}{\sigma^{(g)}}$$

Учитывая последнее, переопределить матрицу ковариации для генерации следующего поколения особей можно следующим образом:

$$C^{(g+1)} = (1 - c_{\text{cov}})C^{(g)} + c_{\text{cov}} \left( 1 - \frac{1}{\mu_{\text{cov}}} \right) \sum_{i=1}^{\mu} \omega_i \mathbf{y}_{i:\lambda}^{(g+1)} \left( \mathbf{y}_{i:\lambda}^{(g+1)} \right)^{\mathbf{T}} + \left. \begin{aligned} &+ \frac{c_{\text{cov}}}{\mu_{\text{cov}}} \mathbf{p}_C^{(g+1)} \left( \mathbf{p}_C^{(g+1)} \right)^{\mathbf{T}}, \end{aligned} \right\}$$

Рассматриваемый алгоритм прекрасно зарекомендовал себя при решении задачи построения низкоэнергетической перелётной траектории от Земли к Луне. Возможности алгоритма с точки зрения отыскания глобального минимума целевой функции в целом позволили регулярно строить траекторию искомого типа; к тому же применение последнего также сделало возможным рассмотрение не дифференцируемого функционала в качестве целевого критерия при решении вспомогательной задачи.

### ***3.5.3 Алгоритм решения задачи на условный минимум с использованием модифицированной эволюционной стратегии с адаптацией матрицы ковариации***

Для решения задачи на условный минимум на одном из этапов разработанного метода проектирования низкоэнергетической траектории используется идея штрафных функций. Метод штрафных функции представляет собой один из наиболее простых методов сведения задачи к задаче безусловной минимизации. Идея метода основана на преобразовании исходной задачи с ограничениями в последовательность задач безусловной оптимизации [5, 38].

Рассмотрим задачу определения минимума скалярной целевой функции  $f$  векторного аргумента  $x$  размерности  $n$ :  $\min f(x)$ , при ограничениях типа равенства

$$g(x) = 0. \quad (3.5)$$

Размерность вектора  $g$  полагаем равной  $m$ .

В соответствии с идеей метода штрафных функции исходную задачу условной оптимизации преобразуем в задачу безусловной оптимизации функции  $F$ :

$$\min F(x, k) = \min[f(x) + k g^*(x) g(x)] \quad (3.6)$$

В настоящей работе предлагается использовать модификацию эволюционной стратегии с адаптацией ковариационной матрицы для решения последовательности задач минимизации  $F$  как функции  $x$  при увеличивающихся значениях коэффициента  $k$ . При малых значениях коэффициента  $k$  точность удовлетворения ограничения (3.5) плохая. Этот коэффициент необходимо последовательно увеличивать до такого значения, при котором точность удовлетворения ограничения (3.5) оказывается достаточной.

### ***3.5.4 Метод проекции градиента и его использование при оптимизации траектории перелета на окололунную орбиту***

В начале раздела представим информацию о методе проекции градиента [12, 48], а затем опишем алгоритм его использования при проектировании траектории лунного перелета.

Рассмотрим задачу условной минимизации. Пусть вектор выбираемых параметров  $\mathbf{x}$  имеет размерность  $n$ . Этот вектор должен удовлетворять следующим ограничениям типа равенства:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0. \quad (3.7)$$

Размерность вектора  $\mathbf{g}$  равна  $m$  ( $m < n$ ). Требуется найти такой вектор параметров  $\mathbf{x}$ , который обеспечивал удовлетворения записанного векторного условия и минимизировал затраты, описываемые функцией  $f(\mathbf{x})$ :

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min. \quad (3.8)$$

Пусть найден некоторый вектор  $\mathbf{x}_0$ , такой, что ограничения удовлетворяются, то есть  $\mathbf{g}(\mathbf{x}_0) = 0$ . Обозначим градиент минимизируемой функции вектором в точке  $\mathbf{x}_0$   $f_x(\mathbf{x}_0)$ . Можно найти направление самого эффективного изменения вектора выбираемых параметров, при котором ограничения остаются выполненными, а

минимизируемая функция максимально быстро уменьшается. Можно показать (например, используя идею множителей Лагранжа), что направление наиболее эффективного изменения минимизируемой функции записывается следующим образом:

$$\frac{d \mathbf{x}}{d \tau} = -[\mathbf{E}_n - \frac{\partial g^*}{\partial \mathbf{x}} (\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial g^*}{\partial \mathbf{x}})^{-1} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}] \frac{\partial f^*}{\partial \mathbf{x}}. \quad (3.9)$$

В приведенном соотношении используется матрица производных функции ограничения  $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}$  по выбираемым параметрам задачи. Её размерность равна  $m \times n$  ( $m$  – количество строк матрицы,  $n$  – количество её столбцов). Верхний индекс в виде звезды означает операцию транспонирования матрицы. В соотношении используется и вектор столбец производных минимизируемой функции по выбираемым параметрам задачи.  $\mathbf{E}_n$  – есть единичная матрица размерности  $n$ . В правой части равенства используется операция обращения матрицы размерности  $m$ .

Равенство написано в виде дифференциального уравнения для вектора  $\mathbf{x}$  по независимому переменному (параметру  $\tau$ ). Оно дает направление наиболее эффективного изменения вектора выбираемых параметров.

Использование метода проекции градиента предполагает, что на каком-то этапе исследования, получен вектор  $\mathbf{x}$ , при котором удовлетворяется ограничения (3.7). То есть для рассматриваемой задачи удалось найти такую траекторию перелета, на которой обеспечивается попадание КА в произвольную точку окрестности Луны, удаленную от поверхности Луны на расстояние, равное высоте заданной окололунной орбиты. При этом за счет часто некоторого (возможно большого) импульса скорости можно перевести КА на заданную конечную орбиту. Использование метода проекции градиента может уменьшить (иногда существенно) требуемый для выведения импульс скорости.

В качестве минимизируемой функции может использоваться или величина импульса скорости, при переходе на окололунную орбиту, или суммарный импульс скорости, рассматриваемый как сумма величины импульса скорости при старте с околоземной орбиты и величины импульса скорости при переходе на окололунную орбиту.

В варианте, который использовался в расчетах, в качестве функции ограничений рассматривалась скалярная функция, характеризующая высоту КА над поверхностью Луны в конечной точке траектории перелета. Такой вариант интересен тем, в случае скалярной функции  $g(x)$  вычислительный процесс сильно упрощается. По крайней мере, не приходится выполнять операцию обращения матрицы  $(\frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g^*}{\partial x})^{-1}$ , что может сильно увеличить трудоемкость вычислений.

Компонентами вектора выбираемых параметров рассматривается уже анализируемые параметры схемы перелета:

$$\mathbf{x} = (T_{st} \ r_a, \Omega, u_o, t_2)^*$$

Высота КА над поверхностью Луны в конечной точке траектории перелета к Луне рассматривается, как функция выбираемых параметров:

$$H(T_{st} \ r_a, \Omega, u_o, t_2) = H^*.$$

Итерационный процесс был реализован с использованием системы дифференциальных уравнений в виде

$$\frac{d \mathbf{x}}{d \tau} = -[E_5 - \frac{\frac{\partial H^*}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial x}}{\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H^*}{\partial x}}] \frac{\partial \Delta V^*}{\partial x}.$$

В правой части последнего равенства используется  $E_5$  - единичная матрица размерности 5, произведение матриц размерности  $5 \times 1$  и  $1 \times 5$  (в числителе,

результатом является матрица размерности  $5 \times 5$ ), произведение матриц размерности  $1 \times 5$  и  $5 \times 1$  (в знаменателе, результатом является скаляр). Последний множитель в выражении справа есть вектор столбец производных требуемого импульса скорости (или суммарного импульса скорости) по выбираемым параметрам схемы перелета. Размерность этого вектора 5.

Входящие в приведенное выражение производные можно находить различными путями. Один из самых простых, но далеко неоптимальных методов является конечно-разностный метод. Например, метод центральных разностей. При этом для нахождения производных приходится по каждому из пяти выбираемых параметров дважды интегрировать уравнения движения, используемые в рамках задачи четырех тел. Затем получив производные осуществлять интегрирование по параметру  $t$ .

Более эффективным методом нахождения производных является использование аппарата комплексных чисел [39]. При таком подходе существенно повышается точность нахождения производных [82,85, 86,89, 104].

### **3.6 Этапы разработанного метода проектирования низкоэнергетической траектории перелета**

Разработанный метод проектирования низкоэнергетических траекторий лунного перелета предполагает последовательность операций, описанную в настоящем разделе. Учитывая возможность использования промежуточного импульса скорости, приведем эту последовательность для варианта использования этого импульса скорости и варианта без его использования.

#### ***3.6.1 Алгоритм проектирования низкоэнергетической траектории перелета на окололунную орбиту с использованием промежуточного импульса скорости***

Разработанный метод проектирования низкоэнергетических траекторий лунного перелета предполагает следующую последовательность операций.



На первом этапе находятся такие параметры схемы полета  $T_{st}$ ,  $r_a$ , которые обеспечивают попадание КА в окрестность точек либрации и минимальный суммарный промах этой точки. Конкретнее, задача этапа формулируется так: в пространстве двух из перечисленных параметров схемы перелета  $(T_{st}, r_a)$ , найти такой их набор, при котором минимален суммарный промах точки либрации  $I$ . При этом значения параметров  $\Omega$  и  $u_o$  не варьируются и принимаются равными значениям, приведенным в разделе 3.2.

Используется перебор параметров  $T_{st}$ ,  $r_a$ . Параметры перебираются с достаточно малым шагом, величина которых приведена в разделе 3.3. Для каждой пары значений этих параметров находятся условия движения КА в начальной точке траектории перелета и решается задача Коши для системы дифференциальных уравнений (2.1), описывающих геоцентрическое движение КА в ограниченной задаче 4-х тел. Находится такой момент времени  $t_1$ , когда суммарный промах минимален. Анализ зависимости от  $I(T_{st}, r_a)$  как функции  $T_{st}$  и  $r_a$  дает возможность выбрать относительно небольшое число дат старта для рассматриваемой эпохи и величин радиуса апогея промежуточной орбиты, используя которые есть возможность осуществить пролет окрестности точки либрации с попаданием в окрестность Луны. То есть в результате для рассматриваемой эпохи запуска находятся несколько пар значений этих параметров, при которых обеспечивается достаточно малое значение суммарного промаха. Эти даты  $T_{st}$  и значения параметра  $r_a$  для них рассматриваются как начальное приближение при поиске низкоэнергетических траекторий перелета. Для этого анализируется поочередно каждая из этих пар.

На следующем 2-ом этапе суммарный промах точки либрации  $I$  рассматривается, как функция четырех аргументов  $T_{st}$ ,  $r_a$ ,  $\Omega$ ,  $u_o$ . Находится безусловный минимум  $I$  как функции этих переменных (используется метод

локального поиска), а также время попадания КА в окрестность точки либрации  $t_1$ , соответствующее этому минимуму.

На третьем этапе выполняется уточнение траектории начального приближения. При этом рассматривается минимизация показателя  $J(T_{st}, r_a, \Omega, u_o, t_1)$  (3.1) как функция пяти его аргументов  $T_{st}, r_a, \Omega, u_o, t_1$ .

Далее траектория КА рассматривается состоящей из геоцентрического и селеноцентрического участков.

На следующем 4-ом этапе анализируется селеноцентрический участок траектории КА при найденных на предыдущем этапе параметрах схемы перелета (точнее, при найденных условиях движения в конечной точке геоцентрического участка траектории). Селеноцентрический участок траектории анализируется на относительно большом интервале времени (10 суток). Находится точка селеноцентрической траектории максимального сближения КА с Луной. Время максимального сближения КА с Луной рассматривается как оценка времени движения на селеноцентрическом участке траектории  $t_2$  (выбираемом параметре схемы перелета).

На 5-ом этапе в точке перехода от геоцентрического участка к селеноцентрическому участку вводится в рассмотрение промежуточный (корректирующий) импульс скорости. При этом пространство выбираемых параметров схемы перелета увеличивается на 5 единиц (величина импульса скорости  $\Delta V_c$ , его склонение  $\alpha$  и прямое восхождение  $\delta$ , время сообщения КА этого импульса скорости  $t_{geo}$  и время движения на селеноцентрическом участке  $t_2$ ). Таким образом, условие выполнения транспортной задачи трансформируется в условие:

$$H(T_{st}, r_a, \Omega, u_o, t_{geo}, \Delta V_c, \alpha, \delta, t_2) = H_f. \quad (3.10)$$

На рассматриваемом этапе находятся такие  $\Delta V_c$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $t_2$ , при которых КА подлетает к Луне на расстояние равное высоте околулунной орбиты. Остальные параметры схемы перелета (аргументы функции в (3.10)) не варьируются, при этом

$t_{geo}$  считается равным времени  $t_1$ , найденному на предыдущих этапах исследования. Задача формулируется как задача поиска безусловного минимума квадрата невязки краевого условия (3.10):

$$f(\Delta V_c, \alpha, \delta, t_2) = (H(T_{st}, r_a, \Omega, u_o, t_{geo}, \Delta V_c, \alpha, \delta, t_2) - H_f)^2, \quad (3.11)$$

как функции четырех параметров  $\Delta V_c$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $t_2$ . Алгоритм решения задачи базируется на использовании модифицированной эволюционной стратегии с адаптацией матрицы ковариации, описанный ниже в разделе 3.5.2. При этом возможны два случая. В одном из них удается получить такие параметры схемы перелета на селеноцентрическом участке, при которых рассматриваемая минимизируемая функция  $f$  (3.11) равна нулю (то есть краевое условие транспортной задачи выполнено). Во втором случае точность удовлетворения краевого условия недостаточна. В этом втором случае предлагается расширить вектор выбираемых параметров селеноцентрической траектории и включить в этот вектор время сообщения КА промежуточного импульса скорости. То есть рассматривать вектор выбираемых параметров таким:  $t_{geo}$ ,  $\Delta V_c$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $t_2$ . При этом квадрат невязки краевого условия (3.11) примет вид:

$$f(t_{geo}, \Delta V_c, \alpha, \delta, t_2) = (H(T_{st}, r_a, \Omega, u_o, t_{geo}, \Delta V_c, \alpha, \delta, t_2) - H_f)^2, \quad (3.12)$$

Предлагается осуществить поиск безусловного минимума функции  $f$  (3.12), используя модифицированную эволюционную стратегию с адаптацией матрицы ковариации.

На *следующем 6-ом этапе* вектор выбираемых параметров схемы перелета расширяется. В него включаются все аргументы функции  $H$ . То есть параметры:  $T_{st}$ ,  $r_a$ ,  $\Omega$ ,  $u_o$ ,  $t_{geo}$ ,  $\Delta V_c$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $t_2$ . Решается задача безусловной минимизации функции, представляющей собой сумму двух слагаемых. Первое слагаемое есть сумма величин промежуточного импульса скорости  $\Delta V_c$  и импульса скорости в конечной точке траектории перелета при переходе на окололунную орбиту  $\Delta V_{br}$ . Второе

слагаемое - квадрат невязки краевого условия с некоторым коэффициентом  $k$  (используется подход штрафной функции):

$$f(T_{st}, r_a, \Omega, u_o, t_{geo}, \Delta V_c, \alpha, \delta, t_2) = \Delta V_c + \Delta V_{br}(T_{st}, r_a, \Omega, u_o, t_{geo}, \Delta V_c, \alpha, \delta, t_2) + k(H(T_{st}, r_a, \Omega, u_o, t_{geo}, \Delta V_c, \alpha, \delta, t_2) - H_f)^2, \quad (3.13)$$

Величина импульса скорости при переходе на окололунную орбиту зависит от условий движения в конечной точке траектории перелета. Алгоритм её нахождения приведен выше в разделе 3.4. На рассматриваемом этапе для решения задачи безусловной минимизации функции (3.13), как и на предыдущем этапе, используется модифицированная эволюционная стратегия с адаптацией матрицы ковариации.

На *7-ом этапе* осуществляется уточнение параметров схемы перелета использование метода проекции градиента, описанного в разделе 3.5.4. При этом реализуется итерационный процесс уменьшение требуемой энергетики при постоянном удовлетворении условий транспортной задачи (обеспечивается постоянное достижение заданной высоты подлета относительно Луны). Критерием оптимизации рассматривается сумма величин промежуточного импульса скорости и импульса скорости при переходе на окололунную орбиту. Рассматриваемый этап может быть разбит на под этапы, которые различаются числом оптимизируемых параметров схемы перелета. От этапа к этапу это число увеличивается от 4 ( $\Delta V_c$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $t_2$ ) до 5 ( $t_{geo}$ ,  $\Delta V_c$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $t_2$ ) и, наконец, до 9 ( $T_{st}$ ,  $r_a$ ,  $\Omega$ ,  $u_o$ ,  $t_{geo}$ ,  $\Delta V_c$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  и  $t_2$ ).

На последнем этапе алгоритма из числа выбираемых параметров схемы перелета исключается величина промежуточного импульса скорости. Она итерационно уменьшается, Удовлетворение условия (3.10) обеспечивается выбором остальных аргументов функции. При этом возможен вариант, при котором не удастся довести промежуточный импульс скорости до нулевого значения. Такое решение может быть неплохим с точки зрения суммарного импульса скорости, то есть, если сумма промежуточного импульса и импульса, переводящего космический аппарат на окололунную орбиту, достаточно мала, то полученную траекторию перелета можно рассматривать низкоэнергетической.

### 3.6.2 Алгоритм проектирования низкоэнергетической траектории перелета на окололунную орбиту без промежуточного импульса скорости

В предыдущем разделе был рассмотрен алгоритм проектирования низкоэнергетической траектории перелета на окололунную орбиту с использованием промежуточного импульса скорости. При этом анализировались 9 выбираемых параметров схемы перелета. Практика показала, что в ряде случаев удастся найти траекторию низкоэнергетического перелета без введения промежуточного импульса скорости. Опишем алгоритм оптимизации траектории лунного перелета в такой постановке.

*Первые четыре этапа* для рассматриваемого варианта метода исследования не отличается от описанного выше варианта. В результате находятся такие параметры схемы перелета  $T_{st}$ ,  $r_a$ ,  $\Omega$ ,  $u_o$  и такой момент времени  $t_{geo}=t_1$ , которые обеспечивают попадание КА в окрестность точки либрации с минимальным суммарным промахом  $I$ , а также находится время движения на селеноцентрическом участке  $t_2$ , при котором удаление КА от Луны минимально.

*На пятом этапе* траектория КА рассматривается состоящей из геоцентрического и селеноцентрического участков. На этом этапе в пространстве 5 параметров схемы перелета  $(\Omega, u_o, r_a, T_{st}, t_2)$  находится траектория, на которой КА подлетает к Луне на требуемую высоту конечной окололунной орбиты. Алгоритм использует нахождение безусловного минимума квадрата ошибки требуемой высоты над поверхностью Луны

$$f(tT_{st}, r_a, \Omega, u_o, t_2) = (H(T_{st}, r_a, \Omega, u_o, t_2) - H_f)^2. \quad (3.14)$$

При нахождении безусловного минимума используется модификация эволюционной стратегии с адаптацией матрицы ковариации (раздел 3.5.2). Итогом этапа является траектория перелета к Луне с выводением КА на окололунную орбиту заданной высоты и величина требуемого импульса скорости при переходе на

окололунную орбиту. Этот импульс скорости вычисляется с использованием соотношений раздела 2.4.

На следующем 6-ом этапе анализируется задача на условный минимум в пространстве 5-ти параметров схемы перелета ( $\Omega, u_o, r_a, T_{st}, t_2$ ). Минимизируется требуемый импульс скорости для перехода с перелетной орбиты на конечную окололунную орбиту или суммарный импульс скорости. При этом используется алгоритм решения задачи на условный экстремум, описанный в разделе 3.5.3.

На последнем 7-ом этапе проводится уточнение полученной траектории перелета. Используется метод проекции градиента (раздел 3.5.4), позволяющий уменьшать рассматриваемый критерий оптимизации, постоянно удовлетворяя условия транспортной задачи. Анализируется полный набор параметров схемы перелета:  $\Omega, u_o, r_a, T_{st}, t_2$ .

## 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ И АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ

В этой главе проводятся результаты численного анализа траектории низкоэнергетического перелета на низкую окололунную орбиту с использованием разработанного метода. Рассматривается задача перелета КА на круговую окололунную орбиту высотой 100 км с околоземной орбиты высотой 200 км и наклоном  $51.6^\circ$ . Эпоха старта 2024 год. Наклонение окололунной орбиты не фиксируется.

Критерием оптимизации рассматривается тормозной импульс скорости, требуемый для перевода КА с подлетной к Луне траектории на круговую окололунную орбиту в варианте отсутствия промежуточного импульса скорости; или сумму величин тормозного и промежуточного импульса скорости, когда промежуточный импульс скорости существует и не равен нулю.

Первый раздел настоящей главы посвящен иллюстрации работы разработанного метода проектирования низкоэнергетической траектории лунного перелета. В нем последовательно описаны основные этапы метода на примере конкретной проектируемой траектории. Затем будут проанализированы полученные низкоэнергетические траектории перелета.

### 4.1 Анализ этапов нахождения низкоэнергетической траектории лунного перелета

#### *4.1.1 Этап 1. Нахождение траектории достижения КА окрестности точки либрации с удовлетворением условий на характеристики оскулирующей геоцентрической орбиты*

В соответствии с разработанным методом важным этапом исследования является нахождение начального приближения траектории перелета. В качестве такой траектории анализируется траектория, которая проходит через окрестность точки либрации системы Земля-Луна и в момент прохождения этой окрестности геоцентрическая скорость КА должна оказаться такой, что форма и размер геоцентрической оскулирующей траектории КА были близки к форме и размеру

геоцентрической оскулирующей траектории точки либрации. Для численного анализа была выбрана точка либрации L2 системы Земля - Луна. Для траектории начального приближения была выбрана нулевая долгота восходящего узла окололунной орбиты, а аргумент широты точки старта, отсчитанный от плоскости эклиптики считался равным нулю.

При этом минимизация введенного выше показателя (3.2)  $I(T_{st}, \Omega, u_o, r_a)$ , которая обеспечивает пролет точки либрации с удовлетворением введенных условий, сводится к минимизации этого показателя как функции двух его аргументов  $T_{st}, r_a$ . Анализ  $I(T_{st}, r_a)$  как функции  $T_{st}$  и  $r_a$  осуществлялся полным перебором аргументов с достаточно малым шагом. Дата старта  $T_{st}$  рассматривалась в диапазоне одного года (2024 год) с шагом 1 час (8760 значений), высота апогея промежуточной орбиты  $r_a$  рассматривалась в диапазоне от 1 млн км до 1.5 млн км с шагом 5 тыс. км (100 значений). То есть было проанализировано 876 тысяч траекторий.

На рисунке 5.1 представлены изолинии анализируемого показателя  $I(T_{st}, r_a)$  как функции даты старта в 2024 году (ось абсцисс) и радиуса апогея промежуточной геоцентрической орбиты  $r_a$  (ось ординат). Приведен диапазон дат старта в первые 122 суток 2024 года. Числа по оси абсцисс - час даты старта, отсчитанный от 0 часов 1 января 2024 года. Числа по оси ординат – величина  $r_a$  в млн. км. Диапазон значений функции  $I(T_{st}, r_a)$  на рассматриваемой плоскости аргументов оказался таким: минимальная величина 9.5 тысяч км, максимальная величина 13.1 млн. км. Поместить значения показателя на изолиниях оказалось затруднительным, поэтому на графике, представленном в нижней части рисунка цветом выделены области различных значений анализируемой функции. Фиолетовые области соответствуют минимальным значениям функции  $I(T_{st}, r_a)$ , красные области соответствуют максимальным значениям этой функции.



