Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(национальный исследовательский университет)

На правах рукописи

Азанов Валентин Михайлович

АЛГОРИТМЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ ВЕРОЯТНОСТНЫМ КРИТЕРИЕМ

Специальность 05.13.01
Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Ю. С. Кан

Москва, 2018 год

Оглавление

Введение

Задачи оптимального управления стохастическими системами с вероятностными критериями качества составляют предмет изучения специального раздела теории стохастического оптимального управления. К числу вероятностных критериев относятся функционал вероятности и функционал квантили. Функционал вероятности представляет собой вероятность непревышения некоторым точностным функционалом заданного допустимого уровня. Сам точностной функционал при этом характеризует точность системы управления, но зависит от траектории стохастической системы. Примером точностного функционала служит терминальный промах. В постановке задачи оптимального управления с критерием качества в форме функционала вероятности обычно требуется этот функционал максимизировать. Функционал квантили является, в некотором смысле, обратной характеристикой по отношению к функционалу вероятности. Физический смысл функционала квантили в том, что он, будучи верхней доверительной границей для точностного функционала, по сути характеризует гарантированную по вероятности точность системы управления. Задача оптимального управления с критерием в форме функционала квантили обычно трактуется как задача минимизации.

Задачи оптимального управления с вероятностным критерием исследовались многими отечественными специалистами, из которых в первую очередь следует отметить работы Афанасьева В.Н., Колмановского В.Б., Носова В.Р. [17], Зубова В.И. [41], Красовского Н.Н. [56], Малышева В.В., Кибзуна А.И. [64], Кана Ю.С. [44], Охоцимского Д.Е., Рясина В.А. , Ченцова Н.Н. [69, 72, 73], Сиротина А.Н. [75]. В [41, 75] исследована постановка так называемой задачи программного управления, в рамках которой управление ищется как функция времени, не зависящей от состояния системы. В [75] рассмотрен случай линейной дискретной стохастической системы и широкого класса возмущений, а для задачи оптимального программного управления с вероятностным терминальным критерием получены условия существования решения, не зависящие от распределений случайных помех и предложен эффективный алгоритм поиска. В [17] исследован случай непрерывного времени: получены условия существования решения, выведено уравнение Гамильтона-Якоби-Беллмана, предложен численный метод его решения, решен ряд задач модельного характера: задача оптимального управления одномерным движением материмальной точки с нефиксированным моентом окончания, задача управления математическим маятником, задача управления движением твердого тела. В [69, 72, 73] исследована задача оптимального управления скалярной дискретной системой с вероятностным критерием в классе стратегий, зависящих от наблюдений, причем для случая одного шага по времени получено аналитическое решение. Отдельное внимание следует уделить работе [64], в которой исследована задача синтеза оптимального управления с вероятностным терминальным критерием. Управление ищется в классе функций, зависящих от времени и от текущего состояния дискретной системы. Причем в [64] на основе результатов известной работы [21] получены достаточные условия существования оптимального управления в классе марковских стратегий в форме метода динамического программирования. Позже была написана статья [49], где указанные условия были сформулированы более точно.

За рубежом интерес к задачам управления стохастическими системами с вероятностным критерием проявлялся в работах R.C. Chen [98], W. H. Fleming [108], C. Lagoa, J. Jasour, N. Aybat [109–112], J.Y.S Luh, G.E. O'Connor [118, 119], L. V. Mellaert, P. Dorato [120, 121], T. Odanaka [124–127], W. Tang, J. Zheng, J. Zhang [131]. В [98] для дискретных стохастических систем с конечным числом состояний и управлений и дискретными случайными возмущениями получены достаточные условия оптимальности в форме уравнения Беллмана. Причем указанные условия распространены также на случай бесконечного горизонта управления. В [124] рассмотрена задача минимизации вероятности выхода траекторий скалярной линейной дискретной системы с гауссовскими возмущениями из заданной трубки траекторий. Для этой задачи были сформулированы условия оптимальности и найдено оптимальное управление в явном виде. В [120, 121] рассматривался случай линейной непрерывной системы, и ставилась задача синтеза, для решения которой предлагались численне методы, основанные на решении уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана специального вида. Приближенные решения были получены в [120] для двумерной линейной стохастической системы. Похожая постановка рассмотрена также в работах Афанасьева В.Н., Колмановского Б.В., Носова В.Р. [17] и Колмановского Б.В., Черноусько Ф.Л. [85]. В статьях J.Y.S Luh, G.E. O'Connor [118, 119] для решения задачи оптимального программного управления линейной непрерывной стохастической системой с вероятностным критерием были применены преобразования критериальной функции и системы, позволившие использовать стохастический принцип максимума. Для решения полученных “двухточечной краевой задачи” и задачи стохастической оптимизации были использованы метод Рунге-Кутты и специальная техника градиентного спуска. Авторами W. Tang, J. Zheng, J. Zhang [131] была рассмотрена задача оптимального управления линейной стационарной дискретной стохастической системой с гауссовскими возмущениями и критерием в форме суммы вероятностей попадания вектора состояние на компактное множество в каждый момент времени. Получены условия существования решения, разработана процедура поиска оптимального управления, основанная на методе динамического программирования, и рассмотрен модельный пример для которого удалось найти оптимальную стратегию в явном виде. В современных западных работах C. Lagoa, J. Jasour, N. Aybat [109–112] выделен широкий класс задач оптимального управления с вероятностным критерием для которого разработаны численные алгоритмы поиска оптимального управления. Указанный класс характерен тем, что функция системы (функция перехода), обратная связь по состоянию и точностной функционал являются полиномами, система управления стационарна, а носитель распределения случайных возмущений ограничен. Постулирование полиномиальной обратной обратной связи по состоянию позволило свести бесконечномерную оптимизационную задачу к конечномерной задаче стохастического программирования большой размерности. Для последней задачи с помощью результатов работы J.B. Lasserre [115] получен эквивалент в форме задачи оптимизации меры. Последняя сведена к так называемой проблеме моментов, которая также представляет собой оптимизационную задачу большой размерности. Автором J.B. Lasserre в работе [116] также были получены необходимые и достаточные условия существования оптимизационной задачи в проблеме моментов.

Ранняя мотивация к исследованию задач оптимального управления с вероятностным критерием связана, в основном, с активным поиском эффективных алгоритмов управления движущимися объектами, в частности, аэрокосмическими. Особое место тут занимают так называемые задачи оптимальной импульсной коррекции. В таких задачах предполагается заранее известной некоторая номинальная траектория движения, рассчитываемая, например, с помощью методов оптимального программного управления, от которой объект отклоняется из-за воздействия неконтролируемых факторов и требуется построить оптимальную стратегию корректирования. Указанные задачи исследованы в многочисленных статьях и монографиях авторитетных специалистов, полный обзор которых вряд ли представляется возможным. Отметим работы Ананьева Б.И [14, 15], Бахшияна Б.Ц., Назирова Р.Р., Эльязберга П.Е. [19], Решетнева М.Ф., Лебедева А.А., Бартенева В.А. [74], Богуславского И.А. [22–26], Лидова М.Л. [59–62], Лебедева А.А., Красильщикова М.Н., Малышева В.В. [58], Охоцимского Д.Е. [68], Охоцимского Д.Е., Рясина В.А. Ченцова Н.Н. [69], Рясина В.А. [72, 73], Черноусько Ф.Л., Братуся А.С., Бородовского М.Ю. [35, 36], Черноусько Ф.Л., Меликяна А.А. [86], Черноусько Ф.Л. [84], Колмановского Б.В. [85], Ярошевского В.А., Парышевой Г.В. [87,88], Цыпкина Я.З. [83], Пшеничного Б.Н. [71], в которых рассматривались постановки задач импульсной коррекции траектории движущихся объектов с учетом неконтролируемых факторов. Исследование указанных задач способствовало развитию методологии по моделированию и учету неконтролируемых факторов, в рамках которой выделим стохастический и минимаксный подходы. При первом подходе все неконтролируемые возмущения в системе предполагаются случайными с некоторой известной априорной информации о распределении, а критерий представляется в виде вероятностной характеристики функционала качества (например, среднеквадратическое отклонение терминального положения аппарата от номинальной траектории). Подобная постановка рассмотрена, например, в [58, 63–67, 69, 72–74, 87, 88]. При минимаксном подходе неконтролируемые факторы предполагаются неизвестными детерминированными параметрами с известным допустимым диапазоном изменения, а критерий представляется в виде “наихудшего” значения функционала качества (например, наибольшее отклонение терминального положения аппарата от номинальной траектории). Исследования задач импульсной коррекции при таком учете неопределенности связаны с фамилиями Ананьева Б.И., Куржанского А.Б., Шелементьева Г.С., Гредасовой Н.В. [14–16], Черноусько Ф.Л., Меликяна А.А. [84,86], Красовского Н.Н. [56,57], Парусникова Н.А., Морозова В.М., Борзова В.И [70]. В частности, отметим серию работ Кибзуна А.И., Кана Ю.С., Lagoa C., Barmish B. [43, 48, 107], посвящённую проблеме, получившую название “принцип равномерности”. В указанных статьях доказано, что на специальном классе плотностей распределения случайного вектора наименьшее значение вероятности попадания указанного вектора обеспечивает плотность равномерного распределения. Это позволяет использовать равномерное распределение в оптимизационных моделях с вероятностным критерием, в которых отсутствует априорная информация о неопределенных факторах, как “наихудшее”. В работе [44] проведен анализ чувствительности принципа равномерности к нарушению исходных предположений, что расширяет класс вероятностных оптимизационных задач, в которых такой учет неопределенности можно трактовать как гарантирующий.

Одним из ярких примеров задач оптимальной импульсной коррекции с учетом неконтролируемых факторов является задача управления центром масс искусственного спутника Земли (ИСЗ), совершающего движение на геостационарной орбите (ГСО). Геостационарные спутники играют ключевую роль в системах связи. Их основная особенность заключается в том, что относительно некоторого земного наблюдателя они остаются неподвижными, что позволяет последнему обеспечивать с ним непрерывную связь. Из-за ошибок различной природы (ошибок выведения, измерения положения, давления со стороны Луны и Солнца и т.д.) ИСЗ, который должен быть геостационарным, смещается (дрейфует) с ГСО, тем самым порождая разнообразные проблемы со связью. Для устранения такого дрейфа геостационарные ИСЗ оснащены корректирующей двигательной установкой (КДУ). Существует немалое число работ, посвященных задаче коррекции траектории движения геостационарного ИСЗ, среди которых стоит выделить Решетнева М.Ф., Лебедева А.А., Бартенева В.А., Охоцимского Д.Е., Энеева Т.М., Малышева В.В., Кибзуна А.И., Старкова А.В., Федорова А.В., Красильщикова М.Н., Бобронникова В.Т. [58, 64, 65, 65–68, 74]. В [64] на примере линеаризованной в окрестности опорной орбиты дискретной системы, рассмотренной также в [58] ставилась задача оптимального “приведения” геостационарного ИСЗ в заданную рассчетную область орбиты с учетом ошибок отработки корректирующей двигательной установки большой тяги, способной практически мгновенно исполнять корректирующие импульсы. Причем эта задача была рассмотрена с позиций стохастического и минимаксного подхода. В рамках первого рассматривались среднеквадратический, вероятностный и квантильный критерии. Причем для случая так называемой однопараметрической коррекции, т.е. когда коррекции подлежит только один параметр траектории движения, были получены явные выражения для минимаксной и среднеквадратической стратегий, а для более частного случая одноимпульсной (один момент дискретного времени) коррекции – получено аналитическое решение задач с вероятностным критерием. При сравнении найденных управлений с позиций выполнения вероятностного ограничения терминальной точности оказалось, что минимаксная и среднеквадратическая стратегии обеспечивают более низкую оценку вероятности терминальной точности, чем вероятностная стратегия, причем отличие становится тем существеннее, чем ближе значение задаваемой доверительной вероятности к единице.

Более поздняя мотивация к исследованию задач оптимального управления с вероятностным критерием качества связана с математической моделью капиталовложения с учетом риска. В модели система управления характеризует изменение капитала во времени, за управление принимается доли капитала, вкладываемые в безрисковый, имеющий детерминированную доходность, и рисковые активы, имеющие случайную доходность с известным распределением. Вероятностный критерий моделирует вероятность достижения уровнем капитала к заданному моменту времени некоторого уровня. Отметим работы Кибзуна А.И., Кана Ю.С., Игнатова А.Н., Вишнякова Б.В. [**?**, 37, 38, 40, 46, 49–53], в которых данная модель для случая вероятностного критерия исследовалась в так называемой “двухшаговой постановке”, т.е. когда дискретная система ограничивается двумя шагами по времени. Модель, рассмотренная в [**?**, 37, 38, 40, 46, 49–53] является сильно упрощенной и представляет интерес скорее в задачах распределения ресурсов, нежели в экономических приложениях. Более адекватные постановки задач оптимального капиталовложения можно найти, например, в работах Хаметова В.М., Шелемеха Е.А. [76, 77], Хаметова В.М., Зверева О.В. [78, 79]. Отметим также зарубежные статьи Т. Боднара, Н. Пароли, В. Шмида [94], Дж. Калафьоре [96], С. Бенати, Р. Рицци [90], А.И. Кибзуна, А.В. Наумова, В.И. Норкина [54], Х. Ишии, Т. Хасуике [103], Дж. Люэдтке, С. Ахмеда, Дж. Немхаузера [117], Дж. Келли [106], Ф. Джориона [114], Р.Т. Рокафеллара и С.

Урясева [128, 129], Л. МакЛина, Э. Торпома, Й. Чжао [122], В. Зиембы и Р. Виксона [133], Э. Жондо, С.-Х. Пуна, М. Рокингера [113], В. Некрасова [123], Дж. Скафа и С. Бойда [130], С.В. Стоянова, С.Т. Рачева, Ф.Дж. Фабоцци [132], посвященные задачам оптимизации портфеля ценных бумаг. Мотивация к рассмотрению постановки с вероятностным критерием связана с тем, что стратегия управления, оптимальная в смысле математического ожидания вектора состояния в терминальный момент времени (в данном случае – скаляра), моделирующего средний уровень капитала в конечный момент времени, приводит к эффекту, который называется "биржевой парадокс" [46] и заключается в том, что на бесконечном горизонте управления средний доход стремится к бесконечности, а вероятность разориться – к единице. Для управления, оптимального в смысле вероятностного критерия, доказано отсутствие такого эффекта, тем не менее само управление найдено в явном виде лишь для случая двух шагов по времени, вложения в один безрисковый и один рисковый актив, доходность которого имеет равномерное распределение [37, 40]. При этом отмеченные трудности при решении задачи методом динамического программирования [64] связаны непосредственно с нахождением функции Беллмана, которая является нелинейной по состоянию, и последующим решением задачи стохастического программирования сложной структуры.

В завершении обзора работ по задачам стохастического оптимального управления с вероятностным критерием сделаем акцент на том, что алгоритм динамического программирования [64] получил развитие только в задачах оптимального капиталовложения [37, 40, 50] в "двухшаговой" постановке, походившими на задачи коррекции орбиты ИСЗ [58, 64, 65, 65–67, 74]. При этом точных решений задач синтеза оптимального управления не было получено даже в рамках простых моделей коррекции орбиты ИСЗ, предложенных в работах [58, 65, 65–67, 74]. Применение алгоритма динамического программирования натолкнулось на трудности вычисления условных математических ожиданий разрывных функций, которые казались непреодолимыми. В [37, 40] показано, что эти трудности носят технический характер, и выявлены некоторые качественные особенности функции Беллмана в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения. Учет этих особенностей, видимо типичных в задачах оптимального управления с вероятностным функционалом, возможно позволит упростить решение указанных выше нерешенных задач коррекции орбиты искусственного спутника Земли.

Цель диссертационного исследования: развитие метода динамического программирования для задач стохастического оптимального управления дискретными системами с вероятностным критерием и разработка на этой основе новых алгоритмов оптимальной коррекции траектории летательных аппаратов.

Для достижения поставленной цели сформулируем следующие задачи:

1) модифицировать уравнение метода динамического программирования;

2) исследовать свойства функции Беллмана и функции правой части уравнения метода динамического программирования, функции оптимального значения вероятностного критерия;

3) получить аналитическое решение ряда модельных задач оптимального управления линейной дискретной стохастической системой с критерием вероятности;

4) решить задачи однопараметрической и двухпараметрической коррекции траектории движения искусственного спутника Земли;

5) исследовать свойства оптимальных алгоритмов управления по вероятностному критерию и провести их сравнение с оптимальными алгоритмами управления по другим критериям качества.

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются методы теории оптимального управления, стохастического программирования, теории вероятностей, статистического моделирования, математического анализа. Для проведения вычислительных экспериментов используются компьютерные технологии.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических формулировок и доказательств утверждений, подтверждением полученных теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. Полученные в диссертационной работе результаты по оптимальному управлению дискретными стохастическими системами являются новыми, в частности, получены двусторонние оценки для функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия, найдено аналитическое решение задачи однопараметрической импульсной коррекции с вероятностным терминальным критерием, доказана асимптотическая оптимальность “рисковой стратегии” управления портфелем ценных бумаг.

Практическая ценность. Результаты исследования могут быть использованы при проектировании систем управления движением летательных аппаратов или другими объектами.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, 4 главы, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 142 страниц, включая 12 рисунков, 17 таблиц и список литературы, содержащий 133 наименования.

Содержание диссертации

Во введении дан подробный обзор имеющихся работ по выбранной теме диссертационного исследования и смежным темам, сформулирована цель работы, аргументирована её научная новизна и практическая ценность, а также в сжатом виде изложено содержание глав диссертации.

В первой главе формулируется задача оптимального управления дискретной стохастической системой с вероятностным терминальным критерием общего вида. Приводятся достаточные условия существования оптимального решения в форме метода динамического программирования.

Вводятся в рассмотрение поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана. С использованием введенных понятий формулируется лемма, в которой показано, что изобеллы удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени, а также, что с их использованием и использованием формулы полного математического ожидания можно преобразовать правую часть уравнения Беллмана. В следствии к лемме доказывается, что на некотором фиксированном шаге для состояний, принадлежащих изобелле уровня 1 оптимальное управление удовлетворяет вероятностному уравнению, а для состояний, принадлежащих изобелле уровня 0, оптимальным является любое допустимое управление. Также в следствии к лемме получена двусторонняя оценка для функции правой части уравнения Беллмана.

Формулируется теорема о двусторонней оценке функции Беллмана. Показывается, что нижняя граница представляется в форме максимальной вероятности попадания траектории системы на изобеллу уровня 1, а верхняя граница функции

Беллмана равна максимальной вероятности “непопадания” траектории системы на изобеллу уровня 0.

На основе полученной двусторонней оценки функции Беллмана устанавливается двусторонняя оценка для функции оптимального значения вероятностного критерия для двух случаев: детерминированного вектора начального состояния и случайного вектора начального состояния с заданным распределением.

Во второй главе исследуются модельные задачи оптимального управления с вероятностным критерием.

В первом разделе рассматривается задача оптимального управления линейной дискретной стохастической системой со скалярным неограниченным управлением, скалярным случайным возмущением с симметричной плотностью распределения и критерием в форме вероятности попадания первой координаты вектора состояния в заданную окрестность нуля за время, не превышающее фиксированную величину. Линейная система записана в канонической форме управляемости. Такая задача относится к классу задач оптимального управления с нефиксированным, но ограниченным сверху моментом окончания. С помощью расширения вектора состояния путем рассмотрения новой координаты с нелинейной динамикой изменения поставленная задача сводится к классу задач оптимального управления уже нелинейной дискретной стохастической системой с вероятностным терминальным критерием. Для решения этой задачи применяются основные утверждения первой главы. В итоге ищутся в явном виде: поверхности уровня 1 и 0, двусторонняя оценка функции Беллмана, оптимальное управление, функция оптимального значения вероятностного критерия. С использованием известных результатов эквивалентности задач оптимального управления с вероятностным и квантильным критерием исследуются достаточные условия оптимальности найденного управления в задаче с квантильным критерием.

Во втором разделе рассматривается простейший пример, в котором система управления является двумерной и моделирует управляемое ускорением движение материальной точки со случайным шумом в канале управления.

В третьем разделе рассматривается задача оптимального управления скалярной билинейной системой, моделирующей процесс капиталовложения в один безрисковый и заданное число рисковых активов, имеющих случайную доходность. С помощью результатов первой главы находятся в явном виде поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана, двусторонние оценки для функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. Выводятся условия асимптотической оптимальности некоторой допустимой стратегии. Для случая двумерного вектора управления находятся двусторонние оценки для функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия.

В третьей главе рассматривается задача оптимального управления билинейной дискретной системой со скалярным управлением, мультипликативным к управлению скалярным случайным возмущением и критерием в форме вероятности попадания линейной комбинации вектора состояния в заданную окрестность нуля. Такая модель возникает в задачах однопараметрической импульсной коррекции траектории движения искусственного спутника Земли, совершающего движение на геостационарной орбите.

В первом разделе приведена математическая постановка задачи и описание известной модели однопараметрической коррекции траектории движения искусственного спутника Земли в окрестноги геостационарной орбиты. Описываются основные постановки задач со среднеквадратическим, минимаксным, вероятностным и квантильным критериями.

Во втором разделе рассматривается случай гауссовского распределения мультипликативной случайной помехи, моделирующей ошибку исполнения корректирующего воздействия. С помощью результатов первой главы строятся в явном виде поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана, двусторонние оценки функции Беллмана и субоптимальное управление. Последнее является оптимальным для случаев, когда состояние системы принадлежит поверхностям уровня 1 и 0 функции Беллмана и случая одной коррекции. В других случаях субоптимальное управление максимизирует нижнюю оценку функции правой части уравнения метода динамического программирования.

В третьем разделе рассматривается случай неограниченного управления и ограниченного носителя распределения случайного возмущения в виде симметричного относительно нуля отрезка. С использованием результатов первой главы находятся поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана, двусторонние оценки функции

Беллмана, двусторонние оценки функции оптимального значения вероятностного критерия. Для случая равномерного распределения случайного возмущения оптимальное управление находится в явном виде. С использованием нижней оценки для функции оптимального значения вероятностного критерия выводится верхняя оценка для оптимального значения квантильного критерия. На примере скалярной системы управления показывается, что выполнены условия оптимальности найденного управления в задаче с квантильным критерием. Для более частного случая одного шага дискретного времени оптимальное квантильное управление синтезируется в явном виде. Проводится численное сравнение найденного оптимального управления со среднеквадратическим управлением по значениям вероятностного и среднеквадратического критериев.

В четвертом разделе исследуется задача из третего раздела для случая наличия геометрических ограничений на управление. С использованием результатов первой главы выводятся условия оптимальности неограниченного управления в задаче с ограничениями.

В четвертой главе исследуется модель двухпараметрической коррекции траектории движения искусственного спутника Земли в окрестности геостационарной орбиты. Критерием является вероятность приведения долготы восходящего узла в заданную область, причем остаточная скорость дрейфа должна быть такой, что спутник находится в этой области заданное время после проведения последней коррекции.

В первом разделе формулируется математическая постановка задачи и приводится описание модели двухпараметрической коррекции.

Во втором разделе исследуется случай гауссовского распределения случайного возмущения, моделирующего ошибку исполнения корректирующего импульса. С использованием результатов первой главы находятся поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана, двусторонние оценки функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. С помощью нижней оценки функции Беллмана находится субоптимальное управление, которое является оптимальным для состояний, принадлежащих поверхностям уровня 1 и 0 функции Беллмана и для случая одной коррекции. В противных случаях оно максимизирует нижнюю оценку функции правой части метода динамического программирования. С помощью двусторонней оценки функции оптимального значения вероятностного критерия исследуется численная оценка точности получаемого решения для случая “двухимпульсной” коррекции. Проводится численное сравнение найденной стратегии со среднеквадратической.

В третьем разделе рассматривается случай равномерного распределения случайной ошибки исполнения корректирующего воздействия. С помощью результатов первой главы находятся в явном виде поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана, двусторонние оценки для нее и для функции оптимального значения вероятностного критерия, субоптимальное управление. Доказывается оптимальность найденной стратегии в задаче “двухимпульсной” коррекции для случая, когда начальное состояние принадлежит некоторому заданному множеству.

В заключении приводятся основные научные результаты, полученные автором работы.

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. В диссертации проведено исследование задач оптимизации, разработаны методы и алгоритмы решения задач оптимизации, которые применены для анализа прикладных объектов **(области исследования 1, 4 специальности 05.13.01)**.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научных семинарах кафедры теории вероятностей Московского авиационного института (рук. проф. Кибзун А.И.), на 7-й Традиционной молодёжной Школе «Управление, информация и оптимизация» (Россия, Зеленоград, 2015 г.), на Общемосковском постоянном научном семинаре «Теория автоматического управления и оптимизации» (г. Москва, 2018) (рук. Поляк Б.Т.). Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях:

1) международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, 2014);

2) всероссийская совещание по проблемам управления «ВСПУ–2014» (Москва, 2014);

3) всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Теория и практика системного анализа» (Рыбинск 2014);

4) XX международная научная конференция «Системный анализ, управление

и навигация» (Евпатория, 2015);

5) всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Теория и практика системного анализа» (Тверь 2016);

6) международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2015).

7) 17th Baikal International Triennual School-Seminar «Method of Optimization and Their Applications» (Buryatia, 2017)

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 работах, из которых 5 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [2–6], в том числе 4 опубликованы в журналах, цитируемых международной базой Web of Science [2, 4–6] и 7 из которых опубликованы в тезисах докладов [7–13].

Личный вклад. В совместных публикациях Кану Ю.С. принадлежат постановки задач и общее руководство при их подготовке к печати.

Глава 1. Свойства функции Беллмана в задаче оптимального управления дискретной стохастической системой с вероятностным критерием

Целями данной главы являются: постановка задачи оптимального управления дискретной стохастической системой с вероятностным терминальным критерием, формулировка достаточных условий существования оптимального решения в классе марковских стратегий в форме метода динамического программирования (МДП), исследование свойств поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана и свойств самой функции Беллмана.

В разделе 1.1 приведена постановка задачи оптимального управления дискретной стохастической системой с вероятностным терминальным критерием, описаны достаточные условия существования решения в классе марковских стратегий и метод динамического программирования. В разделе 1.2 исследованы свойства поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана, называемые для краткости изобеллами, выведено модифицированное уравнение Беллмана, получены выражения для оптимального управления для состояний, принадлежащих указанным поверхностям. В разделе 1.3 сформулирована теорема о двусторонней оценке функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. В разделе 1.4 сформулированы выводы по главе 1.

1.1. Постановка задачи

Для описания системы управления введем следующие обозначения: k - момент дискретного времени, $k \in \{0, ..., N\}$, $N \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ - горизонт управления (терминальный момент времени), $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^m$ – вектор управления, U_k – множество ограничений (множество геометрических ограничений), ξ_k – вектор случайных возмущений со значениями в $\mathbb{R}^s$, $f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ – функция системы (функция перехода).

Рассмотрим стохастическую систему управления с дискретным временем

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right), \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}. \tag{1.1}$$

В отношении системы 1.1 введём ряд предположений:

1) известна полная информация о векторе состояния x_k (данный факт позволяет строить управление в классе функций $u_k = \gamma_k\left(x_k\right)$, где $\gamma_k\left(\cdot\right)$ – некоторая измеримая функция. В данном случае говорят “управление ищется в классе полной обратной связи по состоянию”);

2) начальное состояние $x_0 = X$ является в общем случае случайным вектором со значениями в $\mathbb{R}^n$ и известным распределением $\mathbf{P}_X$;

3) функция системы $f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right)$ непрерывна для всех k;

4) вектор управления u_k формируется следующим образом: $u_k = \gamma_k\left(x_k\right)$, где $\gamma_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - измеримая функция с ограниченными значениями $u_k \in U_k$, причем U_k - компактное множество;

5) управлением называется набор функций $u\left(\cdot\right) = \left(\gamma_0\left(\cdot\right), ..., \gamma_N\left(\cdot\right)\right)$, классом допустимых управлений называется множество $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times ... \times \mathcal{U}_N$, где $\mathcal{U}_k$ – множество борелевских функций $\gamma_k\left(\cdot\right)$ с ограниченными на U_k значениями;

6) распределение $\mathbf{P}_k$ случайного вектора ξ_k известно, причем компоненты вектора $\zeta = \left(X, \xi_0, ..., \xi_N\right)$ независимы.

Заметим, что система (1.1) является марковской, т.е. ее поведение в будущем не зависит от прошлого и полностью определяется текущим состоянием системы.
На траекториях системы (1.1) зададим функционал вероятности

$$P_\varphi\left(u\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left(\Phi\left(x_{N+1}\left(u\left(\cdot\right), \zeta\right)\right) \le \varphi\right), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{P}$ - вероятность, $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – ограниченная снизу непрерывная функция, $\varphi \in \mathbb{R}$ – известный скаляр.

Задача стохастического оптимального управления с вероятностным терминальным критерием имеет вид [64]:

$$P_{\varphi}\left(u\left(\cdot\right)\right) \to \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}. \tag{1.3}$$

При решении задачи синтеза оптимального управления одним из ключевых результатов является метод динамического программирования (МДП) [20], позволяющий найти оптимальную стратегию в классе марковских. Вопрос применимости МДП к решению задач оптимального управления стохастическими дискретными системами исследован в общем случае в [21], в частности, применительно к задаче с вероятностным терминальным критерием (1.3) – в [50], [64]. В следующем разделе приведена формулировка достаточных условий оптимальности в форме МДП.

1.2. Достаточные условия оптимальности и метод динамического программирования

Опишем достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования. Рассмотрим функцию Беллмана $\mathsf{B}_k^{\varphi} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, которая по определению [64] является точной верхней гранью функционала вероятности при фиксированном текущем состоянии $x_k = x$, т.е.

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right) = \sup_{\gamma_k(\cdot)\in\mathcal{U}_k,\ldots,\gamma_N(\cdot)\in\mathcal{U}_N} \mathbf{P}\left(\Phi\left(x_{N+1}\left(x_k, \gamma_k\left(\cdot\right), \ldots, \gamma_N\left(\cdot\right), \xi_k, \ldots, \xi_N\right)\right) \leq \varphi \Big| x_k = x\right).$$

В [64] установлено, что если существует стратегия $u^{\varphi}\left(\cdot\right) \in \mathcal{U}$, удовлетворяющая следующим рекуррентным соотношениям динамического программирования:

$$u_k^{\varphi} = \arg\max_{u_k\in U_k} \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right)\right)\big|x_k\right],$$

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right) = \max_{u_k\in U_k} \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right)\right)\big|x_k = x\right], \quad k = \overline{0,N},$$

$$\mathsf{B}_{N+1}^{\varphi}\left(x\right) = \mathbf{I}_{(-\infty,\varphi]}\left(\Phi\left(x\right)\right),$$

то она оптимальна в задаче (1.3). Здесь $\mathbf{M}$ – оператор математического ожидания по распределению $\mathbf{P}$, $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}\left(x\right)$ – индикаторная функция множества $\mathcal{A}$.