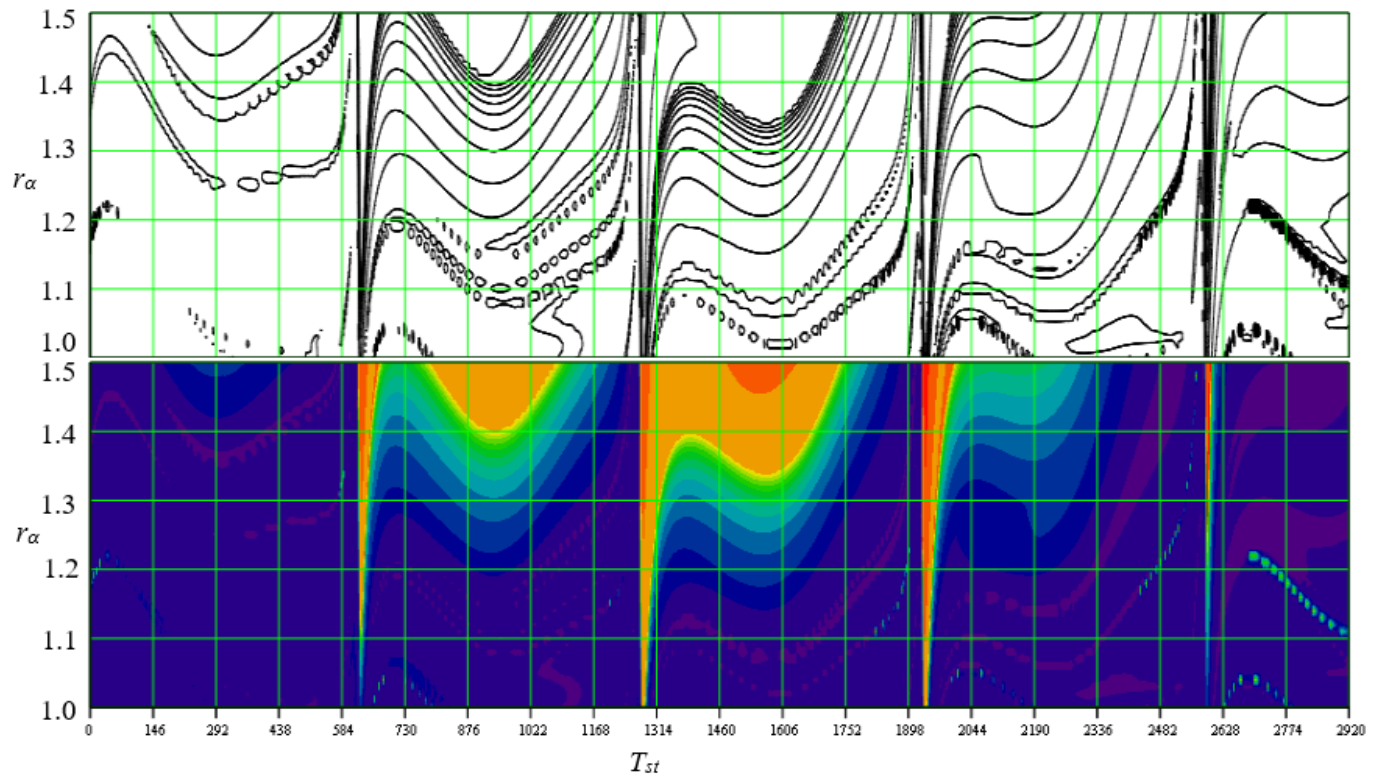
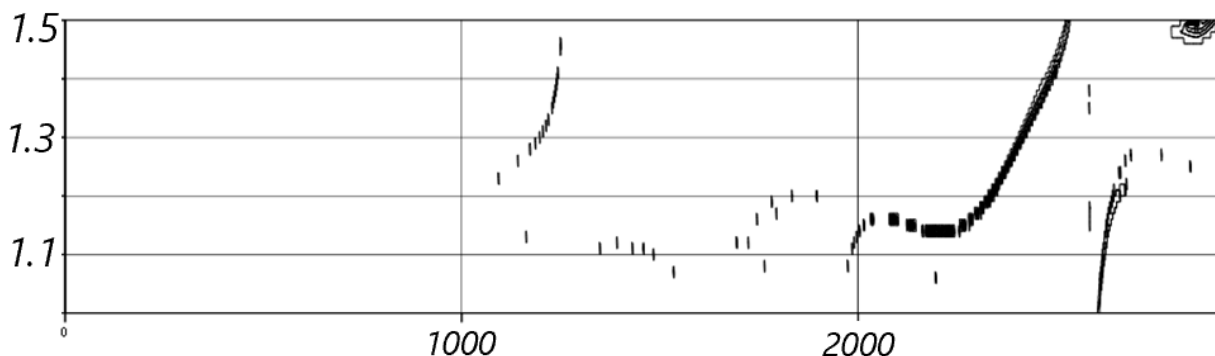


Рис. 4.1 – Изолинии величины как функции даты старта (ось абсцисс, первые 2920 часов 2024 года) и параметра  $r_\alpha$  (ось ординат, диапазон от 1 до 1.5 млн. км)

Анализ изолиний показал, что для рассматриваемого 2024 года существует несколько областей рассматриваемой плоскости даты старта и параметра  $r_\alpha$ , используя которые можно обеспечить попадание КА в окрестность точки либрации так, чтобы форма и размер оскулирующей геоцентрической орбиты КА близки к форме и размеру оскулирующей орбиты точки либрации. Считаем целесообразным исследовать каждую из этих областей на возможность реализации низкоэнергетического лунного перелета.

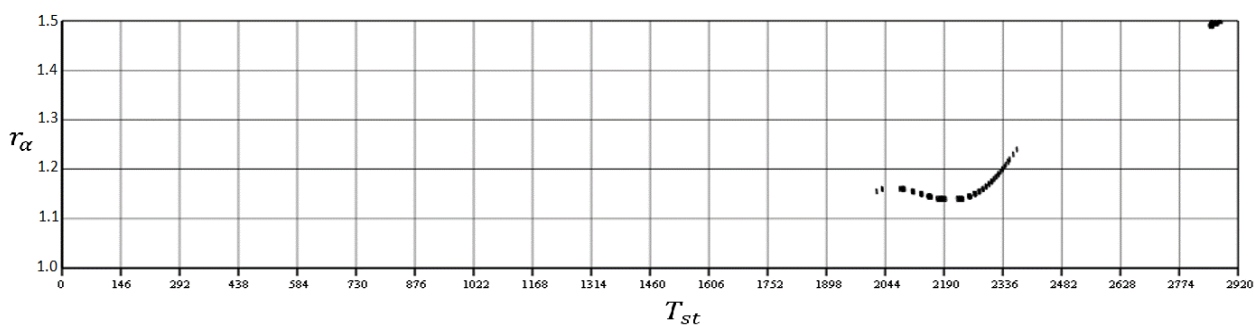
Для выделения интересных для реализации низкоэнергетических перелетов на рисунках 4.2 и 4.3 на той же плоскости параметров схемы перелеты показаны только изолинии функции  $I$ , на которых значения  $I$  меньше 300 тысяч км (рисунок 4.2) и меньше 100 тысяч км (рисунок 4.3). Последний рисунок позволяет выделить области рассматриваемой плоскости, для которых КА на траектории перелета попадает в

окрестность точки либрации с кинематическими характеристиками, позволяющими



попасть в окрестность Луны с относительно малой селеноцентрической энергией.

Рис. 4.2 – Изолинии величины  $I$  (меньшей, чем 300 тысяч км) как функции даты старта (ось абсцисс, первые 2920 часов 2024 года) и параметра  $r_\alpha$  (ось ординат,



диапазон от 1 до 1.5 млн. км)

Рис. 4.3 – Изолинии величины  $I$  (меньшей, чем 100 тысяч км) как функции даты старта (ось абсцисс, первые 2920 часов 2024 года) и параметра  $r_\alpha$  (ось ординат, диапазон от 1 до 1.5 млн. км)

Из рисунка 4.3 видно, что целесообразно рассмотреть даты старта в конце марта и первой половине апреля рассматриваемого года (в диапазоне с 2000 часа по 2400 часов, отсчитываемых от 0 часов 1 января 2024 года). Минимальное значение показателя  $I$  (38.58 тыс. км) в этом диапазоне параметров схемы перелета достигается при дате старта 29 марта 2024 года (88.875 сутки или 2133 часа от 0

часов 2024 года) и радиусе апогея промежуточной орбиты 1.15 млн. км. При этом время перелета в окрестность точки либрации оказывается равным 92.95942 суток.

Приведём значения, отдельных слагаемых функции  $I$ : расстояние КА от точки либрации 25.15 тыс. км; радиус перигея оскулирующей геоцентрической траектории КА меньше на 9.55 тыс. км радиуса перигея оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации; радиус апогея оскулирующей геоцентрической траектории КА больше на 3.88 тыс. км радиуса апогея оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации. Предлагаемый алгоритм предполагает исследовать все полученные из анализа рациональные диапазоны дат старта.

#### ***4.1.2 Этап 2. Уточнение траектория начального приближения. Минимизация показателя $I(T_{st}, \Omega, u_o, r_a)$ как функции его четырех аргументов***

На следующем этапе анализа показатель  $I(T_{st}, \Omega, u_o, r_a)$  рассматривается как функция её четырех аргументов. Осуществляется поиск безусловного минимума этой функции. Для чего используется поиск локального минимума в окрестности аргументов, найденных на предыдущем этапе. Значения параметров схемы перелета в анализируемом случае оказались следующими:

- дата старта 29 марта 2024 года (88.8732273 сутки или 2132.9574561 часа от 0 часов 2024 года);
- радиус апогея промежуточной орбиты 1.14998567 млн. км;
- долгота восходящего узла -  $4.6226037 \cdot 10^{-3}$  град;
- аргумент широты точки старта (относительно плоскости эклиптики)  $-0.0147334^\circ$ .

Значение показателя  $I(T_{st}, \Omega, u_o, r_a)$  при найденных аргументах этого показателя оказалось равным 36.107 тыс. км.

### **4.1.3 Этап 3. Уточнение траектория начального приближения.**

#### **Минимизация показателя $J(T_{st}, \Omega, u_o, r_a, t_1)$ как функции его пяти аргументов**

На следующем этапе вместо показателя  $I(T_{st}, \Omega, u_o, r_a)$  анализируется показатель  $J(T_{st}, \Omega, u_o, r_a, t_1)$  (4.1), который является функцией 5 аргументов. Находится локальный минимум этого показателя в окрестности полученного на предыдущем этапе набора параметров схемы перелета. Значения параметров схемы перелета в анализируемом случае оказались следующими:

- дата старта 29 марта 2024 года (88.8732583 сутки или 2132.9581981 часа от 0 часов 2024 года);
- радиус апогея промежуточной орбиты 1.14998584 млн. км;
- долгота восходящего узла -  $1.5138708 \cdot 10^{-3}$  град;
- аргумент широты точки старта -  $3.2317576 \cdot 10^{-3}$  град;
- время перелета до окрестности точки либрации ( $t_l$ ) оказалось равно 92.9999864 суток.

Значение показателя  $J(T_{st}, \Omega, u_o, r_a, t_1)$  при найденных аргументах этого показателя оказалось равным 35.359 тыс. км. Величина отдельных слагаемых рассматриваемого показателя  $J$  такова: расстояние КА от точки либрации 23.6 тыс. км; радиус перигея оскулирующей геоцентрической траектории КА меньше на 11.3 тыс. км радиуса перигея оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации; радиус апогея оскулирующей геоцентрической траектории КА больше на 439 км радиуса апогея оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации.

Характеристики, полученной траектории перелета показаны на нескольких следующих графиках. На рисунке 4.4 показана в пространстве геоцентрическая траектория КА (черная линия) и геоцентрическая орбита Луны (синяя линия). Траектория начинается в непосредственной окрестности Земли и заканчивается в

окрестности орбиты Луны (точнее в окрестности точки либрации L2 Луны).  
Плоскость x-y параллельна плоскости эклиптики.

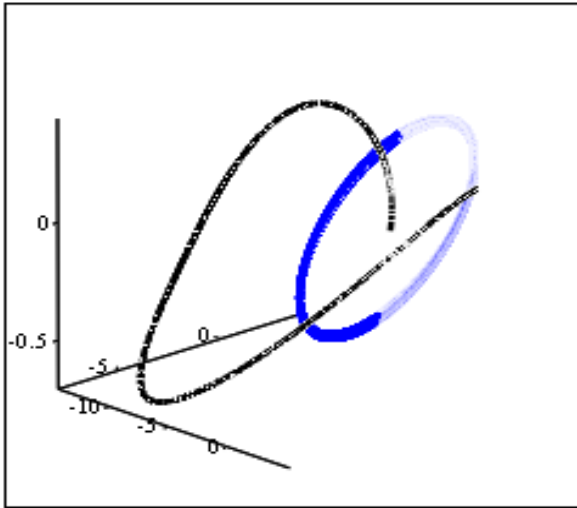


Рис. 4.4 – Пространственная траектория перелета КА в окрестность точки либрации L2 системы Земля-Луна

Проекция этой траектории на плоскость эклиптики x-y и на плоскость z-y показаны на рисунке 4.5. На рисунке большим синим кружочком показана Земли, орбита Луны показана синей линией, траектория КА показана черной линией. Синий квадрат – положение Луны в момент, окончания рассматриваемого участка траектории перелета КА. Красный треугольник положение точки либрации L2 в этот момент времени. В рамках рассматриваемого масштаба траектория КА практически заканчивается в точке либрации. Максимальное удаление КА от Земли на траектории перелета составляет 1.395 млн. км. Обратим внимание на то, радиус апогея промежуточной орбиты немного меньше 1.15 млн. км. То есть солнечные возмущения обеспечили значительное увеличение удаления КА от Земли на траектории перелета.

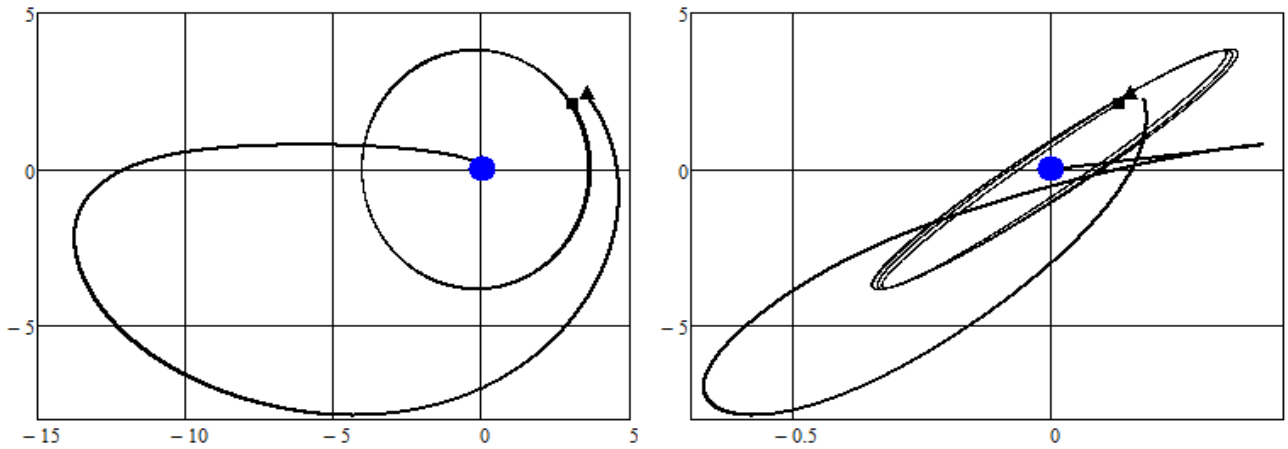


Рис. 4.5 – Проекция на плоскость эклиптики (x-y, левый рисунок) и плоскость z-y (правый рисунок)-траектории перелета КА в окрестность точки либрации L2 системы Земля-Луна. Орбита Луны показана круговой линией, положение Луны и точки либрации L2 в момент окончания перелета показаны квадратом и треугольником соответственно. Масштаб по осям 100 тыс. км

На рисунке 4.6 показана селеноцентрическая константа энергии как функция времени перелета вдоль траектории перелета КА в окрестность точки либрации L2 системы Земля-Луна. На правом рисунке в крупном масштабе показано изменение этой константы на последних 5 сутках перелета. Видно, что рассматриваемая константа становится отрицательной на 88 сутки перелета и продолжает монотонно убывать при приближении КА к точке либрации. На этом временном интервале оскулирующая селеноцентрическая орбита КА является эллиптической. Можно считать, что имеет место временный захват КА Луной. Такое свойство является необходимым условием реализации траектории низкоэнергетического перелета.

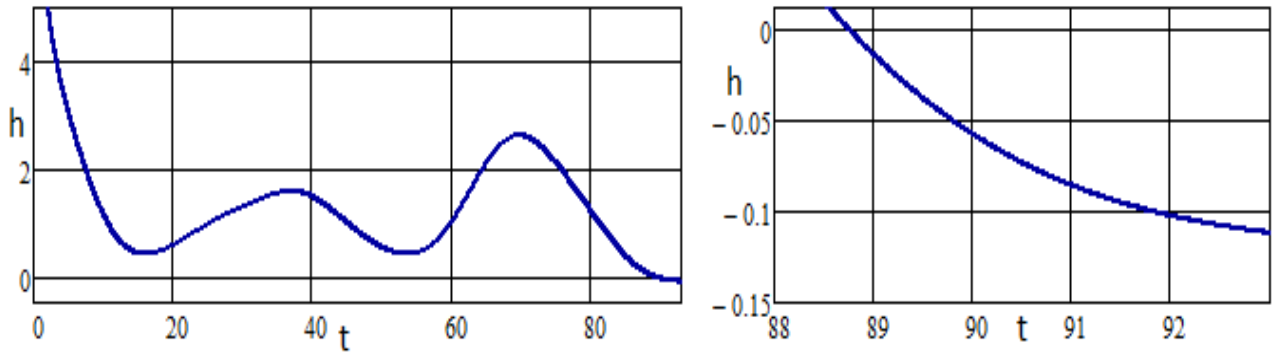


Рис. 4.6 – Изменение селеноцентрической константы энергии (км<sup>2</sup>/с<sup>2</sup>) вдоль траектории перелета КА в окрестность точки либрации L2 системы Земля-Луна. Левый рисунок – вдоль всей траектории перелета, правый рисунок на последних пяти сутках перелета. Ось абсцисс – время перелета в сутках.

#### **4.1.4 Этап 4. Анализ селеноцентрической части траектории КА при найденных на предыдущем этапе характеристиках схемы перелета**

На следующем этапе анализа исследуется селеноцентрическая часть траектория КА. Начальные условия для интегрирования уравнений движения на селеноцентрическом участке (селеноцентрический радиус вектор КА  $\mathbf{r}_{SC\_Moon}(t_1)$  и его селеноцентрическая скорость  $\mathbf{V}_{SC\_Moon}(t_1)$ ) находятся, используя геоцентрические условия движения КА в момент  $t_1$ :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{SC\_Moon}(t_1) &= \mathbf{r}_{SC\_Earth}(t_1) - \mathbf{r}_{Moon}(t_1); \\ \mathbf{V}_{SC\_Moon}(t_1) &= \mathbf{V}_{SC\_Earth}(t_1) - \mathbf{V}_{Moon}(t_1).\end{aligned}\quad (4.1)$$

В приведенном соотношении  $\mathbf{r}_{SC\_Earth}(t_1)$  - геоцентрический радиус вектор КА в момент  $t_1$ ,  $\mathbf{V}_{SC\_Earth}(t_1)$  - вектор геоцентрической скорости КА в момент  $t_1$ ,  $\mathbf{r}_{Moon}(t_1)$  и  $\mathbf{V}_{Moon}(t_1)$  - геоцентрические вектора положения и скорости Луны в момент  $t_1$ .

Система уравнений движения КА на селеноцентрическом участке интегрируется при полученных на предыдущем этапе анализа начальных условиях на относительно большом временном интервале. Этот интервал был выбран равным

10 суток. Анализируется расстояние КА от Луны на анализируемом селеноцентрическом участке траектории перелета. На рис. 4.7 показано изменение величины селеноцентрического радиуса вектора КА на анализируемом участке траектории перелета.

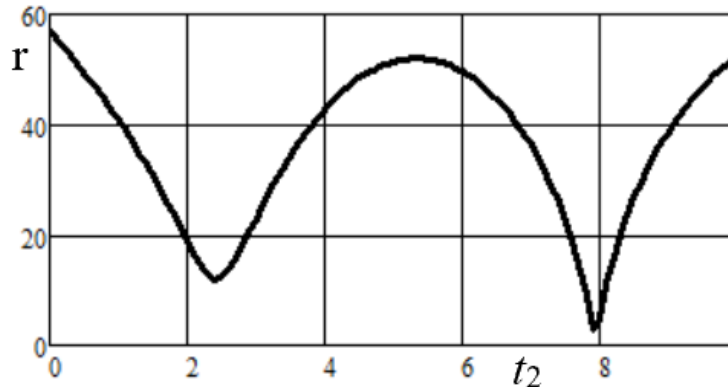


Рис. 4.7 – Изменение величины селеноцентрического радиуса вектора КА на селеноцентрическом участке траектории перелета (тысячи км) для полученных параметров схемы перелета как функция времени перелета на селеноцентрическом участке (сутки)

Из рисунка видно, что селеноцентрический радиус вектор КА изменяется не монотонно. На рассматриваемом временном интервале КА дважды приближается к Луне. При первом сближении селеноцентрический радиус вектор КА равен 15914.6 км, при втором сближении КА с Луной минимальный селеноцентрический радиус вектор КА равен 3295.4 км. Принципиально следует рассматривать возможность выхода КА на окололунную орбиту и при первом, и при втором сближении КА с Луной. Приведем анализ для варианта первого сближения КА с Луной.

При этом варианте минимальная высота КА над лунной поверхностью 14176.6 км. Такая величина радиуса вектора достигается на 2.60 сутки селеноцентрического перелета. В дальнейшем время движения КА на селеноцентрическом участке будем обозначать  $t_2$ .

Очень важным представляется характер изменения константы энергии селеноцентрической оскулирующей орбиты на селеноцентрическом участке траектории. На рис. 4.8 (левый рисунок) показана эта зависимость. Видно



немонотонное изменение этой константы. Но важно, что она остается отрицательной на всем рассматриваемом участке траектории и в итоге уменьшается до значения  $-0.196 \text{ км}^2/\text{с}^2$ . Справа на рисунке показано изменение этой же константы на всей траектории перелета. Пунктирная линия соответствует геоцентрическому участку траектории, сплошная линия – селеноцентрическому участку траектории. Ещё раз отметим, что селеноцентрическая константа энергии стала отрицательной ещё до подлета КА к окрестности точки либрации на геоцентрическом участке траектории.

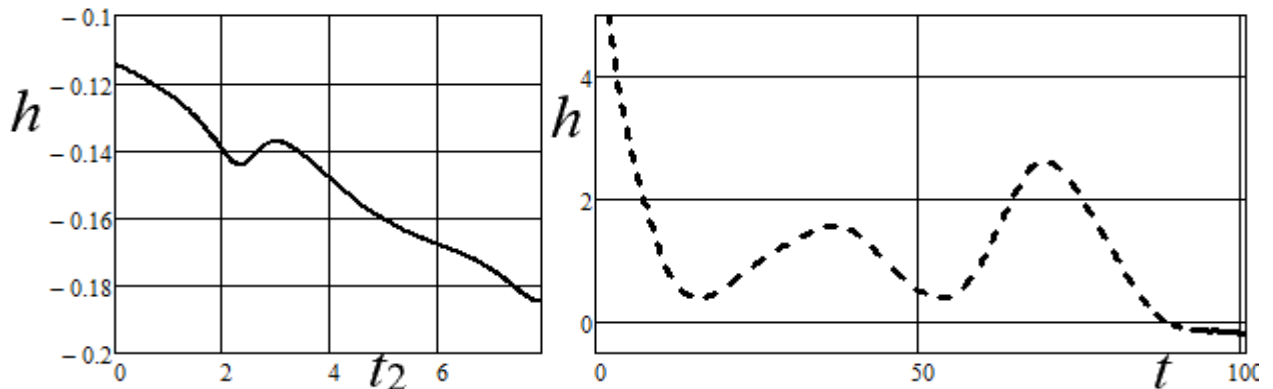


Рис. 4.8 – Изменение селеноцентрической константы энергии оскулирующей орбиты КА на селеноцентрическом участке перелета (левый рисунок,  $\text{км}^2/\text{с}^2$ ) как функция времени перелета на селеноцентрическом участке (сутки). Справа показано изменение этой же константы на всей траектории перелета.