В [50] достаточные условия существования решения в классе измеримых функций сформулированы в форме следующей теоремы

Теорема 1.1. *[50] Пусть выполнены условия*

1) функции $f_k(x_k, u_k, \xi_k)$*, непрерывны для всех* $k = \overline{0, N}$*;*

2) функция $\Phi_{N+1}(x_{N+1})$ *ограничена снизу;*

3) случайные векторы $X, \xi_0, ..., \xi_N$ *независимы;*

4) множества $U_0, ..., U_N$ *компактны;*

тогда оптимальная стратегия в задаче (1.3) существует в классе измеримых функций $u^\varphi(\cdot) \in \mathcal{U}$ *и определяется в результате решения рекуррентных задач динамического программирования (уравнения Беллмана).*

Задача нахождения оптимальной марковской стратегии в соответствии с предложенными выше условиями сопряжена с трудностями вычисления функции Беллмана на каждом шаге метода динамического программирования. Указанная проблема в первую очередь порождена необходимостью вычисления кратных интегралов (значений операторов $\mathbf{M}_k[\cdot]$) в пространстве размерностей n и s. Стоит также отметить, что аналитическое исследование уравнения Беллмана даже для относительно простых одномерных систем управления (см., например, задачу однопараметрической импульсной коррекции [64]) оказывается очень трудным. При этом известные решения зачастую ограничиваются случаем, когда горизонт управления N равен либо нулю (так называемые “одношаговые задачи”) или единице (так называемые “двухшаговые задачи”). Данные трудности в основном связаны со сложной структурой функции Беллмана уже на втором шаге метода динамического программирования.

В ряде случаев найти оптимальную марковскую стратегию удается с использованием лишь некоторых свойств функции Беллмана. Указанные в первую очередь базируются на свойствах поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана. Исследованию последних посвящен следующий раздел.

1.3. Определение и свойства изобелл

Введем в рассмотрение поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана.

Определение 1.1. Изобеллой уровня 1 (изолиния функции Беллмана) будем называть поверхность уровня 1 функции Беллмана:

$$\mathcal{I}_k^\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \mathsf{B}_k^\varphi(x) = 1\}, \quad k = \overline{0,N}.$$

Изобеллой уровня 0 будем называть поверхность уровня 0 функции Беллмана:

$$\mathcal{O}_k^\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \mathsf{B}_k^\varphi(x) = 0\}, \quad k = \overline{0,N}.$$

Рассмотрим также множество, дополняющее изобеллы уровня 1 и 0 до $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{B}_k^\varphi = \mathbb{R}^n \setminus \{\mathcal{I}_k^\varphi \cup \mathcal{O}_k^\varphi\}.$$

Из определения множеств $\mathcal{I}_k^\varphi$, $\mathcal{B}_k^\varphi$, $\mathcal{O}_k^\varphi$ следует, что

$$\mathcal{I}_k^\varphi \cup \mathcal{B}_k^\varphi \cup \mathcal{O}_k^\varphi = \mathbb{R}^n, \qquad \begin{cases} \mathsf{B}_k^\varphi(x) = 1, & x \in \mathcal{I}_k^\varphi, \\ \mathsf{B}_k^\varphi(x) \in (0,1), & x \in \mathcal{B}_k^\varphi, \\ \mathsf{B}_k^\varphi(x) = 0, & x \in \mathcal{O}_k^\varphi. \end{cases}$$

Лемма 1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1) *Множества $\mathcal{I}_k^\varphi$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени $k = \overline{0,N}$:*

$$\mathcal{I}_k^\varphi = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists u_k \in U_k : \quad \mathbf{P}_k\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^\varphi\right) = 1\right\},$$

$$\mathcal{I}_{N+1}^\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \Phi(x) \le \varphi\}.$$

2) *Множества $\mathcal{O}_k^\varphi$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени $k = \overline{0,N}$:*

$$\mathcal{O}_k^\varphi = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall u_k \in U_k : \quad \mathbf{P}_k\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}^\varphi\right) = 1\right\},$$

$$\mathcal{O}_{N+1}^\varphi = \{x \in \mathbb{R}^n : \quad \Phi(x) > \varphi\}.$$

3) *Уравнение Беллмана допускает одно из двух представлений*

$$\begin{aligned} \mathsf{B}_k^\varphi(x) = \max_{u_k \in U_k} \Big\{ & \mathbf{P}_k\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^\varphi\right) \times \\ & \times \Big(1 - \mathbf{M}_k\Big[\mathsf{B}_{k+1}^\varphi(f_k(x, u_k, \xi_k)) \Big| f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}^\varphi\Big]\Big) + \\ & + \left(1 - \mathbf{P}_k\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}^\varphi\right)\right) \times \\ & \times \mathbf{M}_k\Big[\mathsf{B}_{k+1}^\varphi(f_k(x, u_k, \xi_k)) \Big| f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}^\varphi\Big] \Big\}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

$$
\begin{aligned}
\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U_k} \Big\{ & \mathbf{P}_k \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right) + \\
& + \left(1 - \mathbf{P}_k \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right) \right) \times \\
& \times \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \right) \Big| f_k(x, u_k, \xi_k) \in \left\{ \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi} \cup \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi} \right\} \right] \Big\}. \qquad (1.5)
\end{aligned}
$$

Доказательство леммы 1.1. Из определения множеств $\mathcal{I}_k^{\varphi}$, $\mathcal{O}_k^{\varphi}$ и соотношений МДП имеем

$$
\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \right) \right] = 1 \right\}, \qquad (1.6)
$$

$$
\mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \right) \right] = 0 \right\}. \qquad (1.7)
$$

С учетом равенства $\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \cup \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi} \cup \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi} = \mathbb{R}^n$ запишем тождество

$$
\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}(x) \equiv \mathbf{I}_{\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}}(x)\, \mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}(x) + \mathbf{I}_{\mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}}(x)\, \mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}(x) + \mathbf{I}_{\mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}}(x_{k+1})\, \mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}(x). \qquad (1.8)
$$

Тогда в соответствии с МДП, формулой полного математического ожидания и равенств

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \right) \Big| f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right] = 1, \\
\mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \right) \Big| f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi} \right] = 0,
\end{aligned}
$$

запишем

$$
\begin{aligned}
\max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \right) \right] = \max_{u_k \in U_k} \Big\{ & \mathbf{P}_k \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right) + \\
& + \mathbf{P}_k \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi} \right) \times \\
& \times \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \right) \Big| f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi} \right] \Big\}. \qquad (1.9)
\end{aligned}
$$

Поскольку выполнено

$$
\mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \right) \Big| f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi} \right] \in (0, 1),
$$

правая часть (1.10) принимает значение 1 только в случае

$$
\max_{u_k \in U_k} \mathbf{P}_k \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right) = 1.
$$

Тогда из (1.7) получаем

$$
\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists u_k(x) \in U_k : \quad \mathbf{P}_k \left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right) = 1 \right\}.
$$

Первый пункт леммы доказан.

Заметим, что равенство

$$\max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \right) \right] = 0$$

выполнено только в случае, когда

$$\forall u_k \in U_k : \quad \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \right) \right] = 0.$$

Опираясь на это и сказанное выше, получаем, что правая часть (1.10) принимает значение 0 только в том случае, если

$$\forall u_k \in U_k : \quad \begin{cases} \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right) = 0, \\ \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \in \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi} \right) = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Поскольку выполнено $\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \cap \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi} = \varnothing$, используя известную формулу вероятности противоположного события, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \in \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi} \right) = 1 - \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \in \left\{ \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \cup \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi} \right\} \right) = \\ = 1 - \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right) - \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi} \right) = 0. \end{aligned}$$

С учетом (1.11), окончательно получаем

$$\forall u_k \in U_k : \quad \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi} \right) = 1,$$

т.е.

$$\mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall u_k \left(x \right) \in U_k : \quad \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x, u_k \left(x \right), \xi_k \right) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi} \right) = 1 \right\}.$$

Второй пункт леммы доказан.

Используя равенство $\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \cap \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi} = \varnothing$, преобразуем (1.10). Имеем

$$\begin{aligned} \mathsf{B}_k^{\varphi} \left(x \right) = \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \right) \right] = \max_{u_k \in U_k} \Big\{ \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right) + \\ + \left(1 - \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right) - \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi} \right) \right) \times \\ \times \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \right) \Big| f_k \left(x, u_k, \xi_k \right) \in \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi} \right] \Big\}. \end{aligned}$$

Группируя слагаемые в последнем выражении, получаем (1.5).

Запишем тождество

$$\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(x \right) \equiv \mathbf{I}_{\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}} \left(x \right) \mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(x \right) + \mathbf{I}_{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}} \left(x \right) \mathsf{B}_{k+1}^{\varphi} \left(x \right),$$

и перейдем к следующему шагу МДП, используя формулу полного математического ожидания

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right)\right] = \max_{u_k \in U_k} \Big\{ \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right) + \\ + \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \left\{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right\}\right) \times \\ \times \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right) \Big| f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \left\{\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right\}\right] \Big\}.$$

С учетом $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} = \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi} \cup \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}$ получаем

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U_k} \Big\{ \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right) + \left(1 - \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right)\right) \times \\ \times \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right) \Big| f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \left\{\mathcal{B}_{k+1}^{\varphi} \cup \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right\}\right] \Big\}.$$

Лемма доказана. □

Условное математическое ожидание в формулах (1.5), (1.6) относительно случайного события понимается в следующем смысле

$$\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right) \Big| f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}\right] = \\ = \frac{\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right) \mathbf{I}_{\mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right)\right]}{\mathbf{M}_k\left[\mathbf{I}_{\mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right)\right]}.$$

Из пп. 1 и 2 леммы 1.1 видно, что $\mathcal{I}_k^{\varphi}$, $\mathcal{O}_k^{\varphi}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям, не зависящим от функции Беллмана. Причем из п. 1 делаем вывод, что изобелла уровня 1 $\mathcal{I}_k^{\varphi}$ по структуре совпадает с одношаговым множеством управляемости с вероятностью 1.

Отметим, что пп. 1 и 2 леммы 1.1 в дальнейшем используются для нахождения изобелл в явном виде в различных задачах, а п.3 используется при доказательстве следующих ниже утверждений о двусторонних оценках функции $\mathbf{M}\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right)\right]$ и функции Беллмана.

Из леммы 1.1 вытекает важное следствие.

Следствие 1.1. *Справедливы утверждения:*

1) *Для $x_k \in \mathcal{I}_k$ оптимальным управлением на шаге k является любой элемент из множества $U_k^{\mathcal{I}}(x_k)$*

$$U_k^{\mathcal{I}}(x_k) = \left\{u \in U_k : \quad \mathbf{P}\left(f_k\left(x_k, u, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}\right) = 1\right\}.$$

2) Для $x_k \in \mathcal{O}_k$ *оптимальным управлением на шаге* k *является любой элемент из множества* U_k.

3) $\forall x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$, $u_k \in U_k$ *справедлива двусторонняя оценка*

$$\begin{cases} \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right] \geq \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right), \\ \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right] \leq 1 - \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right). \end{cases} \tag{1.11}$$

и оценка снизу

$$\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right] \geq \\ \geq \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\middle| f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \left\{\mathcal{B}_{k+1}^{\varphi} \cup \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right\}\right]. \tag{1.12}$$

4) Для $k = N$ *выполнено*

$$u_N^{\varphi} = \arg\max_{u_N \in U_N} \mathbf{P}_N\left(f_N\left(x_N,u_N,\xi_N\right) \in \mathcal{I}_{N+1}^{\varphi}\right),$$

$$\mathsf{B}_N^{\varphi}(x) = \max_{u_N \in U_N} \mathbf{P}_N\left(f_N\left(x,u_N,\xi_N\right) \in \mathcal{I}_{N+1}^{\varphi}\right).$$

Доказательство следствия 1.1. Первый и второй пункты непосредственно следуют из первого и второго пунктов леммы 1.1. Четвертый пункт следует из соотношения МДП для конечного момента времени.

Для доказательства третьего пункта, воспользуемся известным неравенством

$$\min_{i=\overline{1,n}} z_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_i z_i \leq \max_{i=\overline{1,n}} z_i, \quad a_1,...,a_n \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 1$$

и формулой (1.5). Если формально принять

$$a_1(x,u_k) = \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\middle| f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}\right],$$

$$a_2(x,u_k) = 1 - \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\middle| f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}\right],$$

$$z_1(x,u_k) = \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right), \quad z_2(x,u_k) = 1 - \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right),$$

то для функции $\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right]$ с учетом (1.5) справедливо равенство

$$\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right] = a_1(x,u_k)\, z_1(x,u_k) + a_2(x,u_k)\, z_2(x,u_k).$$

Отсюда с учетом $a_1(x,u_k), a_n(x,u_k) \geq 0$ для всех $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ и $u_k \in U_k$ и $z_1(x,u_k) + z_2(x,u_k) = 1$ получаем двустороннюю оценку для правой части уравнения МДП

$$\min\left\{z_1(x,u_k), z_2(x,u_k)\right\} \leq \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right] \leq \max\left\{z_1(x,u_k), z_2(x,u_k)\right\}.$$

В силу равенства

$$\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{I}^{\varphi}_{k+1}\right)+\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{B}^{\varphi}_{k+1}\right)+\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{O}^{\varphi}_{k+1}\right)=1,$$

для $z_2\left(x,u_k\right)$ справедливо другое представление

$$z_2\left(x,u_k\right)=\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{I}^{\varphi}_{k+1}\right)+\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{B}^{\varphi}_{k+1}\right).$$

Следовательно $z_2\left(x,u_k\right)\geq z_1\left(x,u_k\right)$ и

$$z_1\left(x,u_k\right)\leq\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}^{\varphi}_{k+1}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right]\leq z_2\left(x,u_k\right).$$

Последнее неравенство в исходных обозначениях соответствует (1.12).

Для доказательства справедливости неравенства (1.13) введем обозначение

$$z_3\left(x,u_k\right)=\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}^{\varphi}_{k+1}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\Big|f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\left\{\mathcal{B}^{\varphi}_{k+1}\cup\mathcal{O}^{\varphi}_{k+1}\right\}\right].$$

Используя формулу (1.6), неравенство для выпуклой комбинации (указанное выше), а также $z_1\left(x,u_k\right)\in[0,1)$, $z_3\in[0,1)$, запишем

$$\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}^{\varphi}_{k+1}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right]=z_1\left(x,u_k\right)+\left(1-z_1\left(x,u_k\right)\right)z_3\left(x,u_k\right)\geq z_3\left(x,u_k\right).$$

Переходя к исходным обозначениям, завершаем доказательство следствия.

Следствие доказано. □

Из п. 1 следствия 1.1 Таким образом, для $x_k\in\mathcal{I}^{\varphi}_k$ задача определения марковской стратегии свелась к решению вероятностного уравнения (п. 1 следствия 1.1). Для $x_k\in\mathcal{O}^{\varphi}_k$ установлено, что любое допустимое управление является оптимальным, а значение функции Беллмана равно нулю. В третьем пункте следствия 1.1 найдена двусторонняя оценка для функции в правой части уравнения МДП при $x_k\in\mathcal{B}^{\varphi}_k$. Далее в работе эта оценка используется для получения двусторонней оценки для функции Беллмана, а нижняя оценка п. 3 следствия 1.1 используется для построения субоптимального управления.

Суммируя результаты леммы 1.1 и следствия 1.1 данного раздела можно заключить, что пп. 1 и 2 леммы 1.1 устанавливают рекуррентную формулу для вычисления изобелл, достоинством которой является ее “независимость” от функции Беллмана. П. 1 следствия 1.1 позволяет найти оптимальное управление при $x\in\mathcal{I}^{\varphi}_k$, избегая решение сложных оптимизационных задач, путем решения вероятностного уравнения. П. 2 следствия 1.1 закрывает вопрос об оптимальном управлении при $x \in \mathcal{O}_k^{\varphi}$. П. 3 леммы 1.1 отражает “модифицированное” уравнение Беллмана в области $\mathcal{B}^{\varphi}{}_k$, которое по сути является следствием применения формулы полного математического ожидания в правой части классического уравнения Беллмана. П. 3 следствия 1.1 представляет собой двустороннюю оценку для функции правой части уравнения Беллмана, из которой получается двусторонняя оценка для самой функции Беллмана (см. следующий раздел). При этом из п.3 следствия 1.1 можно получить выражение для субоптимальной стратегии, максимизирующей нижнюю границу функции правой части уравнения Беллмана. Более того, в частных случаях данная стратегия обеспечивает более высокое значение вероятностного критерия по сравнению со среднеквадратической и минимаксной стратегиями, а в некоторых и вовсе совпадает с оптимальной (см. разделы 1.4, 2.2).

1.4. Двусторонняя оценка функции Беллмана

Используя неравенство (1.12), сформулируем утверждение о двусторонней оценке для функции Беллмана в области $\mathcal{B}_k^{\varphi}$.

Теорема 1.2. *Функция Беллмана удовлетворяет двустороннему неравенству*

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) \leq \mathsf{B}_k^{\varphi}(x) \leq \overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x)\,. \tag{1.13}$$

где

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k \in U_k} \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right),$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k \in U_k} \left\{1 - \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right)\right\},$$

причем для $k = N$ *выполнено* $\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x)$.

Доказательство теоремы 1.2 заключается в вычислении супремума от обеих частей неравенств (1.12).

Таким образом, функция Беллмана в области $\mathcal{B}_k^{\varphi}$ (где она не равна ни единице, ни нулю) ограничена снизу максимальной вероятностью попадания траекторией системы на изобеллу уровня 1 на следующем шаге и сверху максимальной вероятностью непопадания траекторией системы на изобеллу уровня 0 на следующем шаге.

Из теоремы 1 можно получить двустороннюю оценку для функции оптимального значения вероятностного критерия $\sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} P_\varphi(u(\cdot))$. Исходя из метода динамического программирования эта функция определяется выражением [44]

$$F(\varphi) = \sup_{u(\cdot)\in\mathcal{U}} P_\varphi(u(\cdot)) = \begin{cases} \mathsf{B}_0^\varphi(X), & X \in \mathbb{R}^n, \\ \mathbf{M}_X\left[\mathsf{B}_0^\varphi(X)\right], & X \sim \mathbf{P}_X, \end{cases}$$

при этом первая ветвь соответствует случаю детерминированного вектора X, а вторая – случайного вектора X с известным распределением $\mathbf{P}_X$.

Введем в рассмотрение функции $\underline{F} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to [0,1]$ и $\overline{F} : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to [0,1]$

$$\underline{F}(\varphi, x) = \underline{\mathsf{B}}_0^\varphi(x) = \sup_{u_0\in U_0} \mathbf{P}\left(f_0(x, u_0, \xi_0) \in \mathcal{I}_1^\varphi\right),$$

$$\overline{F}(\varphi, x) = \overline{\mathsf{B}}_0^\varphi(x) = \sup_{u_0\in U_0} \left\{1 - \mathbf{P}\left(f_0(x, u_0, \xi_0) \in \mathcal{O}_1^\varphi\right)\right\}.$$

Приведем очевидное утверждение (без доказательства), следующее из теоремы 1.2.

Следствие 1.2. *Справедливы утверждения:*

1) *Пусть $X \in \mathbb{R}^n$ - детерминированный вектор. Тогда для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$\underline{F}(\varphi, X) \le F(\varphi) \le \overline{F}(\varphi, X).$$

2) *Пусть X - случайный вектор с распределением $\mathbf{P}_X$. Тогда для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство*

$$\mathbf{M}_X\left[\underline{F}(\varphi, X)\right] \le F(\varphi) \le \mathbf{M}_X\left[\overline{F}(\varphi, X)\right].$$

Следствие 1.2 позволяет найти оценки для функции оптимального значения вероятностного критерия без использования метода динамического программирования. Далее в работе с использованием леммы 1.1 и следствия 1.2 для различных задач такие оценки находятся в явном виде.

Сделаем замечание в отношении сформулированных утверждений, касающееся их использования при решении конкретных задач оптимального управления с вероятностным критерием. Основные трудности при решении уравнения МДП связаны с нахождением в явном виде функции Беллмана, причем даже в простых постановках они возникают уже на втором ($k = N - 1$) шаге алгоритма динамического программирования (см., например, [37, 40, 51]). Подход, используемый далее в работе и основывающийся на результатах настоящей главы, заключается в нахождении в явном виде изобелл, двусторонних оценок функции Беллмана и субоптимального управления, которое максимизирует нижнюю оценку функции правой части уравнения Беллмана (см. п. 3 следствия 1.1). Так, например, в главе 3 и 4 будет видно, что в задачах, где вычисление функции Беллмана уже на втором шаге МДП затруднено, решить перечисленные выше задачи оказывается возможным, причем в некоторых случаях с использованием получаемых свойств уравнения Беллмана удается найти и само оптимальное управление. Однако предлагаемый подход не всегда удается применить к описанному классу задач, поскольку, например, поверхность уровня 1 может оказаться пустым множеством. Получение условий, при которых поверхность уровня 1 не пуста является нетривиальной задачей и выходит за рамки настоящего исследования.

1.5. Выводы по главе 1

1. Получены рекуррентные соотношения для поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана, не зависящие от самой функции Беллмана.

2. Доказано, что любое решение соответствующего вероятностного уравнения (вероятность того, что траектория системы лежит на поверхности уровня 1 на следующем шаге равна единице) является оптимальной стратегией для состояний, лежащих на поверхности уровня 1.

3. Доказано, что любой управление из области допустимых управлений является оптимальным для состояний, лежащих на поверхности уровня 0 функции Беллмана.

4. Получено модифицированное соотношение метода динамического программирования и соотношение для поиска субоптимальной стратегии.

5. Доказана теорема о двусторонней оценке функции Беллмана, функции правой части уравнения метода динамического программирования и функции оптимального значения вероятностного критерия.

Основные результаты главы опубликованы в [2, 5, 6]

Глава 2. Модельные задачи оптимального управления с вероятностным критерием

В настоящей главе рассмотрены модельные задачи оптимального управления с вероятностным критерием.

В разделе 2.1 исследуется задача оптимального управления линейной дискретной стохастической системой с критерием в форме вероятности попадания первой координаты вектора состояния в заданную окрестность нуля за ограниченное сверху время.

В разделе 2.2 рассмотрена задача оптимального управления одномерным движением материальной точкой с критерием вероятности и нефиксированным моментом окончания. Подобная задача рассматривалась в [17] в постановке с непрерывным временем.

В разделе 2.3 рассмотрена задача оптимального управления портфелем ценных бумаг с вероятностным критерием в упрощенной постановке [37,40,49,50,52,53].

В разделе 2.4 сформулированы выводы по главе .

2.1. Оптимальное управление линейной стохастической системой с нефиксированным временем окончания

Рассмотрим задачу управления с учетом случайных воздействий в дискретном времени $k=\overline{0,N}$. Динамика системы описывается рекуррентными уравнениями

$$\begin{cases} x_{k+1}^1 = x_k^1 + x_k^2 h, \\ x_{k+1}^2 = x_k^2 + x_k^3 h, \\ \ldots \\ x_{k+1}^{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i x_k^i + u_k h + \xi_k, \\ x_0^1 = X^1, \ldots, x_0^{n-1} = X^{n-1}, \end{cases} \qquad k=\overline{0,N}. \tag{2.1}$$

В отношении системы (2.1) будем полагать, что

1) $\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-1}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}$ – вектор состояния системы,

2) $\left(x_0^1, ..., x_0^{n-1}\right)$ – детерминированный вектор,

3) $u_k \in \mathbb{R}$ – скалярное управление,

4) ξ_k – непрерывная случайная величина, плотность распределения которой $f_{\xi_k}(t)$ является четной функцией,

5) $(\xi_0, ..., \xi_N)$ – независимы,

6) $a_1, ..., a_{n-1}, h$ - детерминированные скалярные параметры.

Структура (2.1) возникает при дискретизации линейной непрерывной системы, записанной в канонической форме управляемости, а случайная величина ξ_k моделирует шум в канале управления.

Для системы (2.1) рассмотрим задачу синтеза управления, оптимального в смысле вероятности попадания первой координаты вектора состояния x_k^1 в заданную окрестность нуля $[-\varphi, \varphi]$ за время, не превышающее величину N. Критерий в такой задаче может быть представлен в следующем виде

$$\mathbf{P}\left(\min_{k\in\{0,...,N\}} \left|x_{k+1}^1\right| \leq \varphi\right). \tag{2.2}$$

Аналогичная задача для случая непрерывного времени и двумерной линейной системы управления рассмотрена в [17], где было предложено численное решение.

Применить к такой задаче метод динамического программирования в форме [64] (см. раздел 1.2 первой главы) напрямую не удается, поскольку критерий (2.2) не является терминальным.

Сведем задачу (2.2) к задаче оптимального управления с вероятностным терминальным критерием (1.3). Для этого расширим вектор состояния путем введения новой координаты

$$x_k^n = \min_{j\in\{1,...,k\}} \left|x_{j-1}^1\right|,$$

динамику изменения которой можно представить рекуррентным соотношением

$$\begin{cases} x_{k+1}^n = \min\left\{x_k^n,\ |x_k^1|\right\}, \\ x_0^n = |x_0^1|, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}. \tag{2.3}$$

Отметим, что система (2.1), (2.3) является нелинейной.

Эквивалентная задача имеет вид

$$\mathbf{P}\left(\min\left\{\left|x_{N+1}^1\right|,\ x_{N+1}^n\right\}\le\varphi\right)\to\max_{u(\cdot)},\tag{2.4}$$

причем эквивалентность понимается в смысле равенства значений критериев

$$P_\varphi\left(u\left(\cdot\right)\right)=\mathbf{P}\left(\min\left\{\left|x_{N+1}^1\right|,\ x_{N+1}^n\right\}\le\varphi\right)=\mathbf{P}\left(\min_{k\in\{0,\ldots,N\}}\left|x_{k+1}^1\right|\le\varphi\right).\tag{2.5}$$

Полученная задача (2.4) относится к классу задач оптимального управления с вероятностным терминальным критерием, причем управление ищется в более широком классе функций $u_k=\gamma_k\left(x_k^1,...,x_k^n\right)$.

В исходных обозначениях имеем $m=s=1$ - размерности вектора управления и вектора случайных возмущений, $U=\mathbb{R}$ - ограничения на управление отсутствуют, функция правой части системы и точностной функционал определяются выражениями

$$f_k\left(x_k,u_k,\xi_k\right)=\begin{pmatrix}x_k^1+x_k^2h\\ x_k^2+x_k^3h\\ \cdots\\ \sum_{i=1}^{n-1}a_ix_k^i+u_kh+\xi_k\\ \min\left\{x_k^n,\ |x_k^1|\right\}\end{pmatrix},\quad \Phi\left(x\right)=\min\left\{x^n,\ \left|x^1\right|\right\}.$$

Для записи расширенной системы в векторном виде введем матрицы $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times 1}$

$$A=\begin{pmatrix}1&h&0&...&0&0&0\\ 0&1&h&...&0&0&0\\ 0&0&1&...&0&0&0\\ \cdots&&&&&&\\ 0&0&0&...&1&h&0\\ a_1&a_2&a_3&...&a_{n-2}&a_{n-1}&0\\ 0&0&0&...&0&0&0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \cdots\\0\\1\\0\end{pmatrix}$$

и вектор $e_i\in\mathbb{R}^n$ такой, что i-ая координата равна единице, а все остальные - нулю. Запишем расширенную систему управления (2.1), (2.3) в векторном виде

$$\begin{cases}x_{k+1}=Ax_k+e_n\min\left\{e_n^{\mathrm{T}}x_k,\ |e_1^{\mathrm{T}}x_k|\right\}+B\left(u_k+\xi_k\right),\\ x_0=X,\end{cases}\qquad k=\overline{0,N}.$$

Для решения задачи (2.3) применим метод динамического программирования (см. раздел 1.2), рекуррентные соотношения которого в данном случае примут следующий вид

$$u_k^{\varphi} = \arg\max_{u_k} \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(Ax_k + e_n \min\left\{e_n^{\mathsf{T}}x_k,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}x_k\right|\right\} + B\left(u_k + \xi_k\right)\right)\Big|x_k\right],$$

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(Ax_k + e_n \min\left\{e_n^{\mathsf{T}}x_k,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}x_k\right|\right\} + B\left(u_k + \xi_k\right)\right)\Big|x_k = x\right], \quad k = \overline{0, N},$$

$$\mathsf{B}_{N+1}^{\varphi}(x) = \mathbf{I}_{(-\infty,\varphi]}\left(\left|e_1^{\mathsf{T}}x\right|\right),$$

Найдем изобеллы используя 1ый и 2ой пункты леммы 1.1. Пусть $K = N - n + 2$ - некоторый момент дискретного времени. С учетом того, что решение рекуррентного уравнения для процесса $\Phi\left(x_{N+1}\right)$ и фиксированных $x_N, x_{N-1}, ..., x_K$ имеет следующий вид

$$\Phi\left(x_{N+1}\right) = \min\left\{x_{N+1}^n,\ \left|x_{N+1}^1\right|\right\} = \min\left\{e_n^{\mathsf{T}}x_{N+1},\ \left|e_1^{\mathsf{T}}x_{N+1}\right|\right\} =$$

$$= \begin{cases} \min\left\{e_n^{\mathsf{T}}x_k,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}Ax_k\right|\right\}, & k = N, \\ \min\left\{e_n^{\mathsf{T}}x_k,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}Ax_k\right|,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}A^2x_k\right|\right\}, & k = N-1, \\ \dots & \\ \min\limits_{i=\overline{1,n-2}}\left\{e_n^{\mathsf{T}}x_k,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}A^ix_k\right|\right\}, & k = K+1, \\ \min\limits_{i=\overline{1,n-2}}\left\{e_n^{\mathsf{T}}x_k,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}A^ix_k\right|,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}A^{n-1}x_k + e_1^{\mathsf{T}}A^{n-2}B\left(u_k + \xi_k\right)\right|\right\}, & k = K, \end{cases}$$

из которого видно, что управление не входит в решение для шагов $k \in \{K+1, ..., N\}$, то изобеллы уровня 1 и 0 для указанных шагов имеют следующий вид

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists u_k :\ \mathbf{P}\left(\min_{i=\overline{1,N+1-k}}\left\{e_n^{\mathsf{T}}x,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}A^ix\right|\right\} \le \varphi\right) = 1\right\} =$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \min_{i=\overline{1,N+1-k}}\left\{e_n^{\mathsf{T}}x,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}A^ix\right|\right\} \le \varphi\right\},$$

$$\mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall u_k :\ \mathbf{P}\left(\min_{i=\overline{1,N+1-k}}\left\{e_n^{\mathsf{T}}x,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}A^ix\right|\right\} > \varphi\right) = 1\right\} =$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \min_{i=\overline{1,N+1-k}}\left\{e_n^{\mathsf{T}}x,\ \left|e_1^{\mathsf{T}}A^ix\right|\right\} > \varphi\right\},$$

откуда с учетом $\mathcal{I}_k^{\varphi} \cup \mathcal{O}_k^{\varphi} = \mathbb{R}^n$ получаем, что функция Беллмана является индикаторной функцией множества $\mathcal{I}_k^{\varphi}$

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}(x), \quad k \in \{K+1, ..., N\}.$$

Заметим, что $e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B = h^{n-1} \neq 0$.

Воспользовавшись пп. 1 и 2 следствия 1.1 с учетом $U_k = \mathbb{R}$ легко видеть, что любой элемент множества $\mathbb{R}$ является оптимальным управленем для шагов $k \in \{K+1, ..., N\}$. Пусть $k = K$. Для изобелл уровня 1 и 0 справедливы равенства

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \Bigg\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists u_k : \ \mathbf{P}\Bigg(\min_{i=\overline{1,n-2}} \Big\{ e_n^{\mathsf{T}} x, \ \left| e_1^{\mathsf{T}} A^i x \right|, \\ \left| e_1^{\mathsf{T}} A^{n-1} x + e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B \left(u_k + \xi_k \right) \right| \Big\} \leq \varphi \Bigg) = 1 \Bigg\} = \\ = \Bigg\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \min_{i=\overline{1,n-2}} \Big\{ e_n^{\mathsf{T}} x, \ \left| e_1^{\mathsf{T}} A^i x \right| \Big\} \leq \varphi \Bigg\}, \quad (2.6)$$

$$\mathcal{O}_k^{\varphi} = \Bigg\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall u_k : \ \mathbf{P}\Bigg(\min_{i=\overline{1,n-2}} \Big\{ e_n^{\mathsf{T}} x_k, \ \left| e_1^{\mathsf{T}} A^i x \right|, \\ \left| e_1^{\mathsf{T}} A^{n-1} x + e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B \left(u_k + \xi_k \right) \right| \Big\} > \varphi \Bigg) = 1 \Bigg\} = \varnothing. \quad (2.7)$$

Нетрудно видеть, что выполнено равенство $\mathcal{I}_K^{\varphi} = \mathcal{I}_{K+1}^{\varphi}$, откуда с учетом рекуррентного уравнения для изобеллы уровня 1 (п.1 леммы 1.1) по индукции делаем вывод, что выражение (2.6) справедливо для всех $k \in \{0, ..., K\}$. С учетом того, что изобелла уровня 0 на шаге $k = K$ является пустым множеством заключаем, что выражение (2.7) справедливо для всех $k \in \{0, ..., K\}$, а следовательно множество $\mathcal{B}_k^{\varphi} = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{I}_k^{\varphi}$ для всех $k \in \{0, ..., K\}$.

Воспользуемся п. 1 следствия 1.1, в соответствии с которым любой элемент множества $U_k^{\mathcal{I}}(x_k)$ является оптимальным управлением при $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$, при этом $U_k^{\mathcal{I}}(x)$ для $k \in \{0, ..., K\}$ имеет следующий вид

$$U_k^{\mathcal{I}}(x_k) = \left\{ u \in U_k : \quad \mathbf{P}_k \left(f_k \left(x_k, u, \xi_k \right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right) = 1 \right\} = \\ = \Bigg\{ u \in \mathbb{R} : \quad \mathbf{P}\Bigg(\min_{i=\overline{1,n-2}} \Big\{ e_n^{\mathsf{T}} x_k, \ \left| e_1^{\mathsf{T}} A^i x_k \right|, \\ \left| e_1^{\mathsf{T}} A^{n-1} x_k + e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B \left(u + \xi_k \right) \right| \Big\} \leq \varphi \Bigg) = 1 \Bigg\} = \mathbb{R}.$$

Из п. 2 следствия 1.1 получаем, что для $x_k \in \mathcal{O}_k^{\varphi}$ оптимальным является также любой элемент из множества $\mathbb{R}$.

Найдем теперь нижнюю и верхнюю оценки для функции Беллмана для $k \in \{0, ..., K\}$ и $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$. Заметим, что из $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ следует

$$\min_{i=\overline{1,n-2}} \left\{ e_n^{\mathrm{T}} x, \ \left| e_1^{\mathrm{T}} A^i x_k \right| \right\} > \varphi.$$

Из теоремы 1.2 с учетом (2.6) и $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ получаем

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k} \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right) = \\ = \max_{u_k} \mathbf{P}\left(\left| e_1^{\mathrm{T}} A^{n-1} x + e_1^{\mathrm{T}} A^{n-2} B (u_k + \xi_k) \right| \le \varphi\right). \quad (2.8)$$

Поскольку плотность распределения $f_{\xi_k}(t)$ случайной величины ξ_k является четной функцией, то целевая функция в задаче стохастического программирования в правой части (2.8) представима в виде

$$\mathbf{P}\left(\left| e_1^{\mathrm{T}} A^{n-1} x + e_1^{\mathrm{T}} A^{n-2} B (u_k + \xi_k) \right| \le \varphi\right) = \int\limits_{\left(e_1^{\mathrm{T}} A^{n-2} B\right)^{-1}\left(-\varphi - e_1^{\mathrm{T}} A^{n-1} x\right) - u_k}^{\left(e_1^{\mathrm{T}} A^{n-2} B\right)^{-1}\left(\varphi - e_1^{\mathrm{T}} A^{n-1} x\right) - u_k} f_{\xi_k}(t)\, dt,$$

откуда легко получить детерминированный эквивалент для задачи (2.8) в форме задачи математического программирования

$$\left| e_1^{\mathrm{T}} A^{n-1} x_k + e_1^{\mathrm{T}} A^{n-2} B u_k \right| \to \min_{u_k},$$

имеющей очевидное решение

$$\underline{u}_k^{\varphi} = -\left(e_1^{\mathrm{T}} A^{n-2} B\right)^{-1} e_1^{\mathrm{T}} A^{n-1} x_k, \quad x_k \in \mathcal{B}_k^{\varphi}, \tag{2.9}$$

и нижнюю оценку функции Беллмана

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \mathbf{P}\left(\left| e_1^{\mathrm{T}} A^{n-2} B \xi_k \right| \le \varphi\right), \quad x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}, \tag{2.10}$$

которая оказывается не зависящей явно от x и по сути равна вероятности попадания случайной величины на симметричный относительно нуля отрезок $\left[-\varphi \left(e_1^{\mathrm{T}} A^{n-2} B\right)^{-1}, \varphi \left(e_1^{\mathrm{T}} A^{n-2} B\right)^{-1}\right]$.

Верхняя оценка функции Беллмана с учетом (2.7) имеет вид

$$\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k} \left\{ 1 - \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right) \right\} = 1, \quad x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}.$$

Покажем теперь, что оптимальное управление для $k \in \{0, ..., K\}$ и $x_k \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ совпадает с (2.9). Пусть $k = K$. Поскольку $\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}}(x)$ в соответствии с МДП имеем

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k} \mathbf{M}\left[\mathbf{I}_{\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}}(f_k(x, u_k, \xi_k))\right] = \max_{u_k} \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right) = \underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x),$$

и, следовательно, $u_k^{\varphi} = \underline{u}_k^{\varphi}$.

Пусть теперь $k = K - 1$. Из (1.6) получаем

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k} \Big\{ \mathbf{P}\left(\left|e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B \xi_{k+1}\right| \le \varphi\right) + \\ + \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right)\left(1 - \mathbf{P}\left(\left|e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B \xi_{k+1}\right| \le \varphi\right)\right) \Big\},$$

откуда также получаем $u_k^{\varphi} = \underline{u}_k^{\varphi}$ и

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \mathbf{P}\left(\left|e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B \xi_{k+1}\right| \le \varphi\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\left|e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B \xi_k\right| \le \varphi\right)\left(1 - \mathbf{P}\left(\left|e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B \xi_{k+1}\right| \le \varphi\right)\right).$$

Продолжая аналогичные размышления заключаем, что оптимальное управление для всех $k \in \{0, ..., N\}$ имеет вид

$$u_k^{\varphi} = \underline{u}_k^{\varphi} = \begin{cases} \text{любое из } \mathbb{R}, & k \in \{K+1, ..., N\}, \\ -\left(e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B\right)^{-1} e_1^{\mathsf{T}} A^{n-1} x_k, & k \in \{0, ..., K\}, \end{cases} \tag{2.11}$$

а функция Беллмана равна

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \begin{cases} \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}(x), & k \in \{K+1, ..., N\}, \\ \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}(x) + p_k(\varphi)\Big(1 - \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}(x)\Big), & k \in \{0, ..., K\}, \end{cases} \tag{2.12}$$

где $p_k(\varphi) \in (0, 1)$ удовлетворяет рекуррентному уравнению в обратном времени

$$\begin{cases} p_k(\varphi) = p_{k+1}(\varphi) + \mathbf{P}\left(\left|e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B \xi_k\right| \le \varphi\right)\left(1 - p_{k+1}(\varphi)\right), \\ p_K(\varphi) = 0, \end{cases} \quad k \in \{0, ..., K-1\}.$$

Таким образом аналитически решена задача оптимального управления линейной дискретной стохастической системой с вероятностным критерием качества и нефиксированным, но ограниченным сверху временем окончания.

Интересным оказалось равенство $\underline{u}_k^{\varphi} = u_k^{\varphi}$, где $\underline{u}_k^{\varphi}$ - решение задач стохастического программирования в правой части выражения для нижней оценки для функции Беллмана, а u_k^{φ} - оптимальная стратегия. Данное равенство легко объяснить с общих позиций.

А именно, пусть выполнены условия

1) для некоторых $k \in \mathbb{K} \subset \mathbb{N}$ выполнено $\mathcal{O}_k^{\varphi} = \varnothing$

2) множества $\mathcal{I}_k^{\varphi}$, $\mathcal{B}_k^{\varphi}$ не зависят явно от времени k;

3) $\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = c_k$ при $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$, где $c_k \in (0,1)$ – некоторая константа не зависящая явно от x.

Тогда функцию Беллмана можно представить в виде

$$\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}, \\ c_{k+1}, & x \in \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}, \end{cases}$$

а уравнение Беллмана (1.6) в области $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ преобразуется в следующее

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U_k} \left\{ \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right) + c_{k+1}\left(1 - \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right)\right) \right\},$$

или, что то же самое

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U_k} \left\{ c_{k+1} + \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right)(1 - const_{k+1}) \right\},$$

откуда легко видеть, что

$$u_k^{\varphi} = \underline{u}_k^{\varphi} = \arg\max_{u_k \in U_k} \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right).$$

Причем в рассмотреном примере

$$\max_{u_k \in U_k} \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right) = const_k = \mathbf{P}\left(\left|e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B \xi_k\right| \leq \varphi\right).$$

Тем не менее сказанное выше не претендует на утверждение или лемму, поскольку условия 1 – 3 на вряд ли обладают объективной общностью. Другими словами затруднительно выделить подкласс задач оптимального управления с вероятностным терминальным критерием, для которого были бы справедливы условия 1 –3.

Перейдем к другому примеру, в рамках которого покажем, что найденное управление (2.11) при определенных условиях является оптимальным и по квантильному критерию.

Функционал квантили представляет собой гарантированный с заданной вероятностью уровень точностного функционала $\Phi\left(x_{N+1}\left(u\left(\cdot\right),\zeta\right)\right)$, т.е. верхнюю доверительную границу для него

$$\Phi_{\alpha}\left(u\left(\cdot\right)\right)=\min\left\{\varphi:\ P_{\varphi}\left(u\left(\cdot\right)\right)\geq\alpha\right\},\quad \alpha\in\left(0,1\right).$$

Задача оптимального управления с квантильным критерием имеет вид

$$\Phi_{\alpha}\left(u\left(\cdot\right)\right)\to\min_{u(\cdot)} \tag{2.13}$$

Ввиду наличия вероятностного ограничения $P_{\varphi}\left(u\left(\cdot\right)\right)\geq\alpha$ применение метода динамического программирования к задаче (2.13) затруднено. Подход, использованный в [64] в случае дискретных стохастических систем, позволяет получить лишь приближенные (так называемые гарантирующие) решения квантильной задачи в классе управлений, зависящих от всех прошлых состояний системы. При этом вопрос о существовании оптимальных управлений, зависящих только от текущего состояния, остается открытым. В предыдущем разделе было получено аналитическое решение задачи оптимального управления с вероятностным критерием. В [44] предложен метод преобразования этого решения в решение задачи (2.13). С целью формулировки достаточных условий применимости этого метода введем в рассмотрение функции оптимальных значений рассматриваемых функционалов.

$$F\left(\varphi\right)=\sup_{u(\cdot)}P_{\varphi}\left(u\left(\cdot\right)\right),\quad G\left(\alpha\right)=\inf_{u(\cdot)}\Phi_{\alpha}\left(u\left(\cdot\right)\right)$$

Определение 2.1 ([44]). Пусть $f(x)$ – неубывающая функция скалярного аргумента. Точка x_0 такая, что

$$f(x_0-\epsilon)\leq 0\leq f(x_0+\epsilon)$$

для любого $\epsilon>0$, называется обобщенным корнем уравнения $f(x)=0$.

Следующая теорема устанавливает эквивалентность задач вероятностной и квантильной оптимизации.

Теорема 2.1 ([44]). *Пусть φ_α – единственный обобщенный корень уравнения $F(\varphi) = \alpha$. Тогда $G(\alpha) = \varphi_\alpha$. Более того, если для $\varphi = \varphi_\alpha$ существует решение u_φ задачи*

$$P_\varphi(u(\cdot)) \to \max_{u(\cdot)}$$

и выполняется неравенство $F(\varphi_\alpha) \geq \alpha$, то u_φ– решение задачи (2.13).

Проверим выполнение достаточных условий эквивалентности задач вероятностной и квантильной оптимизации в задаче из предыдущего раздела. Отметим, что из определения функции оптимального значения вероятностного критерия следует, что

$$F(\varphi) = \mathsf{B}_0^\varphi(x) .$$

Нетрудно заметить, что в случае, когда случайные величины ξ_k одинаково распределены, функция $F(\varphi)$ принимает вид

$$F(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \geq \min\limits_{j=\overline{0,n-2}} \left| \sum\limits_{i=0}^{j} C_j^i h^i X^{i+1} \right|, \\ p(\varphi) \sum\limits_{j=0}^{N-n+1} (1-p(\varphi))^j, & \varphi < \min\limits_{j=\overline{0,n-2}} \left| \sum\limits_{i=0}^{j} C_j^i h^i X^{i+1} \right|. \end{cases} \qquad (2.14)$$

где

$$p(\varphi) = P\left(\left|\xi_k h^{n-2}\right| \leq \varphi\right), \quad k = \overline{0,N}.$$

Для проверки выполнения условий теоремы, учитывая что $\alpha \in (0,1)$, достаточно убедиться, что функция, стоящая во второй ветви (2.14), строго возрастает по φ. Предположим, что $p(\varphi)$ является строго возрастающей функцией. Тогда правая часть выражения

$$p(\varphi) \sum_{j=0}^{N-n+1} (1-p(\varphi))^j = p(\varphi) \frac{(1-p(\varphi))^{N-n+1} - 1}{1-p(\varphi)-1} = 1 - (1-p(\varphi))^{N-n+1} .$$

с учетом $p(\varphi) \in (0,1)$ строго возрастает по φ как суперпозиция строго возрастающих функций $p(\varphi)$.

Заметим теперь, что u_k^φ в соответствии с (2.11) не зависит явно от φ. Отсюда заключаем, что задача оптимального управления с критерием в форме функционала вероятности (2.4) эквивалентна задаче оптимального управления с квантильным критерием (2.14), причем управление (2.11), решающее задачу (2.4) является оптимальным и в задаче (2.14).

2.2. Оптимальное управление одномерным движением материальной точки с ограниченным временем окончания

Рассмотрим модель возмущенного одномерного движения материальной точки. Ускорение играет роль управления, на которое действуют случайные ошибки, имеющие гауссовский закон распределения. Тогда уравнения, описывающие динамику системы, будут иметь вид

$$\begin{cases} r_{k+1} = r_k + v_k h \\ v_{k+1} = v_k + u_k h + \xi_k, \qquad k = \overline{0, N}, \\ r_0 = R,\ v_0 = V, \end{cases} \tag{2.15}$$

r_k, v_k - соответственно координата и скорость материальной точки в k-ый момент времени, $\xi_k \sim N(0, \sigma^2)$, $k = \overline{0, N}$. Задача оптимального управления имеет вид

$$\mathbf{P}\left(\min_{k\in\{0,\ldots,N\}} |r_{k+1}| \le \varphi\right) \to \max_{u(\cdot)}. \tag{2.16}$$

Отметим, что плотность распределения случайных величин ξ_k, относится к семейству плотностей, описанному в разделе 2.1. По аналогии с разделом 2.1 введем в рассмотрение новую координату фазового вектора

$$y_{k+1} = \min\{y_k,\ |r_k|\},$$

$y_0 = |r_0|$ - начальные условия. Эквивалентная задача имеет вид

$$\mathbf{P}\left(\min\left\{y_{N+1},\ |r_{N+1}|\right\} \le \varphi\right) \to \max_{u(\cdot)}$$

Необходимо отметить, что функция управления содержится во втором уравнении, описывающем динамику системы. Поэтому на последнем шаге управление будет любым элементом из $\mathbb{R}$. Этот факт указывает на то, что в случае, когда объект управляется по ускорению, в последний момент времени произойдет запаздывание, в следствии чего объект будет неуправляем.

Во введенных в разделе 2.1 обозначениях имеем,

$$n = 3, \quad x_k = \begin{pmatrix} r_k \\ v_k \\ y_k \end{pmatrix}, \quad a_1 = 0, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad K = N - 1.$$

В соответствии с (2.11) оптимальное управление на шагах $k=\overline{0,N-1}$ имеет вид

$$u_k^{\varphi}=-\frac{r_k}{h^2}-\frac{2v_k}{h},$$

а функция Беллмана равна

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x)=\begin{cases}1, & \text{при } \min\{y,\ |r|,\ |x+vh|\}\le\varphi,\\ 2\Phi_0\left(\frac{\varphi}{\sigma}\right)\sum\limits_{j=0}^{N-(k+2)}\left(1-2\Phi_0\left(\frac{\varphi}{\sigma}\right)\right)^j, & \text{при } \min\{y,\ |r|,\ |r+vh|\}>\varphi,\end{cases}$$

где $2\Phi_0\left(\frac{\varphi}{\sigma}\right)$ - вероятность попадания гауссовской случайной величины ξ_i в интервал $(-\frac{\varphi}{\sigma},\frac{\varphi}{\sigma})$. Из (2.14) получаем функцию оптимального значения вероятностного критерия

$$F(\varphi)=\begin{cases}1, & \text{при } \varphi\ge\min\left\{|R|,|R+Vh|\right\},\\ 2\Phi_0\left(\frac{\varphi}{\sigma}\right)\sum\limits_{j=0}^{N-2}\left(1-2\Phi_0\left(\frac{\varphi}{\sigma}\right)\right)^j, & \text{при } \varphi<\min\left\{|R|,|R+Vh|\right\}.\end{cases}\tag{2.17}$$

Ниже приведен график функции оптимального значения вероятностного критерия (2.17).

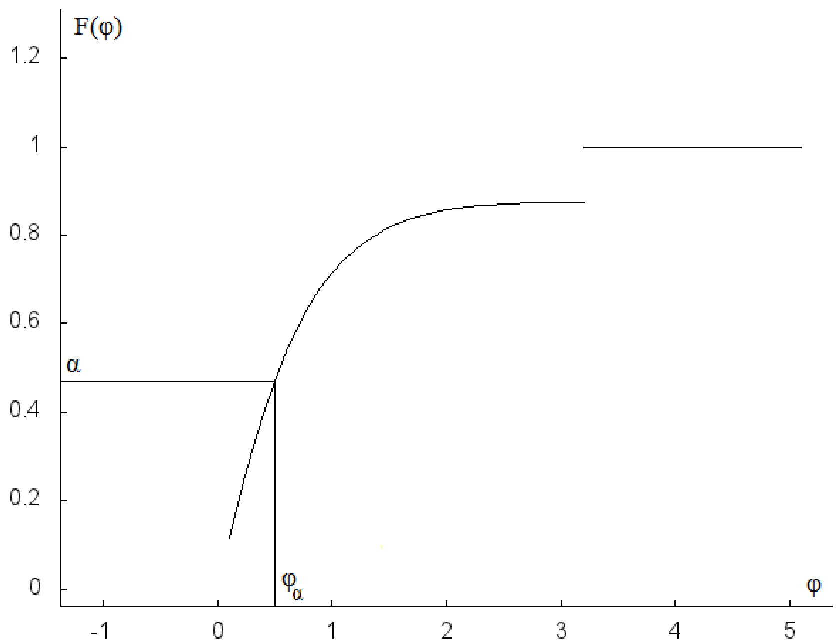

Рисунок 2.1. Функция оптимального значения вероятностного критерия

2.3. Оптимальное управление портфелем ценных бумаг

Рассмотрим скалярную систему управления [49,50], которая является обобщением системы [37, 40, 52, 53] на случай многомерного вектора управления,

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k \left(1 + u_k^1 b + \sum\limits_{i=2}^{m} u_k^i \xi_k^i \right), \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}, \tag{2.18}$$

где $n = 1$ - размерность вектора состояния, m - размерность вектора управления, $s = m - 1$ - размерность вектора случайных возмущений, $m \geq 2$, X, $b \in \mathbb{R}$ - детерминированные скаляры, $X > 0$, $b > -1$, $\xi_k = (\xi_k^2, ..., \xi_k^m)^{\mathrm{T}}$ - случайный вектор с независимыми компонентами. Предполагается независимость компонент вектора $(\xi_0, ..., \xi_N)$. Носитель распределения случайного вектора ξ_k имеет вид

$$\Xi = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{m-1} : \quad \underline{b}^i \leq \zeta^i \leq \overline{b}^i, \quad i = \overline{2, m} \right\},$$

где $\overline{b}^i > \underline{b}^i \geq -1$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, N}$.

Множество U_k имеет следующий вид:

$$U_k = U = \left\{ u \in \mathbb{R}^m : \quad \sum_{i=1}^{m} u^i = 1, \quad u^i \geq 0, \quad i = \overline{1, m} \right\}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Рассматривается задача

$$\mathbf{P} \left(-x_{N+1} \leq \varphi \right) \to \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}. \tag{2.19}$$

Если за X принять размер стартового капитала, за x_k – размер капитала на начало k-го года, за u_k^1 – долю x_k капитала, вкладываемого в безрисковый инструмент (например, в надежный банк), имеющий доходность b, u_k^i – доли капитала x_k, вкладываемые в рисковые активы, характеризующиеся случайными доходностями ξ_k^i, $i = \overline{2, m}$, то задача (2.19) заключается в максимизации вероятности достижения размера капитала уровня $-\varphi$ в заданный момент времени $N + 1$ путем инвестиций в некоторые активы.

В [50] для случая двух шагов по времени ($N = 1$) предлагается численный метод для поиска субоптимальной стратегии в классе кусочно постоянных функций. Отметим, что в более ранних работах [46, 52, 53], в которых рассматривался случай только одного рискового актива, большое внимание уделялось асимптотическим

$N \to \infty$ свойствам стратегий, являющихся субоптимальными в задаче (2.19). Интерес к этим свойствам проявлялся ввиду так называемого "биржевого парадокса", возникающего при использовании критерия "средней доходности", т.е. $\mathbf{M}\left[x_{N+1}\right]$. Этот парадокс заключается в следующем: при $N \to \infty$ система, синтезированная управлением, оптимальным по критерию "средней доходности", ведет себя таким образом, что среднее значение капитала стремится к бесконечности, а вероятность разорения - к единице. В силу того, что по сей день не найдено оптимальной вероятностной стратегии (даже для частного случая) в "многошаговой" ($N > 1$) задаче, проверка ее асимптотических свойств затруднена.

Во введенных в главе 1 обозначениях имеем

$$f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right) = x_k \left(1 + u_k^1 b + \sum_{i=2}^{m} u_k^i \xi_k^i\right), \quad \Phi\left(x\right) = -x, \quad \varphi < 0.$$

С использованием леммы 1.1 найдем явный вид поверхностей уровня 1 и 0.

Утверждение 2.1. *Множества $\mathcal{I}_k^\varphi$, $\mathcal{B}_k^\varphi$, $\mathcal{O}_k^\varphi$ определяются выражениями*

$$\mathcal{I}_k^\varphi = \left[\varphi_k^{\mathcal{I}}, \infty\right), \quad \mathcal{B}_k^\varphi = \left(\varphi_k^{\mathcal{O}}, \varphi_k^{\mathcal{I}}\right), \quad \mathcal{O}_k^\varphi = \left(-\infty, \varphi_k^{\mathcal{O}}\right],$$

где $\varphi_k^{\mathcal{I}}$, $\varphi_k^{\mathcal{O}}$ имеют вид

$$\varphi_k^{\mathcal{I}} = -\varphi \left(1 + \max\left\{b, \max_{j=\overline{2,m}} \underline{b}^j\right\}\right)^{k-N-1},$$

$$\varphi_k^{\mathcal{O}} = -\varphi \left(1 + \max\left\{b, \max_{j=\overline{2,m}} \overline{b}^j\right\}\right)^{k-N-1}.$$

Доказательство утверждения 2.1. Пусть $k = N$. Из п. 1 леммы 1.1 получаем выражение для изобеллы уровня 1

$$\mathcal{I}_k^\varphi = \left\{x \in \mathbb{R}: \quad \exists u_k \in U: \quad \mathbf{P}\left(x\left(1 + u_k^1 b + \sum_{i=2}^{m} u_k^i \xi_k^i\right) \geq -\varphi\right) = 1\right\},$$

откуда с учетом ограниченности носителя распределения случайного вектора ξ_k получаем

$$\mathcal{I}_k^\varphi = \left[-\varphi\left(1 + \max\left\{b, \max_{j=\overline{2,m}} \underline{b}^j\right\}\right), +\infty\right) = \left[\varphi_k^{\mathcal{I}}, \infty\right).$$

Пусть теперь $k = N - 1$. Из п. 1 леммы 1.1 получаем

$$\mathcal{I}_k^\varphi = \left\{x \in \mathbb{R}: \quad \exists u_k \in U: \quad \mathbf{P}\left(x\left(1 + u_k^1 b + \sum_{i=2}^{m} u_k^i \xi_k^i\right) \geq -\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right) = 1\right\},$$

откуда по аналогии получаем

$$\mathcal{I}_k^{\varphi}=\left[\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\left(1+\max\left\{b,\ \max_{j=\overline{2,m}}\underline{b}^j\right\}\right),\ +\infty\right)=\left[\varphi_k^{\mathcal{I}},\infty\right).$$

Продолжая аналогичные рассуждения по индукции для всех остальных шагов по времени $k\in\{0,...,N-2\}$ заключаем, что изобелла уровня 1 $\forall k=\overline{0,N}$ равна

$$\mathcal{I}_k^{\varphi}=\left[\varphi_k^{\mathcal{I}},\infty\right).$$

Положим опять $k=N$ и запишем из п. 2 леммы 1.2 выражение для изобеллы уровня 0

$$\mathcal{O}_k^{\varphi}=\left\{x\in\mathbb{R}:\quad \forall u_k\in U:\quad \mathbf{P}\left(x\left(1+u_k^1b+\sum_{i=2}^m u_k^i\xi_k^i\right)\le-\varphi\right)=1\right\},$$

откуда с учётом ограниченности носителя распределения случайного вектора ξ_k получаем

$$\mathcal{O}_k^{\varphi}=\left(-\infty,\ -\varphi\left(1+\max\left\{b,\ \max_{j=\overline{2,m}}\overline{b}^j\right\}\right)\right)=\left(-\infty,\ \varphi_k^{\mathcal{O}}\right].$$

Пусть теперь $k=N-1$. Из п. 2 леммы 1.1 получаем

$$\mathcal{O}_k^{\varphi}=\left\{x\in\mathbb{R}:\quad \exists u_k\in U:\quad \mathbf{P}\left(x\left(1+u_k^1b+\sum_{i=2}^m u_k^i\xi_k^i\right)\le-\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}}\right)=1\right\},$$

откуда по аналогии получаем

$$\mathcal{O}_k^{\varphi}=\left(-\infty,\ \varphi_{k+1}^{\mathcal{O}}\left(1+\max\left\{b,\ \max_{j=\overline{2,m}}\overline{b}^j\right\}\right)\right)=\left(-\infty,\ \varphi_k^{\mathcal{O}}\right].$$

Продолжая аналогичные рассуждения по индукции для всех остальных шагов по времени $k\in\{0,...,N-2\}$ заключаем, что изобелла уровня 0 $\forall k=\overline{0,N}$ равна

$$\mathcal{O}_k^{\varphi}=\left(-\infty,\ \varphi_k^{\mathcal{O}}\right].$$

Множество $\mathcal{B}_k^{\varphi}$ по определению дополняет объединение изобелл уровня 1 и 0 до пространства $\mathbb{R}$.

Утверждение доказано. □

Из утверждения 2.1 справедливы равенства

$$\mathbf{P}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right)=\mathbf{P}\left(x\left(1+u_k^1b+\sum_{i=2}^m u_k^i\xi_k^i\right)\ge\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right),$$

$$\mathbf{P}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right)=\mathbf{P}\left(x\left(1+u_k^1b+\sum_{i=2}^m u_k^i\xi_k^i\right)\le\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}}\right).$$

В соответствии с п.1 следствия 1.1 любой набор векторов u_k из однопараметрического семейства множеств

$$U_k^{\mathcal{I}}(x_k) = \left\{ u_k \in U : \quad \mathbf{P}\left(x_k \left(1 + u_k^1 b + \sum_{i=2}^{m} u_k^i \xi_k^i \right) \geq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} \right) = 1 \right\}$$

является оптимальным управлением на шаге k при $x_k \geq \varphi_k^{\mathcal{I}}$. Таким управлением, например, является $u_k^{\varphi} = (1, 0, ..., 0)^{\mathrm{T}}$. В соответствии с п.2 следствия 1.1 любой набор векторов $u_k \in U$ является оптимальным управлением на шаге k при $x_k \leq \varphi_k^{\mathcal{O}}$.

В итоге получаем, что для $x \notin \mathcal{B}_k^{\varphi}$ оптимальным является управление

$$u_k^{\varphi} = \begin{cases} \text{любой элемент из } U_k^{\mathcal{I}}(x_k), & x_k \in \left[\varphi_k^{\mathcal{I}}, +\infty\right), \\ \text{любой элемент из } U, & x_k \in \left(-\infty, \varphi_k^{\mathcal{O}}\right]. \end{cases}$$

Пусть теперь $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$. Используя теорему 1.2 и утверждение 2.1, заключаем, что функция Беллмана для $k = \overline{0, N-1}$ и $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ удовлетворяет двустороннему неравенству

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) \leq \mathsf{B}_k^{\varphi}(x) \leq \overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x), \tag{2.20}$$

где нижняя и верхняя оценки функции Беллмана равны соответственно

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U} \mathbf{P}\left(x \left(1 + u_k^1 b + \sum_{i=2}^{m} u_k^i \xi_k^i \right) \geq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} \right),$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U} \mathbf{P}\left(x \left(1 + u_k^1 b + \sum_{i=2}^{m} u_k^i \xi_k^i \right) \geq \varphi_{k+1}^{\mathcal{O}} \right),$$

Проведем исследование нижней и верхней границ функции Беллмана. Отметим, во-первых, что они с точностью до параметров $\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}$, $\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}}$, φ и распределений ξ_k, ξ_N совпадают с функцией Беллмана при $k = N$, т.е.

$$\mathsf{B}_N^{\varphi}(x) = \underline{\mathsf{B}}_N^{\varphi}(x) = \overline{\mathsf{B}}_N^{\varphi}(x) = \max_{u_N \in U} \mathbf{P}\left(x \left(1 + u_N^1 b + \sum_{i=2}^{m} u_N^i \xi_N^i \right) \geq \varphi \right).$$

Отсюда заключаем, что решения соответствующих задач стохастического программирования существуют в силу компактности U и полунепрерывности справа целевой функции в правой части последнего равенства (последнее условие доказано в [49]).