Для объяснения такой сложной зависимости селеноцентрической константы энергии целесообразно рассмотреть возмущающие гравитационные ускорения от Земли и Солнца на рассматриваемом селеноцентрическом участке перелета. На рисунке 4.9 приведены три проекции этих возмущающих ускорений. Прежде всего, обратим внимание на то, что гравитационные солнечные ускорения (правый рисунок) существенно меньше (на два порядка) возмущающих ускорений от Земли (левый рисунок). Поэтому характер возмущения селеноцентрической орбиты определяется земными возмущениями.

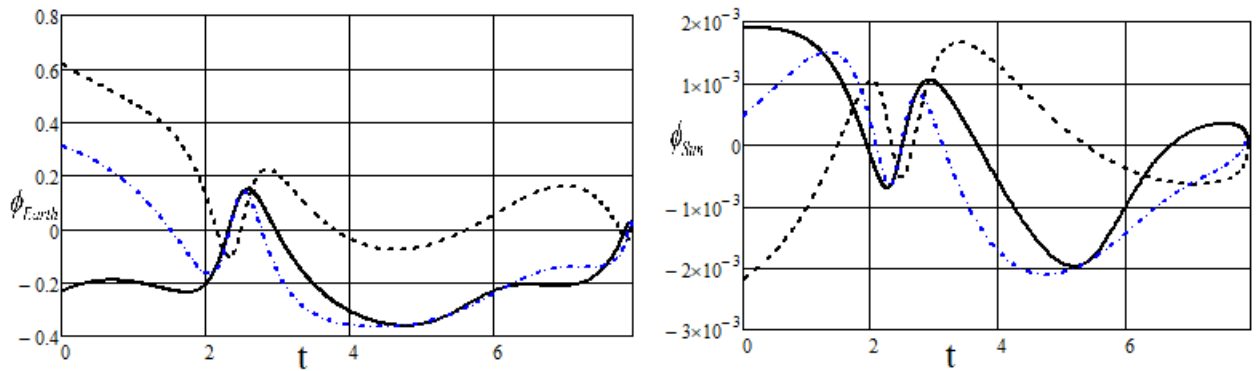


Рис. 4.9 – Изменение проекций возмущающих гравитационных ускорений ( $\text{мм}/\text{с}^2$ ) от Земли (левый рисунок,  $\Phi_{Sun}$ ) и Солнца (правый рисунок,  $\Phi_{Earth}$ ) как функций времени перелета на селеноцентрическом участке (сутки). Сплошные линии – проекции на направление селеноцентрической скорости. Пунктирные линия – радиальные проекции, штрихпунктирные линии – трансверсальные проекции

Для объяснения характера изменения константы энергии селеноцентрического движения следует проанализировать проекции возмущающих ускорений от Земли на направление селеноцентрической скорости КА. Эта проекции на рисунке показана сплошной черной линией. На начальных двух с половиной сутках селеноцентрического полета проекция возмущающего земного ускорения на направление скорости отрицательна и имеет большую величину (порядка  $2 \text{ мм}/\text{с}^2$ ). Земное возмущающее ускорение активно тормозит КА, уменьшая константу энергии селеноцентрического движения. Затем на временном интервале немного меньшем одних суток проекция возмущающего гравитационного ускорения становится положительной. На этом интервале увеличивается селеноцентрическая скорость КА, и константа энергии селеноцентрического движения увеличивается. Затем проекция возмущающего ускорения от Земли на направление селеноцентрической скорости становится опять отрицательной (почти до самого окончания перелета). На этом интервале перелета величина тормозящего ускорения достигает почти  $4 \text{ мм}/\text{с}^2$ . Земное возмущающее ускорение активно уменьшает селеноцентрическую скорость КА.

Для объяснения характера возмущений других оскулирующих элементов селеноцентрической орбиты (например, эксцентриситета) следует анализировать радиальную и трансверсальную компоненты возмущающего ускорения от Земли. При этом стоит отметить несколько обстоятельств. Прежде всего, на рассматриваемой селеноцентрической траектории и радиальная, и трансверсальная компоненты возмущающего ускорения несколько раз меняют знак. Второе важное обстоятельство: величина этих компонент ускорения велика. Так максимальная величина радиальной компоненты больше  $6 \text{ мм/с}^2$ . Судя по всему, именно большая величина радиальной и трансверсальной компонент возмущающего земного ускорения приводит к значительному изменению эксцентриситета оскулирующей селеноцентрической орбиты.

Вид всей полученной траектории перелета в окрестность Луны в геоцентрической системе координат показан на рисунках 4.10 и 4.11. На рис. 4.10 показана геоцентрическая траектория в пространстве (черная линия). Орбита Луны на этом рисунке показана синей линией. Видно, что траектория КА на конечном участке перелета «качается» в окрестности лунной орбиты. Заметна и точка траектории КА, в которой сильно изменяется направление скорости КА. Эта точка соответствует первой точки сближения КА с Луной, которая хорошо видна на ранее приведенном рисунке 4.7. На 2.35 сутки селеноцентрического участка траектории расстояние КА от центра Луны было равно 12049 км.

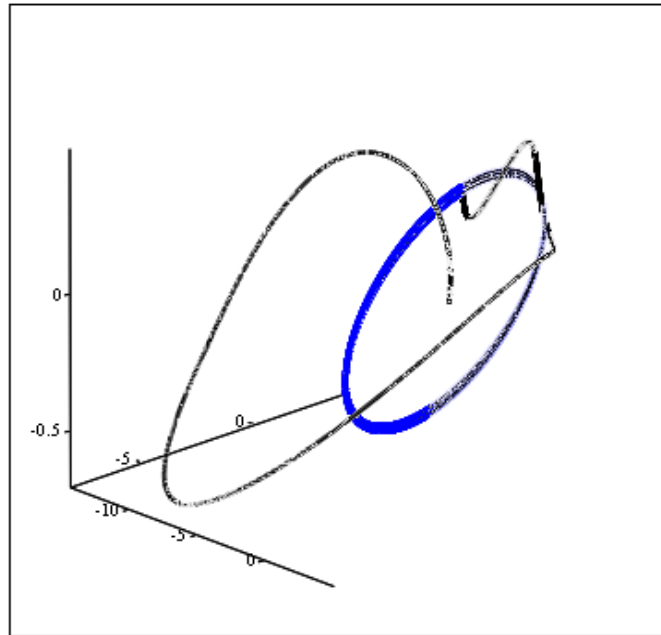


Рис. 4.10 – Траектория геоцентрического перелета в окрестность Луны в пространстве. Размерность по осям координат 100 тыс. км

На рис. 4.11 показаны проекции геоцентрической траектории перелета в окрестность Луны. Геоцентрический участок траектории КА показан красной линией, селеноцентрический участок показан синей линией, орбита Луна показана черными точками. Земля на рисунке показана синим кружочком.

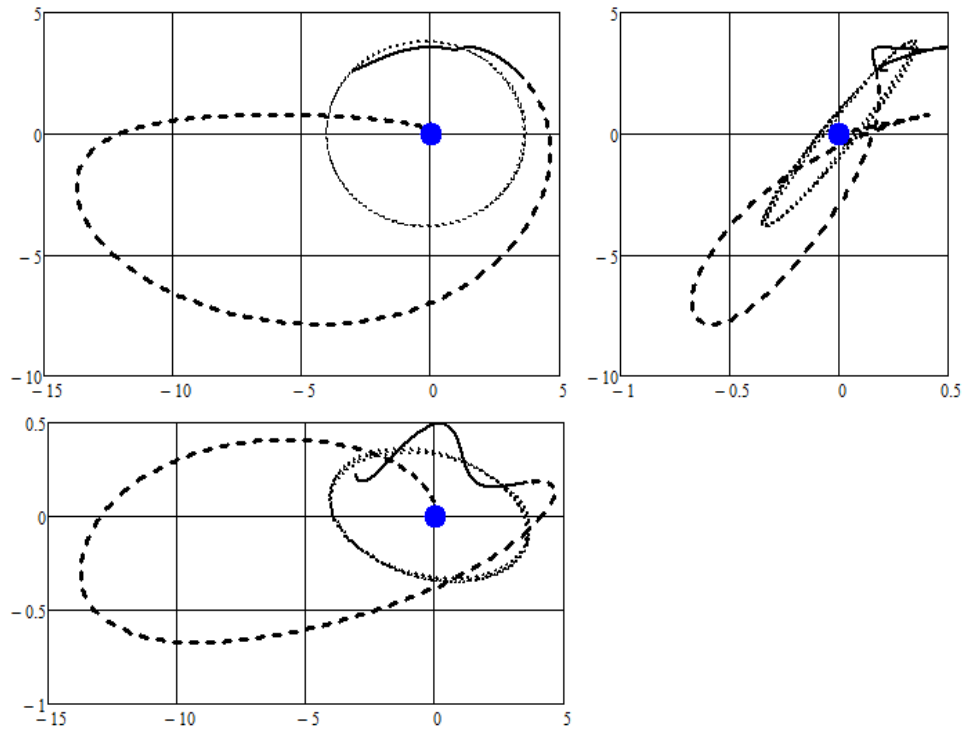


Рис. 4.11 – Проекция полученной траектории геоцентрического перелета в окрестность Луны на плоскость  $x-y$  (эклиптики, левый верхний рисунок, на плоскость  $x-z$  (нижний рисунок) и на плоскость  $z-y$  (правый рисунок). Размерность по осям координат 100 тыс. км

Участок траектории подлета к Луне более подробно показан на рисунке 4.12. Используются проекции на те же плоскости, что и на предыдущем рисунке. Участок орбиты Луны показан черными точками. Видно, что на всем рассматриваемом участке траектории КА находится вблизи плоскости Лунной орбиты. Видно, что в конечной точке траектории КА находится вблизи орбиты Луны, но его траектория пересекает орбиту Луны (по крайней мере, не касается орбиты Луны и направление геоцентрической скорости КА неколлинеарно с геоцентрической скоростью Луны).

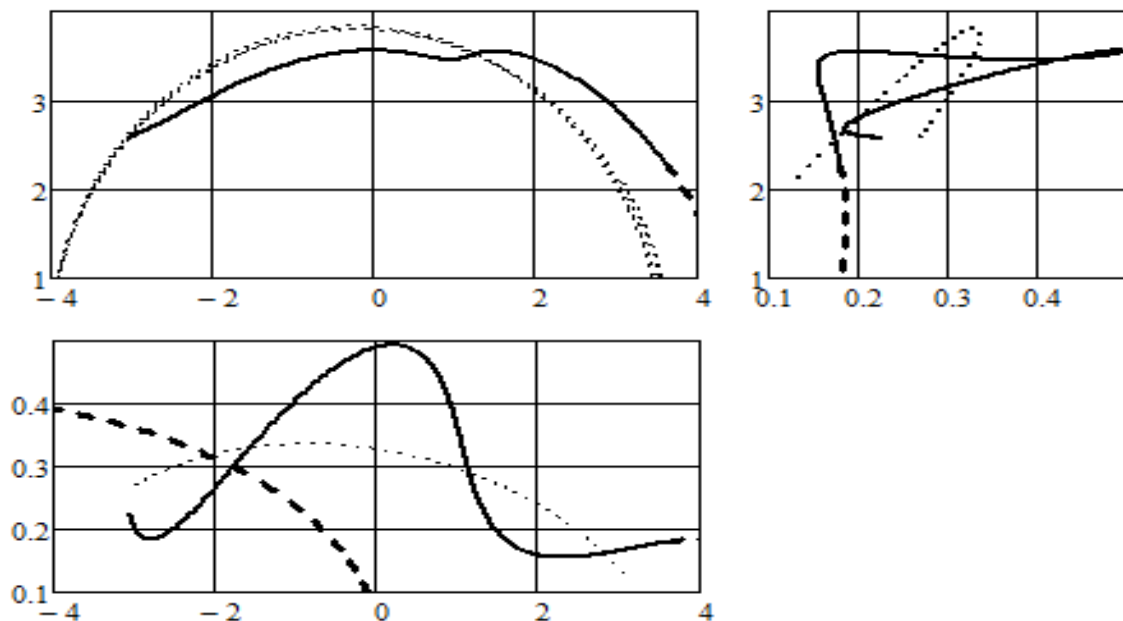


Рис. 4.12 – Проекция конечного участка геоцентрической траектории КА (участка подлета КА в окрестность Луны) на плоскость  $x$ - $y$  (эклиптики, левый верхний рисунок), на плоскость  $x$ - $z$  (нижний рисунок) и на плоскость  $z$ - $y$  (правый рисунок). Размерность по осям координат 100 тыс. км

На Рис. 4.13 показаны проекции селеноцентрической траектории КА на селеноцентрическом участке траектории перелета. Луна показана синим прямоугольником.

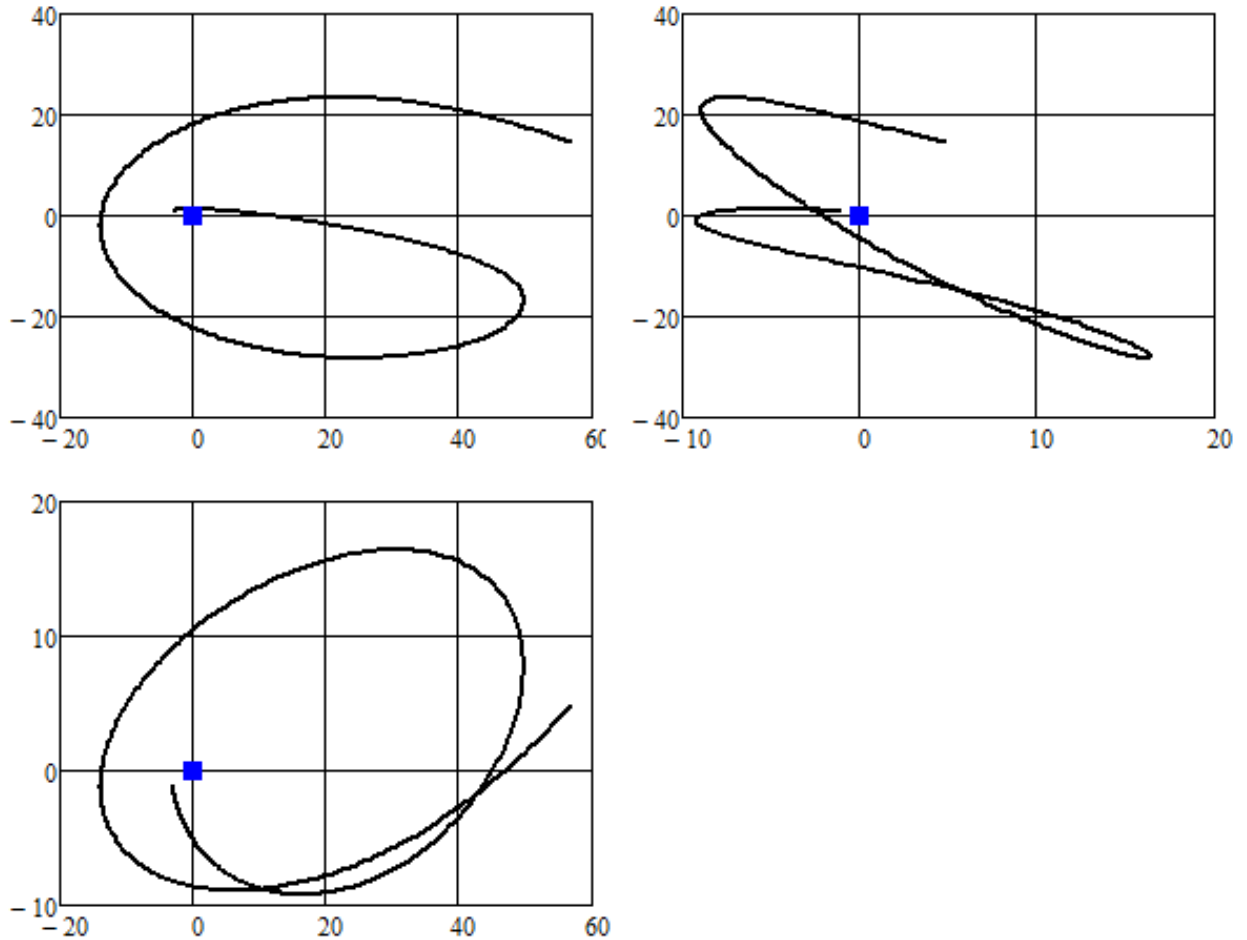


Рис. 4.13 – Проекция селеноцентрического участка селеноцентрической траектории перелета в окрестность Луны на плоскость  $x-y$  (эклиптики, левый верхний рисунок, на плоскость  $x-z$  (нижний рисунок) и на плоскость  $z-y$  (правый верхний рисунок).  
Размерность по осям координат 1 тыс. км

На рисунке 4.14 показана в пространстве селеноцентрическая траектории КА на селеноцентрическом участке траектории перелета. Луна показана синим прямоугольником. Левый рисунок показывает траекторию КА в системе координат, когда масштаб по осям системы неодинаковый. Видно, что координата  $z$  вдоль траектории меняется сложно и внешне значительно. На правом рисунке показана та же траектория, когда масштаб по оси  $z$  сделан равным масштабу по оси  $x$ . Из рисунка видно, что  $z$ -овая координата вдоль траектории КА изменяется несильно, траектория КА близка к плоской траектории.

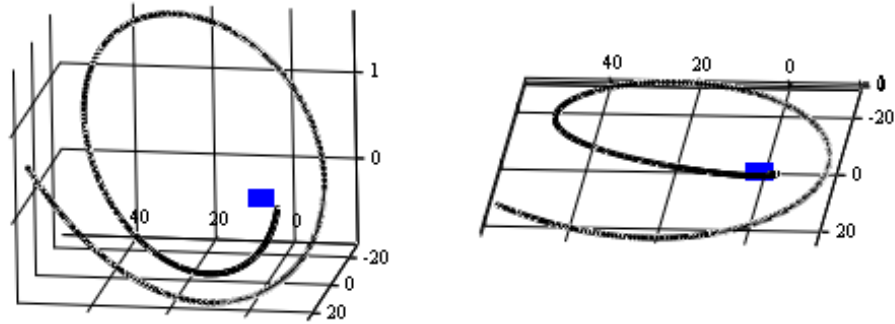


Рис. 4.14 –Участок полученной селеноцентрической траектории КА в пространстве. Справа показана траектории с одинаковыми масштабами по осям  $x$  и  $z$ . Размерность по осям координат 1 тыс. км. Синий квадрат – положение Луны.

#### ***4.1.5 Этап 5. Нахождение параметров схемы перелета, при которых КА подлетает к поверхности Луны на расстояние равное заданной высоте окололунной орбиты***

Описанная в предыдущем разделе траектория используется как начальное приближение для последующего анализа. При этом анализе предполагается неизменной длительность геоцентрического участка траектории  $t_1$ , а набор выбираемых параметров схемы перелета рассматривается таким:  $T_{st}$ ,  $r_a$ ,  $\Omega$ ,  $u_o$ ,  $t_2$ . Кроме давно обсуждаемых параметров: даты старта, радиуса апогея промежуточной орбиты, долготы восходящего узла стартовой орбиты и аргумента широты точки старта в рассматриваемый набор входит время движения КА на селеноцентрическом участке  $t_2$ . Напомним значение этого параметра, найденное на предыдущем этапе, в рассматриваемом случае равно 2.60 суток. В конечной точке траектории при перечисленных выше параметрах схемы перелета высота КА над лунной поверхностью равна 14176.7 км. Задача рассматриваемого этапа найти параметры схемы перелета, при которых указанная высота равна 100 км (высоте окололунной орбиты).



Используя полученные на предыдущем этапе параметры схемы перелета как начальное приближение, решаем задачу безусловной минимизации квадрата разности величины селеноцентрического радиуса вектора КА в конечной точке траектории перелета и радиуса окологлуной орбиты, на которую КА должен быть выведен. При этом используем стандартный алгоритм безусловной минимизации, базирующийся на методе сопряженного градиента. К сожалению, использование метода локальной оптимизации не позволило найти траекторию КА, на которой КА приблизился к поверхности Луны на расстояние 100 км. Был получен локальный минимум. Минимальная высота КА оказалась 2483.5 км. Такая высота соответствует следующим параметрам схемы перелета:  $T_{st} = 88.7753785$  суток (2130.6090841 часов, отсчитанных от 0 часов 1 января 2024 года),  $r_a = 1.1494671$  млн. км,  $\Omega = -1.5136699 \cdot 10^{-3}$ ,  $u_o = -0.0933827^\circ$ ,  $t_2 = 2.1094268$  суток.

Так как требуемая высота КА над поверхностью Луны не была достигнута, то воспользовались идеей введения промежуточного импульса скорости. В соответствии с описанной выше процедурой вектор выбираемых параметров схемы перелета увеличивается на четыре единицы: время сообщения КА промежуточного импульса скорости  $\Delta V_c$ ; величину этого импульса скорости; двух углов, фиксирующих направление импульса скорости. Начальные приближения для этих параметров были введены так. Время сообщения КА импульса скорости принималось равному времени геоцентрического времени перелета (в рассматриваемом варианте 93 суток). Величина импульса скорости принималась нулевой, прямое склонение и восхождение вектора промежуточного импульса скорости находились из условия антиколлинеарности этого импульса скорости вектору селеноцентрической скорости КА. В рассматриваемом варианте траектории эти углы оказались следующими: прямое восхождение  $\alpha = 26.512174^\circ$ ; склонение  $\delta = 27.3242683^\circ$ .

Использование метода безусловной минимизации ошибки высоты КА в конечной точке траектории перелета при поиске в пространстве девяти параметров схемы перелета позволило ошибку высоты сделать нулевой. При этом набор параметров схемы перелета оказался таким:  $T_{st} = 88.7749848$  суток,  $r_a = 1.1494638$  млн. км,  $\Omega = -1.5136699 \cdot 10^{-30}$ ,  $u_o = -0.0942504^\circ$ ,  $t_{geo} = 92.9986667$  суток,  $\Delta V_c = 40.8203012$  м/с,  $\alpha = -2.4799596^\circ$ ,  $\delta = 52.4669207^\circ$ ,  $t_2 = 2.1082386$  суток.

Обратим внимание на весьма большую величину промежуточного импульса скорости (40.8 м/с). Важной характеристикой схемы перелета является величина требуемого (тормозного) импульса скорости при переходе на окололунную орбиту. Выполненный (в соответствии с алгоритмом, представленным в разделе 2.4) расчет показал, что величина тормозного импульса равна 639.687 м/с. При этом радиальная компонента импульса -31.392 м/с, трансверсальная -638.916 м/с. Таким образом, суммарный импульс скорости (сумма промежуточного и тормозного импульса скорости  $\Delta V_\Sigma$ ) равен 680.507 м/с.

Так как эта величина меньше импульса скорости при торможении при подлете КА к окололунной орбите для традиционных схем перелета (более 800 м/с), то полученную траекторию можно назвать низкоэнергетической. Но её явно можно улучшить, по крайней мере, уменьшая величину промежуточного импульса скорости. Это улучшение и будет являться содержанием следующего (последнего) этапа проектирования низкоэнергетической траектории перелета к Луне.

#### ***4.1.6 Этап 6. Минимизация требуемого импульса скорости при выходе на окололунную орбиту***

На настоящем (заключительном) этапе проектирования низкоэнергетической траектории перелета к Луне осуществляется минимизация энергетики лунного перелета (минимизация требуемого импульса скорости при выходе на окололунную орбиту) при удовлетворении условий транспортной задачи. При этом используется метод проекции градиента, описанный в предыдущей главе в разделе 3.5.4. Заметим,

что существует возможность использовать гладкое продолжение по величине импульса скорости (например, с использованием метода гладкого продолжения по параметру, развитого в работах В.Г. Петухова [37, 36, 35]). Этот подход, возможно, увеличит эффективность получения итогового решения. Но в настоящей работе такой подход не использовался.