Получим условия, накладываемые на параметры b, $\underline{b}^i$, $\overline{b}^i$, при которых выполнено $\mathcal{B}_k^{\varphi} = \varnothing$. В силу того, что $\mathcal{B}_k^{\varphi}$ является интервалом с границами $\varphi_k^{\mathcal{O}}$, $\varphi_k^{\mathcal{I}}$, заключаем, что пустота множества $\mathcal{B}_k^{\varphi}$ эквивалентна условию $\varphi_k^{\mathcal{I}} = \varphi_k^{\mathcal{O}}$, т.е. с учетом утверждения 2.1

$$\max\left\{b,\ \max_{j=\overline{2,m}} \underline{b}^j\right\} = \max\left\{b,\ \max_{j=\overline{2,m}} \overline{b}^j\right\}.$$

Отсюда получаем, что если $b \geq \max_{j=\overline{2,m}} \overline{b}^j$, то множество $\mathcal{B}_k^{\varphi}$ является пустым. Нетрудно видеть, что при выполнении последнего неравенства множество $\mathcal{B}_k^{\varphi}$ является пустым для всех $k = \overline{0,N}$. Отсюда получаем $\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \mathbf{I}_{[\varphi_k^{\mathcal{I}}, +\infty)}(x)$. Это условие имеет экономическую интерпретацию: в случае, если максимальная доходность рисковых активов меньше доходности безрискового актива, оптимальной стратегией является вложение в последний, при этом вероятность "выигрыша" равна 1, если капитал превышает порог $\varphi_k^{\mathcal{I}}$, и 0, если он меньше указанного. В силу отмеченного будем рассматривать случай

$$\max_{j=\overline{2,m}} \underline{b}^j < b < \max_{j=\overline{2,m}} \overline{b}^j. \tag{2.21}$$

Найдем нижнюю $\underline{F}$ и верхнюю $\overline{F}$ оценки для функции оптимальной вероятности. Отметим, что в настоящей главе принципиально выделять зависимость оценок функции оптимального значения вероятностного критерия от горизонта управления N.

$$\underline{F}(\varphi, N, X) = \max_{u_0 \in U} \mathbf{P}\left(X\left(1 + u_0^1 b + \sum_{i=2}^{m} u_0^i \xi_0^i\right) \geq -\varphi\,(1+b)^{-N}\right),$$

$$\overline{F}(\varphi, N, X) = \max_{u_0 \in U} \mathbf{P}\left(X\left(1 + u_0^1 b + \sum_{i=2}^{m} u_0^i \xi_0^i\right) \geq -\varphi\left(1 + \max_{j=\overline{2,m}} \overline{b}^j\right)^{-N}\right).$$

С использованием $\underline{F}$ и $\overline{F}$ перейдем к формулировке условий асимптотической оптимальности некоторого допустимого управления в задаче (2.19).

Сформулируем условия асимптотической оптимальности некоторого допустимого управления $\tilde{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$. Отметим, что под асимптотически оптимальным управлением понимается такое, что в пределе при $N \to \infty$ значение вероятностного критерия при такой стратегии совпадает с оптимальным.

Утверждение 2.2. *Для любых $\varphi < 0$, $X > 0$ справедливо равенство*

$$\lim_{N\to\infty} \underline{F}(\varphi, N, X) = \lim_{N\to\infty} \overline{F}(\varphi, N, X).$$

Доказательство утверждения 2.2. Рассмотрим функции $\underline{F}(\varphi, N, X)$ и $\overline{F}(\varphi, N, X)$. Пусть $\underline{u}$ и $\overline{u}$ – решения задач стохастического программирования в правых частях выражений для $\underline{F}(\varphi, N, X)$ и $\overline{F}(\varphi, N, X)$ соответственно. Ссылаясь на факт существования решения и оперируя формулой для логарифма, запишем равенства

$$\underline{F}(\varphi, N, X) = \mathbf{P}\left(\frac{\ln(-\varphi) - \ln(X) - \ln\left(1 + \underline{u}^1 b + \sum\limits_{i=2}^{m} \underline{u}^i \xi_0^i\right)}{\ln(1+b)} \leq N\right),$$

$$\overline{F}(\varphi, N, X) = \mathbf{P}\left(\frac{\ln(-\varphi) - \ln(X) - \ln\left(1 + \overline{u}^1 b + \sum\limits_{i=2}^{m} \overline{u}^i \xi_0^i\right)}{\ln\left(1 + \max\limits_{j=\overline{2,m}} \overline{b}^j\right)} \leq N\right),$$

откуда в силу непрерывности $\underline{F}(\varphi, N, X)$ и $\overline{F}(\varphi, N, X)$ по N при взятии предела

Утверждение доказано. $\square$

Из утверждения 2.2 можно получить условия, накладываемые на некоторое допустимое управление $u(\cdot)$ из класса $\mathcal{U}$, при которых такое управление является асимптотически оптимальным. Сформулируем эти условия в виде утверждения.

Утверждение 2.3. *Пусть для некоторого допустимого управления $\tilde{u}(\cdot) = (\tilde{\gamma}_0(\cdot), ..., \tilde{\gamma}_N(\cdot)) \in \mathcal{U}$ и для любого $N \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\underline{F}(\varphi, N, X) \leq P_\varphi(\tilde{u}(\cdot)).$$

Тогда допустимое управление $\tilde{u}(\cdot)$ является асимптотически оптимальным в задаче (2.19).

Покажем, что на примере условия утверждения 2.2 выполнены в отношении управления $\underline{u}^\varphi(\cdot) = \left(\underline{\gamma}_0(\cdot), ..., \underline{\gamma}_N(\cdot)\right) \in \mathcal{U}$, образованного функциями $\underline{u}_k^\varphi = \underline{\gamma}_k(x_k)$ в соответствии со следующим соотношением

$$\underline{u}_k^\varphi = \arg\max_{u_k \in U_k} \mathbf{P}\left(f_k(x_k, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^\varphi\right) =$$
$$= \arg\max_{u_k \in U} \mathbf{P}\left(x\left(1 + u_k^1 b + \sum_{i=2}^{m} u_k^i \xi_k^i\right) \geq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right). \quad (2.22)$$

Рассмотрим пример, когда портфель формируется из одного безрискового и одного рискового активов. Для данного примера удается найти аналитическое решение задач стохастического программирования (2.22).

Пусть $m = 2$, $\underline{b}^2 = -1$, $\overline{b}^2 = a$, X - детерминированный положительный скаляр. Тогда система управления примет вид

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k \left(1 + u_k^1 b + u_k^2 \xi_k\right), \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}. \tag{2.23}$$

Система (2.23) рассматривалась в [37,38,40,46,52,53]. При этом в [52] рассмотрен случай усеченного нормального, а в [37,38,40] - равномерного распределения случайной величины ξ_k.

Используя результаты предыдущего раздела, получаем, что

$$\varphi_k^{\mathcal{I}} = -\varphi \left(1 + b\right)^{k-N-1}, \quad \varphi_k^{\mathcal{O}} = -\varphi \left(1 + a\right)^{k-N-1}, \quad k = \overline{0, N},$$

нижняя и верхняя оценки функции Беллмана имеют вид

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U} \mathbf{P}\left(x\left(1 + u_k^1 b + u_k^2 \xi_k\right) \geq -\varphi\left(1 + b\right)^{k-N}\right), \tag{2.24}$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U} \mathbf{P}\left(x\left(1 + u_k^1 b + u_k^2 \xi_k\right) \geq -\varphi\left(1 + a\right)^{k-N}\right).$$

Воспользуемся результатами [46], где для задачи стохастического программирования вида (2.24) с точностью до параметра $-\varphi\left(1 + b\right)^{k-N}$ было найдено аналитическое решение. На основе сказанного сформулируем утверждение (без доказательства) о нижней оценке для функции Беллмана.

Утверждение 2.4. *Нижняя оценка функции Беллмана имеет вид*

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) =$$

$$= \begin{cases} 1, & x \in \left[-\varphi\left(1+b\right)^{k-N-1}, +\infty\right), \\ 1 - F_\xi\left(\frac{-\varphi}{x(1+b)^{N-k}} - 1\right), & x \in \left(-\varphi\left(1+a\right)^{k-N-1}, -\varphi\left(1+b\right)^{k-N-1}\right), \\ 0, & x \in \left(-\infty, -\varphi\left(1+a\right)^{k-N-1}\right], \end{cases}$$

решение $\underline{u}_k^{\varphi}$ *задачи стохастического программирования в правой части (2.24) имеет вид*

$$\underline{u}_k^{\varphi} = \begin{cases} (1,\ 0)^{\mathrm{T}}, & x_k \geq -\varphi\left(1+b\right)^{k-N-1}, \\ (0,\ 1)^{\mathrm{T}}, & x_k < -\varphi\left(1+b\right)^{k-N-1}. \end{cases} \tag{2.25}$$

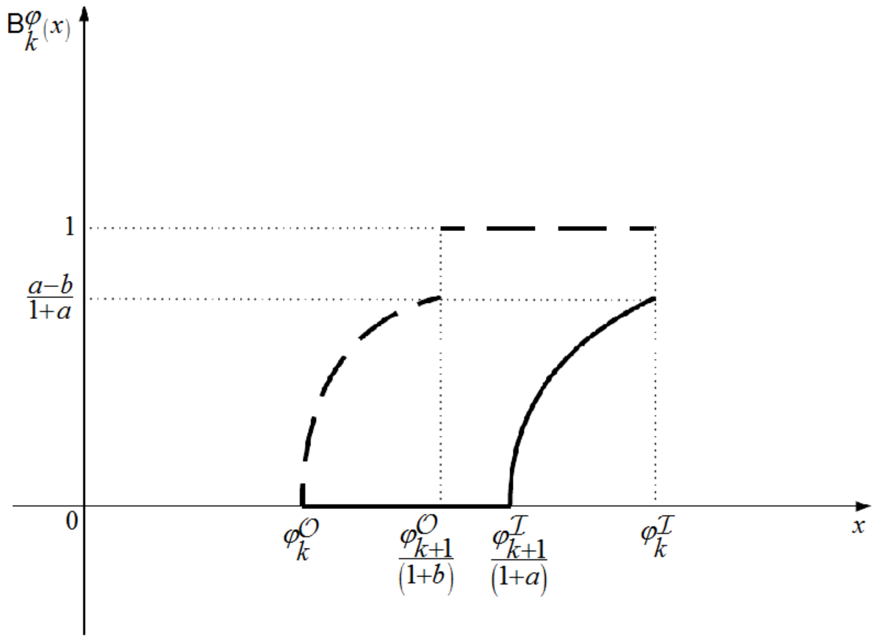

Рисунок 2.2. Верхняя (пунктир) и нижняя (жирная линия) оценки функции Беллмана

Отметим, что верхняя оценка функции Беллмана, как уже было сказано выше совпадает с нижней с точностью до параметров. На рисунке 2.2 приведен график нижней и верхней границ функции Беллмана. Из утверждения 2.4 получаем явный вид субоптимального управления $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$. Для использования утверждения 2.3 рассмотрим значение функционала вероятности при управлении $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$

$$P_{\varphi}\left(\underline{u}^{\varphi}(\cdot)\right) = \mathbf{P}\left(\underline{x}_{N+1} \geq -\varphi\right), \tag{2.26}$$

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \begin{cases} \underline{x}_k (1+b), & \underline{x}_k \geq -\varphi (1+b)^{k-N-1}, \\ \underline{x}_k (1+\xi_k), & \underline{x}_k < -\varphi (1+b)^{k-N-1}, \end{cases} & k = \overline{0, N}, \\ \underline{x}_0 = X, \end{cases} \tag{2.27}$$

где $\{\underline{x}_k\}_{k=0}^{N+1}$ - случайный процесс (2.23) при $u_k = \underline{u}_k^{\varphi}$, а $\underline{u}_k^{\varphi}$ определяется соотношением (2.25).

Утверждение 2.5. *Справедливы утверждения:*

1) Функционал вероятности $P_{\varphi}\left(\underline{u}^{\varphi}(\cdot)\right)$ в задаче (2.19) при управлении $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ пред-

ставим в следующем виде

$$P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right) = \underline{F}(\varphi, N, X) + \\ + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}\left(\underline{x}_k < \varphi_k^{\mathcal{I}}\right)\mathbf{P}\left(\underline{x}_k(1+\xi_k) \geq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} \middle| \underline{x}_k < \varphi_k^{\mathcal{I}}\right). \quad (2.28)$$

2) Для любого $N \in \{0\} \cap \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\underline{F}(\varphi, N, X) \leq P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right) \quad (2.29)$$

3) Управление $\underline{u}^\varphi(\cdot) \in \mathcal{U}$, определяющееся соотношением (2.25) является асимптотически оптимальным в задаче (2.19).

Доказательство утверждения 3.5. Рассмотрим функционал вероятности (2.26) $P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right)$ при управлении $\underline{u}^\varphi(\cdot)$. Рассмотрим гипотезы

$$\left\{\underline{x}_N \geq -\varphi(1+b)^{-1}\right\}, \quad \left\{\underline{x}_N < -\varphi(1+b)^{-1}\right\},$$

образующие полную группу несовместных событий. Используя (2.27) и формулу полной вероятности преобразуем выражение (2.26)

$$\mathbf{P}\left(\underline{x}_{N+1} \geq -\varphi\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\underline{x}_N \geq -\varphi(1+b)^{-1}\right)\mathbf{P}\left(\underline{x}_N(1+b) \geq -\varphi \middle| \underline{x}_N \geq -\varphi(1+b)^{-1}\right) + \\ + \mathbf{P}\left(\underline{x}_N < -\varphi(1+b)^{-1}\right)\mathbf{P}\left(\underline{x}_N(1+\xi_N) \geq -\varphi \middle| \underline{x}_N < -\varphi(1+b)^{-1}\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\underline{x}_N \geq \varphi_N^{\mathcal{I}}\right) + \mathbf{P}\left(\underline{x}_N < \varphi_N^{\mathcal{I}}\right)\mathbf{P}\left(\underline{x}_N(1+\xi_N) \geq \varphi_{N+1}^{\mathcal{I}} \middle| \underline{x}_N < \varphi_N^{\mathcal{I}}\right). \quad (2.30)$$

Обозначим $k = N - 1$. Аналогичным образом, рассмотрев гипотезы

$$\left\{\underline{x}_k \geq \varphi_k^{\mathcal{I}}\right\}, \quad \left\{\underline{x}_k < \varphi_k^{\mathcal{I}}\right\},$$

также образующих группу несовместных событий, с использованием формулы полной вероятности получаем выражение для первого слагаемого в правой части (2.30)

$$\mathbf{P}\left(\underline{x}_{k+1} \geq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\underline{x}_k \geq \varphi_k^{\mathcal{I}}\right) + \mathbf{P}\left(\underline{x}_k < \varphi_k^{\mathcal{I}}\right)\mathbf{P}\left(\underline{x}_k(1+\xi_k) \geq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} \middle| \underline{x}_k < \varphi_k^{\mathcal{I}}\right). \quad (2.31)$$

Выполнив подстановку правой части (2.31) в (2.30), получим

$$\mathbf{P}\left(\underline{x}_{N+1} \geq -\varphi\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\underline{x}_k \geq \varphi_k^{\mathcal{I}}\right) + \sum_{i=k}^{N} \mathbf{P}\left(\underline{x}_i < \varphi_i^{\mathcal{I}}\right) \mathbf{P}\left(\underline{x}_i\left(1+\xi_i\right) \geq \varphi_{i+1}^{\mathcal{I}} \Big| \underline{x}_i < \varphi_i^{\mathcal{I}}\right). \quad (2.32)$$

Убедившись в том, что выражение (2.31) справедливо для всех $k \in \{0, .., N\}$ получаем, что выражение (2.32) также справедливо для всех k.

Пусть теперь $k = 1$. Из определения случайного процесса $\{\underline{x}_k\}_{k=0}^{N+1}$ имеем следующее равенство

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0\left(1 + \underline{u}_0^1 b + \underline{u}_0^2 \xi_0\right) = X\left(1 + \underline{u}_0^1 b + \underline{u}_0^2 \xi_0\right),$$

где $\underline{u}_0^{\varphi} = \left(\underline{u}_0^1, \underline{u}_0^2\right)^T$. С учетом сказанного преобразуем выражение (2.32) для $k = 1$

$$\mathbf{P}\left(\underline{x}_{N+1} \geq -\varphi\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(\underline{x}_1 \geq \varphi_1^{\mathcal{I}}\right) + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\left(\underline{x}_i < \varphi_i^{\mathcal{I}}\right) \mathbf{P}\left(\underline{x}_i\left(1+\xi_i\right) \geq \varphi_{i+1}^{\mathcal{I}} \Big| \underline{x}_i < \varphi_i^{\mathcal{I}}\right) =$$

$$= \mathbf{P}\left(X\left(1 + \underline{u}_0^1 b + \underline{u}_0^2 \xi_0\right) \geq \varphi_1^{\mathcal{I}}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}\left(\underline{x}_i < \varphi_i^{\mathcal{I}}\right) \mathbf{P}\left(\underline{x}_i\left(1+\xi_i\right) \geq \varphi_{i+1}^{\mathcal{I}} \Big| \underline{x}_i < \varphi_i^{\mathcal{I}}\right). \quad (2.33)$$

Заметим теперь, что из определения $\underline{u}_0^{\varphi} = \left(\underline{u}_0^1, \underline{u}_0^2\right)$ и $\varphi_1^{\mathcal{I}} = \varphi\left(1+b\right)^{-N}$ для первого слагаемого в правой части (2.33) справедливо равенство

$$\mathbf{P}\left(X\left(1 + \underline{u}_0^1 b + \underline{u}_0^2 \xi_0\right) \geq \varphi_1^{\mathcal{I}}\right) = \max_{u_0 \in U} \mathbf{P}\left(X\left(1 + u_0^1 b + u_0^2 \xi_0\right) \geq \varphi_1^{\mathcal{I}}\right) = \underline{F}\left(\varphi, N, X\right),$$

откуда окончательно убеждаемся в справедливости (2.28) и п. 1 настоящего утверждения.

Из п. 1 непосредственно следует п. 2., а из п. 2 с учетом утверждения 2.3 следует п. 3.

Утверждение доказано □

Таким образом доказано, что управление $\underline{u}^{\varphi}\left(\cdot\right)$ является асимптотически оптимальным в задаче (2.19). Отметим некоторые дополнительные свойства управления $\underline{u}^{\varphi}\left(\cdot\right)$.

Во-первых, управление (2.25) совпадает с так называемой рисковой стратегией [46, 52], которая ранее была получена из некоторых эвристических соображений.

Результаты настоящего раздела позволяют утверждать что она является субоптимальной в исходной задаче, поскольку

1) является оптимальной при $k = N$,

2) является оптимальной при $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi} \cup \mathcal{O}_k^{\varphi}$,

3) максимизирует нижнюю оценку функции правой части уравнения Беллмана при $x_k \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$.

В [46] отмечены некоторые свойства рисковой стратегии:

1) не зависит от распределения случайных величин ξ_k;

2) если для текущего капитала удается достичь желаемого уровня дохода лишь за счет вложения всех денег в банк, то это и осуществляется. В противном случае производится рисковая операция вложения всех денег в акции;

3) является оптимальной в смысле вероятностного критерия при $N = 0$ и не является оптимальной в том же смысле при $N > 0$;

4) не приводит к биржевому парадоксу [46].

Зададимся теперь вопросом: при каких условиях, накладываемых на начальное условие X, горизонт управления N, величины φ, a и b можно достичь уровнем капитала к моменту $N+1$ значения $-\varphi$ с вероятностью единица? Ответ на данный вопрос удается получить приближенно с использованием (2.28) и нижней оценки функции оптимального значения вероятностного критерия $\underline{F}(\varphi, N, X)$. Выпишем эту оценку в явном виде с учетом утверждения 2.4

$$\underline{F}(\varphi, N, X) =$$
$$= \begin{cases} 1, & X \in \left[-\varphi(1+b)^{-N-1}, +\infty\right), \\ 1 - F_{\xi}\left(\frac{-\varphi}{X(1+b)^N} - 1\right), & X \in \left(-\varphi(1+a)^{-N-1}, -\varphi(1+b)^{-N-1}\right), \\ 0, & X \in \left(-\infty, -\varphi(1+a)^{-N-1}\right]. \end{cases} \tag{2.34}$$

Заметим, во-первых, что если процесс (2.27) “выходит” из области $\mathcal{I}_0^{\varphi}$, то он достигает

Таблица 2.1. Числовые значения параметров системы

№ эксперимента	N	φ	X	a	b
a)	200	100	15	$0,02$	$0,01$
b)	200	100	20	$0,02$	$0,01$
c)	200	100	25	$0,02$	$0,01$
d)	200	100	5	$0,9$	$0,01$
e)	60	190	1	$1,2$	$0,023$
f)	50	100	1	$0,2$	$0,097$

уровня $-\varphi$ на шаге $k = N + 1$ с вероятностью единица примерно за

$$N \geq \frac{\ln(-\varphi) - \ln(X)}{\ln(1+b)} - 1, \tag{2.35}$$

что вытекает из условия $X \in \mathcal{I}_0^{\varphi}$, которое эквивалентно $X \geq -\varphi\,(1+b)^{-N-1}$. Обозначим за

$$\underline{N} = \left[\frac{\ln(-\varphi) - \ln(X)}{\ln(1+b)} - 1\right]$$

оценку момента пересечения процессом (2.27) линии $-\varphi$. Квадратными скобками обозначена операция взятия целой части числа.

Проведем серию численных экспериментов. Первая тройка экспериментов (см. таблицу 2.1 a) – c)) посвящена случаю $X \in \mathcal{I}_0^{\varphi}$, парметры N, φ, a, b – зафиксированы, а параметр X (начальный капитал) варьируется. Вторая тройка экспериментов (см. таблицу 2.1 d) – f)) относится к случаю $X \in \mathcal{B}_0^{\varphi}$. В таблицу 2.1 занесены числовые значения параметров системы. На рисунке 2.3 изображены траектория системы (2.27), уровень φ и границы поверхностей уровня 1 ($\varphi_k^{\mathcal{I}}$) и 0 ($\varphi_k^{\mathcal{O}}$), а в таблице 2.2 приведены результаты расчётов $\underline{N}$.

В экспериментах a)–c) видно, что выполнено $N > \underline{N}$, и процесс (2.27) пересекает желаемый уровень $-\varphi$ в момент времени $\underline{N}$. В экспериментах d)–f) выполнено $N < \underline{N}$, что в итоге приводит к случаю “разорения”. Из рисунка 2.3 и таблицы 2.2 также видно, что $\underline{N}$ является относительно точной оценкой числа N, необходимого для пересечения процессом (2.27) целевого уровня $-\varphi$.

Таблица 2.2. Оценка момента пересечения процессом $\underline{x}_k$ уровня $-\varphi$

№ эксперимента	a)	b)	c)	d)	e)	f)
$\underline{N}$	189	160	138	300	229	55

По результатам численных экспериментов видно, что оценка $\underline{N}$ оказывается достаточно точной.

2.4. Выводы по главе 2

1) Получено аналитическое решение семейства задач оптимального управления линейной дискретной стохастической системой с вероятностным критерием и нефиксированным временем окончания.

2) Получены достаточные условия оптимальности найденного управления в задаче с квантильным критерием

3) Решена модельная задача оптимального управления материальной точкой

4) Получены двусторонние оценки функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия в задаче оптимального капиталовложения

5) Получены достаточные условия асимптотической оптимальности некоторой допустимой стратегии

6) Доказана асимптотическая оптимальность “рисковой стратегии”

Основные результаты главы опубликованы в [2, 6, 8, 10, 13]

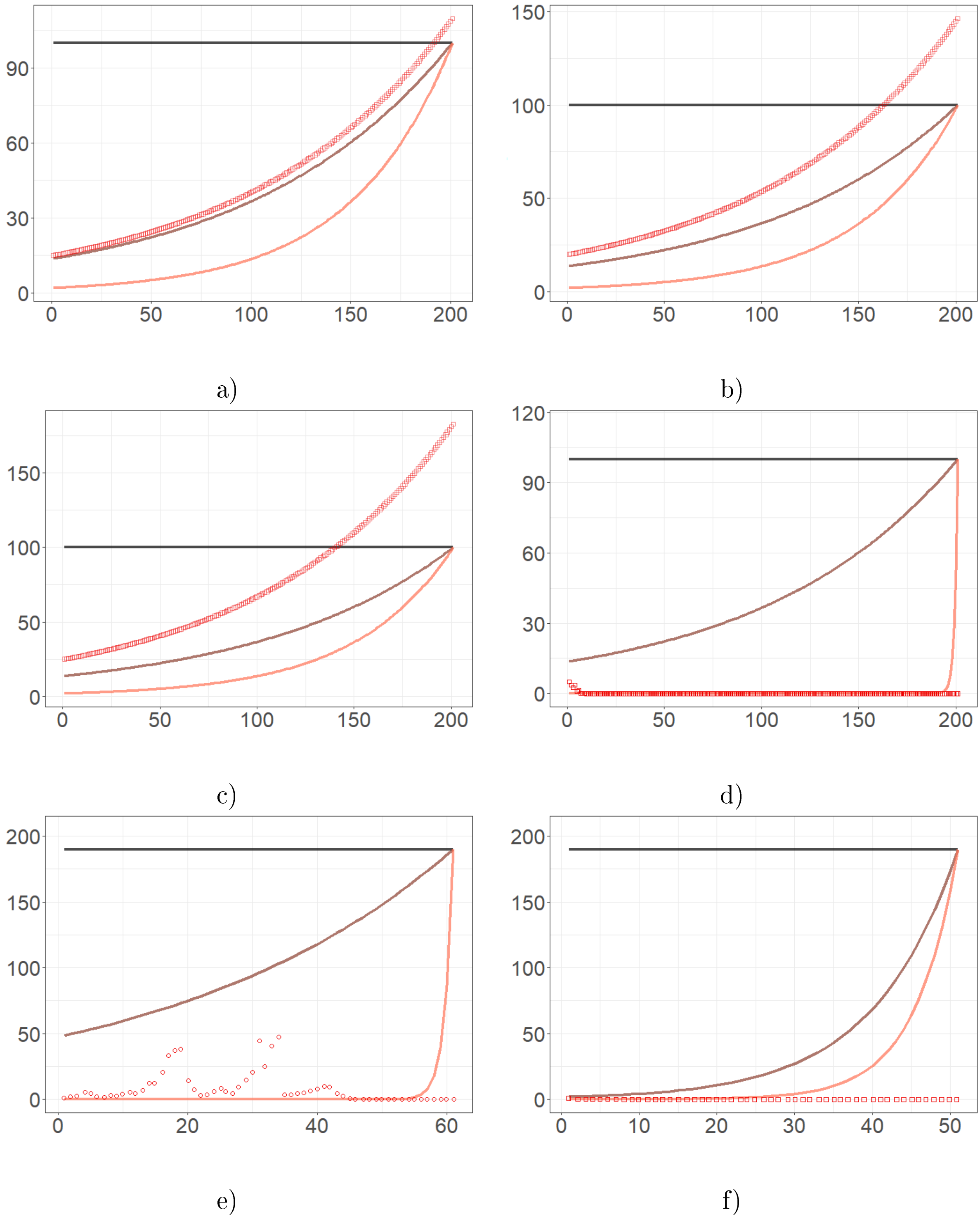

Рисунок 2.3. Траектории системы (2.27). Красные квадратики – $\underline{x}_k$, черная линия – φ, коричневая линия – $\varphi_k^{\mathcal{I}}$, оранжевая линия – $\varphi_k^{\mathcal{O}}$

Глава 3. Оптимизация однопараметрической импульсной коррекции с вероятностным критерием

В настоящей главе рассмотрена задача оптимального управления билинейной системой с мультипликативным к управлению случайным возмущением. Критерием является вероятность попадания модуля линейной комбинации вектора состояния в заданную окрестность нуля в терминальный момент времени. Такая модель играет важную роль в задачах однопараметрической импульсной коррекции траектории движения космических аппаратов (КА) [58–67, 69, 72, 87, 88]. Рассматриваемая постановка схожа с [58, 63–67, 69, 72].

В разделе 3.1 приводится математическая постановка задачи и обсуждается роль такой модели в задачах импульсной коррекции траектории движения КА.

В разделе 3.2 с использованием МДП и результатов первой главы рассматривается случай гауссовского распределения мультипликативной случайной ошибки и симметричных геометрических ограничений на управляющее воздействие.

В разделе 3.3 и 3.4 исследуется случай равномерного распределения случайной ошибки.

3.1. Модель оптимальной однопараметрической коррекции с вероятностным критерием

Одной из задач при формировании космических систем на геостационарной орбите является необходимость поддержания стабильного положения трасс полета спутника. В такую задачу, в частности, входит задача удержания долготы восходящего узла в заданном диапазоне, определяющим возможные колебания трасс полета, и, как следствие, колебания зон радиовидимости [74]. Для удержания КА на ГСО в окрестности заданной долготы необходимо проводить периодические коррекции периода обращения, эксцентриситета и наклонения [65, 74]. Для проведения коррекций на борту КА имеется корректирующая установка (КДУ) малой тяги. При этом вектор тяги ориентируется вдоль нормали к радиусу-вектору и по бинормали. Отклонение КА по долготе от номинальной орбиты происходит из-за воздействия внешних факторов (например, нецентральности гравитационного поля Земли, гравитационного притяжения Луны и Солнца) и неопределенных факторов, связанных с неточностью измерения положения спутника, ошибками выведения, ошибками исполнения КДУ. Процесс управления КА в окрестности ГСО представляет собой последовательность коррекций наклонения, на фоне которых периодически выполняются коррекции долготы восходящего узла. Поскольку затраты топлива на корректирование наклонения обусловливаются лишь величиной его прогнозируемого ухода, а оптимальным (в смысле минимума энергозатрат) является проведение коррекций в окрестностях узлов, программа этих коррекций определяется заранее. Этот факт делает возможным постановку задачи синтеза оптимальной коррекции для линеаризованных в окрестности ГСО уравнений движения с известными моментами времени приложения импульсов тяги, а также записать уравнения отклонений в дискретном виде, выбирая в качестве моментов дискретного времени "программные" моменты приложения импульсов тяги. Подход, при котором уравнения отклонений корректируемых параметров дискретизировались в окрестности программных моментов времени (например, моментов измерений), использовался во многих работах, например, в [22–26, 63, 65–67, 74, 87]. Критериями в получаемой задаче синтеза в окрестности программной траектории могут служить как показатели расхода ресурсов (топлива) при ограничении на точность коррекции (см., например, [74, 87, 88]), так и критерии качества при ограничении на ресурс управления (см., например, [63, 65–67, 74]). Дальнейшее обсуждение критериев качества требует детального описания модели возмущенного движения.

Перейдем к описанию математической модели. Будем полагать, что:

1) N – число исполняемых корректирующих импульсов тяги КДУ;

2) k – момент приложения k-го корректирующего импульса;

3) x_k^1 – отклонение долготы восходящего узла от требуемого значения (в градусах);

4) x_k^2 – скорость дрейфа ИСЗ (в градусах/звездные сутки);

5) $X = (x_0^1, x_0^2)^T$ – начальное отклонение спутника относительно расчетных значений;

6) u_k – величина k-го корректирующего импульса тяги (в градусах/(звездные сутки)^2);

7) ξ_k – ошибка исполнения k-го корректирующего импульса во время пассивного участка полёта между k-ым и $k+1$-ым приложением корректирующего импульса;

8) Δt_k – длительность k-го пассивного участка полета;

9) b_r, b_s – постоянные коэффициенты, вычисляемые по формулам

$$b_r = -\frac{2\left(\Delta g_{rr} + \Delta g_{mss}\right)}{v_0}, \quad b_s = -\frac{-3\pi}{v_0\left(\Delta g_{rs} + \Delta g_{mss}\right)},$$

где Δg_{rr}, Δg_{rs} — проекции гравитационного возмущающего ускорения, Δg_{msr}, Δg_{mss} — проекции усредненного на интервале Δt_k возмущающего ускорения от гравитационных полей Луны и Солнца,

10) $\eta_k = \left(\eta_k^1, \eta_k^2\right)^T$ – случайный вектор ошибок прогноза фазового вектора (x_k^1, x_k^2).

Запишем модель движения в плоскости орбиты, описывающую эволюцию средней долготы и периода обращения (скорости дрейфа) с учетом случайных ошибок реализации управляющего ускорения, детерминированных возмущений, связанных с внешними силами, и случайных ошибок измерения параметров движения [66, 67, 74]

$$\begin{cases} x_{k+1}^1 = x_k^1 + \Delta t_k x_k^2 + b_s \Delta t_k + b_r + \eta_k^1, \\ x_{k+1}^2 = x_k^2 + t_k u_k\left(1 + \xi_k\right) + 2b_s \Delta t_k + \eta_k^2, \qquad k = \overline{0, N}. \\ x_0^1 = X^1,\ x_0^2 = X^2, \end{cases} \tag{3.1}$$

Дадим дополнительные комментарии к модели возмущений в уравнениях движения (3.1). Помеха ξ_k возникает в следствии. Помимо работ [63–67, 74] подобная модель возмущений использовалась в [80–82] в рамках задачи оптимального управления движением исусственного спутника Земли в постановке с непрерывным временем, в [19] – при общей постановке проблемы импульсной коррекции в рамках моделей управления дискретными системами [19], в частности, в задаче импульсной коррекции траектории движения летательных аппаратов в конечномерной постановке [19], в [87, 88] – в задаче оптимального распределения корректирующих импульсов Задача однопараметрической коррекции для модели движения (3.1) заключается в нахождении последовательностей функций $u_k = \gamma_k(x_k)$, $k = \overline{0,N}$, которые минимизируют абсолютное значение отклонения долготы восходящего узла в терминальный момент времени $\left|x^1_{N+1}\right|$. В условиях неопределенности параметров ξ_k, η_k она может быть рассмотрена в следующих постановках:

1) Среднеквадратическая постановка [63–67]

$$J(u(\cdot)) \to \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}, \quad J(u(\cdot)) = \mathbf{M}\left[\left(x^1_{N+1}\right)^2\right],$$

при которой минимизируется среднеквадратическое отклонение терминального промаха;

2) Минимаксная постановка [64, 66, 67]

$$J_\epsilon(u(\cdot)) \to \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}, \quad J_\epsilon(u(\cdot)) = \sup_{\xi\in\Xi}\left|x^1_{N+1}\right|,$$

при которой минимизируется “наихудшее” по неопределенным параметрам $\xi = (\xi_0, ..., \xi_N)^T$ значение абсолютной величины терминального промаха из множества $\Xi = \left\{\xi \in \mathbb{R}^{N+1}: \ |\xi_k| \le \epsilon_k, \ k = \overline{0,N}\right\}$, где $\epsilon_k \in (0,1)$ – максимальное значение мультипликативной ошибки исполнения корректирующего воздействия, а параметрами η_k пренебрегают;

3) Вероятностная постановка [64]

$$P_\varphi(u(\cdot)) \to \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}, \quad P_\varphi(u(\cdot)) = \mathbf{P}\left(\left|x^1_{N+1}\right| \le \varphi\right),$$

при которой максимизируется вероятность непревышения абсолютной величины терминального промаха заданного уровня $\varphi > 0$, при этом опуская параметры η_k;

4) Квантильная постановка [44, 64]

$$\Phi_\alpha(u(\cdot)) \to \min_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}, \quad \Phi_\alpha(u(\cdot)) = \min\left\{\varphi: \ P_\varphi(u(\cdot)) \ge \alpha\right\},$$

при которой минимизируется квантиль абсолютного значения терминального промаха заданного уровня $\alpha \in (0,1)$.

Для среднеквадратической и минимаксной постановок известны аналитические решения [66, 67]. Вероятностная постановка была рассмотрена в [64] для случая одноразовой коррекции $N = 0$, скалярной системы управления $n = 1$, гауссовского распределения случайной величины ξ_k, неограниченного u_k и отсутствия детерминированных возмущений. Для задачи с квантильным критерием при аналогичных предположениях в [44] был предложен способ нахождения квантильной стратегии с помощью преобразования управления, оптимального по вероятностному критерию.

Таким образом, вопрос оптимальной однопараметрической коррекции в вероятностной и квантильной постановках остается открытым.

В терминах первой главы поставим более общую задачу стохастического оптимального управления. Рассмотрим следующую систему управления

$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k \left(1 + \xi_k\right) + D_k, \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}, \tag{3.2}$$

функционал вероятности

$$P_\varphi\left(u\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left(\left|l^T x_{N+1}\right| \leq \varphi\right), \tag{3.3}$$

и задачу оптимального управления (1.3)

$$P_\varphi\left(u\left(\cdot\right)\right) \to \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}.$$

1) $x_k \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния;

2) X - случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^n$ и известным распределением $\mathbf{P}_X$;

3) $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}$ - скалярное управление;

4) $U_k \subset \mathbb{R}$ - множество геометрических ограничений, (далее рассматриваются случаи отсутствия ограничений $U_k = \mathbb{R}$ и симметричных ограничений $U_k = [-q, q]$);

5) ξ_k - случайная величина с известным распределением $\mathbf{P}_k$, причем $X, \xi_0, ..., \xi_N$ – независимы;

6) $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_k \in \mathbb{R}^n$, $D_k \in \mathbb{R}^n$ - известные матрицы;

7) $l \in \mathbb{R}^n$ - детерминированный вектор;

8) $\varphi > 0$ - скалярный параметр;

9) функция системы определяется выражением

$$f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right) = A_k x_k + B_k u_k \left(1 + \xi_k\right) + D_k;$$

10) точностной функционал имеет вид

$$\Phi\left(x_{N+1}\right) = \left|l^T x_{N+1}\right|.$$

Нетрудно видеть, что если принять

$$n = 2, \quad A_k = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t_t \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta t_k \end{pmatrix}, \quad D_k = \begin{pmatrix} b_r + b_s \Delta t_k \\ 2 b_s \Delta t_k \end{pmatrix}$$

и пренебречь случайным вектором η_k, то система (3.3) принимает вид (3.1).
В отношении системы (3.3) предположим, что матрицы A_k, B_k и l удовлетворяют условию: $\exists K \in \{0, ..., N\}$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=k}^{N} l^T \prod\limits_{j=i}^{N} A_j B_i = 0, & k \in \{K+1, ..., N\}, \\ \sum\limits_{i=k}^{N} l^T \prod\limits_{j=i}^{N} A_j B_i \neq 0, & k \in \{0, ..., K\}. \end{cases}$$

Момент времени K по сути является последним моментом реакции функционала вероятности на управление.

Запишем уравнения МДП (см. раздел 1.2) для поставленной задачи

$$u_k^{\varphi} = \arg\max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(A_k x_k + B_k u_k \left(1 + \xi_k\right) + D_k\right) \middle| x_k\right],$$

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}_k \left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(A_k x_k + B_k u_k \left(1 + \xi_k\right) + D_k\right) \middle| x_k = x\right], \quad k = \overline{0, N},$$

$$\mathsf{B}_{N+1}^{\varphi}(x) = \mathbf{I}_{(-\infty, \varphi]}\left(\left|l^T x\right|\right).$$

Воспользуемся МДП и приведем задачу к более удобной для анализа. Для этого рассмотрим вектор $a_k \in \mathbb{R}^n$ и величины $b_k \in \mathbb{R}$, $d_k \in \mathbb{R}$

$$a_k = l^T \prod_{i=k}^{N} A_i, \quad b_k = \sum_{i=k}^{N} l^T \prod_{j=i}^{N} A_j B_i, \quad d_k = \sum_{i=k}^{N} l^T \prod_{j=i}^{N} A_j D_i,$$

с помощью которых можно наглядно представить решение рекуррентного уравнения для $\left|l^T x_{N+1}\right|$ при фиксированных $x_N, x_{N-1}, ..., x_K$

$$\left|l^T x_{N+1}\right| = \begin{cases} \left|a_N^T x_N + d_N\right|, & k = N, \\ \left|a_{N-1}^T x_{N-1} + d_{N-1}\right|, & k = N-1, \\ \dots \\ \left|a_{K+1}^T x_{K+1} + d_{K+1}\right|, & k = K+1, \\ \left|a_K^T x_K + b_K u_K \left(1+\xi_K\right) + d_K\right|, & k = K, \end{cases}$$

из которого видно, что управление u_k не входит в решение для шагов $k \in \{K+1, ..., N\}$, поскольку выполнено $b_K = b_{K+1} = ... = b_N = 0$. Изобеллы для указанных шагов имеют вид

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists u_k : \ \mathbf{P}\left(\left|a_k^T x + d_k\right| \le \varphi\right) = 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| \le \varphi\right\},$$

$$\mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall u_k : \ \mathbf{P}\left(\left|a_k^T x + d_k\right| > \varphi\right) = 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| > \varphi\right\},$$

откуда с учетом $\mathcal{I}_k^{\varphi} \cup \mathcal{O}_k^{\varphi} = \mathbb{R}^n$ получаем, что функция Беллмана является индикаторной функцией множества $\mathcal{I}_k^{\varphi}$

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}(x), \quad k \in \{K+1, ..., N\},$$

и, следовательно, для таких k оптимальным является любое допустимое управление. Для $k = K+1$ изобелла уровня 1 определяется выражением

$$\mathcal{I}_{K+1}^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_{K+1}^T x + d_{K+1}\right| \le \varphi\right\}.$$

Полученные свойства функции Беллмана и оптимального управления для шагов $k \in \{K+1, ..., N\}$ справедливы для всех распределений $\mathbf{P}_k$ случайных возмущений ξ_k и любого множества геометрических ограничений U_k. Дальнейшее исследование требует конкретизацию распределений $\mathbf{P}_k$ и множества U_k.

С помощью МДП и результатов первой главы исследуем случай, когда мультипликативное возмущение имеет гауссовский закон распределения [64], а на оптимальное управление наложены симметричные геометрические ограничения.

3.2. Случай ограниченного управления и гауссовского распределения мультипликативного возмущения

Рассмотрим задачу оптимального управления (3.3) для системы (3.2), в отношении которой введем ряд дополнительных предположений:

1) мультипликативное возмущение имеет гауссовский закон распределения $\xi_k \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$,

2) на управление в каждый момент времени наложены ограничения $u_k \in U_k$, где $U_k = U = [-q, q]$, $q > 0$.

С учетом преобразований раздела 3.2 получаем, что при $k = K$ функция Беллмана имеет вид

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_K^{\varphi}(x) = \max_{|u_K| \le q} \mathbf{M}\left[\mathsf{B}_{K+1}^{\varphi}\left(A_K x_K + B_K u_K\left(1+\xi_K\right) + D_K\right)\right] = \\ = \max_{|u_K| \le q} \mathbf{M}\left[\mathbf{I}_{(-\infty,\varphi]}\left(\left|a_K^T x_K + b_K u_K\left(1+\xi_K\right) + d_K\right|\right)\right] = \\ = \max_{|u_K| \le q} \mathbf{P}\left(\left|a_K^T x_K + b_K u_K\left(1+\xi_K\right) + d_K\right| \le \varphi\right).\end{aligned}$$

Решение задачи стохастического программирования в правой части вышеуказанного соотношения при отсутствии ограничений на управление и детерминированного возмущения d_K найдено в [64]. Во введенных обозначениях оно имеет вид $\tilde{u}_K = \tilde{\gamma}_K\left(a_K^T x_K\right)$, где функция $\tilde{\gamma}_K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется выражением

$$\tilde{\gamma}_K(x) = \begin{cases} 0, & |x| \le \varphi, \\ -2x\left(b_K\left(1+\sqrt{1+2\sigma^2 \ln\left(\frac{|x|+\varphi}{|x|-\varphi}\right)}\right)\right)^{-1}, & |x| > \varphi. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\tilde{\gamma}_K(x)$ является невозрастающей, откуда получаем оптимальное решение задачи стохастического программирования для $k = K$ при наличии ограничений и детерминированного возмущения d_K

$$u_K^{\varphi} = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_K^T x_K + d_K}{b_K}\right) \min\left\{q,\ \left|\tilde{\gamma}_K\left(a_K^T + d_K\right)\right|\right\}.$$

Подставим u_K^{φ} в правую часть уравнения МДП и получим выражение для функции Беллмана при $k = K$

$$\mathsf{B}_K^{\varphi}(x) = \begin{cases} 1, & \left|a_K^T x + d_K\right| \le \varphi, \\ \Phi_0\left(\frac{\varphi+\left|a_K^T x + d_K\right|}{\sigma b_K\left|u_K^{\varphi}\right|} - \frac{1}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\varphi+\left|a_K^T x + d_K\right|}{\sigma b_K\left|u_K^{\varphi}\right|} - \frac{1}{\sigma}\right), & \left|a_K^T x + d_K\right| > \varphi, \end{cases}$$

где $\Phi_0(x)$ - функция Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{t^2/2} dt.$$

Видно, что дальнейшее использование МДП (см. раздел 3.2) для шагов $k \in \{0, ..., K-1\}$ затруднено ввиду сложной структуры функции $\mathsf{B}_K^\varphi(x)$ и, соответственно, сложной структуры задачи стохастического программирования на шаге $k = K-1$.

Тем не менее, результаты раздела 1.3 позволяют найти управление, которое является субоптимальным в настоящей задаче. Для этого найдем изобеллы и двусторонние оценки функции Беллмана.

Утверждение 3.1. *Изобелла уровня 1 определяется выражением*

$$\mathcal{I}_k^\varphi = \left\{x \in \mathbb{R}^n: \quad \left|a_k^T x + d_k\right| \le \varphi\right\}, \quad k = \overline{0, K},$$

оптимальным при $x_k \in \mathcal{I}_k^\varphi$ *является управление* $u_k^\varphi = 0$. *Изобелла уровня 0 является пустым множеством* $\mathcal{O}_k^\varphi = \varnothing$ *для всех* $k = \overline{0, K}$.

Доказательство утверждения 3.1. Воспользуемся п. 1 утверждения 1.1. Для поверхности уровня 1 функции Беллмана при $k = K$ справедливо равенство

$$\mathcal{I}_K^\varphi = \left\{x \in \mathbb{R}^n: \quad \exists u_K \in U_K: \quad \mathbf{P}\left(f_K(x, u_K, \xi_k) \in \mathcal{I}_{K+1}^\varphi\right) = 1\right\} =$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^n: \quad \exists u_K: \quad |u_K| \le q, \quad \mathbf{P}\left(\left|a_K^T x + b_K u_K(1+\xi_K) + d_K\right| \le \varphi\right) = 1\right\}.$$

Если выполнить подстановку $u_K = 0$, то с учетом получаемого уравнения

$$\mathbf{P}\left(\left|a_K^T x + d_K\right| \le \varphi\right) = 1.$$

легко убедиться, что

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n: \quad \left|a_K^T x + d_K\right| \le \varphi\right\} \subset \mathcal{I}_K^\varphi.$$

Пусть теперь $u_K \ne 0$. Преобразуем левую часть вероятностного уравнения

$$\mathbf{P}\left(\left|a_K^T x + b_K u_K(1+\xi_K) + d_K\right| \le \varphi\right) = 1.$$

Для $b_K u_K > 0$ получаем, что

$$\mathbf{P}\left(\left|a_K^T x + b_K u_K(1+\xi_K) + d_K\right| \le \varphi\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\frac{-\varphi - a_K^T x - d_K}{b_K u_K} - 1 \le \xi_K \le \frac{\varphi - a_K^T x - d_K}{b_K u_K} - 1\right),$$

откуда видно, что при любом управлении из множества $[-q,q]$ при условии $q\in(0,\infty)$ правая часть последнего выражения не равна единице. Для $b_Ku_K<0$ левая часть исходного вероятностного уравнения принимает вид

$$\mathbf{P}\left(\left|a_K^Tx+b_Ku_K\left(1+\xi_K\right)+d_K\right|\le\varphi\right)=\\=\mathbf{P}\left(\frac{\varphi-a_K^Tx-d_K}{b_Ku_K}-1\le\xi_K\le\frac{-\varphi-a_K^Tx-d_K}{b_Ku_K}-1\right),$$

откуда виден аналогичный эффект. Отсюда следует

$$\mathcal{I}_K^\varphi=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad\left|a_K^Tx+d_K\right|\le\varphi\right\}.$$

Пусть теперь $k=K-1$. Используя рекуррентное соотношение п. 1 леммы 1.1 получаем

$$\mathcal{I}_{K-1}^\varphi=\{x\in\mathbb{R}^n:\quad\exists u_{K-1}\in U_{K-1}:\quad\mathbf{P}\left(f_{K-1}\left(x,u_{K-1},\xi_{k-1}\right)\in\mathcal{I}_K^\varphi\right)=1\}=\\=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad\exists u_K\in\left[-q,q\right],\quad\mathbf{P}\left(\left|a_{K-1}^Tx+b_{K-1}u_{K-1}\left(1+\xi_{K-1}\right)+d_{K-1}\right|\le\varphi\right)=1\right\}.$$

Видно, что соотношения для изобеллы уровня 1 при $k=K-1$ и $k=K$ совпадают с точностью до параметров a_k, b_k, d_k, $k=\{K-1,K\}$ и, следовательно, выполнено

$$\mathcal{I}_{K-1}^\varphi=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad\left|a_{K-1}^Tx+d_{K-1}\right|\le\varphi\right\}.$$

Продолжая аналогичные размышления, оперируя математической индукцией, заключаем, что изобелла уровня 1 для всех $k=\overline{0,K}$ имеет вид

$$\mathcal{I}_k^\varphi=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad\left|a_k^Tx+d_k\right|\le\varphi\right\},\quad k=\overline{0,K}.$$

Рассмотрим теперь рекуррентные соотношения для изобеллы уровня 0 (см. п. 2 леммы 1.1). При $k=K$ имеем

$$\mathcal{O}_K^\varphi=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad\forall u_K\in U_K:\quad\mathbf{P}\left(f_K\left(x,u_K,\xi_k\right)\in\mathcal{O}_{K+1}^\varphi\right)=1\right\}=\\=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad\forall u_K\in\left[-q,q\right],\quad\mathbf{P}\left(\left|a_K^Tx+b_Ku_K\left(1+\xi_K\right)+d_K\right|>\varphi\right)=1\right\}.$$

Выполнив преобразование вероятностного уравнения при условии $b_Ku_K>0$ получаем

$$\mathbf{P}\left(\left|a_K^Tx+b_Ku_K\left(1+\xi_K\right)+d_K\right|>\varphi\right)=\\=\mathbf{P}\left(\left\{\xi_K>\frac{-\varphi-a_K^Tx-d_K}{b_Ku_K}-1\right\}\cup\left\{\xi_K<\frac{\varphi-a_K^Tx-d_K}{b_Ku_K}-1\right\}\right),$$

откуда с учетом $\xi_K \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ (т.е. носитель распределения случайной величины ξ_K неограничен) легко видеть, что любое управление из множества $[-q,q]$ не удовлетворяет вероятностному уравнению для всех состояний x. В случае $b_K u_K < 0$ в вероятностном уравнении меняется лишь знак перед φ, при этом описанные свойства остаются неизменными. Отсюда следует $\mathcal{O}_K^\varphi = \varnothing$, и, следовательно, $\mathcal{O}_k^\varphi = \varnothing$, $k=\overline{0,N}$ с учетом рекуррентного соотношения п. 2 леммы 1.1. Утверждение доказано. □

С использованием теоремы 1.2 и утверждения 3.1 найдем нижнюю и верхнюю оценки для функции Беллмана, которые из определения имеют следующий вид

$$\underline{\mathsf{B}}_k^\varphi(x) = \sup_{|u_k|\le q} \mathbf{P}\left(f_k(x,u_k,\xi_k)\in \mathcal{I}_{k+1}^\varphi\right) = \\ = \max_{|u_k|\le q} \mathbf{P}\left(\left|a_k^T x + b_k u_k(1+\xi_k)+d_k\right|\le\varphi\right), \quad (3.4)$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k^\varphi(x) = \sup_{|u_k|\le q}\left\{1-\mathbf{P}\left(f_k(x,u_k,\xi_k)\in\mathcal{O}_{k+1}^\varphi\right)\right\} = 1 \quad (3.5)$$

Видно, что задача стохастического программирования в правой части (3.4) с точностью до параметров a_k, b_k, d_k совпадает с задачей стохастического программирования на шаге $k=K$ МДП. Отсюда вытекает очевидное утверждение.

Утверждение 3.2. *Нижняя оценка функции Беллмана определяется выражением*

$$\underline{\mathsf{B}}_k(x) = \begin{cases} 1, & \left|a_k^T x + d_k\right|\le\varphi, \\ \Phi_0\left(\frac{\varphi+\left|a_k^T x+d_k\right|}{\sigma b_k\left|\underline{u}_k^\varphi\right|}-\frac{1}{\sigma}\right)-\Phi_0\left(\frac{-\varphi+\left|a_k^T x+d_k\right|}{\sigma b_k\left|\underline{u}_k^\varphi\right|}-\frac{1}{\sigma}\right), & \left|a_k^T x + d_k\right|>\varphi, \end{cases}$$

решение $\underline{u}_k^\varphi$ задачи стохастического программирования (3.4) имеет вид

$$\underline{u}_k^\varphi = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right)\min\left\{q,\ \left|\tilde{\gamma}_k\left(a_k^T x_k+d_k\right)\right|\right\},$$

где функции $\tilde{\gamma}_k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $k=\overline{0,K}$ имеют вид

$$\tilde{\gamma}_k(x) = \begin{cases} 0, & |x|\le\varphi, \\ -2x\left(b_k\left(1+\sqrt{1+2\sigma^2\ln\left(\frac{|x|+\varphi}{|x|-\varphi}\right)}\right)\right)^{-1}, & |x|>\varphi. \end{cases}$$

Будем считать управление $\underline{u}^\varphi(\cdot) = \left(\underline{\gamma}_0(\cdot),\dots,\underline{\gamma}_N(\cdot)\right)^T$, образованное функциями $\underline{u}_k^\varphi = \underline{\gamma}_k(x_k)$, субоптимальным, поскольку оно

1) является оптимальным при $k \in \{K, ..., N\}$,

2) является оптимальным при $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$ для всех $k \in \{0, ..., N\}$,

3) максимизирует нижнюю оценку функции правой части уравнения МДП при $x_k \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$, $k \in \{K, ..., N\}$.

Покажем, что управление $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ обладает еще одним замечательным свойством, схожим со свойствами 1) и 2) утверждения 2.5 (см. раздел 2.3). Пусть $\{\underline{x}_k\}_{k=0}^{N}$ – траектории системы (3.2)

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = A_k \underline{x}_k + B_k \underline{u}_k^{\varphi}(1+\xi_k) + D_k, \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

замкнутой управлением $\{\underline{u}_k^{\varphi}\}_{k=0}^{N}$.

Утверждение 3.3. *Функционал вероятности $P_{\varphi}(\underline{u}^{\varphi}(\cdot))$ в задаче (3.3) при условиях $u_k \in [-q, q]$, $\xi_k \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ и управлении $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ представим в следующем виде*

$$P_{\varphi}(\underline{u}^{\varphi}(\cdot)) = \mathbf{M}\left[\underline{F}(\varphi, X)\right] + \\ + \sum_{k=1}^{K} \mathbf{P}\left(\left|a_k^T \underline{x}_k + d_k\right| > \varphi\right) \mathbf{P}\left(\left|a_k^T \underline{x}_k + b_k \underline{u}_k^{\varphi}(1+\xi_k) + d_k\right| \le \varphi \middle| \left|a_k^T \underline{x}_k + d_k\right| > \varphi\right),$$

где $\mathbf{M}\left[\underline{F}(\varphi, X)\right]$ – нижняя оценка функции оптимального значения вероятностного критерия

$$\mathbf{M}\left[\underline{F}(\varphi, X)\right] = \mathbf{M}\left[\underline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(X)\right],$$

где

$$\underline{\mathsf{B}}_0(X) = \begin{cases} 1, & \left|a_0^T X + d_0\right| \le \varphi, \\ \Phi_0\left(\frac{\varphi + \left|a_0^T X + d_0\right|}{\sigma b_0 \left|\underline{u}_0^{\varphi}\right|} - \frac{1}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\varphi + \left|a_0^T X + d_0\right|}{\sigma b_0 \left|\underline{u}_0^{\varphi}\right|} - \frac{1}{\sigma}\right), & \left|a_0^T X + d_0\right| > \varphi. \end{cases}$$

Доказательство утверждения 3.3. С учетом свойств точностного функционала, описанных в разделе 3.1 для функционала вероятности при управлении $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$

справедлива цепочка равенств

$$
\begin{aligned}
P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right) = \mathbf{P}\left(\left|l^T \underline{x}_{N+1}\right| \le \varphi\right) = \mathbf{P}\left(\left|a_N^T \underline{x}_N + d_N\right| \le \varphi\right) = \\
= \mathbf{P}\left(\left|a_{N-1}^T \underline{x}_{N-1} + d_{N-1}\right| \le \varphi\right) = \mathbf{P}\left(\left|a_{K+1}^T \underline{x}_{K+1} + d_{K+1}\right| \le \varphi\right) = \\
= \mathbf{P}\left(\left|a_K^T \underline{x}_K + b_K \underline{u}_K^\varphi\left(1+\xi_K\right) + d_K\right| \le \varphi\right).
\end{aligned}
$$

Введем в рассмотрение систему гипотез

$$
\left\{\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k^\varphi\right\} = \left\{\left|a_k^T \underline{x}_k + d_k\right| \le \varphi\right\}, \quad \left\{\underline{x}_k \in \mathcal{B}_k^\varphi\right\} = \left\{\left|a_k^T \underline{x}_k + d_k\right| > \varphi\right\},
$$

образующих при любом $k = \overline{0, K}$ полную группу несовместных событий. С учетом того, что $\underline{u}_k^\varphi = 0$ при $\left|a_k^T \underline{x}_k + d_k\right| \le \varphi$ для всех $k = \overline{0, K}$, используя формулу полной вероятности, запишем следующую цепочку равенств

$$
\begin{aligned}
& P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right) = \mathbf{P}\left(\left|a_K^T \underline{x}_K + b_K \underline{u}_K^\varphi\left(1+\xi_K\right) + d_K\right| \le \varphi\right) = \\
& = \mathbf{P}\left(\left|a_K^T \underline{x}_K + d_K\right| \le \varphi\right) \mathbf{P}\left(\left|a_K^T \underline{x}_K + b_K \underline{u}_K^\varphi\left(1+\xi_K\right) + d_K\right| \le \varphi \;\middle|\; \left|a_K^T \underline{x}_K + d_K\right| \le \varphi\right) + \\
& + \mathbf{P}\left(\left|a_K^T \underline{x}_K + d_K\right| > \varphi\right) \mathbf{P}\left(\left|a_K^T \underline{x}_K + b_K \underline{u}_K^\varphi\left(1+\xi_K\right) + d_K\right| \le \varphi \;\middle|\; \left|a_K^T \underline{x}_K + d_K\right| > \varphi\right) = \\
& = \mathbf{P}\left(\left|a_K^T \underline{x}_K + d_K\right| \le \varphi\right) + \mathbf{P}\left(\left|a_K^T \underline{x}_K + d_K\right| > \varphi\right) \times \\
& \times \mathbf{P}\left(\left|a_K^T \underline{x}_K + b_K \underline{u}_K^\varphi\left(1+\xi_K\right) + d_K\right| \le \varphi \;\middle|\; \left|a_K^T \underline{x}_K + d_K\right| > \varphi\right).
\end{aligned}
$$

Рассмотрим первое слагаемое в правой части последнего выражения. Используя введенную систему гипотез и формулу обратной вероятности получаем аналогичное разложение для него

$$
\begin{aligned}
& \mathbf{P}\left(\left|a_K^T \underline{x}_K + d_K\right| \le \varphi\right) = \mathbf{P}\left(\left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + b_{K-1} \underline{u}_{K-1}^\varphi\left(1+\xi_{K-1}\right) + d_{K-1}\right| \le \varphi\right) = \\
& = \mathbf{P}\left(\left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + d_{K-1}\right| \le \varphi\right) \times \\
& \times \mathbf{P}\left(\left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + b_{K-1} \underline{u}_{K-1}^\varphi\left(1+\xi_{K-1}\right) + d_{K-1}\right| \le \varphi \;\middle|\; \left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + d_{K-1}\right| \le \varphi\right) + \\
& + \mathbf{P}\left(\left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + d_{K-1}\right| > \varphi\right) \times \\
& \times \mathbf{P}\left(\left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + b_{K-1} \underline{u}_{K-1}^\varphi\left(1+\xi_{K-1}\right) + d_{K-1}\right| \le \varphi \;\middle|\; \left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + d_{K-1}\right| > \varphi\right) = \\
& = \mathbf{P}\left(\left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + d_{K-1}\right| \le \varphi\right) + \mathbf{P}\left(\left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + d_{K-1}\right| > \varphi\right) \times \\
& \times \mathbf{P}\left(\left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + b_{K-1} \underline{u}_{K-1}^\varphi\left(1+\xi_{K-1}\right) + d_{K-1}\right| \le \varphi \;\middle|\; \left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + d_{K-1}\right| > \varphi\right).
\end{aligned}
$$

Подставляя полученное разложение в первоначальную формулу, получаем

$$P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right) = \mathbf{P}\left(\left|a_K^T \underline{x}_K + b_K \underline{u}_K^\varphi \left(1+\xi_K\right) + d_K\right| \le \varphi\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\left|a_{K-1}^T \underline{x}_{K-1} + d_{K-1}\right| \le \varphi\right) +$$
$$+ \sum_{k=K-1}^{K} \mathbf{P}\left(\left|a_k^T \underline{x}_k + d_k\right| > \varphi\right) \mathbf{P}\left(\left|a_k^T \underline{x}_k + b_k \underline{u}_k^\varphi \left(1+\xi_k\right) + d_k\right| \le \varphi \;\Big|\; \left|a_k^T \underline{x}_k + d_k\right| > \varphi\right).$$

Отсюда по принципу математической индукции, продолжая аналогичные преобразования с использованием формулы полной вероятности и введенной системы гипотез, получаем

$$P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right) = \mathbf{P}\left(\left|a_1^T \underline{x}_1 + d_1\right| \le \varphi\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} \mathbf{P}\left(\left|a_k^T \underline{x}_k + d_k\right| > \varphi\right) \mathbf{P}\left(\left|a_k^T \underline{x}_k + b_k \underline{u}_k^\varphi \left(1+\xi_k\right) + d_k\right| \le \varphi \;\Big|\; \left|a_k^T \underline{x}_k + d_k\right| > \varphi\right).$$

Из определения $\underline{u}_k^\varphi$ и функции $\underline{F}\left(\varphi, x\right)$ (см. следствие 1.2) преобразуем первое слагаемое в последнем равенстве

$$\mathbf{P}\left(\left|a_1^T \underline{x}_1 + d_1\right| \le \varphi\right) = \mathbf{P}\left(\left|a_1^T X + b_0 \underline{u}_0^\varphi \left(1+\xi_0\right) + d_0\right| \le \varphi\right) =$$
$$= \max_{u_0 \in U_0} \mathbf{P}\left(\left|a_1^T X + b_0 u_0 \left(1+\xi_0\right) + d_0\right| \le \varphi\right) = \mathbf{M}\left[\underline{F}\left(\varphi, X\right)\right],$$

откуда окончательно получаем

$$P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right) = \mathbf{M}\left[\underline{F}\left(\varphi, X\right)\right] +$$
$$+ \sum_{k=1}^{K} \mathbf{P}\left(\left|a_k^T \underline{x}_k + d_k\right| > \varphi\right) \mathbf{P}\left(\left|a_k^T \underline{x}_k + b_k \underline{u}_k^\varphi \left(1+\xi_k\right) + d_k\right| \le \varphi \;\Big|\; \left|a_k^T \underline{x}_k + d_k\right| > \varphi\right).$$

Утверждение доказано. □

Утверждение (3.3) дает нижнюю оценку для значений функционала вероятности при найденом субоптимальном управлении $\underline{u}^\varphi(\cdot)$, причем эта оценка совпадает с нижней границей функции оптимального значения вероятностного критерия (см. следствие 1.2).

$$P_\varphi\left(u^\varphi(\cdot)\right) \ge P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right) \ge \mathbf{M}\left[\underline{F}\left(\varphi, X\right)\right].$$

Перейдем к рассмотрению примера.