В рассматриваемом варианте траектории на рассматриваемом последнем этапе анализа удалось уменьшить суммарный импульс для перехода на окололунную орбиту на 20 м/с. Конкретно, в итоговом варианте промежуточный импульс скорости удалось уменьшить до 20.745276 м/с. Тормозной импульс скорости при переходе на окололунную орбиту оказался равен 639.941238 м/с. Таким образом, итоговый суммарный импульс скорости оказался равен 660.686514 м/с.

Приведем значения параметров схемы полета, при которых были получены приведенные величины импульсов скорости:  $T_{st} = 88.7540914$  суток,  $r_a = 1.14920969$  млн. км,  $\Omega = -0.001513670^\circ$ ,  $u_o = -0.1318174^\circ$ ,  $t_{geo} = 93.6174995$  суток,  $\Delta V_c = 20.7452760$  м/с,  $\alpha = -0.000224625^\circ$ ,  $\delta = 69.0577323^\circ$ ,  $t_2 = 2.5704196$  суток.

Таким образом, в разделе на примере проектирования конкретной низкоэнергетической траектории перелета к Луне даны пояснения всех этапов анализа, всего алгоритма, разработанного для нахождения низкоэнергетической схемы перелета к Луне с выводением КА на низкую окололунную орбиту.

#### **4.2 Анализ низкоэнергетических траекторий перелета нескольких типов**

В настоящем разделе приведен анализ трех полученных низкоэнергетических траекторий перелета к Луне. Эти траектории могут рассматриваться как низкоэнергетические траектории трех различных типов.

На перелетной траектории первого типа КА на селеноцентрическом участке траектории КА монотонно сближается с Луной. При этом константа энергии селеноцентрической оскулирующей орбиты монотонно уменьшается.

На перелетной низкоэнергетической траектории второго типа, прежде чем на заключительном этапе обеспечивается выведение КА на окололунную орбиту, он сильно сближается с Луной. На этой траектории практически осуществляется лунный гравитационный маневр. При этом геоцентрическая траектория КА «качается» в окрестности лунной орбиты на большом (например, 10-ти суточном) заключительном интервале времени. На этом временном интервале константа энергии селеноцентрической оскулирующей орбиты изменяется немонотонно.

К траекториям третьего типа можно отнести траектории с промежуточным импульсом скорости.

Важной частью представленного анализа является исследование возмущающих ускорений на геоцентрическом и селеноцентрическом участках траектории перелетной траектории, которые и определяют возможность реализации низкоэнергетического лунного перелета.

#### 4.2.1 Анализ перелетной траектории, на селеноцентрическом участке которой КА монотонно сближается с Луной

Проанализируем низкоэнергетическую перелетную траекторию, основные характеристики которой приведены в Таблице 4.1.

Таблица 4.1. Основные характеристики низкоэнергетической траектории перелета

Характеристика	Величина
Дата старта	5 апреля 2024
Юлианская дата старта	2460405.8865
Время, прошедшее от 1 января 2024 года до даты старта, сутки	95.38650
Радиус апогея промежуточной геоцентрической орбиты ( $r_a$ ) тыс. км	1269.6106
Величина первого импульса скорости, м/с	3197.702
Долгота восходящего узла околоземной орбиты ( $\Omega$ , град.)	-0.075797°
Аргумент перигея промежуточной геоцентрической орбиты ( $u_o$ , град.)	-12.403506°
Полное время перелета, сутки	87.52329
Максимальное удаление КА от Земли, тыс. км	1735.6
Минимальное расстояние КА от точки либрации L2 на траектории перелета, тыс. км	18.620
Селеноцентрическая константа энергии орбиты в момент максимального сближения КА с точкой либрации, км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	-0.138
Величина импульса скорости при переходе на конечную окололунную орбиту $\Delta V_{br}$ , м/с	<b>638.09556</b>
Радиальная компонента импульса скорости $\Delta V_{br}$ , м/с	3.14854
Трансверсальная компонента импульса скорости $\Delta V_{br}$ , м/с	-638.08779

Импульс скорости при переходе на окололунную орбиту для первой траектории оказался равен 638.1 м/с. Импульс скорости при переходе на окололунную орбиту имеет небольшую радиальную составляющую (3.15 м/с). Трансверсальная компонента импульса скорости отрицательная (-638.1 м/с).

#### *Анализ характеристик рассматриваемой траектории перелета*

На рисунке 4.15 приведены проекции геоцентрической траектории перелета к Луне на плоскость эклиптики x-y и на плоскость z-y. Пунктирной линией показаны

проекции геоцентрической лунной орбиты. В принятом на рисунке масштабе, траектории начинается практически с точки с нулевыми координатами, а заканчивается в точке лунной орбиты.

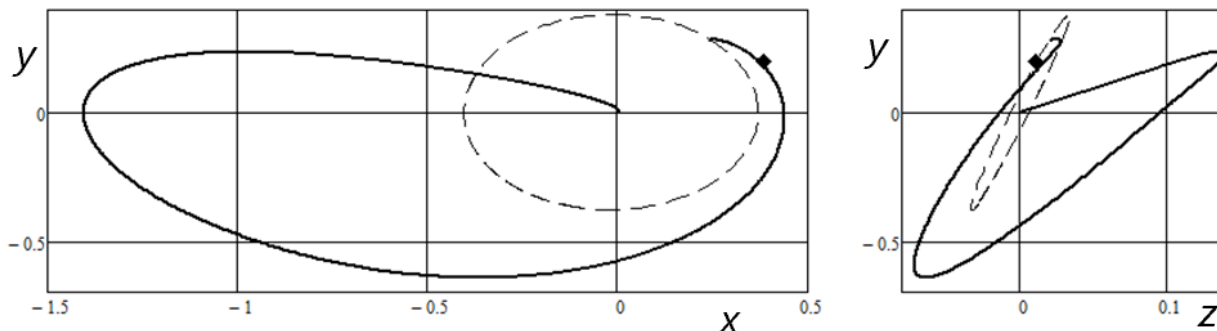


Рис. 4.15 – Траектория перелета в геоцентрической эллиптической системе координат. Слева - проекция на плоскость эклиптики x-y, справа - на плоскость z-y.

Единица расстояния 1 млн. км

Черным ромбом показано положение точки либрации L2 в момент максимального сближения КА с этой точкой. Максимальное удаление КА от Земли происходит на 37.064 сутки полета и равно 1.408 млн. км. Напомним, что радиус апогея оскулирующей орбиты при старте КА с околоземной орбиты равен 1.270 млн. км. То есть солнечные гравитационные возмущения обеспечили увеличение удаление КА от Земли в область, где эти возмущения большие. КА в этой области находится большое время, что способствует большой деформации геоцентрической орбиты солнечным гравитационным возмущением. Время перелета КА из точки наибольшего удаления от Земли до окрестности точки либрации 48.9 суток. На этом временном интервале склонение геоцентрического радиуса вектора КА по отношению к плоскости эклиптики весьма мало (изменяется в узком диапазоне от  $+4^\circ$  до  $-7^\circ$ ).

На рисунке 4.16 показаны проекции возмущающих гравитационных ускорений при исследовании геоцентрической траектории космического аппарата. Рассмотрен временной интервал от старта КА с низкой околоземной орбиты до момента сближения КА с точкой либрации (85.93 суток). На левом рисунке анализируется

возмущающее солнечное ускорения  $\Phi_{Sun}$ , на правом – лунное возмущающее ускорение  $\Phi_{Moon}$ .

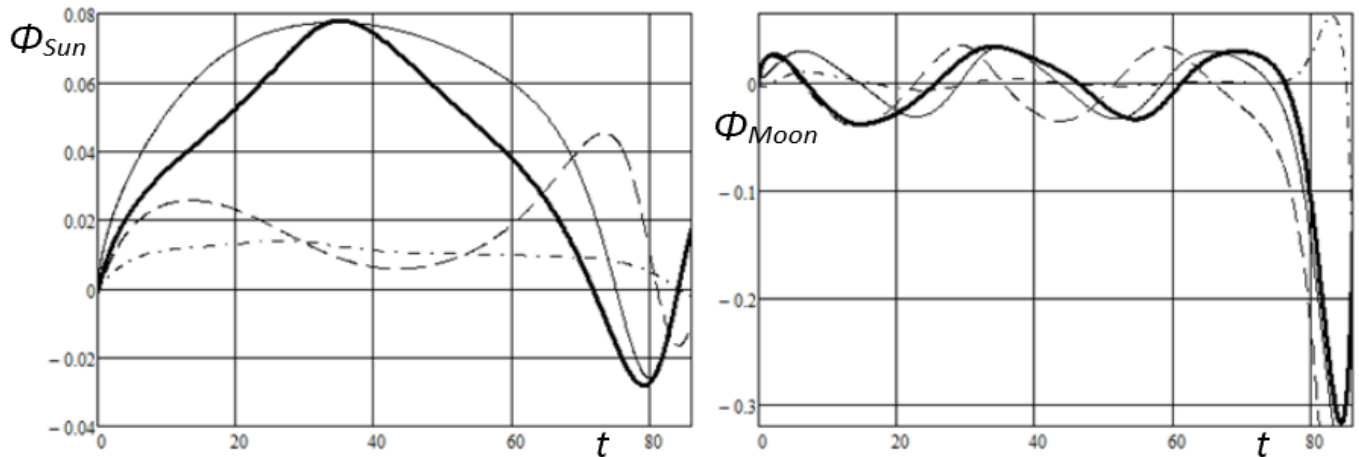
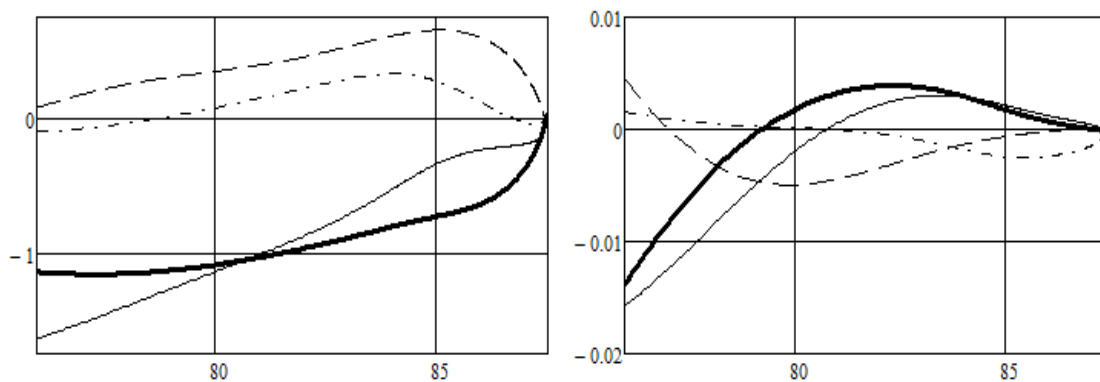


Рис. 4.16 – Проекция возмущающего солнечного гравитационного ускорения (левый рисунок,  $\Phi_{Sun}$ , мм/с<sup>2</sup>) и проекция возмущающего лунного гравитационного ускорения (правый рисунок,  $\Phi_{Moon}$ , мм/с<sup>2</sup>) на геоцентрическом участке траектории как функции времени перелета (сутки). Жирной линией показаны проекции возмущающих ускорений на направление геоцентрической скорости космического аппарата. Тонкими сплошными линиями показаны трансверсальные проекции возмущающих ускорений. Пунктирными и штрихпунктирными линиями показаны радиальные и нормальные компоненты возмущающих ускорений соответственно.

Видно, что на значительной части рассматриваемого участка траектории (0...71.7 суток) проекция солнечного гравитационного ускорения на направление скорости  $\Phi_{Sun}$  положительна. Максимальная величина этого ускорения (0.078 мм/с<sup>2</sup>) достигается на 35.149 сутки полета, когда КА находится на большом удалении от Земли (1.405 млн. км). Солнечное гравитационное ускорение активно увеличивает геоцентрическую скорость КА, увеличивая и радиусы апсидальных точек геоцентрической оскулирующей орбиты КА. Трансверсальная компонента возмущающего ускорения  $\Phi_{Sun}$  так же положительна на большом временном интервале. Это способствует увеличению фокального параметра оскулирующей геоцентрической орбиты космического аппарата. Радиальная компонента возмущающего ускорения  $\Phi_{Sun}$  несколько меньше трансверсальной, но положительна на большем временном интервале. Нормальная компонента

возмущающего солнечного ускорения относительно остальных компонент довольно мала.

Проекция возмущающего лунного ускорения (правый рисунок) на значительной части рассматриваемой траектории имеют синусоидальный характер. Из-за этого они не создают значительных уходов элементов геоцентрической орбиты КА. При приближении КА к окрестности точки либрации лунные гравитационные возмущения становятся очень большими. Проекция этого ускорения на направление скорости достигает значения равного  $-0.3 \text{ мм/с}^2$ . В этот момент трансверсальная, радиальная и даже нормальная компоненты возмущающего ускорения тоже большие. На рисунке 4.17 показаны проекции возмущающих гравитационных ускорений при исследовании селеноцентрической траектории космического аппарата. Рассмотрен временной интервал от 76 суток полета до момента выхода КА на окололунную орбиту. На левом рисунке анализируется возмущающее земное



ускорения  $\Phi_{Earth}$ , на правом – солнечное возмущающее ускорение  $\Phi_{Sun}$ . Используются те же обозначения, что и на предыдущем рисунке.

Рис. 4.17 – Проекция возмущающего земного гравитационного ускорения (левый рисунок,  $\Phi_{Earth}$ ,  $\text{мм/с}^2$ ) и проекция возмущающего солнечного гравитационного ускорения (правый рисунок,  $\Phi_{Sun}$ ,  $\text{мм/с}^2$ ) на селеноцентрическом участке траектории как функции времени перелета (сутки). Жирной линией показаны проекции возмущающих ускорений на направление селеноцентрической скорости космического аппарата. Тонкими сплошными линиями показаны трансверсальные проекции возмущающих ускорений. Пунктирными и



штрихпунктирными линиями показаны радиальные и нормальные компоненты возмущающих ускорений соответственно.

Отметим следующее. Солнечные возмущающие гравитационные ускорения меньше возмущающих земных ускорений на два порядка. Они очень слабо влияют на траекторию движения космического аппарата. Проекция возмущающего земного ускорения на направление селеноцентрической скорости (толстая линия) на всей рассматриваемой траектории отрицательна. На почти на всей траектории (кроме конечного её участка) величина этой проекции значительна (порядка  $1 \text{ мм/с}^2$ ). Это обеспечивает убывание энергии селеноцентрического движения КА и временный захват Луной космического аппарата. Трансверсальная компонента возмущающего земного ускорения (тонкая сплошная линия) тоже отрицательна. Это способствует уменьшению фокального параметра селеноцентрической оскулирующей орбиты космического аппарата. Радиальная и нормальная компоненты возмущающего ускорения (пунктирная и штрихпунктирная линии) меньше влияют на траекторию космического аппарата.

На рисунке 4.18 показано изменение нескольких оскулирующих элементов геоцентрической траектории космического аппарата. Рассмотрен временной интервал от старта КА с низкой околоземной орбиты до момента сближения КА с точкой либрации. На левом рисунке показано изменение оскулирующего эксцентриситета. Видно, как солнечное гравитационное ускорение уменьшает эксцентриситет от начального значения промежуточной орбиты (0.989702) до 0.268581 в момент максимального сближения КА с точкой либрации.

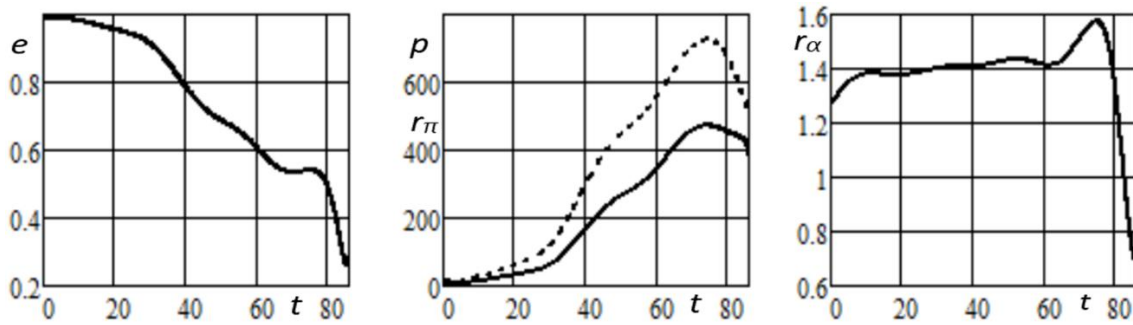


Рис. 4.18 – Оскулирующие элементы геоцентрической орбиты космического аппарата как функции времени (сутки) на траектории до сближения космического аппарата с точкой либрации. Левый рисунок – эксцентриситет. Средний рисунок – фокальный параметр (пунктирная линия) и радиус перигея (тыс. км). Правый рисунок - радиус апогея (млн. км)

На центральном рисунке показано изменение фокального параметра (пунктирная линия) и радиуса перигея (сплошная линия) оскулирующей геоцентрической орбиты. Интересно то, что эффективное увеличение этих элементов благодаря солнечному возмущению на большом начальном участке траектории сменяется некоторым уменьшением при приближении КА к точке либрации. Основная причина этого - лунное гравитационное возмущение. На правом рисунке показано изменение радиуса апогея оскулирующей геоцентрической орбиты. Этот элемент активно убывает при приближении космического аппарата к точке либрации из-за лунных возмущений.

На рисунке 4.19 показано изменение расстояния КА от точки либрации ( $D$ ) на всей траектории перелета и на последних семи сутках перелета. Минимальное расстояние КА от точки либрации (18620 км) достигается на 85.930 сутки полета.

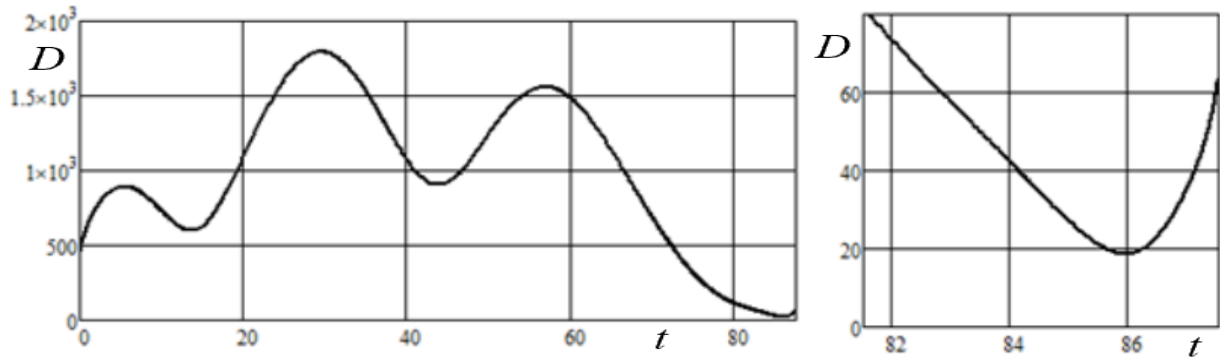


Рис. 4.19 – Расстояние КА от точки либрации ( $D$ , тыс. км) как функции времени ( $t$ , сутки) на всей траектории перелета (левый рисунок) и на последних семи сутках полета (правый рисунок)

В момент наибольшего сближения КА с точкой либрации радиус-вектор КА равен 422.8 тыс. км. Геоцентрический радиус вектор точки либрации в этот момент времени 432.4 тыс. км. То есть КА расположен ближе к Земле, чем точка либрации на почти 10 тыс. км. Этим объясняется то, что радиусы апсидальных точек оскулирующей геоцентрической орбиты КА в этот момент времени меньше радиусов апсидальных точек оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации. Например, радиус перигея орбиты КА меньше радиуса перигея оскулирующей орбиты точки либрации на 30.4 тыс. км.

На рисунке 4.20 показано изменение константы энергии оскулирующей селеноцентрической орбиты как функции времени полета. Видно, что на 81.371 сутки полета эта константа становится отрицательной и продолжает уменьшаться. Происходит «захват» КА Луной. В момент, когда КА находится на минимальном расстоянии до точки либрации (85.930 сутки полета), константа энергии селеноцентрического движения КА равна  $-0.138 \text{ км}^2/\text{с}^2$ . Эта точка на графике показана черным ромбом.

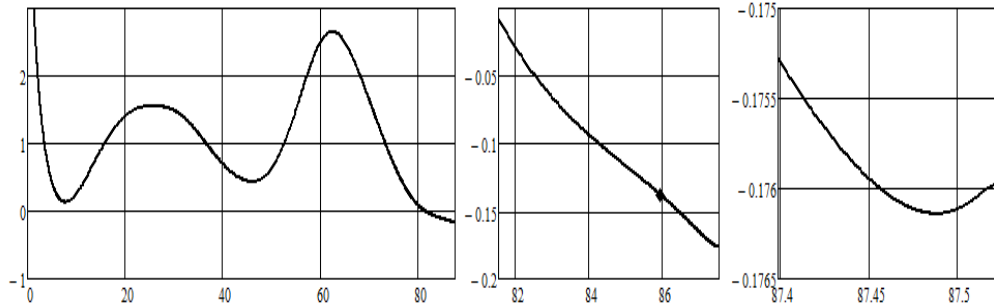


Рис. 4.20 – Изменение константы энергии селеноцентрического движения ( $h$ ,  $\text{км}^2/\text{с}^2$ ) как функции времени (сутки) на траектории перелета. Слева - на всей траектории перелета. В центре – на последних шести сутках перелета. Справа - на последних трех часах перелета

Интересно заметить, что константа энергии селеноцентрической орбиты даже на последних сутках полета изменяется значительно. На правом рисунке 4.20 показано изменение этого элемента оскулирующей орбиты на последних трех часах перелета. За эти 3 часа величина селеноцентрического радиуса вектора КА уменьшается с 11405.6 км до 1838 км. А гравитационные возмущения от Земли немонотонно изменяют константу энергии селеноцентрического движения.

Перед сообщением КА тормозного импульса скорости константа энергии оскулирующей селеноцентрической орбиты равна  $-0.176 \text{ км}^2/\text{с}^2$ . В этот момент времени элементы оскулирующей селеноцентрической орбиты оказались такими: эксцентриситет 0.934028, радиус периселения 1837.996 км, радиус апоселения 53882.842 км, В этот момент истинная аномалия оскулирующей орбиты  $359.836^\circ$ .

Проекция селеноцентрической траектории при подлете КА к окололунной орбите и проекция этой орбиты показаны на рисунке 4.21. Подлетная траектория КА (сильно вытянутая эллиптическая орбита) практически касается конечной окололунной орбиты (показана тонкой линией).