Пример 3.1. Рассмотрим простейший модельный пример из [64], когда $n = 1$, $A_k = 1$, $B_k = 1$, $D_k = 0$, $l = 1$, $\xi_k \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, K_X)$, $U_k = \mathbb{R}$. Система управления (3.1) имеет вид

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + u_k (1 + \xi_k), \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}.$$

Ставится задача

$$P_\varphi (u(\cdot)) \to \max_{u(\cdot)}, \quad P_\varphi (u(\cdot)) = \mathbf{P} (|x_{N+1}| \leq \varphi).$$

В [64] на таком примере в рамках "одношаговой" постановки ($N = 0$) проводилось сравнение среднеквадратического, минимаксного и вероятностного подходов к решению задачи оптимизации импульсной коррекции с учетом мультипликативной случайной ошибки исполнения управляющего воздействия. Показателем при сравнении являлась квантиль терминальной точности. Результаты сравнения [64] показали, что вероятностная стратегия превосходит среднеквадратическую и минимаксную по квантильному показателю. После появления работы [44], где были получены условия эквивалентности задач оптимизации вероятностного и квантильного критериев (в том числе задач оптимального управления), превосходство вероятностной стратеги перед другими по квантильному критерию стало практически очевидным. Добавим, что в [44] было показано, что одношаговая стратегия $\underline{u}^\varphi(\cdot)$ в рамках настоящего примера является при определенных условиях оптимальной по квантильному критерию. Тем не менее стратегия $\underline{u}^\varphi(\cdot)$ не является оптимальной в многошаговой постановке, и, следовательно, ее сравнение со среднеквадратической и минимаксной стратегией является актуальной задачей. Так как данном примере рассматривается случай неограниченного управления $U_k = \mathbb{R}$ при сравнении стратегий будем рассматривать показатель средней суммы абсолютных значений реализаций управляющего воздействия

$$\mathbf{M}\left[\sum_{k=0}^{N} |u_k|\right],$$

а также максимальное абсолютное значение реализации управления

$$\mathbf{M}\left[\max_{k=\overline{0,N}} |u_k|\right].$$

Таким образом при сравнении будем рассматривать вероятностный $P_{\varphi}\left(u\left(\cdot\right)\right)$ и среднеквадратический $J\left(u\left(\cdot\right)\right)$ критерии, а также указанные выше величины. Среднеквадратическая и минимаксная стратегии были найдены в явном виде в [58]. Для получения числовых оценок рассматриваемых показателей будем использовать метод Монте-Карло с объемом выборки 150000. Числовые значения входных параметров занесены в таблицу 3.1 Результаты численных экспериментов занесены в таблицу

Таблица 3.1. Численные значения параметров системы

№ эксперимента	N	μ_X	K_X	σ	φ
a)	12	150	$2,8$	$0,6$	$0,03$
b)	16	200	3	$0,66$	$0,95$

3.2. Примеры реализаций траекторий замкнутых систем

Таблица 3.2. Значения вероятностного и среднеквадратического критериев при разном управлении

эксперимент	управление	$P_{\varphi}\left(u\left(\cdot\right)\right)$	$J\left(u\left(\cdot\right)\right)$	$\mathbf{M}\left[\sum\limits_{k=0}^{N}\lvert u_k\rvert\right]$	$\mathbf{M}\left[\max\limits_{k=\overline{0,N}}\lvert u_k\rvert\right]$
a)	$\underline{u}^{\varphi}\left(\cdot\right)$	0.9999	0.0553182	285.8383	153.5184
	$\underline{u}^{J}\left(\cdot\right)$	0.97934	0.04165818	187.2269	110.751
	$\underline{u}^{\varepsilon}\left(\cdot\right)$	0.92857	0.2964224	286.3097	153.5498
b)	$\underline{u}^{\varphi}\left(\cdot\right)$	1	0.0192658	422.3666	212.2437
	$\underline{u}^{J}\left(\cdot\right)$	0.99998	0.007389457	253.3543	143.1962
	$\underline{u}^{\varepsilon}\left(\cdot\right)$	0.99891	0.1692658	428.4142	212.8549

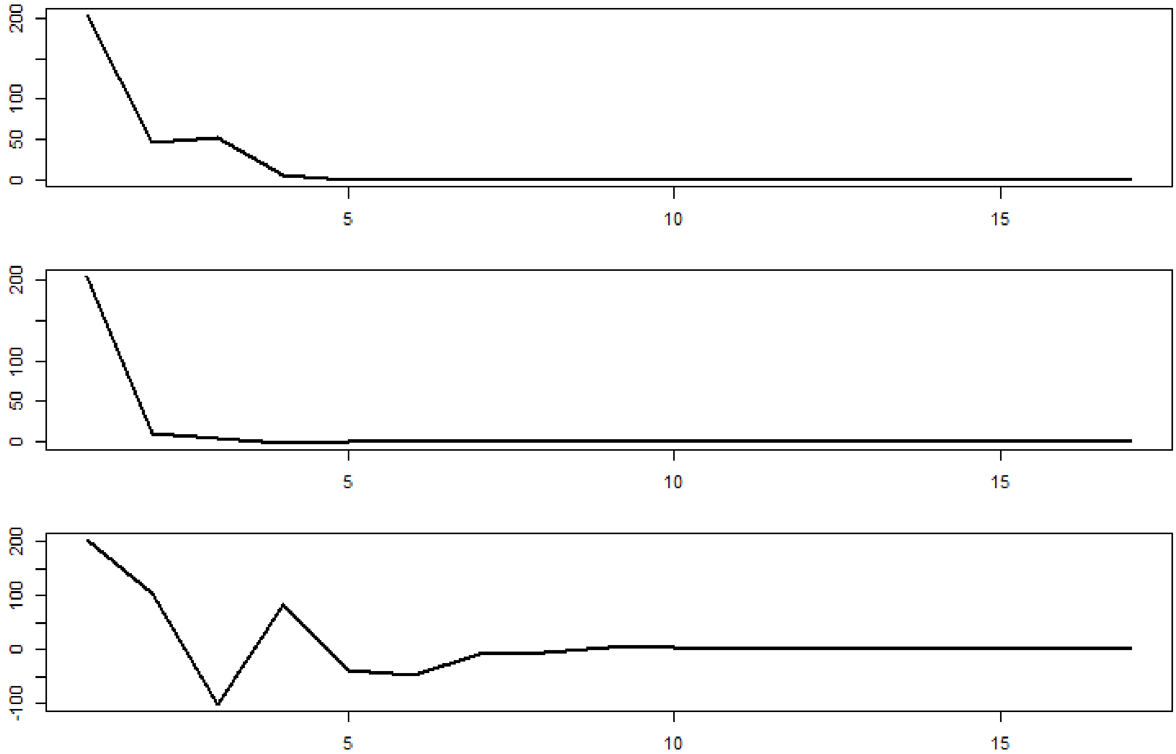

Рисунок 3.1. Реализации траекторий замкнутых систем $\underline{x}_k^{\varphi}$, x_k^J, x_k^{ϵ}

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1}^{\varphi} = \underline{x}_k^{\varphi} + \underline{u}_k^{\varphi}\left(1+\xi_k\right), \\ \underline{x}_0^{\varphi} = X, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1}^{J} = x_k^{J} + u_k^{J}\left(1+\xi_k\right), \\ x_0^{J} = X, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{k+1}^{\epsilon} = x_k^{\epsilon} + u_k^{\epsilon}\left(1+\xi_k\right), \\ x_0^{\epsilon} = X, \end{cases}$$

при разных управлениях приведены на рисунке 3.1. На рисунке 3.2 приведены примеры реализации управлений $\underline{u}_k^{\varphi}$, u_k^J, u_k^{ϵ}. Из таблицы 3.2 видно, что найденная субоптимальная стратегия $\underline{u}^{\varphi}\left(\cdot\right)$ превосходит среднеквадратическую и минимаксную по вероятностному и квантильному критериям. В то же время она оказывается не сильно хуже среднеквадратической стратегии по показателю $J\left(u\left(\cdot\right)\right)$. Этот факт подтверждает работоспособность найденного субоптимального управления в настоящей задаче.

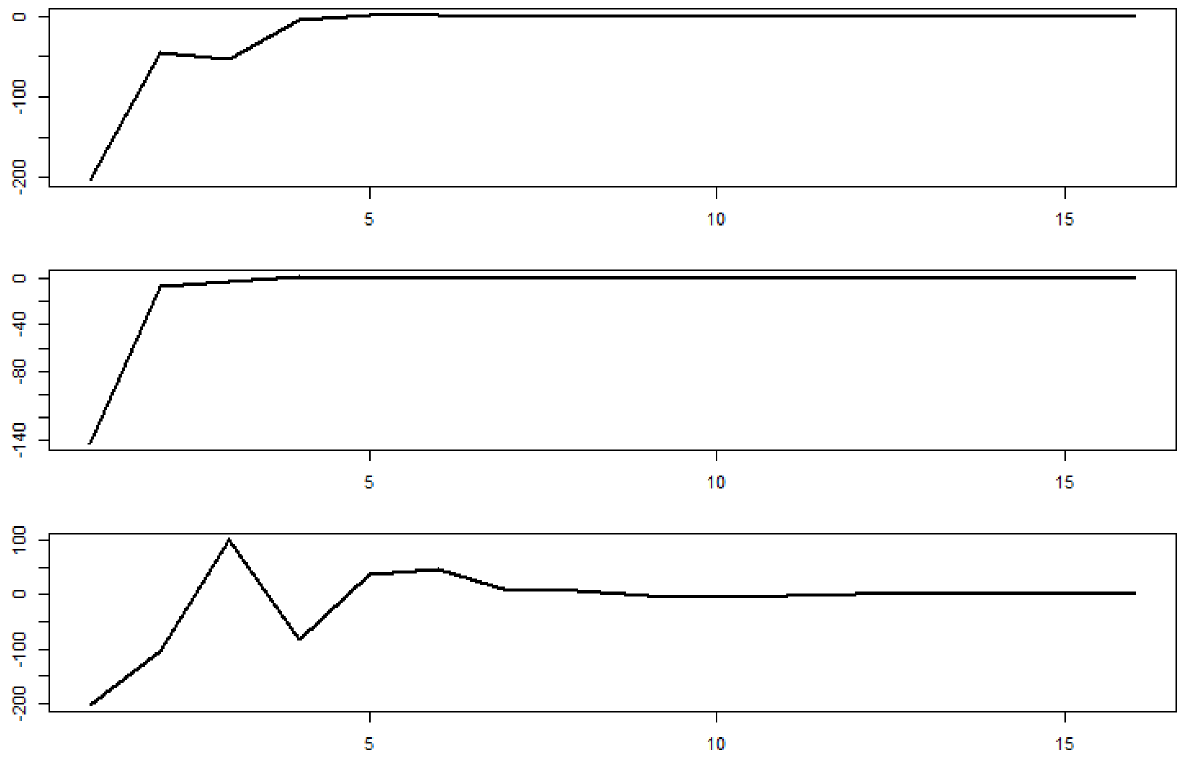

Рисунок 3.2. Реализации управлений $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$, $u^{J}(\cdot)$, $u^{\epsilon}(\cdot)$

3.3. Случай неограниченного управления и равномерного распределения мультипликативного возмущения

Рассмотрим задачу (3.3) оптимального управления системой (3.1). В отношении системы сделаем ряд дополнительных предположений:

1) на управление не наложено геометрических ограничений $U_k = \mathbb{R}$;

2) плотность распределения $f_{\xi_k}(t)$ случайной величины ξ_k имеет ограниченный носитель $[-\varepsilon_k, \varepsilon_k]$, где $\varepsilon_k \in (0,1)$.

Отметим, что в работе [64], где исследовалась вероятностная постановка моделей коррекции, не было уделено внимания случаю равномерного распределения случайного возмущения ξ_k. Тем не менее из физического смысла модели движения (3.1) следует, что носитель распределения ξ_k является ограниченным множеством, причем лежащем внутри интервала $(-1,1)$. Подход к моделированию такого рода возмущений с помощью равномерного распределения использовался, например, в работах $[40,50,51,87]$. Обоснованию к использованию равномерного распределения в задачах оптимизации и в задачах оптимального управления в условиях неопределенности посвящена серия работ [43, 48, 107], в которых показано, что плотность равномерного распределения некоторого случайного вектора обеспечивает “наихудшее” значение вероятности его попадания на единичный куб на широком классе плотностей. Это позволяет использовать равномерное распределение как “наихудшее” или “гарантирующее”, что и мотивировало исследовать данный случай.

В рамках предположений 1)–2) запишем систему управления

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k\left(1+\xi_k\right) + D_k, \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}, \tag{3.6}$$

и поставим задачу оптимального управления с вероятностным терминальным критерием

$$\mathbf{P}\left(\left|l^T x_{N+1}\right| \le \varphi\right) \to \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}. \tag{3.7}$$

Перейдем к решению задачи (3.7) с использованием МДП (см. раздел 3.1). Введем в рассмотрение множество

$$\mathcal{D}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad 0 \in \operatorname{Arg} \max_{u_k \in U_k} \mathbf{M}\left[\mathsf{B}^{\varphi}_{k+1}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right)\right] \right\},$$

называемое зоной нечувствительности [64].

В следующем утверждении находится явные выражения для изобелл уровня 1 и 0 для шагов $k \in \{0, ..., K\}$.

Утверждение 3.4. $\forall k = \overline{0, K}$ *множества* $\mathcal{I}^{\varphi}_k$, $\mathcal{B}^{\varphi}_k$, $\mathcal{O}^{\varphi}_k$ *определяются в соответствии с выражениями*

$$\mathcal{I}^{\varphi}_k = \mathcal{D}_k \cup \Delta_k, \quad \mathcal{B}^{\varphi}_k = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{I}^{\varphi}_k, \quad \mathcal{O}^{\varphi}_k = \varnothing,$$

где

$$\mathcal{D}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| \le \varphi^{\mathcal{I}}_{k+1}\right\}, \quad \Delta_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi^{\mathcal{I}}_{k+1} < \left|a_k^T x + d_k\right| \le \varphi^{\mathcal{I}}_{k}\right\},$$

оптимальным для $x_k \in \mathcal{I}^{\varphi}_k$ *является любое управление из множества*

$$U^{\mathcal{I}}_k\left(x_k\right) = \Bigg\{ u_k \in U_k : \quad \mathsf{sign}\left(u_k\right) = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right),$$

$$\max\left\{0, \frac{-\varphi^{\mathcal{I}}_{k+1} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{\left|b_k\right|\left(1-\varepsilon_k\right)}\right\} \le \left|u_k\right| \le \frac{\varphi^{\mathcal{I}}_{k+1} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{\left|b_k\right|\left(1+\varepsilon_k\right)} \Bigg\},$$

где

$$\varphi_k^{\mathcal{I}} = \varphi \prod_{i=k}^{N} \varepsilon^{-i}.$$

Доказательство утверждения 3.4. Пусть $k = K$. В соответствии с п. 1 леммы 1.1 множество $\mathcal{I}_k^{\varphi}$ имеет следующий вид

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists u_k : \quad \mathbf{P}\left(\left| \frac{a_k^T x + d_k}{b_k} + u_k (1 + \xi_k) \right| \leq \frac{\varphi}{|b_k|} \right) = 1 \right\}.$$

Путем непосредственной подстановки $u_k = 0$, получаем $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{I}_k^{\varphi}$, где

$$\mathcal{D}_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \left| a_k^T x + d_k \right| \leq \varphi \right\}.$$

Пусть $u_k \neq 0$. Рассмотрим уравнение

$$\mathbf{P}\left(\left| \frac{a_k^T x + d_k}{b_k} + u_k (1 + \xi_k) \right| \leq \frac{\varphi}{|b_k|} \right) = 1,$$

которое в силу того, что распределение ξ_k имеет ограниченный носитель $[-\varepsilon_k, \varepsilon_k]$ можно записать в следующем виде

$$F_{\xi_k}\left(\min\left\{ \varepsilon_k, \frac{\varphi + |a_k^T x|}{|b_k u_k|} - 1 \right\} \right) - F_{\xi_k}\left(\max\left\{ -\varepsilon_k, \frac{-\varphi + |a_k^T x|}{|b_k u_k|} - 1 \right\} \right) = 1,$$

где F_{ξ_k} – функция распределения случайной величины ξ_k. Это уравнение имеет решение в случае

$$\min\left\{ \varepsilon_k, \frac{\varphi + |a_k^T x + d_k|}{|b_k u_k|} - 1 \right\} = \varepsilon_k, \quad \max\left\{ -\varepsilon_k, \frac{-\varphi + |a_k^T x + d_k|}{|b_k u_k|} - 1 \right\} = -\varepsilon_k.$$

Разрешая соответствующие неравенства относительно $|u_k|$ с учетом п. 1 следствия 1.1 находим множество

$$\left\{ u_k \in U_k : \quad \mathsf{sign}\,(u_k) = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k} \right), \right.$$
$$\left. \max\left\{ 0, \frac{-\varphi + |a_k^T x_k + d_k|}{|b_k|(1 - \varepsilon_k)} \right\} \leq |u_k| \leq \min\left\{ q, \frac{\varphi + |a_k^T x_k + d_k|}{|b_k|(1 + \varepsilon_k)} \right\} \right\}.$$

и изобеллу уровня 1

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \left| a_k^T x + d_k \right| \leq \varepsilon_k^{-1} \varphi \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \left| a_k^T x + d_k \right| \leq \varphi_k^{\mathcal{I}} \right\}.$$

Пусть $k = K - 1$ Видно, что множества $\mathcal{I}_K^{\varphi}, \mathcal{I}_{K+1}^{\varphi}$ совпадают с точностью до параметров a_k, b_k, $\varphi_k^{\mathcal{I}}$, поэтому используя лемму 1.1 и аналогичные рассуждения, находим явный вид множеств $\mathcal{I}_k^{\varphi}$ для всех $k = \overline{0, K}$

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \left| a_k^T x + d_k \right| \leq \varphi_k^{\mathcal{I}} \right\}.$$

Для нахождения множеств $\mathcal{O}_k^{\varphi}$ воспользуемся пунктом 2 леммы 1.1. Пусть $k = K$. Имеем

$$\mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall u_k \in U_k : \quad \mathbf{P} \left(\left| \frac{a_k^T x + d_k}{b_k} + u_k \left(1 + \xi_k\right) \right| > \frac{\varphi}{|b_k|} \right) = 1 \right\}.$$

Найдем такие x_k, что $\forall u_k \in U_k$ последнее уравнение справедливо. Используя формулу обратной вероятности, получаем

$$\mathbf{P} \left(\left| \frac{a_k^T x + d_k}{b_k} + u_k \left(1 + \xi_k\right) \right| \leq \frac{\varphi}{|b_k|} \right) = 0.$$

Преобразуем это уравнение, учитывая, что F_{ξ_k} – функция распределения случайной величины ξ_k:

$$F_{\xi_k} \left(\min \left\{ \varepsilon_k, \frac{\varphi + \left| a_k^T x + d_k \right|}{|b_k u_k|} - 1 \right\} \right) - F_{\xi_k} \left(\max \left\{ -\varepsilon_k, \frac{-\varphi + \left| a_k^T x + d_k \right|}{|b_k u_k|} - 1 \right\} \right) = 0.$$

Видно, что это условие не выполнено для любых u_k, откуда получаем $\mathcal{O}_k^{\varphi} = \varnothing$. Используя рекуррентное соотношение п. 2 леммы 1.1 нетрудно видеть, что изобелла уровня 0 является пустым множеством для всех $k = \overline{0, K}$.

Утверждение доказано. $\square$

На рисунке 3.3 приведено множество $U_k^{\mathcal{I}}\left(x_k\right)$ при $d_k = 0$.

Таким образом найдено оптимальное управление при $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$ и доказано, что $\mathcal{O}_k^{\varphi} = \varnothing$. Перейдем теперь к поиску оптимального управления при $x_k \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$.

В соответствии с теоремой 1.2 и утверждением 3.4, запишем выражения для нижней и верхней оценок функции Беллмана при $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}\left(x\right) = \sup_{u_k} \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right) =$$

$$= \max_{u_k} \mathbf{P}\left(\left| a_k^T x + b_k u_k \left(1 + \xi_k\right) + d_k \right| \leq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right), \quad (3.8)$$

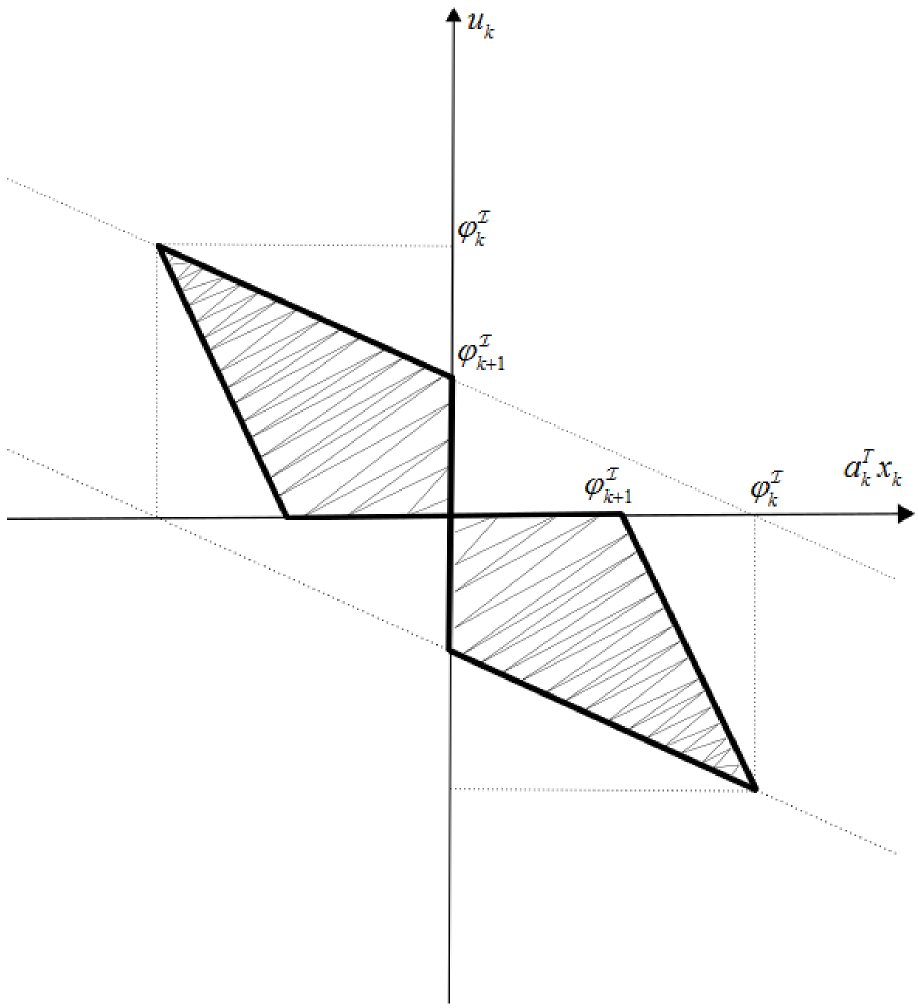

Рисунок 3.3. Множество $U_k^{\mathcal{I}}(x_k)$ в пространстве $\left(\left|a_k^T x_k\right|,\ u_k\right)$

$$\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k} \left\{1 - \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right)\right\} =$$

$$= \begin{cases} \max\limits_{u_k} \mathbf{P}\left(\left|a_k^T x + b_k u_k (1 + \xi_k) + d_k\right| \leq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right) & k = K, \\ 1 & k \in \{0, ..., K-1\}. \end{cases} \tag{3.9}$$

Заметим, что при $k = K$ нижняя и верхняя оценки функции Беллмана совпадают, что является следствием того, что сама функция Беллмана при $k = K + 1$ является индикаторной функцией множества $\mathcal{I}_k^{\varphi}$, которое в этом случае равно $\mathcal{I}_k^{\varphi} = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}_k^{\varphi}$.

Аналитическое решение задачи стохастического программирования в правой части (3.8) при общих допущениях о распределении случайной величины ξ_k затруднено. Отметим, что эта задача с точностью до параметров и распределения случайной величины ξ_k совпадает с задачей стохастического программирования предыдущего раздела, таким образом представляется возможным получение ее решения в предположении о том, что ξ_k имеет, например, усеченное гауссовское распределение.

В настоящем разделе будем рассматривать случай равномерного распределения, а в качестве мотивации будем ссылаться на рыботы [43, 48, 107], посвященных принципу равномерности.

Утверждение 3.5. *Пусть $\xi_k \sim \mathcal{R}\left[-\varepsilon_k, \varepsilon_k\right]$, тогда нижняя оценка функции Беллмана при $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ имеет вид*

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \frac{\varphi_k^{\mathcal{I}}}{\varphi_k^{\mathcal{I}} + |a_k^T x + d_k|} \frac{1+\varepsilon_k}{\varepsilon_k}, \tag{3.10}$$

а решение $\underline{u}_k^{\varphi}$ задачи стохастического программирования (3.8) определяется выражением

$$\underline{u}_k^{\varphi} = -\mathtt{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{b_k\left(1+\varepsilon_k\right)}. \tag{3.11}$$

Доказательство утверждения 3.5. Рассмотрим задачу (3.8). Введем обозначения

$$\tilde{x}_k^1 = \frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k|\left(1+\varepsilon_k\right)}, \quad \tilde{x}^2 = \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k|\left(1+\varepsilon_k\right)},$$
$$\tilde{x}_k^3 = \frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k|\left(1-\varepsilon_k\right)}, \quad \tilde{x}_k^4 = \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k|\left(1-\varepsilon_k\right)}.$$

Нетрудно видеть, что при $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ выполнено

$$\tilde{x}_k^1 \leq \tilde{x}_k^2 \leq \tilde{x}_k^3 \leq \tilde{x}_k^4.$$

Целевая функция в правой части (3.8) в случае $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ имеет следующий вид

$$\begin{cases} 0, & |u_k| \in \left[\tilde{x}_k^4, +\infty\right), \\ \frac{1}{2\varepsilon_k}\left(\frac{\varphi + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1 + \varepsilon_k\right), & |u_k| \in \left[\tilde{x}_k^3, \tilde{x}_k^4\right], \\ \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}}{\varepsilon_k |b_k u_k|}, & |u_k| \in \left[\tilde{x}_k^2, \tilde{x}_k^3\right], \\ 1 - \frac{1}{2\varepsilon_k}\left(\frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1 + \varepsilon_k\right), & |u_k| \in \left[\tilde{x}_k^1, \tilde{x}_k^2\right], \\ 0, & |u_k| \in \left(0, \tilde{x}_k^1\right]. \end{cases} \tag{3.12}$$

Вторая и третяя ветви убывают, а четвертая - возрастает по $|u_k|$. Глобальный максимум достигается в случае $|u_k| = \tilde{x}_k^2$, отсюда заключаем, что оптимальная стратегия в задаче (3.8) имеет вид

$$|u_k| = \tilde{x}_k^2,$$

а оптимальное значение целевой функции равно

$$\frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}}{\varepsilon_k \left| b_k \tilde{x}_k^2 \right|}.$$

Утверждение доказано. $\square$

Используя тот факт, что нижняя и верхняя оценки функции Беллмана равны при $k = K$ из утверждения 3.5 получаем, что функция Беллмана для $k = K$ имеет вид $\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x)$, а оптимальное управление при $k = K$ равно $u_k^{\varphi} = \underline{u}_k^{\varphi}$.