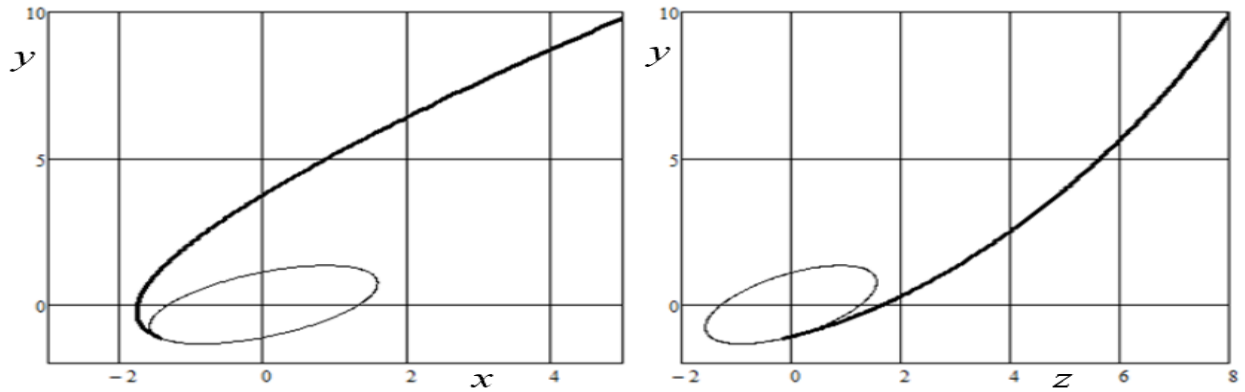


Рис. 4.21 – Проекция на плоскость эклиптики x-y (левый рисунок) и на плоскость z-y селеноцентрической траектории при подлете КА к конечной окололунной орбите (тонкая линия). Единица расстояния - 1 тыс. км

#### *Выводы численного анализа рассматриваемой траектории*

Проанализированная низкоэнергетическая траектория перелета к Луне, как мы и полагали, проходит через окрестность точки либрации L2 системы Земля-Луна. Минимальное расстояние до этой точки либрации оказалось равным 18.6 тыс. км. В момент минимального сближения КА с точкой либрации КА находился ближе к Земле, чем точка либрации (на 9.60 тыс. км). По-видимому, этим объясняется то, что радиусы перигея и апогея оскулирующей орбиты КА в момент минимального сближения с точкой либрации оказались меньше радиусов перигея и апогея оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации. Это не помешало тому, что, используя в качестве начального приближения траекторию с минимальным суммарным промахом точки либрации I (4.2), получить траектории временного захвата КА Луной. В момент пролета точки либрации селеноцентрическая константа энергии отрицательна ( $-0.138 \text{ км}^2/\text{с}^2$ ).

#### **4.2.2 Анализ перелетной траектории КА, в промежуточной точке которой КА сближается с Луной**

Проанализируем низкоэнергетическую перелетную траекторию, основные характеристики которой приведены в Таблице 4.2.

Таблица 4.2. Основные характеристики рассматриваемой траектории перелета

Характеристика	Величина
Дата старта	30 марта 2024
Юлианская дата старта	2460399.5230
Время, прошедшее от 1 января 2024 года до даты старта, сутки	89.02298
Радиус апогея промежуточной геоцентрической орбиты ( $r_a$ ) тыс. км	1149.8388
Величина первого импульса скорости, м/с	3194.757
Долгота восходящего узла околоземной орбиты ( $\Omega$ , град.)	1.632160
Аргумент перигея промежуточной геоцентрической орбиты ( $u_o$ , град.)	-3.216673
Полное время перелета, сутки	102.64821
Максимальное удаление КА от Земли, млн. км	1.3942
Минимальное расстояние КА от точки либрации L2 на траектории перелета, тыс. км	25.062
Селеноцентрическая константа энергии орбиты в момент максимального сближения КА с точкой либрации, км <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>	-0.356
Величина импульса скорости при переходе на конечную окололунную орбиту $\Delta V_{br}$ , м/с	<b>632.19930</b>
Радиальная компонента импульса скорости $\Delta V_{br}$ , м/с	1.79031
Трансверсальная компонента импульса скорости $\Delta V_{br}$ , м/с	-632.19677

Импульс скорости при переходе на окололунную орбиту для рассматриваемой траектории оказался равен 632.2 м/с. Импульс скорости при переходе на окололунную орбиту имеет небольшую радиальную составляющую (1.79 м/с). Трансверсальная компонента импульса скорости отрицательная (-632.2 м/с).

#### *Анализ характеристик рассматриваемой траектории перелета*

На рисунке 4.22 приведены проекции геоцентрической траектории перелета к Луне на плоскость эклиптики x-y и на плоскость z-y. Пунктирной линией показаны проекции геоцентрической лунной орбиты. В принятом на рисунке масштабе, траектории начинается практически с точки с нулевыми координатами, а заканчивается в точке лунной орбиты.

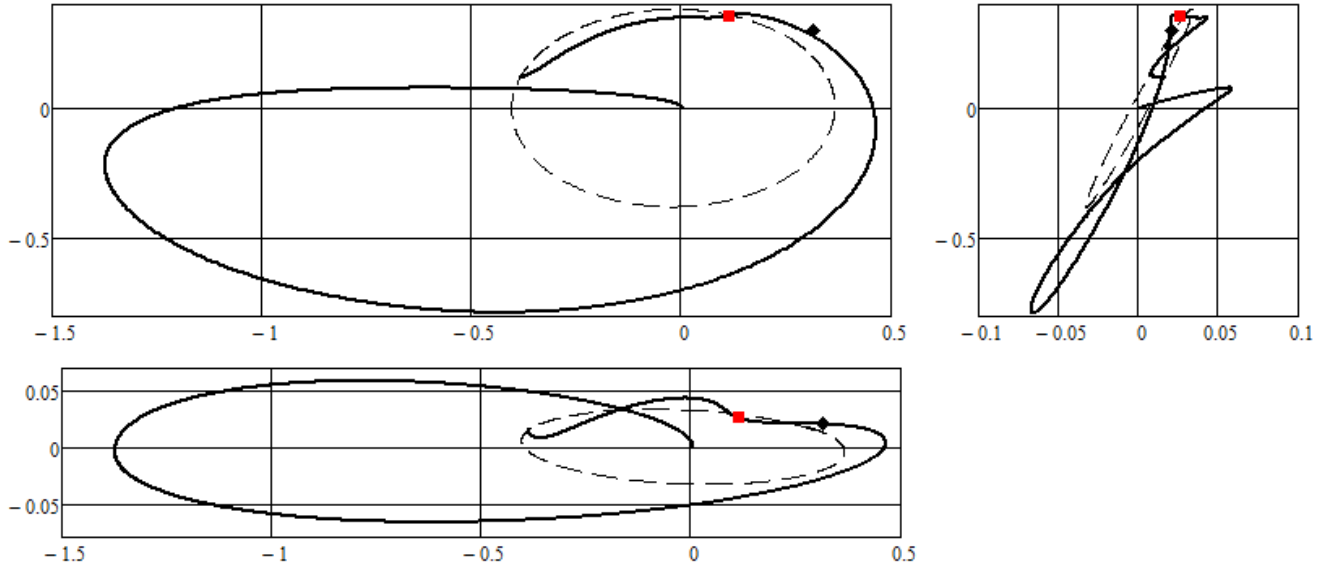


Рис. 4.22 – Траектория перелета в геоцентрической эклиптической системе координат. Слева сверху - проекция на плоскость эклиптики  $x$ - $y$ , слева внизу - на плоскость  $x$ - $z$ , справа - на плоскость  $z$ - $y$ . Единица расстояния 1 млн. км

Черным ромбом показано положение точки либрации  $L_2$  в момент максимального сближения КА с этой точкой. Красным квадратом показана точка траектории КА в момент первого сближения с Луной на 93.431 сутки перелета. Это сближение с Луной может трактоваться как лунный гравитационный маневр. Информация о характеристиках движения КА в этот момент времени будет дана ниже.

Максимальное удаление КА от Земли происходит на 40.044 сутки полета и равно 1.394 млн. км. Напомним, что радиус апогея оскулирующей орбиты при старте КА с околоземной орбиты равен 1.150 млн. км. То есть солнечные гравитационные возмущения обеспечили увеличение удаление КА от Земли в область, где эти возмущения большие. КА в этой области находится большое время, что способствует большой деформации геоцентрической орбиты солнечным гравитационным возмущением. Время перелета КА из точки наибольшего удаления от Земли до окрестности точки либрации 53.458 суток. На этом временном интервале склонение геоцентрического радиуса вектора КА по отношению к

плоскости эклиптики весьма мало (изменяется в узком диапазоне от  $-4.3^\circ$  до  $+2.6^\circ$ ). Поэтому солнце находится очень близко к плоскости оскулирующей геоцентрической орбиты КА и сильно деформирует эту орбиту.

На рисунке 4.23 показаны проекции возмущающих гравитационных ускорений при исследовании геоцентрической траектории космического аппарата. Рассмотрен временной интервал от старта КА с низкой околоземной орбиты до момента сближения КА с точкой либрации (93.502 суток). На левом рисунке анализируется возмущающее солнечное ускорения  $\Phi_{Sun}$ , на правом – лунное возмущающее ускорение  $\Phi_{Moon}$ .

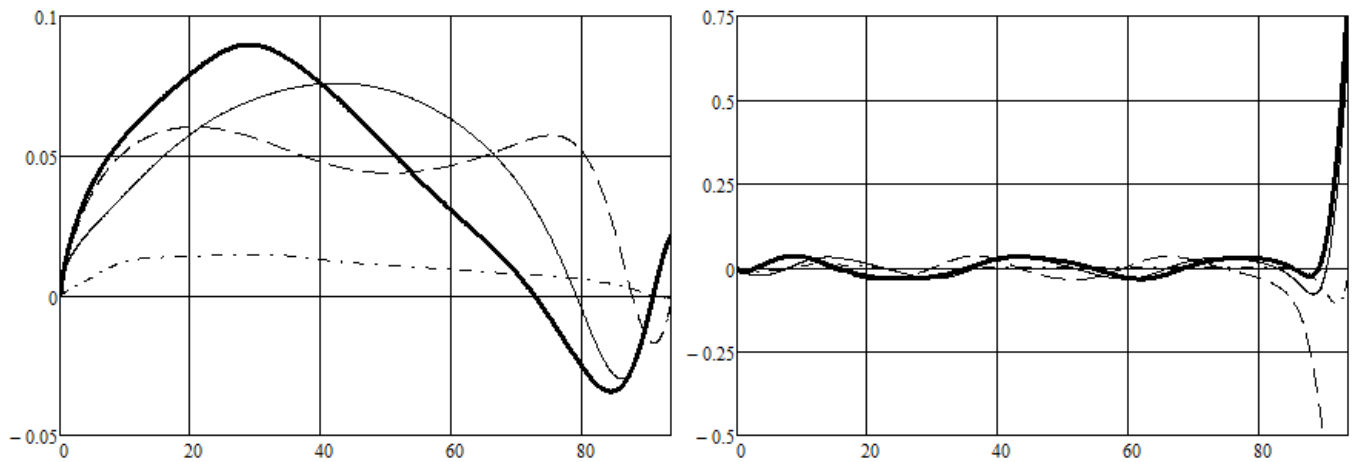


Рис. 4.23 – Проекция возмущающего солнечного гравитационного ускорения (левый рисунок,  $\Phi_{Sun}$ , мм/с<sup>2</sup>) и проекция возмущающего лунного гравитационного ускорения (правый рисунок,  $\Phi_{Moon}$ , мм/с<sup>2</sup>) на геоцентрическом участке траектории как функции времени перелета (сутки). Жирной линией показаны проекции возмущающих ускорений на направление геоцентрической скорости космического аппарата. Тонкими сплошными линиями показаны трансверсальные проекции возмущающих ускорений. Пунктирными и штрихпунктирными линиями показаны радиальные и нормальные компоненты возмущающих ускорений.

Видно, что на значительной части рассматриваемого участка траектории (0...72.7 суток) проекция солнечного гравитационного ускорения на направление скорости  $\Phi_{Sun_v}$  положительна. Максимальная величина этого ускорения (0.090 мм/с<sup>2</sup>) достигается на 29.033 сутки полета, когда КА находится на большом удалении от Земли (1.347 млн. км). Солнечное гравитационное ускорение активно



увеличивает геоцентрическую скорость КА, увеличивая и радиусы апсидальных точек геоцентрической оскулирующей орбиты КА. Трансверсальная компонента возмущающего ускорения  $\Phi_{Sun}$  так же положительна на ещё большем временном интервале. Это способствует увеличению фокального параметра оскулирующей геоцентрической орбиты космического аппарата. Радиальная компонента возмущающего ускорения  $\Phi_{Sun}$  несколько меньше трансверсальной, но положительна почти на всем рассматриваемом временном интервале (до момента сближения КА с точкой либрации). Нормальная компонента возмущающего солнечного ускорения относительно остальных компонент довольно мала.

Проекция возмущающего лунного ускорения (правый рисунок) на значительной части рассматриваемой траектории имеют синусоидальный характер. Из-за этого они не создают значительных уходов элементов геоцентрической орбиты КА. При приближении КА к окрестности точки либрации лунные гравитационные возмущения становятся очень большими. Проекция этого ускорения на направление скорости в момент максимального сближения с точкой либрации достигает значения  $0.841 \text{ мм/с}^2$ . В этот момент трансверсальная и радиальная компоненты возмущающего ускорения тоже большие. КА в этот момент находится внутри сферы действия Луны. Величина его селеноцентрического радиуса вектора 51.3 тыс. км.

На рисунке 4.24 слева показано изменение величины селеноцентрического радиуса вектора на заключительном этапе перелета (после 93 суток перелета). Видно немонотонное изменение этого радиуса. На 95.431 сутки перелета КА сближается с Луной впервые. В этот момент величина селеноцентрического радиуса вектора КА становится равной 14703 км. Лунное гравитационное ускорение на таком удалении от Луны  $22.7 \text{ мм/с}^2$ . Эта величина превышает земное гравитационное ускорение в рассматриваемой точке траектории ( $2.76 \text{ мм/с}^2$ ) более чем в 8 раз. Такое сближение КА с Луной на траектории перелета к Луне может трактоваться как лунный гравитационный маневр.

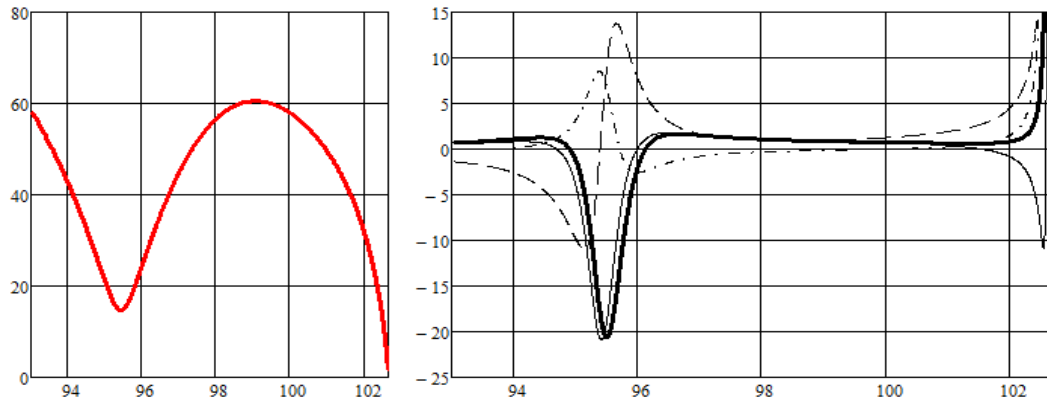


Рис. 4.24 – Левый рисунок - длина селеноцентрического радиуса вектора КА (тыс. км) как функция времени полета (сутки) на заключительном этапе перелета. Правый рисунок - проекции возмущающего лунного гравитационного ускорения ( $\Phi_{Moon}$ , мм/с<sup>2</sup>) при анализе геоцентрической траектории для рассматриваемого заключительного этапа перелета как функции времени перелета (сутки). Жирной линией показаны проекции возмущающих ускорений на направление геоцентрической скорости космического аппарата. Тонкими сплошными линиями показаны трансверсальные проекции возмущающих ускорений. Пунктирными и штрихпунктирными линиями показаны радиальные и нормальные компоненты возмущающих ускорений

На правой части анализируемого рисунка показаны проекции возмущающего лунного гравитационного ускорения ( $\Phi_{Moon}$ , мм/с<sup>2</sup>) при исследовании траектории КА как геоцентрической для рассматриваемого заключительного этапа перелета. Видно, что при сближении КА с Луной проекции лунного возмущающего ускорения на направление скорости и на трансверсальное направление являются отрицательными и достигают очень большой величины (более 20 мм/с<sup>2</sup>). Луна очень сильно уменьшает геоцентрическую скорость КА, большую полуось и фокальный параметр геоцентрической оскулирующей орбиты КА.

На рисунке 4.25 показаны проекции возмущающих гравитационных ускорений при исследовании селеноцентрической траектории космического аппарата. Рассмотрен временной интервал от 93 суток полета до момента выхода КА на окололунную орбиту. На левом рисунке анализируется возмущающее земное ускорения  $\Phi_{Earth}$ , на правом – солнечное возмущающее ускорение  $\Phi_{Sun}$ . Используются те же обозначения, что и на предыдущем рисунке.

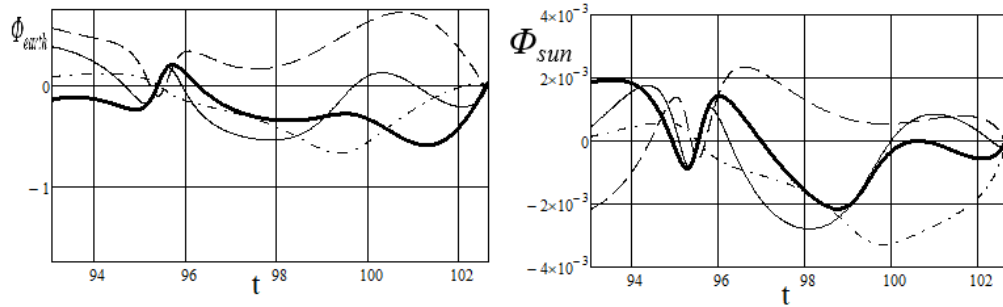


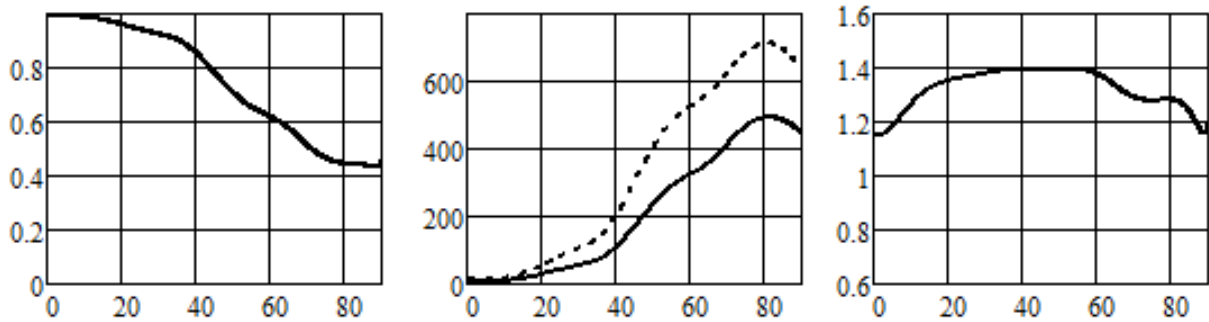
Рис. 4.25 – Проекция возмущающего земного гравитационного ускорения (левый рисунок,  $\Phi_{Earth}$ ,  $m/c^2$ ) и проекция возмущающего солнечного гравитационного ускорения (правый рисунок,  $\Phi_{Sun}$ ,  $mm/c^2$ ) на селеноцентрическом участке траектории как функции времени перелета (сутки)

Солнечные возмущающие гравитационные ускорения меньше возмущающих земных ускорений на два порядка. Они очень слабо влияют на траекторию движения космического аппарата.

Проекция возмущающего земного ускорения на направление селеноцентрической скорости (толстая линия) на значительной части рассматриваемой траектории отрицательна. Только на временном интервале от 95.383 суток до 96.256 суток эта проекция положительна. Максимальная величина отрицательной проекции возмущающего ускорения от Земли на направление селеноцентрической скорости весьма велика. Она примерно равна  $0.5 \text{ мм}/c^2$ . Таким образом, на рассматриваемой траектории возмущающее земное гравитационное ускорение активно уменьшает селеноцентрическую скорость КА, уменьшает константу энергии селеноцентрической оскулирующей орбиты КА. Убывание энергии селеноцентрического движения КА приводит к временному захвату Луной космического аппарата. Интересно и то, что и радиальная и бинормальная проекции возмущающего гравитационного от Земли достигают значительных величин, что приводит к значительным изменениям других элементов оскулирующей селеноцентрической орбиты.

На рисунке 4.26 показано изменение нескольких оскулирующих элементов геоцентрической траектории космического аппарата. Рассмотрен временной

интервал до 90 суток перелета. На левом рисунке показано изменение оскулирующего эксцентриситета. Видно, как солнечное гравитационное ускорение уменьшает эксцентриситет от начального значения промежуточной орбиты



(0.988636) до 0.447511 на 90-ые сутки перелета.

Рис. 4.26 – Оскулирующие элементы геоцентрической орбиты космического аппарата как функции времени (сутки) на первых 90 суток перелета. Левый рисунок – эксцентриситет. Средний рисунок – фокальный параметр (пунктирная линия) и радиус перигея (тыс. км). Правый рисунок - радиус апогея (млн. км)

На центральном рисунке показано изменение фокального параметра (пунктирная линия) и радиуса перигея (сплошная линия) оскулирующей геоцентрической орбиты. Интересно то, что эффективное увеличение этих элементов благодаря солнечному возмущению на большом начальном участке траектории сменяется некоторым уменьшением в конце рассматриваемого временного интервала. На правом рисунке показано изменение радиуса апогея оскулирующей геоцентрической орбиты. Этот элемент активно убывает в конце рассматриваемого временного интервала.

На рисунке 4.26 показано изменение расстояния КА от точки либрации ( $D$ ) на всей траектории перелета и на последних 15-ти сутках перелета. Минимальное расстояние КА от точки либрации (25062 км) достигается на 93.502 сутки полета.

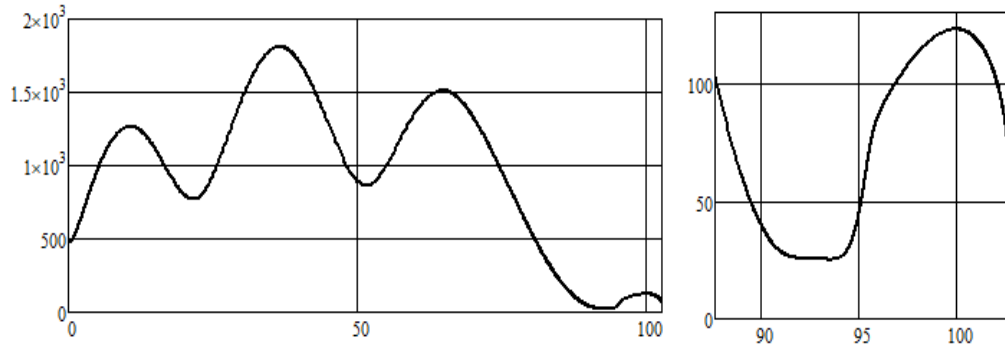


Рис. 4.26 – Расстояние КА от точки либрации ( $D$ , тыс. км) как функции времени ( $t$ , сутки) на всей траектории перелета (левый рисунок) и на последних 15-ти сутках полета (правый рисунок)

В момент наибольшего сближения КА с точкой либрации геоцентрический радиус-вектор КА равен 421.1 тыс. км. Геоцентрический радиус вектор точки либрации в этот момент времени 435.0 тыс. км. То есть КА расположен ближе к Земле, чем точка либрации на почти 13.9 тыс. км. По-видимому, этим объясняется то, что радиусы апсидальных точек оскулирующей геоцентрической орбиты КА в этот момент времени меньше радиусов апсидальных точек оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации. Например, радиус перигея орбиты КА меньше радиуса перигея оскулирующей орбиты точки либрации на 18.9 тыс. км.

На рисунке 4.27 показано изменение константы энергии оскулирующей селеноцентрической орбиты как функции времени полета. Видно, что на 72.239 сутки полета эта константа становится отрицательной и продолжает уменьшаться. Происходит «захват» КА Луной. В момент, когда КА находится на минимальном расстоянии до точки либрации (93.502 сутки полета), константа энергии селеноцентрического движения КА равна  $-0.119 \text{ км}^2/\text{с}^2$ . Эта точка на графике показана черным ромбом.

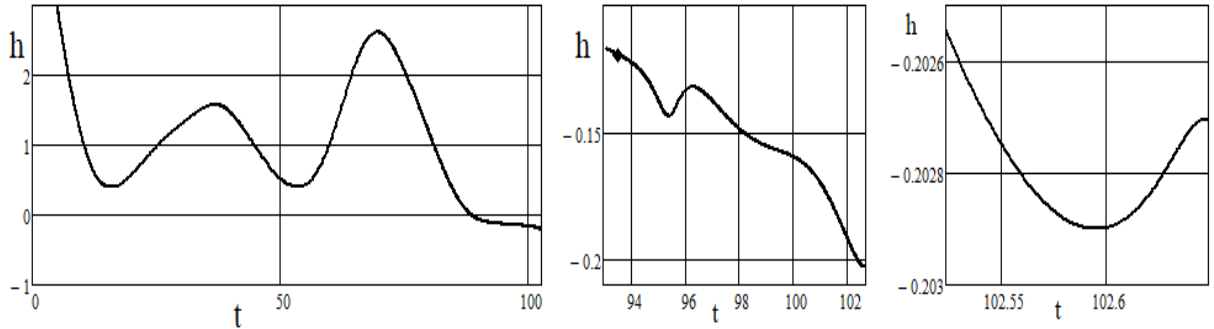


Рис. 4.27 – Изменение константы энергии селеноцентрического движения ( $\text{км}^2/\text{с}^2$ ) как функции времени (сутки) на траектории перелета. Слева - на всей траектории перелета. В центре – на последних 10-ти сутках перелета. Справа - на последних трех часах перелета

Интересно заметить, что константа энергии селеноцентрической орбиты даже на последних сутках полета изменяется значительно. На правом рисунке 4.27 показано изменение этого элемента оскулирующей селеноцентрической орбиты на последних трех часах перелета. За эти 3 часа величина селеноцентрического радиуса вектора КА уменьшается с 11290.4 км до 1838 км. А гравитационные возмущения от Земли немонотонно изменяют константу энергии селеноцентрического движения.

Перед сообщением КА тормозного импульса скорости константа энергии оскулирующей селеноцентрической орбиты равна  $-0.203 \text{ км}^2/\text{с}^2$ . В этот момент времени элементы оскулирующей селеноцентрической орбиты оказались такими: эксцентриситет 0.924007, радиус периселения 1837.99956 км, радиус апоселения 46534.615 км, В этот момент истинная аномалия оскулирующей орбиты  $359.906^\circ$ .

#### *Выводы численного анализа рассматриваемой траектории*

На проанализированной низкоэнергетической траектории перелета КА осуществил гравитационный маневр у Луны, сблизившись с нею на расстояние 14703.7 км на 95.431 сутки перелета. За счет гравитационного маневра КА существенно уменьшил свою геоцентрическую скорости. Интересно то, что при этом константа энергии селеноцентрической оскулирующей орбиты немного

увеличилась, оставаясь отрицательной. Константа энергии селеноцентрической оскулирующей орбиты стала отрицательной за счет гравитационных солнечных возмущений ещё на геоцентрической участке траектории перелета (на 72.239 сутки полета) и осталась отрицательной на всём дальнейшем перелете.

Проанализированная низкоэнергетическая траектория перелета к Луне проходят через окрестность точки либрации L2 системы Земля-Луна. Минимальное расстояние до этой точки либрации оказалось равным 25.1 тыс. км, что несколько больше варианта траектории, который был рассмотрен ранее. В момент минимального сближения КА с точкой либрации КА находится ближе к Земле, чем точка либрации (на 13.9 тыс. км). По-видимому, этим объясняется то, что радиусы перигея и апогея оскулирующей орбиты КА в момент минимального сближения с точкой либрации оказались меньше радиусов перигея и апогея оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации. Отметим, что это обстоятельство не помешало тому, что, используя в качестве начального приближения траекторию с минимальным суммарным промахом точки либрации  $I$  (4.2), получить траекторию временного захвата КА Луной. В момент пролета точки либрации селеноцентрическая константа энергии отрицательна ( $-0.119 \text{ км}^2/\text{с}^2$ ).

### 4.2.3 Анализ перелетной траектории КА с промежуточным импульсом скорости

Проанализируем низкоэнергетическую перелетную траекторию с промежуточным импульсом скорости. Основные характеристики рассматриваемой траектории приведены в Таблице 5.3.

Таблица 4.3. Основные характеристики рассматриваемой траектории перелета

Характеристика	Значение характеристики
Дата старта	29 марта 2024
Юлианская дата старта	2460399.328698
Время, прошедшее от 1 января 2024 года до даты старта $T_{st}$ сутки	88.828698
Радиус апогея промежуточной геоцентрической орбиты ( $r_a$ ) тыс. км	1149.7275
Величина первого импульса скорости, м/с	3194.75421
Долгота восходящего узла околоземной орбиты ( $\Omega$ )	-0.001514°
Аргумент перигея промежуточной геоцентрической орбиты ( $u_o$ )	-0.243218°
Полное время перелета, сутки	94.983357
Время сообщения КА промежуточного импульса скорости, сутки	93.132236
Время перелета на селеноцентрическом участке траектории, сутки	1.851122
Величина промежуточного импульса скорости. м/с	36.715363
Прямое восхождение промежуточного импульса скорости	-45.694798°
Склонение промежуточного импульса скорости	48.834499°
Величина тормозного импульса скорости при переходе на целевую окололунную орбиту, м/с	640.016212
Радиальная компонента тормозного импульса скорости при переходе на целевую окололунную орбиту, м/с	-12.085190
Трансверсальная компонента тормозного импульса скорости при переходе на целевую окололунную орбиту, м/с	- 639.902102
Сумма величин тормозного и промежуточного импульсов скорости (рассматривалась как критерий оптимизации), м/с	<b>676.731576</b>



На траектории перелета есть промежуточный импульс скорости. Он сообщается КА на 93.13 сутки перелета и равен 36.715 м/с. Последний импульс скорости (импульс скорости при переходе на окололунную орбиту) равен 640.016 м/с. Он является практически чисто тормозным. Радиальная селеноцентрическая скорость КА в конечный момент траектории перелета довольно мала (12.085 м/с). Траектория КА практически касается конечной целевой окололунной орбиты.

Полученная траектория является низкоэнергетической. Суммарный импульс скорости в окрестности Луны (сумма величины тормозного и промежуточного импульсов скорости, рассматриваемая как критерий оптимизации) равен 676.73 м/с. Этот суммарный импульс скорости существенно меньше (более чем на 100 м/с) тормозного импульса скорости традиционных прямых перелетов на низкую окололунную орбиту.

На рисунке 4.28 приведены проекции геоцентрической траектории на плоскость эклиптики  $x$ - $y$  (слева сверху), на плоскость  $z$ - $y$  (справа сверху) и на плоскость  $x$ - $z$  (внизу). Пунктирной линией показаны проекции геоцентрической орбиты Луны. Черным ромбом показано положение точки либрации в момент максимального сближения КА с ней.

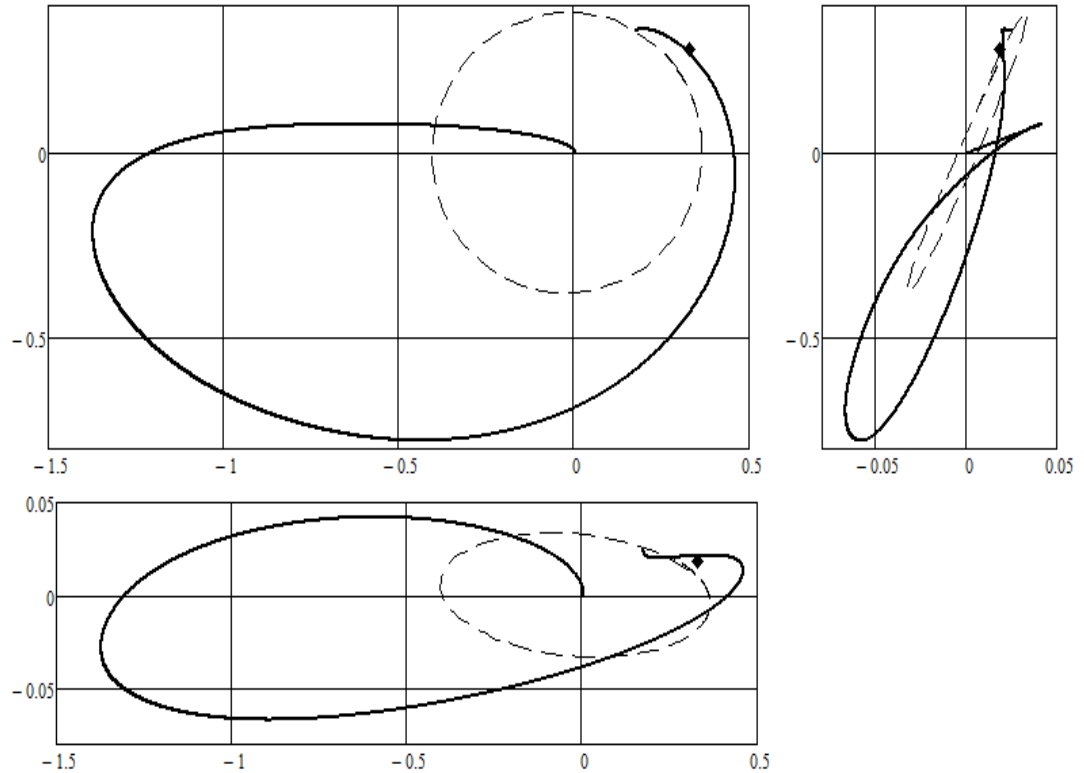


Рисунок 4.28 - Проекция геоцентрической траектории КА при полете к Луне: на плоскость эклиптики  $x$ - $y$  (слева сверху), на плоскость  $z$ - $y$  (справа сверху) и на плоскость  $x$ - $z$  (внизу). Единица расстояния 1 млн. км. Пунктирная линия – орбита Луны

КА, двигаясь по своей траектории, удаляется от Земли на расстояние немного меньшее 1.4 млн. км (1392081.061 км).

На рисунке 4.29 та же геоцентрическая траектория показана в пространстве. Орбита Луны показана точками.

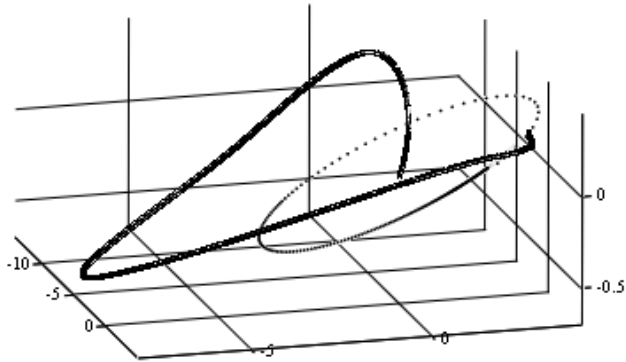


Рисунок 4.29. Геоцентрическая траектория КА перелета к Луне в пространстве.  
Точками показана орбита Луны

Из рисунков 4.28 и 4.29 видно, как сильно вдоль траектории изменяется элементы оскулирующей орбиты, характеризующие положение плоскости оскулирующей орбиты в пространстве.

На рисунке 4.30 показано изменение наклона оскулирующей геоцентрической орбиты вдоль геоцентрического участка траектории перелета. Наклонение оскулирующей геоцентрической орбиты (по отношению к плоскости эклиптики) за счет солнечного возмущения на геоцентрическом участке траектории довольно быстро уменьшается от  $28.753^\circ$  (в начале перелета) до значений близких к наклонению орбиты Луны по отношению к плоскости эклиптики. На этом же рисунке показано изменение долготы восходящего узла оскулирующей геоцентрической орбиты вдоль геоцентрического участка траектории перелета. Солнечные возмущения сначала увеличивают этот элемент орбиты до значения почти равного  $2.7^\circ$ , а затем солнечные гравитационные возмущения уменьшают этот элемент орбиты.

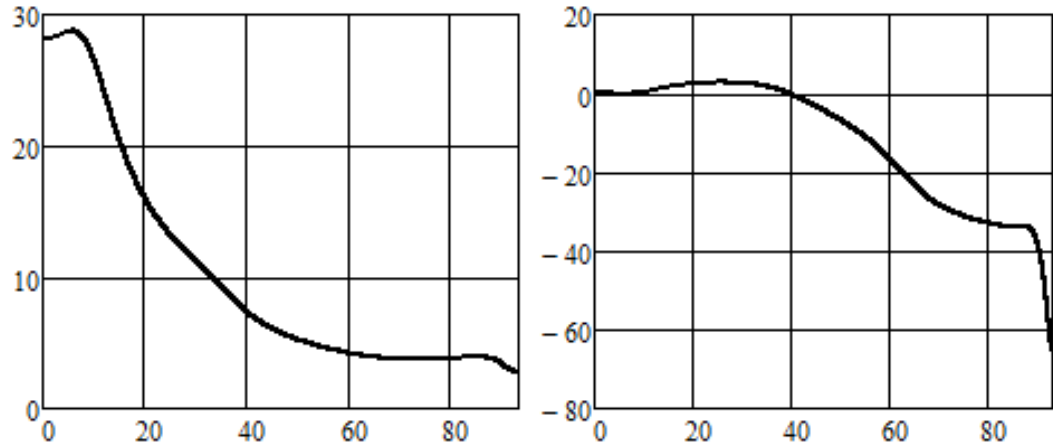


Рисунок 4.30. Изменение наклона (левый рисунок, град.) и долготы восходящего узла (правый рисунок, град.) оскулирующей геоцентрической орбиты как функции времени (сутки) на траектории перелета КА к Луне

На рисунке 4.31 показано изменение эксцентриситета, радиуса перигея и радиуса апогея оскулирующей геоцентрической орбиты вдоль геоцентрического участка траектории перелета.

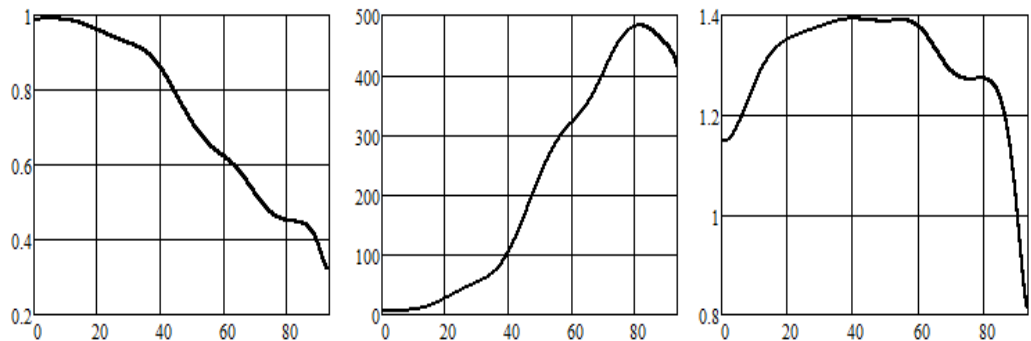


Рисунок 4.31. Эксцентриситет (левый рисунок), радиус перигея (центральный рисунок, тыс. км) и радиус апогея (правый рисунок, млн. км) оскулирующей геоцентрической орбиты как функции времени полета (сутки) на геоцентрическом участке траектории перелета КА к Луне

Видно, что солнечные возмущения на значительной части траектории перелета

- уменьшают эксцентриситет оскулирующей геоцентрической орбиты (скругляют орбиту);
- увеличивают радиус перигея оскулирующей геоцентрической орбиты, приближая этот радиус к величине немного большей радиуса геоцентрической орбиты Луны (к величине радиуса перигея оскулирующей геоцентрической орбиты точки либрации L2);
- увеличивают радиус апогея оскулирующей геоцентрической орбиты на начальном этапе анализируемой траектории.

На рисунке 4.32 показан в крупном масштабе участок геоцентрической траектории при подлете КА к орбите Луны. Красной и синей линиями показаны соответственно геоцентрический и селеноцентрический участки траектории. Черной пунктирной линией показан участок лунной геоцентрической орбиты. На рисунке (особенно на проекциях траектории КА на плоскости  $x$ - $z$  (нижний рисунок) и  $z$ - $y$  (верхний правый рисунок) видна угловая точка траектории при переходе от геоцентрического участка к селеноцентрическому участку. Этот излом траектории объясняется промежуточным импульсом скорости, который ступенчато изменяет вектор скорости КА. Напомним, что промежуточный импульс скорости в рассматриваемой постановке задачи дается на границе геоцентрического и селеноцентрического участков.

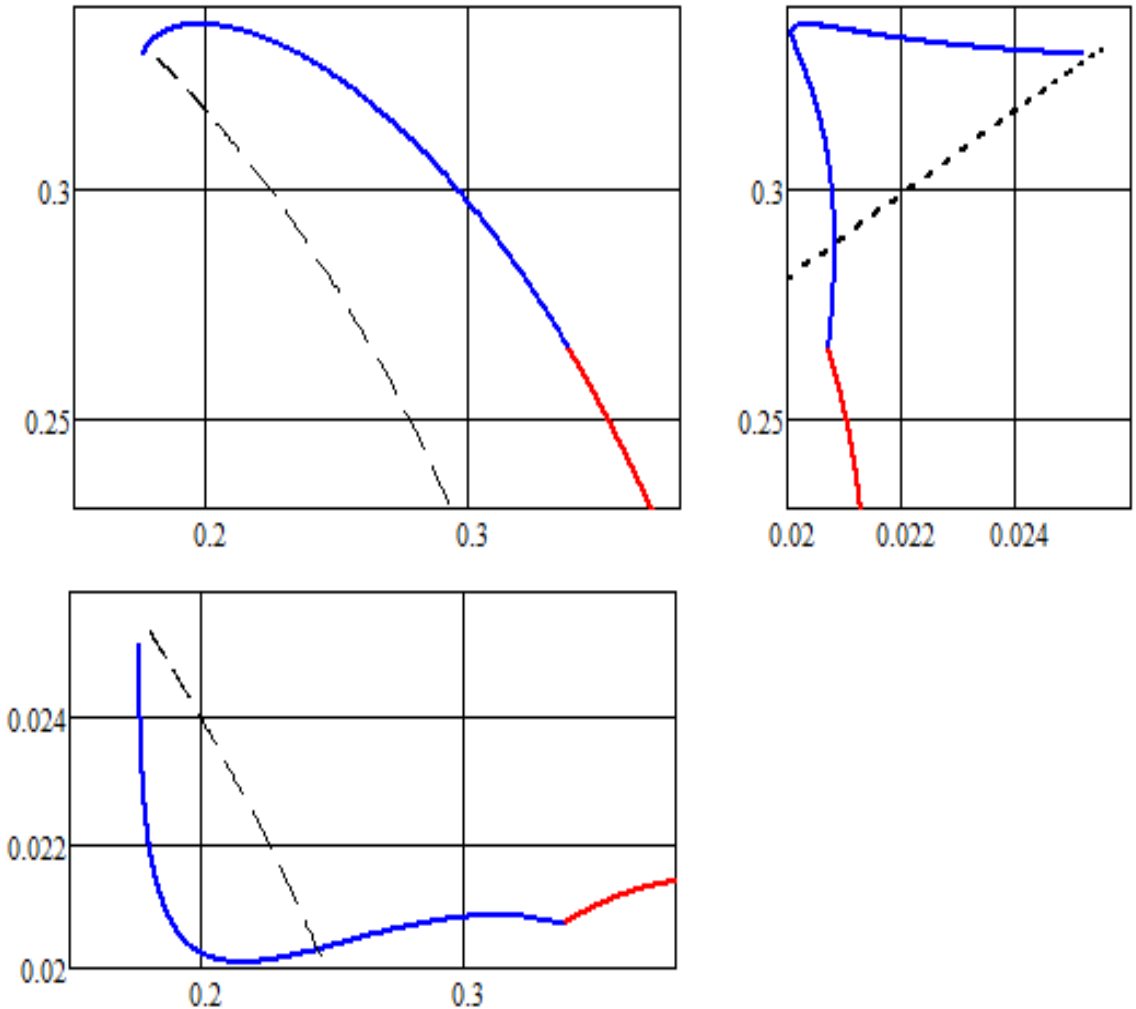


Рисунок 4.32. Проекция участка геоцентрической траектории КА при его подлете к лунной орбите. Красная линия - траектория КА на геоцентрическом участке, синяя линия – траектория КА на селеноцентрическом участке, черная пунктирная линии – участок лунной геоцентрической орбиты. Единица расстояния 1 млн. км.

На рисунке 4.33 показаны проекции селеноцентрической траектории КА при его перелете на окололунную орбиту. Как и на предыдущих рисунках, красная линия описывает траекторию на геоцентрическом участке, синяя – на селеноцентрическом участке.

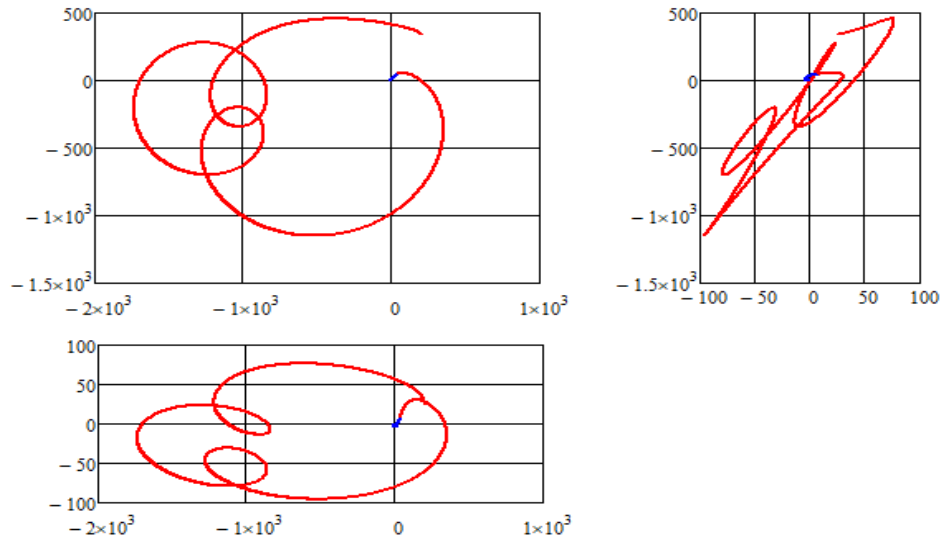


Рисунок 4.33. Проекция селеноцентрической траектории КА на всем его перелете к окололунной орбите на селеноцентрическую эклиптическую систему координат. Слева сверху - проекция на плоскость эклиптики x-y. Справа сверху - проекция на плоскость эклиптики z-y. Внизу – проекция на плоскость x-z. Единица расстояния 1 тыс. км

В крупном масштабе окололунный участок селеноцентрической траектории показан на рисунке 4.34. Кроме самой траектории перелета КА тонкой линией на рисунке показана и окололунная орбита, на которую выводится КА.