Отметим, как и в предыдущем разделе, что если определить управление $\underline{u}^{\varphi}(\cdot) = \left(\underline{\gamma}_0(\cdot), ..., \underline{\gamma}_N(\cdot)\right)$, где $\underline{u}_k^{\varphi} = \underline{\gamma}(x_k)$, то управление $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ можно считать субоптимальным в том смысле, что при каждом фиксированном k оно максимизирует нижнюю границу функции правой части МДП. Покажем теперь, что управление $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ является оптимальным управлением для всех $k = \overline{0, K}$. Для этого рассмотрим уравнение Беллмана в форме (1.6), которое с учетом $\mathcal{O}_k^{\varphi} = \varnothing$ запишется в следующем виде

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k} \left\{ P_k(x, u_k) + M_k(x, u_k)\left(1 - P_k(x, u_k)\right) \right\},$$

где

$$P_k(x, u_k) = \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right),$$

$$M_k(x, u_k) = \mathbf{M}\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k(x, u_k, \xi_k)\right) \middle| f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}\right].$$

Лемма 3.1. *Пусть существуют решения задач*

$$P_k(x, u_k) \to \max_{u_k}, \quad M_k(x, u_k) \to \max_{u_k}, \quad x \in \mathcal{B}_k^{\varphi},$$

и выполнено равенство

$$\arg\max_{u_k} P_k(x, u_k) = \arg\max_{u_k} M_k(x, u_k),$$

тогда

$$\arg\max_{u_k} P_k(x, u_k) = \arg\max_{u_k} \left\{ P_k(x, u_k) + M_k(x, u_k)\left(1 - P_k(x, u_k)\right) \right\}.$$

Доказательство леммы 3.1. Обозначим

$$u_k^P = \arg\max_{u_k} P_k(x, u_k), \quad u_k^M = \arg\max_{u_k} M_k(x, u_k),$$

$$u_k^* = \arg\max_{u_k} \left\{ P_k\left(x, u_k\right) + M_k\left(x, u_k\right)\left(1 - P_k\left(x, u_k\right)\right) \right\}.$$

Очевидно, что справедливы неравенства

$$P_k\left(x, u_k^P\right) \geq P_k\left(x, \overline{u}_k^P\right), \quad \forall \overline{u}_k^P \neq u_k^P,$$

$$M_k\left(x, u_k^M\right) \geq M_k\left(x, \overline{u}_k^M\right), \quad \forall \overline{u}_k^M \neq u_k^M.$$

Из условия леммы имеем равенство $u_k^P = u_k^M$. Покажем, что любое другое управление $\overline{u}_k$ не является оптимальным. В силу $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ справедлива цепочка неравенств, завершающая доказательство леммы

$$\begin{gathered}
P_k\left(x, \overline{u}_k\right) + M_k\left(x, \overline{u}_k\right)\left(1 - P_k\left(x, \overline{u}_k\right)\right) \leq P_k\left(x, \overline{u}_k\right) + M_k\left(x, u_k^M\right)\left(1 - P_k\left(x, \overline{u}_k\right)\right) = \\
= M_k\left(x, u_k^M\right) + P_k\left(x, \overline{u}_k\right)\left(1 - M_k\left(x, u_k^M\right)\right) \leq M_k\left(x, u_k^M\right) + \\
+ P_k\left(x, u_k^P\right)\left(1 - M_k\left(x, u_k^M\right)\right) = \\
= M_k\left(x, u_k^M\right) + P_k\left(x, u_k^M\right)\left(1 - M_k\left(x, u_k^M\right)\right), \quad \forall \overline{u}_k \in \mathbb{R}.
\end{gathered}$$

Лемма доказана. □

Покажем, что условия леммы 3.1 выполнены. Положим $k = K - 1$ и рассмотрим следующую задачу

$$M_k\left(x, u_k\right) \to \max_{u_k}, \quad x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}.$$

Выпишем равенство

$$\begin{aligned}
& M_k\left(x, u_k\right) = \\
& = \mathbf{M}\left[\frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}}{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + b_k u_k\left(1 + \xi_k\right) + d_k\right|} \frac{1 + \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_{k+1}} \,\middle|\, \left|a_k^T x + b_k u_k\left(1 + \xi_k\right) + d_k\right| > \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right].
\end{aligned}$$

Отметим, что из $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ следует $\left|a_k^T x\right| > \varphi_k^{\mathcal{I}}$. Из определения условного математического ожидания относительно случайного события получим равенство

$$\begin{aligned}
& M_k\left(x, u_k\right) = \left(1 - P_k\left(x, u_k\right)\right)^{-1} \times \\
& \times \int\limits_{\left|a_k^T x + b_k u_k (1+t) + d_k\right| > \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}} \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}}{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + b_k u_k\left(1 + t\right) + d_k\right|} \frac{1 + \varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_{k+1}} f_{\xi_k}\left(t\right) dt.
\end{aligned}$$

где $f_{\xi_k}\left(t\right)$ - плотность равномерного распределения на отрезке $\left[-\varepsilon_k, \varepsilon_k\right]$. Из условия $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ получаем $P_k\left(x, u_k\right) \in (0, 1)$. Второй сомножитель в последнем выражении можно записать в виде

$$\int\limits_{\substack{\left|a_k^T x + b_k u_k (1+t) + d_k\right| > \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} \\ |t| \le \varepsilon_k}} \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}}{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + b_k u_k (1+t) + d_k\right|} \frac{1+\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_{k+1}} \frac{1}{2\varepsilon_k} dt.$$

Разрешая неравенства в пределах интегрирования с учетом справедливости неравенства $\frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k|(1+\varepsilon_k)} \le \frac{\varphi_{k+1}^{-\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k|(1-\varepsilon_k)}$ при $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ получаем, что

$$\int\limits_{t \in \mathcal{M}(x,u_k)} \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}}{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + b_k u_k (1+t) + d_k\right|} \frac{1+\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon_{k+1}} \frac{1}{2\varepsilon_k} dt,$$

где введено обозначение для множества интегрирования $\mathcal{M}(x,u)$

$$\mathcal{M}(x,u_k) =$$
$$= \left\{ t \in \mathbb{R}: \quad |t| \le \varepsilon_k,\ t \ge \frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1,\ t \le \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1 \right\}.$$

Нетрудно видеть, что максимум $M(x,u_k)$ по $|u_k|$ достигается в одной из точек $\frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k|(1+\varepsilon_k)}$ или $\frac{\varphi_{k+1}^{-\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k|(1-\varepsilon_k)}$, откуда, с учетом того, что подынтегральная функция строго убывает по $\left|a_k^T x + b_k u_k (1+t)\right|$, а, следовательно, и по $|u_k|$, откуда с учетом $\mathtt{sign}(u_k) = -\mathtt{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right)$ окончательно получаем

$$\arg\max_{u_k} M_k(x,u_k) = -\mathtt{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{b_k(1+\varepsilon_k)},$$

и, следовательно, условия леммы 3.1 выполнены и управление $\underline{u}_k^{\varphi}$ является оптимальным при $k = K-1$ и $x_k \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$. Для проверки справедливости выполнения леммы 2.1 достаточно убедиться, что на каждом шаге $k = \overline{0, K-1}$ функцию $M_k(x,u_k)$ можно представить как математическое ожидание функции, строго убывающей по $\left|a_k^T x + b_k u_k (1+\xi_k) + d_k\right|$.

Таким образом получаем, что оптимальное управление в задаче (3.7) при $k = \overline{K+1, N}$ является любым элементом из множества $\mathbb{R}$, а при $k = \overline{0, K}$ определяется выражением

$$u_k^{\varphi} = \begin{cases} \text{любое элемент из } U_k^{\mathcal{I}}(x_k), & \left|a_k^T x_k + d_k\right| \le \varphi_k^{\mathcal{I}}, \\ -\mathtt{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{b_k(1+\varepsilon_k)}, & \left|a_k^T x_k + d_k\right| > \varphi_k^{\mathcal{I}}, \end{cases} \tag{3.13}$$

при этом явное выражение для функции оптимального значения вероятностного критерия получить не удается, но с помощью следствия 1.2 можно найти её нижнюю оценку. Интересно, что в данной задаче с использованием нижней оценки для функции оптимального значения вероятностного критерия и условий эквивалентности задач вероятностной и квантильной оптимизации [44] удаётся также найти верхнюю оценку для оптимального значения функционала квантили. Квантильный критерий оказывается наиболее привлекательным с инженерной точки зрения, поскольку обладает прозрачным физическим смыслом в отличие от вероятностного.

Для простоты рассмотрим случай, когда $X \in \mathbb{R}^n$ - детерминированный вектор. Тогда из следствия 1.2 получаем $\underline{F}(\varphi, X) = \underline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(X)$.

Утверждение 3.6. *Пусть $X \in \mathbb{R}^n$ – детерминированный вектор. Тогда нижняя оценка для функции оптимального значения вероятностного критерия определяется выражением*

$$\underline{F}(\varphi, X) =$$
$$= \begin{cases} 1, & \varphi \geq \left| l^T A^{N+1} X + d_0 \right| \prod\limits_{k=0}^{N} \varepsilon_k, \\ \varphi \prod\limits_{k=0}^{K} \varepsilon_k^{-1} (1+\varepsilon_0) \left(\varphi \prod\limits_{k=1}^{K} \varepsilon_k + \left| l^T A^{N+1} X + d_0 \right| \right)^{-1}, & \varphi < \left| l^T A^{N+1} X + d_0 \right| \prod\limits_{k=0}^{K} \varepsilon_k. \end{cases}$$

Верхняя оценка для функции оптимального значения квантильного критерия определяется выражением

$$\overline{G}(\alpha, X) = \begin{cases} \left| l^T A^{N+1} X + d_0 \right| \prod\limits_{k=0}^{N} \varepsilon_k, & \alpha = 1, \\ \left| l^T A^{N+1} X + d_0 \right| \alpha \varepsilon_0 \left(1 + \varepsilon_0 (1-\alpha)\right)^{-1} \prod\limits_{k=1}^{K} \varepsilon_k, & \alpha \in (0,1), \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Доказательство утверждения 3.6. Воспользуемся следствием 1.2 из которого получаем следующую оценку для функции оптимального значения вероятностного критерия

$$\underline{F}(\varphi, X) \leq F(\varphi) \leq \overline{F}(\varphi, X),$$

где

$$\underline{F}(\varphi, X) = \underline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(X) = \sup_{u_0 \in U_0} \mathbf{P}\left(f_0(X, u_0, \xi_0) \in \mathcal{I}_1^{\varphi}\right),$$

$$\overline{F}(\varphi, X) = \overline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(X) = \sup_{u_0 \in U_0} \left\{1 - \mathbf{P}\left(f_0\left(X, u_0, \xi_0\right) \in \mathcal{O}_1^{\varphi}\right)\right\}.$$

Отсюда с учетом выражения (3.10) для нижней оценки функции Беллмана и выражения для верхней оценки для функции Беллмана $\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = 1$ получаем

$$\underline{F}(\varphi, X) = \begin{cases} 1, & x_0 \in \mathcal{I}_0^{\varphi}, \\ \frac{\varphi_1^{\mathcal{I}}}{\varphi_1^{\mathcal{I}} + \left|a_0^T x + d_0\right|} \frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}, & x_0 \in \mathcal{B}_0^{\varphi}, \end{cases}$$

откуда с учетом выражений для множеств $\mathcal{I}_k^{\varphi}$, $\mathcal{B}_k^{\varphi}$, вектора a_k^T и скаляра $\varphi_k^{\mathcal{I}}$ получаем нижнюю оценку для функции оптимального значения вероятностного критерия.

Получим теперь верхнюю оценку для функции оптимального значения квантильного критерия. Для этого воспользуемся эквивалентностью следующих неравенств [46]

$$F(\varphi) \geq \alpha, \quad G(\alpha) \leq \varphi,$$

где для функции оптимальных значений вероятностного и квантильного критериев опущена зависимость от параметров X, N. Зафиксируем уровень $\alpha = \underline{\alpha}$, где

$$\underline{\alpha} = \underline{F}(\varphi, X),$$

отметим, что вероятностное неравенство $F(\varphi) \geq \underline{\alpha}$ справедливо для всех X, N из определения функции $\underline{F}$. Отсюда получаем $G(\underline{\alpha}) \leq \varphi$. Данное неравенство можно записать в следующем виде

$$G\left(\varphi \prod_{k=0}^{K} \varepsilon_k^{-1}(1+\varepsilon_0)\left(\varphi \prod_{k=1}^{K} \varepsilon_k + \left|l^T A^{N+1} X + d_0\right|\right)^{-1}, X\right) \leq \varphi,$$

откуда выполнив замену переменных

$$\alpha = \varphi \prod_{k=0}^{K} \varepsilon_k^{-1}(1+\varepsilon_0)\left(\varphi \prod_{k=1}^{K} \varepsilon_k + \left|l^T A^{N+1} X + d_0\right|\right)^{-1},$$

и разрешив последнее уравнение относительно φ (принимая во внимание $\alpha \in (0,1)$)

$$\varphi = \left|l^T A^{N+1} X + d_0\right| \alpha \varepsilon_0 \left(1 + \varepsilon_0 (1-\alpha)\right)^{-1} \prod_{k=1}^{N} \varepsilon_k,$$

получаем $\forall X, N$ неравенство

$$G(\alpha, X) \leq \overline{G}(\alpha) = \left|l^T A^{N+1} X + d_0\right| \alpha \varepsilon_0 \left(1 + \varepsilon_0 (1-\alpha)\right)^{-1} \prod_{k=1}^{N} \varepsilon_k, \quad \alpha \in (0,1).$$

При $\alpha = 1$ получаем

$$\overline{G}(\alpha, X) = \left| l^T A^{N+1} X + d_0 \right| \alpha \varepsilon_0 \left(1 + \varepsilon_0 (1 - \alpha)\right)^{-1} \prod_{k=1}^{N} \varepsilon_k = \left| l^T A^{N+1} X + d_0 \right| \prod_{k=0}^{N} \varepsilon_k,$$

а при $\alpha = 0$ получаем $\overline{G}(\alpha) = 0$.

Утверждение доказано. $\square$

Пример 3.2. Покажем на простом примере, что достаточные условия эквивалентности вероятностной и квантильной задач выполнены.

Пусть $n = 1$ - размерность вектора состояния, система управления имеет вид

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + u_k (1 + \xi_k), \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

и вероятностный функционал определяется выражением

$$P_\varphi (u(\cdot)) = \mathbf{P} (|x_{N+1}| \leq \varphi).$$

В исходных обозначениях получаем $A = B = l = 1$, $d_k = 0$. Предположим также, что $X \in \mathbb{R}$ - детерминированный скаляр и $\varepsilon_k = \varepsilon \in (0, 1)$. Отсюда получаем следующее выражение для границы изобеллы уровня 1 $\varphi_k^{\mathcal{I}} = \varphi \varepsilon^{k-N-1}$.

Для проверки условий эквивалентности вероятностной и квантильной задач воспользуемся теоремой 2.1 (см. раздел 2.2, пример 2.2), в которой требуется, чтобы функция оптимального значения вероятностного критерия

$$F(\varphi) = \sup_{u(\cdot)} P_\varphi (u(\cdot)) = \mathsf{B}_0^\varphi (X)$$

строго возрастала по параметру φ в бесконечно малой окрестности корня уравнения $F(\varphi) = \alpha$, при этом $u_k^{\varphi_\alpha}$, где φ_α - корень уравнения $F(\varphi) = \alpha$, является оптимальным управлением в задаче с квантильным критерием.

Ввиду отсутствия аналитического выражения для функции оптимального значения вероятностного критерия $F(\varphi)$ для проверки выполнения достаточных условий эквивалентности был построен график функции $F(\varphi)$ (см. рисунок 3.4) с помощью метода Монте-Карло с объемом выборки 150000 и следующими параметрами системы: $N = 2$, $\epsilon = 0,05$, $X = 1000$. На графике функция $F(\varphi)$ выглядит как непрерывная строго монотонная функция распределения некоторой случайной величины,

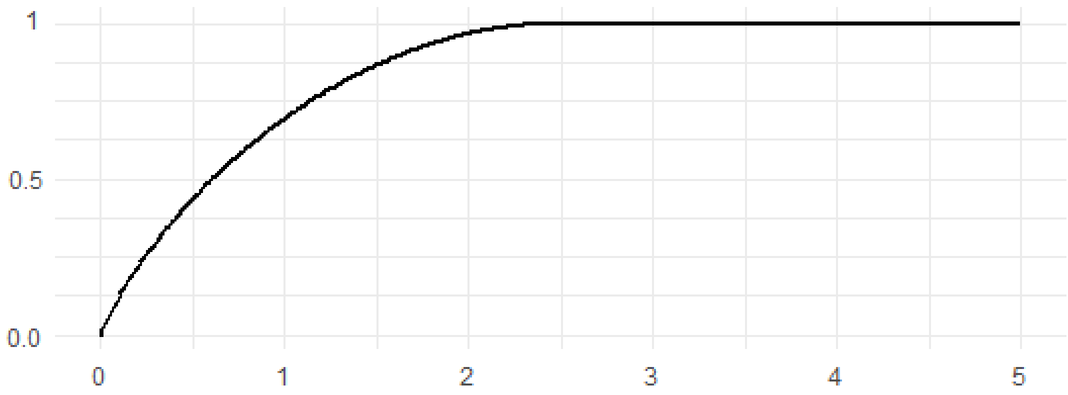

Рисунок 3.4. Функция оптимального значения вероятностного критерия F

и, следовательно, можно с высокой степенью уверенности полагать, что достаточные условия эквивалентности выполняются.

Рассмотрим частный случай так называемой одноимпульсной коррекции $N = 0$. В данном случае функция $F(\varphi)$ совпадает с функцией $\underline{F}(\varphi)$ (а функция $G(\alpha)$ совпадает с функцией $\underline{G}(\alpha)$) и равна (см. утверждение 3.6)

$$F(\varphi) = \begin{cases} 1, & \varphi \geq |X|\,\varepsilon^{-1}, \\ \frac{\varphi}{\varphi+|X|}\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}, & \varphi < |X|\,\varepsilon^{-1}, \end{cases}$$

откуда, решая уравнение $F(\varphi) = \alpha$ в области $\varphi < |X|\,\varepsilon^{-1}$ относительно φ и подставляя в стратегию (в той же области), получаем решение квантильной задачи для $N = 0$ и $\alpha \in (0, 1)$

$$u_0^{\alpha} = -\frac{1+\alpha\varepsilon}{(1+\varepsilon)\,(1+\varepsilon\,(1-\alpha))}X,$$

при этом оптимальное значение квантильного критерия (см. утверждение 3.6)

$$G(\alpha) = |X|\,\alpha\varepsilon\,(1+\varepsilon\,(1-\alpha))^{-1}.$$

Пример 3.3. В рамках примера 3.2 проведем сравнение нижней оценки оптимального значения вероятностного критерия $\underline{F}(\varphi, X)$ (утверждение 3.6) и верхней оценки оптимального значения квантильного критерия $\overline{G}(\alpha, X)$ с оценками, полученными с помощью неравенства Чебышева

$$P_{\varphi}(u(\cdot)) \geq 1 - \frac{J(u(\cdot))}{\varphi^2}, \quad \Phi_{\alpha}(u(\cdot)) \leq \sqrt{\frac{J(u(\cdot))}{1-\alpha}},$$

где $J(u(\cdot))$ - среднеквадратический критерий

$$J(u(\cdot)) = \mathbf{M}\left[x_{N+1}^2\right].$$

Введем обозначения для оптимальных стратегий

$$u^{\varphi}(\cdot) = \arg\max_{u(\cdot)} P_{\varphi}(u(\cdot)), \quad u^{\alpha}(\cdot) = \arg\min_{u(\cdot)} \Phi_{\alpha}(u(\cdot)), \quad u^{J}(\cdot) = \arg\inf_{u(\cdot)} J(u(\cdot)).$$

В силу неравенства

$$1 - \frac{J(u^{\varphi}(\cdot))}{\varphi^2} \leq 1 - \frac{J\left(u^J(\cdot)\right)}{\varphi^2} \leq P_{\varphi}(u^{\varphi}(\cdot)), \quad \forall \varphi \in (0, +\infty),$$

и неравенства

$$\Phi_{\alpha}(u^{\alpha}(\cdot)) \leq \sqrt{\frac{J(u^J(\cdot))}{1-\alpha}} \leq \sqrt{\frac{J(u^{\alpha}(\cdot))}{1-\alpha}}, \quad \forall \alpha \in (0,1),$$

интересным является сравнение нижних оценок $\underline{F}(\varphi, X)$ и $1 - J\left(u^J(\cdot)\right)\varphi^{-2}$ для функции оптимального значения вероятностного критерия и верхних оценок $\overline{G}(\alpha, X)$ и $\sqrt{J(u^J(\cdot))(1-\alpha)^{-1}}$ для функции оптимального значения квантильного критерия.

Функции $\underline{F}(\varphi, X)$ и $\overline{G}(\alpha, X)$ в соответствии с утверждением 3.6 для текущей задачи принимают следующий вид

$$\underline{F}(\varphi, X) = \begin{cases} 1, & \varphi \geq |X|\,\varepsilon^{N+1}, \\ \varphi\varepsilon^{-N-1}(1+\varepsilon)\left(\varphi\varepsilon^{-N} + |X|\right)^{-1}, & \varphi < |X|\,\varepsilon^{N+1}. \end{cases}$$

$$\overline{G}(\alpha, X) = \begin{cases} |X|\,\varepsilon^{N+1}, & \alpha = 1, \\ |X|\,\alpha\varepsilon^{N+1}(1+\varepsilon(1-\alpha))^{-1}, & \alpha \in (0,1), \\ 0, & \alpha = 0. \end{cases}$$

Выражение для оптимального значения среднеквадратического критерия $J\left(u^J(\cdot)\right)$ можно найти, например, в работе [64]s

$$J\left(u^J(\cdot)\right) = \prod_{k=0}^{N} \frac{\mathbf{M}[\xi_k^2]}{1+\mathbf{M}[\xi_k^2]} X^2,$$

откуда с учетом $\mathbf{M}[\xi_k^2] = \varepsilon^2/12$ получаем нижнюю оценку Чебышева для функции оптимального значения вероятностного критерия

$$1 - \frac{J\left(u^J(\cdot)\right)}{\varphi^2} = 1 - \prod_{k=0}^{N} \frac{\mathbf{M}[\xi_k^2]}{1+\mathbf{M}[\xi_k^2]} \frac{X^2}{\varphi^2} = 1 - \left(\frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon^2}\right)^{N+1} \frac{X^2}{\varphi^2}$$

и верхнюю оценку Чебышева для функции оптимального значения квантильного критерия

$$\sqrt{\frac{J\left(u^J(\cdot)\right)}{1-\alpha}} = \sqrt{\prod_{k=0}^{N} \frac{\mathbf{M}\left[\xi_k^2\right]}{1+\mathbf{M}\left[\xi_k^2\right]} \frac{X^2}{1-\alpha}} = |X| \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^2}{3+\varepsilon^2}\right)^{N+1} \frac{1}{1-\alpha}}.$$

Заменим нижнюю оценку для функции оптимального значения вероятностного критерия заменим следующей $\max\left\{0,\ 1-J\left(u^J(\cdot)\right)\varphi^{-2}\right\}$.

Для случая $N = 0$ оценка $\underline{F}$ совпадает с оптимальным значением вероятностного критерия, а оценка $\overline{G}$ совпадает с оптимальным значением квантильного критерия. На рисунке 3.5 изображены графики функций оптимального значения вероятностного критерия и её Чебышевской оценки, а на рисунке 3.6 – графики функций оптимального значения квантильного критерия и её Чебышевской оценки при $N = 0$, $X = 100$, $\varepsilon = 0.9$, шаг дискретизации для параметра φ равен 0.0001. Проведем

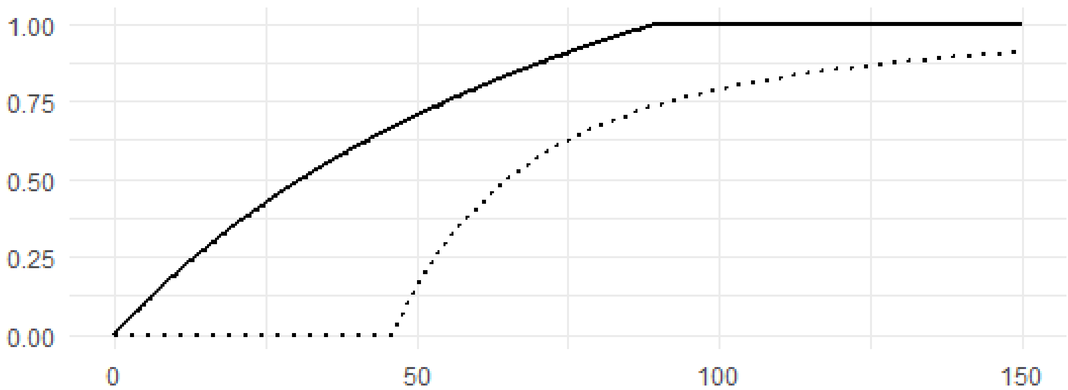

Рисунок 3.5. Функция оптимального значения вероятностного критерия $\underline{F}$ (жирная линия), оценка Чебышева $1-J\left(u^J(\cdot)\right)\varphi^{-2}$ (точки)

серию из четырех испытаний в так называемой задаче двухимпульсной коррекции $N = 1$. Числовые значения параметров системы приведены в таблице 3.3. Графики оценок функции оптимального значения вероятностного критерия для случаев a) - d) приведены на рисунке 3.7, а графики оценок функции оптимального значения квантильного критерия - на рисунке 3.8.

Проведенные численные эксперименты демонстрируют следующий эффект: Чебышевские оценки для функционалов вероятности и квантили являются грубыми,

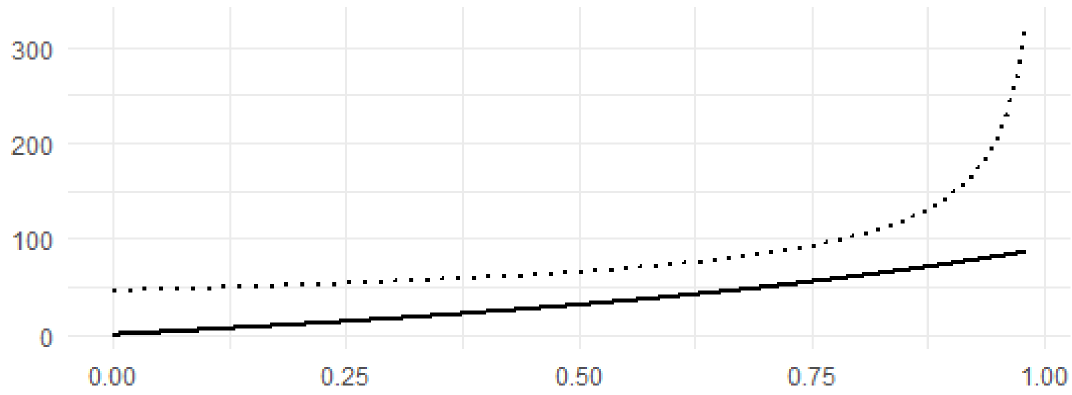

Рисунок 3.6. Функция оптимального значения квантильного критерия $\overline{G}$ (жирная линия), оценка Чебышева $\sqrt{J\left(u^J\left(\cdot\right)\right)\left(1-\alpha\right)}$ (точки)

Таблица 3.3. Численные значения параметров системы

№ эксперимента	N	X	ε
a)	1	100	$0,9$
b)	1	100	$0,5$
c)	1	1000	$0,2$
d)	1	1000	$0,05$

причем чем ближе уровень вероятности к единице, тем хуже Чебышевские оценки. Аналогичную картину можно наблюдать по мере приближения уровня вероятности к нулю. Оценки $\underline{F}$ и $\overline{G}$ являются более точными в двух описанных случаях.

Пример 3.4. Рассмотрим пример, в рамках которого проведем сравнение найденного оптимального управления со среднеквадратическим управлением. Пусть система управления имеет следующий вид

$$\begin{cases} x^1_{k+1} = x^1_k + \Delta t x^2_k, \\ x^2_{k+1} = x^2_k + u_k\left(1+\xi_k\right) + \eta_k, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

где $x_k = \left(x^1_k, x^2_k\right)^T$ – вектор состояния, начальное состояние предполагается гауссовским с известным математическим ожиданием и ковариационной матрицей $x_0 = X \sim$

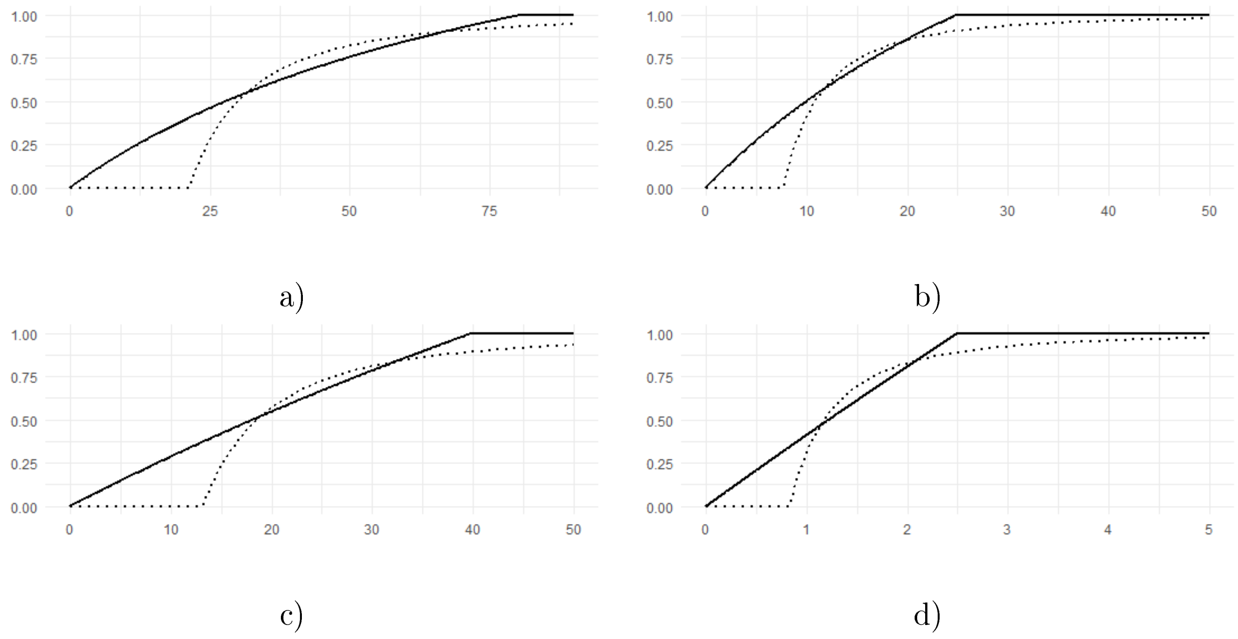

Рисунок 3.7. Нижние оценки функции оптимального значения вероятностного критерия (жирная линия - $\underline{F}$, точки - $1 - J\left(u^J\left(\cdot\right)\right)\varphi^{-2}$)

$\mathcal{N}\left(\mu_X, K_X\right)$, u_k – управление, $\xi_k \sim \mathcal{R}\left[-\varepsilon, \varepsilon\right]$ – мультипликативное, а $\eta_k \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma_\eta\right)$ – аддитивное возмущения. Ставится задача

$$\mathbf{P}\left(\left|x^1_{N+1}\right| \leq \varphi\right) \to \max_{u(\cdot)}.$$

Если за x^1_k принять отклонение долготы восходящего узла, за x^2_k – скорость дрейфа, Δt – промежуток времени между окончаниями активных участков, k – момент приложения импульса тяги u_k – параметр управления – отклонение от программной длительности активного участка на k-ом шаге, ξ_k – мультипликативную, а η - аддитивную составляющую ошибки управления, то рассматриваемая система моделирует движение центра масс искусственного спутника Земли в окрестности геостационарной орбиты. Целями управления является максимизация вероятности перевода спутника в заданную долготу в конечный момент времени $N+1$, что формализуется в виде ограничения $\left|x^1_{N+1}\right| \leq \varphi$.

Основным отличием рассматриваемой системы от (3.3) является наличие случайной величины η_k, которая в данном случае моделирует аддитивную составляющую ошибки реализации корректирующего воздействия. Отметим, что при синтезе оптимальных (в среднеквадратической и минимаксной постановках) импульсных

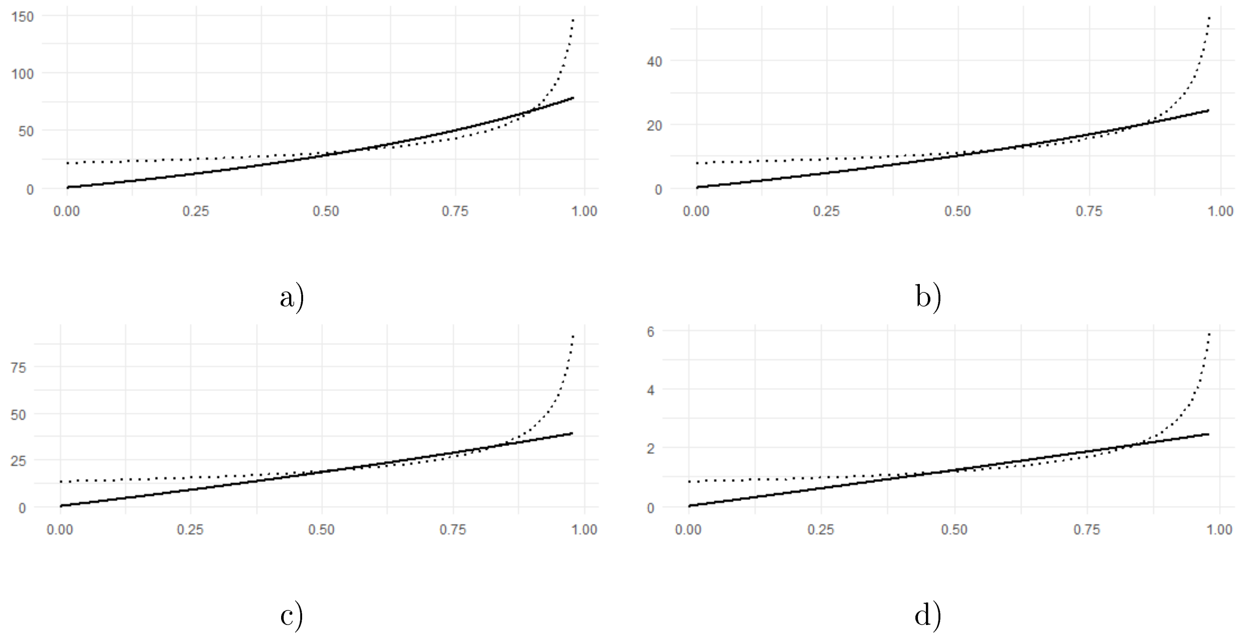

Рисунок 3.8. Верхние оценки функции оптимального значения квантильного критерия (жирная линия - $\overline{G}$, точки - $\sqrt{J\left(u^J\left(\cdot\right)\right)\left(1-\alpha\right)}$)

систем настоящего вида аддитивная составляющая ошибки реализации корректирующего воздействия опускается. В среднеквадратической постановке это обосновывается тем, что оптимальное управление в случае отсутствия данного возмущения совпадает с оптимальным управлением в случае его наличия. В минимаксной постановке данное возмущение затрудняет поиск оптимальной стратегии, тем не менее минимаксное решение оказывается слабо чувствительным к возмущению η_k. В случае вероятностного критерия синтез оптимального управления с учетом аддитивной помехи η_k также оказывается затруднительным, однако, как показывают дальнейшие эксперименты, на оптимальном отрезке $U_k^{\mathcal{I}}\left(x_k\right)$ можно выбрать такое управление, что вероятностная стратегия также окажется “нечувствительной” к аддитивному возмущению η_k.