Рисунок 4.34. Проекция окололунного участка селеноцентрической траектории КА при его перелете к окололунной орбите на селеноцентрическую экваториальную систему координат. Тонкой линией показаны проекции окололунной орбиты, на которую выводится КА. Единица расстояния 1 тыс. км

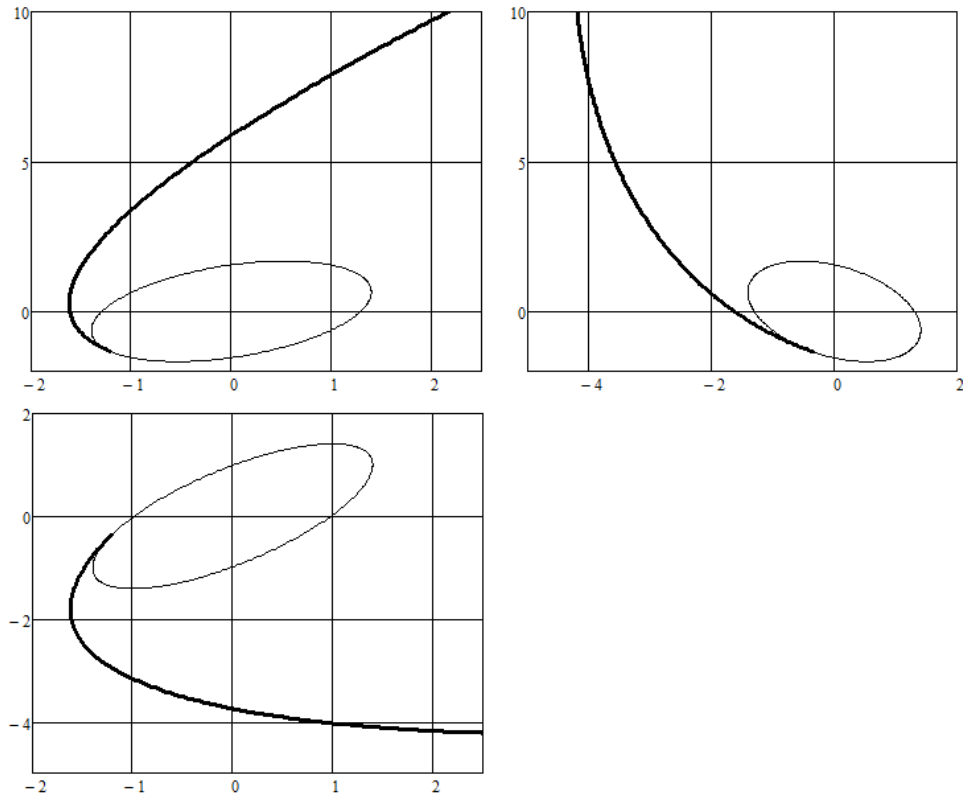


Рисунок 4.34. Проекция окололунного участка селеноцентрической траектории КА при его перелете к окололунной орбите на селеноцентрическую экваториальную систему координат. Тонкой линией показаны проекции окололунной орбиты, на которую выводится КА. Единица расстояния 1 тыс. км

Из рисунка видно, что траектория КА практически касается окололунной орбиты, на которую КА выводится. При этом требуемый импульс торможения, проанализированный выше, является очень близким к трансверсальному импульсу скорости.

На рисунке 4.35 показано изменение расстояния КА до точки либрации (точки L2 системы Земля-Луна) вдоль траектории КА. Слева показано изменение расстояния вдоль всей траектории КА. Справа - выделена область в конце перелета, когда КА сближается с точкой либрации. Расстояния приводятся в безразмерных единицах (100 тыс. км). Из рисунка видно, что минимальное сближение КА с рассматриваемой точкой либрации происходит на 93.455 сутки полета КА. Само минимальное расстояние оказывается равным 14937.59 км. Интересно то, что



промежуточный импульс скорости сообщается КА несколько ранее (на 93.132 сутки полета).

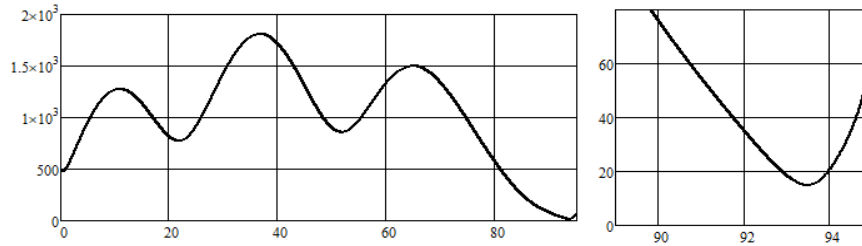


Рисунок 4.35. Расстояние КА до точки либрации (100 тыс. км) как функция времени полета (сутки) вдоль траектории КА. Единица расстояния 1 тыс. км

На рисунке 4.36 показано изменение селеноцентрической константы энергии оскулирующей селеноцентрической траектории КА вдоль траектории полета. Слева - вдоль всей траектории КА, справа - на характерных участках траектории перелета. Красный цвет используется для того, чтобы показать характеристики на геоцентрическом участке траектории, синий – для селеноцентрического участка траектории. Черным ромбом показано константа энергии селеноцентрического движения КА в момент максимального сближения КА с ней.

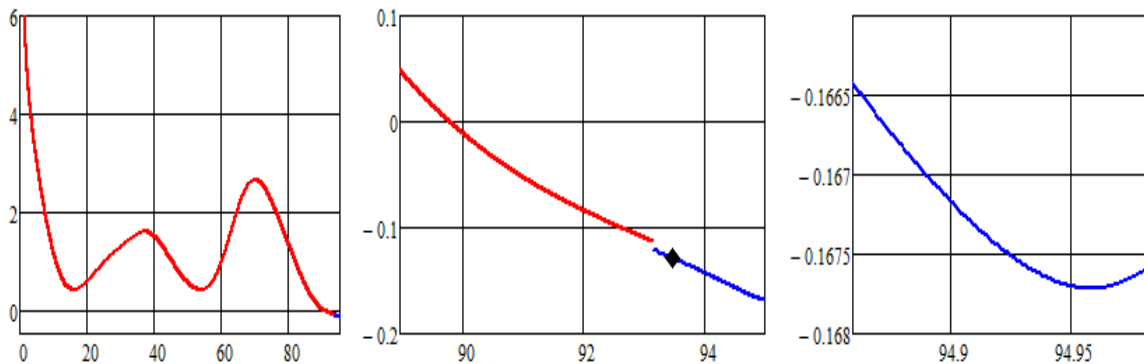


Рисунок 4.36. Константа энергии селеноцентрической оскулирующей орбиты КА ( $\text{км}^2/\text{с}^2$ ) как функция времени полета (сутки). Левый рисунок – на всей траектории перелета. Центральный рисунок – на временном интервале, включающем граничную точку геоцентрического и селеноцентрического участков. Правый рисунок – на последних 3 часах перелета

Анализ показывает, что селеноцентрическая константа энергии оскулирующей селеноцентрической траектории становится отрицательной на 89.77 сутки полета. Эта константа остается отрицательной на всей последующей траектории КА. Промежуточный импульс скорости на 93.132 сутки полета ступенчато уменьшает константу энергии селеноцентрического движения, обеспечивая дополнительные возможности обеспечить «захват» КА Луной.

Интересно и то, что участок селеноцентрической траектории, на котором константа практически не изменяется, очень кратковременен. Анализ траектории подлета КА к Луне, на котором траекторию КА можно рассматривать в рамках модели ограниченной задачи двух тел (Луна-КА), очень мал. На всем остальном временном интервале при анализе селеноцентрической траектории необходимо учитывать гравитационные возмущения, прежде всего, от Земли.

Интересно отметить, что константа энергии оскулирующей селеноцентрической орбиты стала отрицательной на 89.77 сутки полета, то есть задолго до максимального сближения КА с точкой либрации (93.46 сутки полета).

На рисунке 4.37 показано изменение расстояния КА от Луны как функции времени вдоль всей траектории перелета (левый рисунок). На заключительных пяти сутках перелета (правый рисунок) это расстояние монотонно уменьшается. В момент максимального сближения КА с точкой либрации (93.455 сутки перелета) селеноцентрический радиус вектор КА равен 53.864 тыс. км. Этот момент показан черным квадратом на правом рисунке.

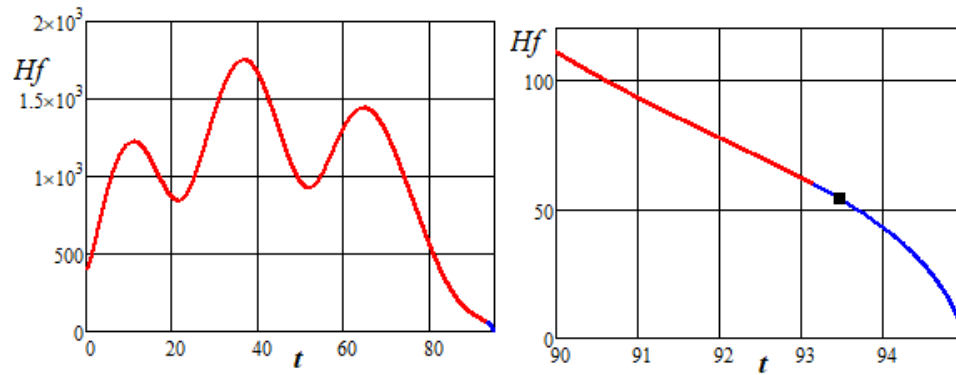


Рисунок 4.37. Изменение расстояния КА от Луны (тыс. км) как функция времени (сутки) вдоль траектории перелета. Слева – на всей траектории перелета. Справа - на последних 5-ти сутках перелета. Квадратом на правом рисунке отмечена точка максимального сближения КА с точкой либрации.

Промежуточный импульс скорости сообщается КА немного ранее, когда селеноцентрический радиус вектор КА равен 59.53 тыс. км.

### Выводы численного анализа рассматриваемой траектории

На проанализированной низкоэнергетической траектории перелета КА существует промежуточный импульс скорости. Предполагается, что он будет осуществляться тем же двигателем КА, которым реализуется торможение при переходе на окололунную орбиту. Интересно то, что попытка гладкого продолжения полученной траектории по величине промежуточного импульса скорости, обеспечивающая уменьшение величины промежуточного импульса скорости до его нулевого значения не удалась. Судя по всему, имеет место локальный минимум рассматриваемого критерия при ненулевой величине промежуточного импульса скорости. Поэтому методами локального поиска не удастся сделать промежуточный импульс скорости равным нулю. Поэтому, по-видимому, следует считать, что траектории с промежуточным импульсом скорости являются отдельным типом низкоэнергетических лунных перелетов.

Стоит отметить, что из трех представленных траекторий траектория с промежуточным импульсом скорости самая затратная. Суммарный импульс

скорости при её реализации равен 676.73 м/с. В то время как для реализации ранее рассмотренных траекторий требуемый импульс скорости был значительно меньше (638.1 и 632.2 м/с). Но утверждать, что в общем случае низкоэнергетические траектории с промежуточным импульсом скорости более затратные траектории, конечно, нельзя. Следует анализировать все возможные типы траекторий перелета.

Отметим и то, что на всех трех проанализированных траекториях КА проходит в окрестности точки либрации L2 системы Земля-Луна. На первой траектории максимальное сближение КА с этой точкой было 18.6 тыс. км, на второй – 25.1 тыс. км, на третьей – 14.9 тыс. км. Имея это в виду, можно полагать, методическая идея разработанного метода проектирования низкоэнергетических лунных траекторий, связанная с условиями прохождения точки либрации системы Земля – Луна, может считаться корректной и плодотворной.

#### **4.3 Основные параметры схем перелета найденных низкоэнергетических траекторий**

В настоящем разделе приведены основные параметры найденных траекторий низкоэнергетического перелета для диапазона дат старта в марте – апреле 2024 года. Цель исследования – показать возможность использования низкоэнергетических траекторий перелета в некотором диапазоне дат старта, который определяет окно запуска.

В разделе представлены две группы траекторий. Одна (первая) группа траекторий была получена с использованием методики, использующей возможности промежуточного импульса скорости. Вторая группа траекторий была получена без введения в методику промежуточного импульса скорости. Для перечисленных групп траекторий в качестве начального приближения использовалось одно из полученных решений. Дата старта фиксировалась (перебиралась в рассматриваемом диапазоне), для нахождения остальных параметров схемы перелета использовался метод,

основанный на модификации эволюционной стратегии с адаптацией матрицы ковариации, описанный в разделе 3.5.3.

Отдельно представим анализ низкоэнергетических траекторий с промежуточным импульсом скорости и без этого импульса скорости.

#### ***4.3.1 Основные параметры низкоэнергетических траекторий с промежуточным импульсом скорости***

В таблице 4.4 приведены основные выбираемые параметры схемы низкоэнергетического перелета с промежуточным импульсом скорости для ряда дат окна запуска в марте...апреле 2024 года.

**Таблица 4.4. Основные выбираемые параметры схемы низкоэнергетического перелета для дат старта в марте апреле 2024 года**

	Дата старта 2024 г	$\Delta T_{st}$ сутки	$r_a$ млн. км	$\Omega$ радиан	$u_o$ радиан	$t_{geo}$ сутки	$\Delta V_c$ м/с	$\alpha_{vc}$ радиан	$\delta_{vc}$ радиан	$t_{sel}$ сутки
1	22.965 марта	81,965370	1.0836538	0,0952542	-0,182588	94,0587230	0,0000019	1,2569291	1,2867109	9,5226825
2	23.178 марта	82,177705	1.0964207	0,1067304	-0,196674	92,1902048	0,0000000	2,4199971	2,0555312	10,5307668
3	24.163 марта	83,163092	1.1286353	0,0560879	-0,094722	93,0001405	0,0000000	0,8717317	1,1456330	9,5851436
4	24.783 марта	83,782908	1.1446343	0,0564705	-0,094840	92,8314853	0,0000000	0,5790013	0,9533756	9,5786121
5	25.835 марта	84,834599	1.1459307	-0,0000000	0,0737296	92,9999334	0,0000000	0,6677347	1,0554342	9,5815334
6	27.077 марта	86,077070	1.1412072	0,0612902	0,0295092	93,0133126	0,0000000	0,8174097	1,0541336	9,5582331
7	28.052 марта	87,051988	1.1377832	0,0734507	0,0217003	93,0432226	0,0000000	0,9131592	1,1790860	9,5488488
8	29.071 марта	88,069550	1.1445601	0,0003466	0,0411101	92,9970626	0,0000000	0,7728097	1,0586279	9,5641885
9	30.052 марта	89,051765	1.1429067	-0,0001037	0,0367635	92,9975549	0,0000000	0,7779404	1,0475625	9,5658502
10	30.983 марта	89,983262	1.134550	-0,0010496	0,0301480	92,910777	0,0000001	0,9645379	0,8239924	9,5655094
11	3.128 апреля	93,128293	1.1531768	-0,1435616	0,22564671	93,0120619	0,0000000	0,7418449	0,9240804	9,5906479
12	3.912 апреля	93,912052	1.1316469	0,0471736	-0,0602989	92,9632894	0,0000058	0,2988457	0,8461251	9,4653871
13	5.023 апреля	95,023263	1.1435943	-0,0025446	0,03812397	93,000618	0,0000000	0,7916651	1,0485452	9,5636640

*Пояснения.*  $\Delta T_{st}$  – число суток, прошедших с 0 часов 1 января 2024 года

Результаты представлены до 7 десятичных знаков.

Отрицательный импульс скорости следует интерпретировать как импульс скорости противоположного направления. То есть прямое восхождение этого импульса равно сумме  $\alpha_{vc}$ , приведенное в таблице, и 180 градусов. Склонение этого импульса отличается от указанного склонения в таблице знаком.

Анализ результатов, представленных в приведенной таблице, показывает, что практически для всех вариантах удалось добиться почти нулевого промежуточного импульса скорости. Только для трех вариантов из 13 величина промежуточного импульса скорости оказалась больше  $10^{-7}$  м/с. Самая большая величина промежуточного импульса скорости (вариант 12) оказалась равна  $59 \cdot 10^{-7}$  м/с.

Имея в виду то, что реализация траектории перелета обязательно потребует коррекции траектории перелета, можно считать, что найденные схемы перелета не требуют промежуточного импульса скорости, а требуемую массу топлива оценивать по импульсам скорости в начальной и конечной точках перелета. Эти импульсы скорости для рассмотренных вариантов траекторий таблицы 4.4 приведены в таблице 4.5.

**Таблица 4.5. Требуемые для перелета импульсы скорости при старте с начальной околоземной орбиты  $\Delta V_1$  и выхода на окололунную орбиту  $\Delta V_{br}$  для вариантов траекторий, помещенных в таблицу 4.4**

	Дата старта 2024 г	$\Delta T_{st}$ сутки	$\Delta V_1$ м/с	$\Delta V_{br}$ м/с	$\Delta V_{br} + \Delta V_c$ м/с
1	22.965 марта	81,965370	3192.8519	639.3398	639.3398
2	23.178 марта	82,177705	3193.2372	639.9194	639.9194
3	24.163 марта	83,163092	3194.1710	638.6633	638.6633
4	24.783 марта	83,782908	3194.6154	638.2972	638.2972
5	25.835 марта	84,834599	3194.6508	646.1167	646.1167
6	27.077 марта	86,077070	3194.5212	657.5566	657.5566
7	28.052 марта	87,051988	3194.4266	660.9653	660.9653
8	29.071 марта	88,069550	3194.6133	646.7520	646.7520
9	30.052 марта	89,051765	3194.5680	640.6290	640.6290
10	30.983 марта	89,983262	3194.3368	652.2327	652.2327
11	3.128 апреля	93,128293	3194.8476	648.6181	648.6181
12	3.912 апреля	93,912052	3194.2556	659.5583	659.5583
13	5.023 апреля	95,023263	3194.5868	661.3166	661.3166

Результаты по импульсам скорости представлены с точностью до 4 десятичных знаков. Поэтому значения столбцов для  $\Delta V_{br}$  и для суммы  $\Delta V_{br} + \Delta V_c$  совпадают.

Анализ результатов, представленных в таблице 4.5, показывает, что на полученных траекториях перелета к Луне с выводением КА на круговую окололунную орбиту первый импульс скорости (импульс при старте с околоземной орбиты) варьируется в диапазоне 3192.85...3194.85 м/с. Величина импульса скорости при переходе на окололунную орбиту изменяется в диапазоне 638.30...661.32 м/с. Этот импульс скорости значительно меньше аналогичного импульса скорости в схемах традиционных быстрых перелетов. Все полученные траектории являются низкоэнергетическими.



### ***4.3.2 Основные параметры низкоэнергетических траекторий для исследованного диапазона дат старта, полученные с использованием методики без введения промежуточного импульса скорости***

Проанализированные варианты траекторий низкоэнергетического перелета были получены с использованием методики с введением промежуточного импульса скорости. При этом число выбираемых параметров схемы перелета весьма велико. Он рассматривается равным 9. Но в итоге во всех приведенных вариантах промежуточный импульс скорости оказался очень малым. Проанализируем возможность отказаться от промежуточного импульса скорости как методического приема. Количество степеней свободы (число выбираемых параметров схемы перелета) при этом существенно сокращается (на 4 единицы). Принципиально могут появиться трудности при решении задачи условной минимизации. В настоящем разделе представлен анализ вариантов низкоэнергетических траекторий перелета, полученных без введения промежуточного импульса скорости.

В таблице 4.6 приведены основные выбираемые параметры схемы низкоэнергетического перелета без промежуточного импульса скорости для ряда дат окна запуска в марте...апреле 2024 года. Все эти траектории были получены при использовании в качестве начального приближения следующих параметров схемы перелета:

- дата старта 24 марта 2024 года (83.78290 суток от 0 часов 1 января 2024 года, юлианская дата 2460394.2829);
- радиус апогея промежуточной орбиты 1.1446 млн. км;
- долгота восходящего узла начальной орбиты – 3.236°
- аргумент широты точки старта с начальной орбиты – -5.434°
- время геоцентрического перелета –92,83148531 суток
- время селеноцентрического перелета –9,578612 суток.

**Таблица 4.6. Основные характеристики схемы низкоэнергетического перелета для дат старта в марте апреле 2024 года. Промежуточный импульс скорости не используется**

	Дата старта 2024 г	$\Delta T_{st}$ сутки	$r_a$ млн. км	$\Omega$ радиан	$u_0$ радиан	$t_{geo}$ сутки	$t_{sel}$ сутки	$t_{полное}$ сутки	$\Delta V_1$ м/с	$\Delta V_{br}$ м/с
1	22.50 марта	81.5616259	1.0652899	0.0866977	-0.1882159	93.1750123	9.5456891	102.7207013	3192.2814	668.97117
2	22.90 марта	81.9117114	1.0909083	0.1254713	-0.2381147	94.4322984	10.1757655	104.6080639	3193.0720	639.14735
3	23.01 марта	82.0106097	1.0842606	0.0855425	-0.1665553	94.958549	9.7028819	104.6614311	3192.8704	638.66553
4	24.50 марта	83.3581320	1.1356475	0.0621647	-0.1077215	93.1846364	9.6146059	102.7992423	3194.3673	638.32765
5	25.02 марта	84.0222128	1.1479336	0.0432602	-0.0693955	93.0584734	9.5866393	102,6451127	3194.7054	638.54591
6	25.37 марта	84.3710982	1.1521445	0.0637466	-0.0948391	97.0324642	10.7480055	107.7804697	3194.8197	632.19014
7	26.76 марта	85.7664850	1.1507200	0.0352167	0.0352167	93.0681682	9.5879790	102.6561473	3194.7811	650.17076
8	29.00 марта	88.0128412	1.1559096	0.0318657	-0.0642442	92.9989973	9.5798592	102.5788564	3194.9211	635.68003
9	30.02 марта	89.0229848	1.1498388	0.0284865	-0.0561416	93.0557121	9.5880054	102.6437176	3194.7572	632.05937
10	30.98 марта	89.98448276	1.15145083	0.0197405	0.0197405	93.0288387	9.5948489	102.6236876	3194.8009	638.24280
11	2.56 апреля	92.5638497	1.14241743	0.0181236	0.0181236	93.0470252	9.5880145	102.6350397	3194.5545	650.66400
12	3.55 апреля	93.5502451	1.14819903	0.0036770	0.0036770	93.0615930	9.5809906	102.6425836	3194.7127	653.61777
13	4.27 апреля	94.2790333	1.13911328	0.0252058	0.0252058	91.6769388	9.6193081	101.2962469	3194.4634	659.42105
14	4.72 апреля	94.7280983	1.14420362	0.0459692	0.0459692	93.0639459	9.5860629	102.6500088	3194.6036	666.76674
15	5.01 апреля	95.0135069	1.14751032	0.0354880	0.0354880	93.0639638	9.5896178	102.6535816	3194.6939	666.96465

*Пояснение:*  $\Delta T_{st}$  – число суток, прошедших с 0 часов 1 января 2024 года

Анализ результатов, приведенных в таблице 4.6, показывают, что для диапазона дат старта с 22 марта до 4 апреля 2024 года существуют низкоэнергетические схемы перелета. Оценка характеристических скоростей рассматриваемого перелета может базироваться на следующих величинах требуемых для перелета импульсов скорости. При старте с околоземной орбиты требуемый разгонный импульс скорости находится в диапазоне 3192.28...3194.92 м/с. Он обеспечивает выход КА на промежуточную геоцентрическую орбиту, радиус апогея которой находится в диапазоне 1.065...1.155 млн. км. Время перелета на окололунную орбиту составляет от 102.7 до 107.8 суток. Тормозной импульс скорости при переходе на окололунную орбиту находится в диапазоне от 632.1 м/с до 669.0 м/с.

Для сравнения приведем результаты, полученные при проектировании траекторий низкоэнергетических лунных перелетов, полученных и опубликованные другими авторами. Джеффри. С. Паркер в работе [96, 97] представил низкоэнергетическую траекторию перелета продолжительностью 83.483 суток. Импульс скорости при выходе на окололунную орбиту равен 669.3 м/с. Информация о более экономичной траектории перелета с импульсом скорости при переходе на окололунную орбиту равным 648.4 м/с приведена в работе Эдварда А. Белбруно [56, 57, 58, 59]. Время перелета к Луне на траектории, полученной в упомянутой статье, составляет 95.342 суток. Можно считать, что качественно наши результаты хорошо совпадают с результатами исследований авторов перечисленных статей.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описан разработанный метод проектирования низкоэнергетических перелетов КА к Луне с выводением КА на низкую окололунную орбиту. Разработанный метод базируется на нескольких предположениях.

Основное предположение (или допущение) заключается в том, что пространство рассматриваемых возможных траекторий перелета сужается. Считается, что для достижения КА окрестности Луны с возможностью временного захвата КА Луной, траектория КА должна пройти через окрестность одной из коллинеарных точек либрации (L1 или L2) системы Земля-Луна. Точнее, при нахождении начального приближения для низкоэнергетической траектории лунного перелета метод предполагает поиск траектории КА, достигающей окрестности точки либрации. Дополнительно предполагается, что при достижении КА этой точки либрации вектор геоцентрической скорости КА должен удовлетворять следующим условиям: радиусы апсидальных точек геоцентрической оскулирующей траектории КА должны быть близки к радиусам апсидальных точек оскулирующей геоцентрической траектории точек либрации. Последнее предположение помогает обеспечить попадания КА в окрестность Луны с временным «захватом» КА Луной.

Другой особенностью метода является то, что при нахождении траектории проходящей через окрестность точки либрации с выполнением отмеченных условий, предлагается использовать полный перебор двух важнейших параметров схемы перелета (даты старта и радиуса апогея оскулирующей геоцентрической орбиты, на которую КА переводится импульсом скорости с начальной околоземной орбиты). Такой перебор позволяет преодолеть проблему многоэкстремальности рассматриваемой задачи, позволяет избежать «застывания» в окрестности локального экстремума при использовании итерационных процедур. На начальном

этапе разработанного метода не используются методы локального поиска, а используется полный перебор в пространстве двух важнейших параметров схемы перелета.

Еще одной важной особенностью разработанного метода является введение промежуточного импульса скорости. Эта особенность изначально рассматривалась как методический прием при поиске низкоэнергетической траектории КА. То есть предполагалось, что итоговая траектория не должна содержать промежуточного импульса скорости. Предполагалось, что величина промежуточного импульса скорости гладким продолжением должна быть уменьшена до пренебрежимо малого значения. Но в итоге было решено допустить небольшой ненулевой промежуточный импульс скорости. При этом критерием оптимальности предлагается рассматривать сумму величины промежуточного импульса скорости и величины импульса скорости при переходе на окололунную орбиту.

Работоспособность разработанного метода проектирования лунных низкоэнергетических перелетов продемонстрирована на примере низкоэнергетических траекторий перелета, проходящих через окрестность точки либрации L2 системы Земля – Луна, при старте в первой половине 2024 года. Приведен анализ нескольких траекторий низкоэнергетических перелетов, которые условно названы траекториями трех типов.

К траекториям первого типа отнесены траектории, на которых после прохождения окрестности точки либрации, КА монотонно сближается с Луной, достигает высоты конечной окололунной орбиты, после чего импульсом скорости переводится на эту орбиту.

К траекториям второго типа отнесены траектории, на которых после прохождения КА окрестности точки либрации селеноцентрический радиус вектор

КА изменяется немонотонно. КА сближается с Луной в промежуточной точке траектории перелета. На этом этапе перелета геоцентрическая траектория КА «качается» в окрестности лунной орбиты. Можно считать, что на этой траектории реализуется лунный гравитационный маневр, который способствует существенному уменьшению геоцентрической скорости КА.

К низкоэнергетическим траекториям третьего типа отнесены траектории, на которых используется промежуточный импульс скорости. На приведенном примере такой траектории промежуточный импульс скорости дается КА после прохождения им окрестности точки либрации. Этот импульс скорости немного уменьшает селеноцентрическую скорость КА и, естественно, константу энергии селеноцентрического движения, «помогая» Луне обеспечить временный «захват» её КА.

Приведенные в работе примеры показывают, что при лунных перелетах с выводом КА на низкую круговую окололунную орбиту высотой 100 км, используя траектории, проходящие через окрестность точки либрации L2 системы Земля–Луна, удастся уменьшить требуемый тормозной импульс скорости при переходе на конечную окололунную орбиту до 632...670 м/с. Такая величина импульса скорости существенно меньше (более чем на 17%) тормозного импульса скорости в традиционных схемах лунных перелетов. При использовании проанализированных схем перелета увеличивается стартовый импульс скорости и значительно увеличивается время перелета (с 4...5 суток до продолжительности более трех месяцев).

Дальнейшее развитие используемого в работе методического подхода может проводиться в перечисленных ниже направлениях. Интересным развитием анализируемой проблемы является постановка задачи с оптимизируемым числом

импульсов скорости. При этом возможно привлечь к исследованию соответствующие условия оптимизации, например, необходимые условия принципа максимума при оптимизации импульсных траекторий перелета.

При использовании локальных методов поиска (на втором и последующих этапах разработанного алгоритма) используются производные от условий движения в конечной точке траектории перелета. В настоящее время они вычисляются, используя алгоритм центральных разностей. В условиях высокой чувствительности рассматриваемой траектории добиться высокой точности этих производных – не просто. Возможное решение проблемы точности этих производных – использование аппарата комплексных чисел или дуальных чисел [82, 85, 86, 89, 104].

Вычисление производных с высокой точностью может дать возможность для оптимизации траектории перелета использовать необходимые условия оптимальности задачи на условный экстремум. Так как сами условия оптимальности содержат производные от характеристик траектории по её выбираемым параметрам, то использование локальных методов оптимизации будет невозможно без нахождения вторых производных. Появляется новая непростая проблема нахождения вторых производных от характеристик траектории в конце перелета по параметрам схемы перелета. Её решение может быть в использовании дуальных комплексных чисел [99].

Можно отметить и то, что в дальнейших исследованиях следует рассмотреть возможность введения дополнительного слагаемого в показатель  $J$  (3.1). Этот показатель обеспечивает выполнение определенных условий пролета окрестности точки либрации. Дополнительное слагаемое может обеспечить в момент пролета окрестности точки либрации близость плоскости геоцентрической оскулирующей орбиты космического аппарата к плоскости геоцентрической орбиты Луны.

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

КА	-космический аппарат;
L1	-точка либрации L1 в системе Земля-Луна;
L2	-точка либрации L2 в системе Земля-Луна;
ИСЗ	-искусственный спутник Земли;
ИСЛ	-искусственный спутник Луны;
ХРД	-химический ракетный двигатель;
РБ	-разгонный блок;
$\Omega$	-долгота восходящего узла околоземной орбиты;
$u_o$	-аргумент широты точки старта с околоземной орбиты;
$\Delta V_1$	-величина чисто разгонного импульса скорости при старте с околоземной орбиты;
$t_p$	-время перелета;
$T_{st}$	-время старта с околоземной орбиты;
$r_a$	-радиус апогея промежуточной геоцентрической орбиты;
$H_f$	-высота конечной круговой окололунной орбиты;
$t_1$	-время селеноцентрического перелета;
$t_{geo}$	-время геоцентрического перелета;

СМА-ES - covariance matrix adaption evolution strategy (стратегия эволюции адаптации ковариационной матрицы).



**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. В. К. Абалакин. Основы эфемеридной астрономии. URSS, 2020.
2. Арушанян О.Б., Залёткин С.Ф. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений на фортране. – М.: изд-во МГУ, 1990.
3. Н. А. Белова. Курс сферической астрономии. Недра, М.: 1971.
4. Бахвалов Н.С. Численные методы. – М.: Наука, 1973.
5. Банди Б. Методы Оптимизации. Вводный курс. М.: Радио и связь, 1988.
6. Белецкий В.В. Очерки о движении космических тел. Наука, Москва, 1977.
7. Вержбицкий В.М. Основы численных методов. – М.: Высшая школа, 2002.
8. Бордовицына Т.В., Авдюшев В.А. Теория движения искусственных спутников Земли. Аналитические и численные методы: Учеб. пособие. — Томск: Изд-во Том. ун-та, 2007. 178 с.
9. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. М.: Мир, 1977.
10. Гладков Л. А., Курейчик В. В., Курейчик В. М. Генетические алгоритмы: Учебное пособие. М.: Физматлит, 2006.
11. Гродзовский ГЛ. Иванов Ю.Н., Токарев В.В. Механика космического полета. Проблемы оптимизации. М. Наука, 1975.
12. А. В. Гасников. Современные численные методы оптимизации. М.: МФТИ, 2018.
13. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. – М.: Наука, 1967.
14. Егоров В.А. О некоторых задачах динамики полета к Луне. Успехи физических наук, 1957, т. 63, вып.1а, с. 73-117
15. Егоров В.А. Пространственная задача достижения Луны. М. Наука. 1965. 224 с.
16. Егоров В.А., Гусев Л.И. Динамика перелетов между Землей и Луной. М. Наука, 1980, 544 с.
17. В. Е. Жаров. Сферическая астрономия. Век-2, 2006.

- 18.Ивашкин В.В. О траекториях полета точки к Луне с временным захватом её Луной. Доклады Академии наук, 2002, том 387, №2, с. 196-199
- 19.Ивашкин В.В. О траекториях полета точки от Луны к Земле с гравитационным освобождением от лунного притяжения. Доклады Академии наук, 2004, том 398, №3, с. 340-342
- 20.А. Ф. Измаилов, М. В. Солодов. Численные методы оптимизации. Физматлит, 2008.
- 21.Келдыш М.В., Власова З.П., Лидов М.Л., Охоцимский Д.Е., Платонов А.К. (1959). Исследование траекторий облета Луны и анализ условий фотографирования и передачи информации / В кн.: М.В. Келдыш. Избранные труды. Ракетная техника и космонавтика. Отв. ред. В.С. Авдучевский, Т.М. Энеев. - М.: Наука, 1988, с.261-309.
- 22.Константинов М.С., И.А. Николичев, Аунг Мьо Тант. Анализ траектории возвращения космического аппарата с поверхности Луны в заданный район Земли. Инженерный журнал: наука и инновации, 2021, вып.12(120). DOI: 10.18698/2308-6033-2021-12-2139
- 23.Константинов М.С., Тант Аунг Мьо. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТОЧКИ ЛИБРАЦИИ L2 СИСТЕМЫ ЗЕМЛЯ - ЛУНА ПРИ ПЕРЕЛЁТЕ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА НА ОКОЛОЛУННУЮ ОРБИТУ. Журнал: КОСМОНАВТИКА И РАКЕТОСТРОЕНИЕ, 2022, вып. 3(126), С.30-43.
- 24.Константинов М.С., Тант Аунг Мьо. Анализ траектории возвращения космического аппарата с поверхности Луны в заданный район Земли. «Академические чтения по космонавтике», 2021, МГТУ, Москва
- 25.М. С. Константинов, Е. Ф. Каменков, Б. П. Перельгин, В. К. Безвербый. Механика космического полета. Машиностроение, 1989.
- 26.В. Г. Карманов. Математическое программирование. Физматлит, 2008.

- 27.Лидов М.Л. Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. Искусственные спутники Земли. 1961. № 8, с.5.
- 28.Ловцов А. С., Селиванов М. Ю., Томилин Д. А. и др. Основные результаты разработки Центра Келдыша в области ЭРДУ // Известия Российской академии наук. Энергетика: журнал. — 2020. — № 2. — С. 3-15.
- 29.А. П. Маркеев. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978.
- 30.Морозов А. И. Физические основы космических электрореактивных двигателей. — М.: Атомиздат, 1978.
- 31.М. Мину. Математическое программирование. М.: Наука, 1990.
- 32.Моисеев Н. Н. Численные методы в теории оптимальных систем. М.: Наука, 1971.
- 33.Д. Е. Охоцимский, Ю. Г. Сихарулидзе. Основы механики космического полета. М.: Наука, 1990.
- 34.А. В. Пантелеев, Д. В. Скавинская. Метаэвристические алгоритмы глобальной оптимизации. ИНФРА-М, 2016.
- 35.Петухов В.Г. Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой. Космические исследования, т. 50, № 3, 2012, стр. 258 – 270.
- 36.Петухов В.Г. Оптимизация траекторий космических аппаратов с электроракетными двигательными установками методом продолжения. Диссертация на соискание учёной степени д.т.н. Москва, МАИ, 2013.
- 37.Петухов В.Г. Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения. Космические исследования. Т. 46, № 3, с. 224-237, 2008
- 38.Э. Полак. Численные методы оптимизации. М.: Мир, 1974.

- 39.И. И. Привалов. Введение в теорию функции комплексного переменного. Москва, Юрайт, 2022.
- 40.Саймон Д. Алгоритмы эволюционной оптимизации. М.: ДМК Пресс, 2020.
- 41.Тант А.М. Проектирование траектории перелета к окололунной орбите спутника Луны. XLV Международная молодежная научная конференция, 2019, МАИ. С.558.
- 42.Тант Аунг Мьо, Най Хтет Линн. Оптимизации проектирования траектории перелета на окололунную орбиту. Международная молодежная научная конференция, 2021, МАИ.С.639.
- 43.Тант Аунг Мьо. Проектирование траектории перелета на лунную круговую орбиту. Международная молодежная научная конференция, 2020, МАИ. С. 704.
- 44.Тант А.М. Оптимизация траектории перелета КА между околоземной и окололунной круговыми орбитами. «Авиация и космонавтика», 2019, МАИ. С.151.
- 45.Тант А.М. Оптимизация лунных перелетов с использованием условий стационарности функции Лагранжа. «Авиация и космонавтика», 2020, МАИ, Москва, С.367.
- 46.Тант А.М. Проектирования траектории низкоэнергетического перелета на окололунную орбиту. «Авиация и космонавтика»,2021, МАИ.С.366.
- 47.Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1985.
- 48.Р. П. Федоренко. Приближенное решение задач оптимального управления. М., Наука, 1978.
- 49.В.Г. Фесенков. Общая астрономия. ОГИЗ ГОСТЕЗИЗДАТ. Москва, Ленинград, 1946.
- 50.Хайрер Э., Нёрсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир, 1990.

51. А. А. Юрьева. Математическое программирование. Лань, 2014.
52. Artemis I. Press Kit. NASA 2022.
53. Apollo Program Summary Report. NASA Report JSC-09423, Houston, Texas, April 1975.
54. Brooks, Courtney G.; Grimwood, James M. Swenson, Loyd S. Chariots for Apollo: A History of Manned Lunar Spacecraft. NASA (1979)
55. E. A. Belbruno, "Lunar Capture Orbits, a Method of Constructing Earth Moon Trajectories and the Lunar Gas Mission," Proceedings of the 19th AIAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference held May 1987, Colorado Springs, Colorado, Paper AIAA 87-1054, 1987.
56. E. A. Belbruno and J. P. Carrico, "Calculation of Weak Stability Boundary Ballistic Lunar Transfer Trajectories," Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference held August 14-17, 2000, Denver, Colorado, Paper AIAA 2000-4142, AIAA/AAS, 2000
57. E. A. Belbruno and J. K. Miller, "Sun-Perturbed Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture," Journal of Guidance, Control, and Dynamics, vol. 16, no. 4, pp. 770-774, July-August 1993.
58. E. A. Belbruno and J. Miller, A Ballistic Lunar Capture Trajectory for the Japanese Spacecraft Hiten, Tech. Rep. IOM 312/90.4-1731-EAB, (internal document), Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1990
59. E. A. Belbruno, "Lunar Capture Orbits, a Method of Constructing Earth Moon Trajectories and the Lunar Gas Mission," Proceedings of the 19th AIAA/DGLR/JSASS International Electric Propulsion Conference held May 1987, Colorado Springs, Colorado, Paper AIAA 87-1054, 1987.
60. E. A. Belbruno and J. P. Carrico, "Calculation of Weak Stability Boundary Ballistic Lunar Transfer Trajectories," Proceedings of the AIAA/AAS Astrodynamics Specialist

Conference held August 14-17, 2000, Denver, Colorado, Paper AIAA 2000-4142, AIAA/AAS, 200097

61. E. A. Belbruno and J. Miller, A Ballistic Lunar Capture Trajectory for the Japanese Spacecraft Hiten, Tech. Rep. IOM 312/90.4-1731-EAB, (internal document), Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, Pasadena, California, 1990.
62. E. A. Belbruno and J. K. Miller, "Sun-Perturbed Earth-to-Moon Transfers with Ballistic Capture," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 16, no. 4, pp. 770-774, July-August 1993.
63. W. David Woods. *How Apollo Flew to the Moon* (Springer Praxis Books) 2nd ed. 2011 Edition
64. Eric Eliason. *Planetary Data System - Imaging Node*. Branch of Astrogeology. United States Geological Survey. October 1, 1994.
65. Ernst Hairer, Gerhard Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin, 1996
66. Hansen N. An analysis of mutative  $\sigma$ -self-adaptation on linear fitness functions // *Evolutionary Computation*. — 2006. — T. 14, № 3. — C. 255—275.
67. Hansen N., Ostermeier A. Completely Derandomized Self-Adaptation in Evolution Strategies // *Evolutionary Computation*. — 2001. — T. 2, № 9. — C. 159—195.
68. Hansen N., Muller S, Koumoutsakos P. Reducing the time complexity of the derandomized evolution strategy with covariance matrix adaptation (CMA-ES) // *Evolutionary Computation*. — 2003. — T. 1, № 11. — C. 1—18.
69. Hansen N., Kern S. Evaluating the CMA evolution strategy on multimodal test functions // *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN VIII*. — 2004. — № 8. — C. 282—291.
70. Hansen N., Ostermeier A., Gawelczyk A. On the adaptation of arbitrary normal mutation distributions in evolution strategies: The generating set adaptation // *International Conference on Genetic Algorithms*. — 1995.

71. Hans-Georg Beyer and Hans-Paul Schwefel. Evolution strategies—a comprehensive introduction. *Natural computing*, 1(1):3–52, 2002.
72. Hansen N. The CMA evolution strategy: a comparing review. In J.A. Lozano, P. Larranaga, I. Inza, and E. Bengoetxea, editors, *Towards a new evolutionary computation. Advances on estimation of distribution algorithms*, pages 75–102. Springer, 2006.
73. Hansen N. Benchmarking a bi-population cma-es on the bbob2009 function testbed. In *Proc. of the 11th Annual Conference Companion on Genetic and Evolutionary Computation Conf.: Late Breaking Papers*, pages 2389–2396, NY, USA, 2009. ACM.
74. Hansen N and Andreas Ostermeier. Completely Derandomized Self-Adaptation in Evolution Strategies. *Evolutionary Computation*, 9(2):159–195, 2001.
75. Hansen N., Igel C., Roth S. Covariance Matrix Adaptation for Multi-objective Optimization // *Evolutionary Computation*. — 2007. — T. 1, № 15. — C. 1—28.
76. V. V. Ivashkin, "On the Earth-to-Moon Trajectories with Temporary Capture of a Particle by the Moon," *Proceedings of the 54th International Astronautical Congress held September 29-October 3, 2003, Bremen, Germany, Paper IAC-03-A.P.01*), pp. 1-9, 2003.
77. V. V. Ivashkin, "On Trajectories for the Earth-to-Moon Flight with Capture by the Moon," *Proceedings of the International Lunar Conference 2003, Springfield, Virginia (S. M. Durst, C. T. Bohannon, C. G. Thomason, M. R. Cemey, and L. Yuen, eds.)*, vol. 108, Paper AAS 03-723, Science and Technology Series, American Astronautical Society, pp. 157-166, 2004.
78. V. V. Ivashkin, "On Trajectories of the Earth-Moon Flight of a Particle with Its Temporary Capture by the Moon," *Doklady Physics, Mechanics*, vol. 47, no. 11, pp. 825-827, 2002.

79. Jayati Datta and S. C. Chakravarty. CHANDRAYAAN-1 INDIA'S FIRST MISSION TO MOON. Space Science Office, ISRO Headquarters, Bangalore.
80. James E. Smith, Agoston E. Eiben. Introduction to Evolutionary Computing. Springer (December 15, 2010).
81. Konstantinov, M.S., Thein, M. Method of interplanetary trajectory optimization for the spacecraft with low thrust and swing-bys, *Acta Astronautica*, 2017, 136, pp. 297-311
82. Konstantinov M.S., Nikolichev I.A., Thein M., Optimization of low thrust multi-revolution orbital transfer using the method of dual numbers. Proceedings of the 6th International Conference on Astrodynamics. Tools and Technics (ICATT-2016). URL: <https://indico.esa.int/indico/event/111/session/21/contribution/99/material/paper/0.pdf>
83. W. S. Koon, M. W. Lo, J. E. Marsden, and S. D. Ross, "Low Energy Transfers to the Moon," *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*, vol. 81, no. 1, pp. 63-73, September 2001
84. Lincoln J. Wood, Shyam Bhaskaran etc. Navigation and Mission Design Technologies for Future Planetary Science Missions. 36th ANNUAL AAS GUIDANCE AND CONTROL CONFERENCE. February 1 - February 6, 2013.
85. Lyness, J.N. (1967). Numerical algorithms based on the theory of complex variables, Proc. ACM 22nd Nat. Conf., Thompson Book Co., Washington, DC, pp. 124-134.
86. Lyness, J.N. & Moller, C.B. (1967). Numerical differentiation of analytic functions, *SIAM J. Numer. Anal.*, 4, pp. 202-210.
87. Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO): Leading NASA's Way Back to the Moon. NASA. June 2009. NP-2009-05-98-MSFC. Retrieved October 9, 2015.
88. A. E. Marini, R. Lumb, G. D. Racca, B. H. Foing, M. Dias-Almeida, "Technology and Science from Earth to Moon: SMART-1 Experiments and their operations," Proceedings of 36th ESLAB Symposium, June 3-8, 2002, ESA/ESTEC, Noordwijk, The Netherlands



89. Martins J. R. R. A., Sturdza P., Alonso J.J., "The Complex-Step Derivative Approximation", ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 29, no. 3, pp. 245–262., September 2003.
90. Mark Beckman and Rivers Lamb, Stationkeeping for the Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO), 20th International Symposium on Space Flight Dynamics 2007.
91. Maria Alonso, Jurriaan De Bruin etc. SMART-1 LUNAR MISSION: OPERATIONAL EXPERIENCE WITH ITS AUTOMATIC ATTITUDE AND ORBIT CONTROL SUBSYSTEM AND ITS RELATION WITH ELECTRIC PROPULSION SYSTEM. Proceedings of the 6th International ESA Conference on Guidance, Navigation and Control Systems, Loutraki, Greece, 17-20 October 2005 (ESA SP-606, January 2006).
92. Melanie Mitchell. An Introduction to Genetic Algorithms. MIT Press; Reprint edition (February 6, 1998).
93. Miller, J. K. and Belbruno, E. A., A Method for the Construction of a Lunar Transfer Trajectory using Ballistic Capture," AAS 91-100, AAS/AIAA Space flight Mechanics Meeting, Houston, TX, Feb 11-13, 1991. Paper AAS91-100, pp. 97-109
94. J. K. Miller. Lunar Transfer Trajectory Design and Four Body Problem/ AAS 03-144. p 11 Conference: 13th AAS/AIAA Space Flight Mechanics Meeting At: Ponce, Puerto Rico.
95. Nocedal, Jorge; Wright, Stephen J. Numerical Optimization. — 2nd edition. — USA: Springer, 2006.
96. J.S. Parker, R.L. Anderson. Low-energy Lunar Trajectory design. Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2014, 398 p
97. J. S. Parker and G. H. Bom, "Modeling a Low-Energy Ballistic Lunar Transfer Using Dynamical Systems Theory," Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 45, no. 6, pp. 1269- 1281, San Diego, California, November-December 2008

98. J.S. Parker, R.L. Anderson. *Low-energy Lunar Trajectory design*. Published by John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2014, 398 p
99. Petukhov, V.G., Yoon, S.W. Optimization of Perturbed Spacecraft Trajectories Using Complex Dual Numbers. Part 1: Theory and Method (2021) *Cosmic Research*, 59 (5), pp. 401-413. DOI: 10.1134/S0010952521050099.
100. Petro, N. E.; Keller, J. W. Five Years at the Moon with the Lunar Reconnaissance Orbiter (LRO): New Views of the Lunar Surface and Environment. Annual Meeting of the Lunar Exploration Analysis Group. October 22–24, 2014. Laurel, Maryland.
101. Rathsman P.; Kugelberg J.; Bodin P.; Racca G. D.; et al. (2005). "SMART-1: Development and lessons learnt". *Acta Astronautica*. 57 (2–8): 455–468.
102. Stephen Clark. NASA will likely add a rendezvous test to the first piloted Orion space mission. *Spaceflight now*. May 18, 2020.
103. Standish, E.M. JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE405. JPL IOM 312.F-98-048, 1998.
104. Squire, W. & Trapp, G. (1998) Using complex variables to estimate derivatives of real functions. *SIAM Rev.*, 40(1), pp. 110-112.
105. Taff, L. G. *Computational spherical astronomy*. Wiley, 1980.
106. Uesugi, K., et al., Japanese first double Lunar swingby mission "HITEN", *Acta Astronaut.*, 25, No. 7, 347-355, doi:10.1016/0094-5765(91)90014-V, 1991.