Запишем матрицы системы, управления и точностного функционала в исходных обозначениях

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad l = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_k = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как в оптимальной по вероятностному критерию стратегии имеется оптимальный отрезок $U_k^{\mathcal{I}}\left(x_k\right)$, рассмотрим несколько стратегий, являющихся оптимальных в смысле вероятностного критерия:

1) Стратегия с зоной нечувствительности

$$u_k^{zoi} = \begin{cases} 0, & \left|a_k^T x_k\right| \le \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}, \\ -\mathtt{sign}\left(a_k^T x_k\right) \frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k\right|}{b_k(1-\varepsilon_k)}, & \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} < \left|a_k^T x_k\right| \le \varphi_k^{\mathcal{I}}, \\ -\mathtt{sign}\left(a_k^T x_k\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k\right|}{b_k(1+\varepsilon_k)}, & \left|a_k^T x_k\right| > \varphi_k^{\mathcal{I}}. \end{cases}$$

2) Стратегия с участком обратной связи без сноса, зависящего от φ

$$u_k^{pr} = \begin{cases} -\frac{a_k^T x_k}{b_k}, & \left|a_k^T x_k\right| \le \varphi_k^{\mathcal{I}}, \\ -\mathtt{sign}\left(a_k^T x_k\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k\right|}{b_k(1+\varepsilon_k)}, & \left|a_k^T x_k\right| > \varphi_k^{\mathcal{I}}. \end{cases}$$

3) Стратегия с максимальной нормой

$$u_k^{max} = -\mathtt{sign}\left(a_k^T x_k\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k\right|}{b_k\left(1+\varepsilon_k\right)}.$$

На рисунке 3.9 приведено графическое представление приведенных выше стратегий Среднеквадратическая стратегия имеет вид [64]

$$u_k^J = -\frac{a_k^T x_k}{b_k\left(1 + 3^{-1}\varepsilon^2\right)}.$$

Будем сравнивать значения вероятностного и среднеквадратического критериев при разных стратегиях. Для получения оценок критериев будем использовать метод Монте-Карло с объемом выборки 50000. Рассмотрим несколько экспериментов. В таблице 3.4 представлены числовые значения входных параметров. Значение горизонта управления N будем варьировать. В эксперименте a) доминирующей является помеха ξ_k, а в эксперименте b) – помеха η_k.

Таблица 3.4. Числовые значения параметров системы

№ эксперимента	φ	Δt	ε	σ_η	μ_X	K_X
$a)$	0.9	2	0,9	0,5	$(100,\ 150)^{\mathrm{T}}$	$\mathsf{diag}\,[50,\ 25]$
$b)$	0.01	1	0,2	3,9	$(15,\ 60)^{\mathrm{T}}$	$\mathsf{diag}\,[5,\ 3]$

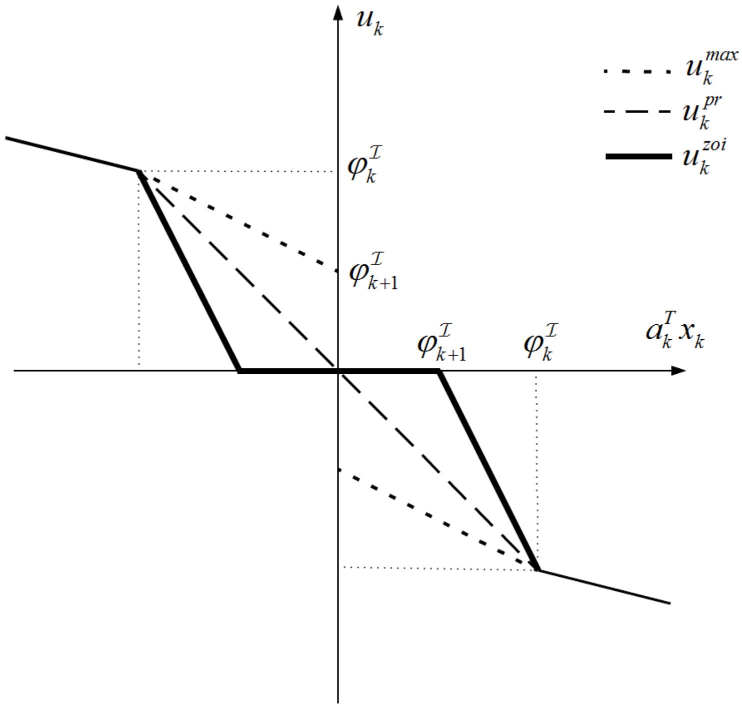

Рисунок 3.9. Стратегии u_k^{max}, u_k^{pr}, u_k^{zoi} в пространстве $\left(\left|a_k^T x_k\right|,\ u_k\right)$

Таблица 3.5. Значение вероятностного критерия в эксперименте a)

N	$P_\varphi\left(u^{zoi}\left(\cdot\right)\right)$	$P_\varphi\left(u^{pr}\left(\cdot\right)\right)$	$P_\varphi\left(u^{\max}\left(\cdot\right)\right)$	$P_\varphi\left(u^{J}\left(\cdot\right)\right)$
1	0.512	0.492	0.517	0.509
3	0.794	0.712	0.802	0.56
5	0.91	0.812	0.965	0.719
7	0.982	0.932	0.991	0.894
9	0.994	0.97	1	0.93

В таблицы 3.5, 3.6 занесены результаты численных экспериментов a), b) при разных числовых значениях параметра N (горизонта управления) для оценок (по методу Монте-Карло) вероятностного критерия. В таблицу 3.7, 3.8 занесены результаты численных экспериментов a), b) при разных числовых значениях параметра N (горизонта управления) для оценок (по методу Монте-Карло) среднеквадратического критерия.

Таблица 3.6. Значение вероятностного критерия в эксперименте b)

N	$P_\varphi\left(u^{zoi}(\cdot)\right)$	$P_\varphi\left(u^{pr}(\cdot)\right)$	$P_\varphi\left(u^{\max}(\cdot)\right)$	$P_\varphi\left(u^{J}(\cdot)\right)$
1	0.641	0.319	0.52	0.59
3	0.811	0.712	0.83	0.67
5	0.952	0.921	0.908	0.84
7	0.991	0.97	0.956	0.91
9	0.999	0.999	0.98	0.96

Таблица 3.7. Значение среднеквадратического критерия в эксперименте a)

N	$J\left(u^{zoi}(\cdot)\right)$	$J\left(u^{pr}(\cdot)\right)$	$J\left(u^{\max}(\cdot)\right)$	$J\left(u^{J}(\cdot)\right)$
1	3.1	3.0	5.9	2.4
3	2.9	2.6	4.1	2.1
5	1.7	1.8	2.1	1.7
7	0.5	0.81	1.5	0.3
9	0.09	0.1	0.7	0.02

Таблица 3.8. Значение среднеквадратического критерия в эксперименте b)

N	$J\left(u^{zoi}(\cdot)\right)$	$J\left(u^{pr}(\cdot)\right)$	$J\left(u^{\max}(\cdot)\right)$	$J\left(u^{J}(\cdot)\right)$
1	2.4	3.5	6.0	2.3
3	1.9	2.1	3.1	1.3
5	0.02	0.019	0.021	0.001
7	0.013	0.01	0.018	0.000
9	0.001	0.001	0.0013	0.000

По результатам эксперимента a) можно сделать вывод, что управление $u^{\max}(\cdot)$ является “лучшим” в смысле вероятностного критерия и в то же время “наихудшим” в смысле среднеквадратического критерия, что легко объясняется тем, что оно обладает наибольшей нормой относительно других управлений. При этом стратегии $u^{zoi}(\cdot)$ и $u^{pr}(\cdot)$, превосходящие среднеквадратическую стратегию $u^{J}(\cdot)$, обеспечивают относительно неплохое значение среднеквадратического критерия, что объясняется тем, что в данном эксперименте помеха η_k не оказывает сильное воздействие (ввиду её малой дисперсии).

Результаты эксперимента б) оказались идентичными, что говорит о малой степени влияния аддитивного возмущения η_k.

3.4. Учёт геометрических ограничений на управляющее воздействие в задаче с равномерным распределением мультипликативной помехи

В настоящем разделе приводится обобщение результатов предыдущего раздела на случай наличия геометрических ограничений на управление. Отметим, что в задачах импульсной коррекции траектории движения ИСЗ геометрические ограничения моделируют ограниченность величины корректирующего импульса, исполняемого КДУ. Ранее в задачах оптимизации коррекции траектории движения ИСЗ с вероятностным критерием [64] не рассматривался случай ограниченного управления. Вопрос об оптимальном ограниченом управлении является актуальным в том числе и для среднеквадратического критерия.

Рассмотрим задачу оптимального управления (3.3), в отношении которой введем дополнительные предположения

1) на управление наложены симметричные геометрические ограничения $U_k = U = [-q, q]$, $q > 0$,

2) мультипликативное случайное возмущение имеет равномерный закон распределения $\xi_k \sim \mathcal{R}\left[-\varepsilon_k, \varepsilon_k\right]$.

Перейдем к решению задачи. Воспользуемся МДП и результатами первой главы.

Утверждение 3.7. *$\forall k = \overline{0, K}$ множества $\mathcal{I}_k^{\varphi}$, $\mathcal{B}_k^{\varphi}$, $\mathcal{O}_k^{\varphi}$ определяются в соответствии с выражениями*

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \mathcal{D}_k \cup \Delta_k,$$

$$\mathcal{B}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi_k^{\mathcal{I}} < \left|a_k^T x + d_k\right| < \varphi_k^{\mathcal{O}}\right\}, \quad \mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| \geq \varphi_k^{\mathcal{O}}\right\},$$

где

$$\mathcal{D}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| \leq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right\}, \quad \Delta_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} < \left|a_k^T x + d_k\right| \leq \varphi_k^{\mathcal{I}}\right\},$$

оптимальным для $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$ *является любой элемент из множества*

$$U_k^{\mathcal{I}}(x_k) = \Bigg\{u_k \in U_k : \quad \mathsf{sign}\,(u_k) = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right),$$
$$\max\left\{0, \frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1-\varepsilon_k)}\right\} \leq |u_k| \leq \min\left\{q, \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1+\varepsilon_k)}\right\}\Bigg\},$$

где скалярные коэффициенты $\varphi_k^{\mathcal{I}} > 0$, $\varphi_k^{\mathcal{O}} > 0$ *вычисляются в соответствии с системами рекуррентных соотношений в обратном времени*

$$\begin{cases} \varphi_k^{\mathcal{I}} = \min\left\{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + q\,|b_k|\,(1-\varepsilon_k)\,, \quad \varepsilon_k^{-1}\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right\}, \\ \varphi_{K+1}^{\mathcal{I}} = \varphi, \end{cases} \qquad k = \overline{0,K}, \tag{3.14}$$

$$\begin{cases} \varphi_k^{\mathcal{O}} = \varphi_{k+1}^{\mathcal{O}} + q\,|b_k|\,(1+\varepsilon_k)\,, \\ \varphi_{K+1}^{\mathcal{O}} = \varphi, \end{cases} \qquad k = \overline{0,K}. \tag{3.15}$$

Доказательство утверждения 3.7.. Пусть $k = K$. В соответствии с п. 1 леммы 1.1 множество $\mathcal{I}_k^{\varphi}$ имеет следующий вид

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists u_k \in U_k : \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{a_k^T x + d_k}{b_k} + u_k\,(1+\xi_k)\right| \leq \frac{\varphi}{|b_k|}\right) = 1\right\}. \tag{3.16}$$

Путем непосредственной подстановки $u_k = 0$, получаем $\mathcal{D}_k \subset \mathcal{I}_k^{\varphi}$, где

$$\mathcal{D}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| \leq \varphi\right\}.$$

Пусть $u_k \neq 0$, тогда уравнение в (3.17) примет вид

$$F_{\xi_k}\left(\min\left\{\varepsilon_k, \frac{\varphi + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1\right\}\right) - F_{\xi_k}\left(\max\left\{-\varepsilon_k, \frac{-\varphi + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1\right\}\right) = 1, \tag{3.17}$$

где F_{ξ_k} – функция распределения случайной величины ξ_k. Поскольку $\mathsf{supp} f_{\xi_k}(t) = [-\varepsilon_k, \varepsilon_k]$, уравнение (3.17) имеет решение только в случае

$$\min\left\{\varepsilon_k, \frac{\varphi + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1\right\} = \varepsilon_k \quad \max\left\{-\varepsilon_k, \frac{-\varphi + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1\right\} = -\varepsilon_k.$$

Разрешая соответствующие неравенства относительно $|u_k|$, заключаем, что уравнение (3.17) имеет бесконечное множество решений, лежащих на множестве

$$\Bigg\{u_k \in U_k : \quad u_k \neq 0, \quad \mathsf{sign}\,(u_k) = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right),$$
$$\frac{-\varphi + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1-\varepsilon_k)} \leq |u_k| \leq \min\left\{q, \frac{\varphi + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1+\varepsilon_k)}\right\}\Bigg\},$$

что соответствует множеству $U_k^{\mathcal{I}}(x_k)$, а изобелла уровня 1 имеет следующий вид

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| \leq \min\left\{\varphi + q\,|b_k|\,(1-\varepsilon_k)\,, \quad \varepsilon_k^{-1}\varphi\right\}\right\} =$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| \leq \varphi_k^{\mathcal{I}}\right\}.$$

Таким образом, оптимальным для $k = K$, $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$ является целое множество управлений, включающее $u_k = 0$ при $x_k \in \mathcal{D}_k$

$$\Bigg\{u_k \in U_k : \quad \mathsf{sign}\,(u_k) = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right),$$
$$\max\left\{0, \frac{-\varphi + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1-\varepsilon_k)}\right\} \leq |u_k| \leq \min\left\{q, \frac{\varphi + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1+\varepsilon_k)}\right\}\Bigg\}.$$

Видно, что множества $\mathcal{I}_K^{\varphi}$, $\mathcal{I}_{K+1}^{\varphi}$ совпадают с точностью до параметров a_k, b_k, $\varphi_k^{\mathcal{I}}$, поэтому используя лемму 1.1 и аналогичные рассуждения, находим явный вид множеств $\mathcal{I}_k^{\varphi}$ для всех $k = \overline{0, K}$

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| \leq \varphi_k^{\mathcal{I}}\right\}.$$

Для нахождения множеств $\mathcal{O}_k^{\varphi}$ воспользуемся пунктом 2 леммы 1.1. Пусть $k = K$. Имеем

$$\mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall u_k \in U_k : \quad \mathbf{P}\left(\left|\frac{a_k^T x + d_k}{b_k} + u_k\,(1+\xi_k)\right| > \frac{\varphi}{|b_k|}\right) = 1\right\}.$$

Найдем такие x_k, что $\forall u_k \in U_k$ последнее уравнение справедливо. Для этого преобразуем его, используя формулу для вероятности противоположного события:

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{a_k^T x + d_k}{b_k} + u_k\,(1+\xi_k)\right| \leq \frac{\varphi}{|b_k|}\right) = 0.$$

Преобразуем это уравнение, учитывая, что F_{ξ_k} – функция распределения случайной величины ξ_k

$$F_{\xi_k}\left(\min\left\{\varepsilon_k, \frac{\varphi + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1\right\}\right) - F_{\xi_k}\left(\max\left\{-\varepsilon_k, \frac{-\varphi + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1\right\}\right) = 0.$$

Это равенство справедливо для таких $u_k \in U_k$, что

$$|u_k| \le \frac{-\varphi + \left|a_k^T x + d_k\right|}{|b_k|\,(1+\varepsilon_k)},$$

отсюда с учетом $|u_k| \le q$ получаем

$$\mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| > \varphi + q\,|b_k|\,(1+\varepsilon_k)\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| > \varphi_k^{\mathcal{O}}\right\}.$$

Заметим, что множества $\mathcal{O}_K^{\varphi}$, $\mathcal{O}_{K+1}^{\varphi}$ совпадают с точностью до параметров a_k, b_k, $\varphi_k^{\mathcal{O}}$, поэтому используя п. 2 леммы 1.1 и аналогичные рассуждения, находим явный вид множеств $\mathcal{O}_k^{\varphi}$ для всех $k = \overline{0, K}$.

$$\mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| > \varphi_k^{\mathcal{O}}\right\}.$$

Утверждение доказано.□

Из утверждения 3.7 видно, что поверхности уровня 1 и 0 в задаче с ограниченным управлением отличаются от изобелл в задаче без ограничений. Причем изобелла уровня 0 в данном случае не является пустым множеством, что имеет свою физическую интерпретацию: если абсолютная величина промаха $a_k^T x_k + d_k$ в некоторый момент времени k оказывается больше уровня $\varphi_k^{\mathcal{O}}$, зависящего в том числе от q, то никаким ограниченным управлением $u_k \in [-q, q]$ не удастся перевести систему в такое состояние, при котором ожидаемое оптимальное значение вероятностного критерия не равнялось бы нулю. Уменьшение q влечет за собой уменьшение величины $\varphi_k^{\mathcal{O}}$ и, как следствие, увеличение множества $\mathcal{O}_k^{\varphi}$.

Из теоремы 1.2 и утверждения 3.7 получаем следующие выражения для нижней $\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x)$ и верхней $\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x)$ оценок функции Беллмана в области $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ для $k \in \{0, ..., K\}$

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \arg\max_{|u_k| \le q} \mathbf{P}_k\left(\left|a_k^T x + b_k u_k (1+\xi_k) + d_k\right| \le \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right), \tag{3.18}$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \arg\max_{|u_k| \le q} \mathbf{P}_k\left(\left|a_k^T x + b_k u_k (1+\xi_k) + d_k\right| \le \varphi_{k+1}^{\mathcal{O}}\right). \tag{3.19}$$

Интересно, что функции $\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x)$ и $\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x)$ совпадают с точностью до параметров $\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}$, $\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}}$.

Аналитическое решение задач (3.18), (3.19) при общих допущениях о распределении случайных помех ξ_k затруднено. Принимая во внимание вышесказанное, рассмотрим случай равномерного распределения ξ_k.

Утверждение 3.8. *Пусть $\xi_k \sim \mathcal{R}\left[-\varepsilon_k, \varepsilon_k\right]$, тогда*

1) нижняя оценка функции Беллмана в области $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ определяется выражением

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \min\left\{\frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}}{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + |a_k^T x + d_k|}\frac{1+\varepsilon_k}{\varepsilon_k}, \quad \frac{1}{2\varepsilon_k}\left(1+\varepsilon_k + \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} - \left|a_k^T x + d_k\right|}{q\,|b_k|}\right)\right\}.$$

а решение $\underline{u}_k^{\varphi}$ задачи стохастического программирования в правой части (3.18) имеет вид

$$\underline{u}_k^{\varphi} = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right)\min\left\{q, \quad \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1+\varepsilon_k)}\right\},$$

2) верхняя оценка функции Беллмана в области $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ определяется выражением

$$\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \min\left\{\frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}}}{\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}} + |a_k^T x + d_k|}\frac{1+\varepsilon_k}{\varepsilon_k}, \quad \frac{1}{2\varepsilon_k}\left(1+\varepsilon_k + \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}} - \left|a_k^T x + d_k\right|}{q\,|b_k|}\right)\right\}.$$

а решение $\overline{u}_k^{\varphi}$ задачи стохастического программирования в правой части (3.18) имеет вид

$$\overline{u}_k^{\varphi} = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right)\min\left\{q, \quad \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1+\varepsilon_k)}\right\},$$

Доказательство утверждения 3.8.. Рассмотрим задачу (3.18). Введем обозначения

$$\tilde{x}_k^1 = \frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1+\varepsilon_k)}, \quad \tilde{x}_k^2 = \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1+\varepsilon_k)},$$
$$\tilde{x}_k^3 = \frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1-\varepsilon_k)}, \quad \tilde{x}_k^4 = \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1-\varepsilon_k)}.$$

Нетрудно видеть, что при $x_k \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ выполнено

$$\tilde{x}_k^1 \le \tilde{x}_k^2 \le \tilde{x}_k^3 \le \tilde{x}_k^4.$$

В доказательстве 3.7 показано, что в случае $x_k \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ целевая функция в (3.18) имеет следующий вид

$$\begin{cases} 0, & |u_k| \in [\tilde{x}_k^4, +\infty)\,, \\ \frac{1}{2\varepsilon_k}\left(\frac{\varphi + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1 + \varepsilon_k\right), & |u_k| \in [\tilde{x}_k^3, \tilde{x}_k^4]\,, \\ \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}}{\varepsilon_k |b_k u_k|}, & |u_k| \in [\tilde{x}_k^2, \tilde{x}_k^3]\,, \\ 1 - \frac{1}{2\varepsilon_k}\left(\frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k u_k|} - 1 + \varepsilon_k\right), & |u_k| \in [\tilde{x}_k^1, \tilde{x}_k^2]\,, \\ 0, & |u_k| \in (0, \tilde{x}_k^1]\,. \end{cases} \tag{3.20}$$

Вторая и третяя ветви убывают, а четвертая - возрастает по $|u_k|$. Глобальный максимум достигается в случае $|u_k| = \tilde{x}_k^2$, отсюда заключаем, что оптимальная стратегия в задаче (3.18) имеет вид

$$|u_k| = \min\left\{q, \tilde{x}_k^2\right\},$$

а оптимальное значение целевой функции равно

$$\min\left\{\frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}}{\varepsilon_k\left|b_k\tilde{x}_k^2\right|},\quad 1-\frac{1}{2\varepsilon_k}\left(\frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}+\left|a_k^Tx_k+d_k\right|}{|b_kq|}-1+\varepsilon_k\right)\right\}.$$

Переходя к исходным обозначениям, завершаем доказательство первого пункта утверждения. В силу того, что задачи (3.18), (3.19) совпадают с точностью до параметров $\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}$, $\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}}$, второй пункт утверждения аналогичен первому.

Утверждение доказано.□

Как и в предыдущем разделе заметим, что при $k = K$ для функции Беллмана и оптимального управления выполнено $\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x)$, $\underline{u}_k^{\varphi} = u_k^{\varphi} = \overline{u}_k^{\varphi}$ и, следовательно, из утверждения 3.7 получаем функцию Беллмана и оптимальное управление при $k = K$ и $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \min\left\{\frac{\varphi}{\varphi+|a_k^Tx+d_k|}\frac{1+\varepsilon_k}{\varepsilon_k},\quad \frac{1}{2\varepsilon_k}\left(1+\varepsilon_k+\frac{\varphi-\left|a_k^Tx+d_k\right|}{q\,|b_k|}\right)\right\}, \tag{3.21}$$

$$u_k^{\varphi} = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^Tx_k+d_k}{b_k}\right)\min\left\{q,\quad \frac{\varphi+\left|a_k^Tx_k+d_k\right|}{|b_k|\,(1+\varepsilon_k)}\right\}. \tag{3.22}$$

Зададимся теперь вопросом: является ли управление, оптимальное в задаче без ограничений, оптимальным в настоящей задаче и если да, то при каких условиях? Получение ответа на данный вопрос оказывается возможным с использованием нижней и верхней оценок для функции Беллмана.

Утверждение 3.9. *Пусть $X \in \mathbb{R}^n$ – детерминированный вектор и $X \in \mathcal{B}_0^{\varphi}$. Тогда*

1) *нижняя оценка для функции оптимального значения вероятностного критерия имеет вид*

$$\underline{F}(\varphi, X) = \\ = \min\left\{\frac{\varphi_1^{\mathcal{I}}}{\varphi_1^{\mathcal{I}}+|a_0^TX+d_0|}\frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_0},\quad \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(1+\varepsilon_0+\frac{\varphi_1^{\mathcal{I}}-\left|a_0^TX+d_0\right|}{q\,|b_0|}\right)\right\}. \tag{3.23}$$

2) верхняя оценка для функции оптимального значения вероятностного критерия имеет вид

$$\overline{F}(\varphi, X) =$$
$$= \min\left\{\frac{\varphi_1^{\mathcal{O}}}{\varphi_1^{\mathcal{O}} + |a_0^T X + d_0|}\frac{1+\varepsilon_0}{\varepsilon_0}, \quad \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(1 + \varepsilon_0 + \frac{\varphi_1^{\mathcal{O}} - \left|a_0^T X + d_0\right|}{q\,|b_0|}\right)\right\}. \quad (3.24)$$

Во-первых, заметим, что если выполнено $q \geq \frac{\varphi_0^{\mathcal{I}} + \left|l^T A^{N-1} X + d_0\right|}{|b_0|(1+\varepsilon_0)}$, то ограниченное управление $\underline{u}_0^{\varphi}$ совпадает с оптимальным неограниченным управлением u_0^{φ}, при этом совпадают также нижние оценки для функции Беллмана $\mathsf{B}_k^{\varphi}(x)$. Если же подобное условие выполнено в отношении каждого управления $\underline{u}_k^{\varphi}$ на всех шагах дискретного времени, то управление $\underline{u}_k^{\varphi}$ будет совпадать с оптимальным управлением u_k^{φ} и являться оптимальным в задаче в силу совпадения функций Беллмана и, как следствие, оптимального значения вероятностного критерия. С учетом сказанного, отметим, что такие условия легко получить, используя свойства двусторонней оценки для функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия.

Во-вторых, заметим, что функция оптимального значения вероятностного критерия совпадает со своей нижней оценкой при $X \in \mathcal{I}_0^{\varphi}$ и равна единице, что следует из свойств двусторонней оценки функции Беллмана. Граница множества $\mathcal{I}_0^{\varphi}$, которая из утверждения 3.7 равна $\varphi_k^{\mathcal{I}}$, соответствует оптимальному значению квантили уровня 1 точностного функционала (см. утверждение 3.6 и пример 3.4). Таким образом, при $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$ получаем условия оптимальности неограниченного управления

$$\max_{k=\overline{0,K}}\left\{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\varepsilon_k^{-1} - \varphi_k^{\mathcal{I}} - q\,|b_k|\,(1-\varepsilon_k)\right\} \leq 0. \quad (3.25)$$

Из уравнения (3.13) нетрудно видеть, что изобелла уровня 1 при выполнении сказанного выше условия будет равна изобелле уровня 1 в задаче с неограниченным управлением. Отметим, что выражение (3.25) не зависит от начальных условий X.

Пусть теперь $x_k \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$. Нетрудно видеть, что условия оптимальности неограниченного управления в текущей задаче можно формализовать системой уравнений

$$\mathbf{P}\left(\left|a_k^T x_k^{\varphi} + d_k\right| \leq q\,|b_k|\,(1+\varepsilon_k) - \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right) = 1, \quad k = \overline{0,K}, \quad (3.26)$$

которая получается из системы уравнений $\underline{u}_k^{\varphi} = u_k^{\varphi}$ при тех же $k = \overline{0,K}$. Заметим, что из (3.25) следует

$$\varphi_k^{\mathcal{O}} > q\,|b_k|\,(1+\varepsilon_k) - \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} > \varphi_k^{\mathcal{I}} > 0. \quad (3.27)$$

В данном случае u_k^φ - оптимальное неограниченное управление, а $\{x_k^\varphi\}_{k=0}^N$ - случайный процесс, образованный траекториями системы, замкнутой оптимальным неограниченным управлением

$$u_k^\varphi = \begin{cases} -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|(1+\varepsilon_k)}, & \left|a_k^T x_k + d_k\right| \geq \varphi_k^{\mathcal{I}}, \\ -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right) \frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k\right|}{|b_k|(1-\varepsilon_k)}, & \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} \leq \left|a_k^T x_k + d_k\right| \leq \varphi_k^{\mathcal{I}}, \\ 0 & \left|a_k^T x_k + d_k\right| \leq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}. \end{cases}$$

Для анализа системы уравнений (3.26) запишем рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет скалярный случайный процесс $\left\{a_k^T x_k^\varphi + d_k\right\}_{k=0}^K$

$$\begin{aligned} &a_{k+1}^T x_{k+1}^\varphi + +d_{k+1} = \\ &= \begin{cases} a_k^T x_k^\varphi + d_k - \mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k^\varphi + d_k}{b_k}\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right|}{1+\varepsilon_k} (1+\xi_k), & \left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right| \geq \varphi_k^{\mathcal{I}}, \\ a_k^T x_k^\varphi + d_k + \mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k^\varphi + d_k}{b_k}\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} - \left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right|}{1-\varepsilon_k} (1+\xi_k), & \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} \leq \left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right| \leq \varphi_k^{\mathcal{I}}, \\ a_k^T x_k^\varphi + d_k & \left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right| \leq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Группируя вторую и третью ветви последнего выражения получаем следующее выражение

$$\begin{aligned} &a_{k+1}^T x_{k+1}^\varphi + d_{k+1} = \\ &= \begin{cases} a_k^T x_k^\varphi + d_k - \mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k^\varphi + d_k}{b_k}\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right|}{1+\varepsilon_k} (1+\xi_k), & \left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right| \geq \varphi_k^{\mathcal{I}}, \\ a_k^T x_k^\varphi + d_k + \max\left\{0,\ \mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k^\varphi + d_k}{b_k}\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} - \left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right|}{1-\varepsilon_k}\right\} (1+\xi_k), & \left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right| \leq \varphi_k^{\mathcal{I}}. \end{cases} \end{aligned}$$

Отсюда с использованием формулы полного математического ожидания с учетом

$$\mathbf{P}\left(\left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right| \leq q\,|b_k|\,(1+\varepsilon_k) - \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} \middle| \left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right| \leq \varphi_k^{\mathcal{I}}\right) = 1,$$

что следует из (3.27), получаем следующую нижнюю оценку для левой части (3.26)

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}\left(\left|a_k^T x_k^\varphi + d_k\right| \leq q\,|b_k|\,(1+\varepsilon_k) - \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right) \geq \\ &\quad \geq \mathbf{P}\left(\left|a_0^T X + +d_0 + \max\left\{0,\ \mathsf{sign}\left(\frac{a_0^T X + d_0}{b_0}\right) \frac{\varphi_1^{\mathcal{I}} - \left|a_0^T X + d_0\right|}{1-\varepsilon_k}\right\}(1+\xi_0)\right| \leq \right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. \leq q\,|b_k|\,(1+\varepsilon_k) - \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right). \end{aligned}$$

Приравнивая правую часть к единице в соответствии с (3.26), получаем систему нервенств, зависящую только от начальных параметров задачи

$$\begin{cases} \left| a_0^T X + d_0 + \max\left\{0,\ \mathsf{sign}\left(\frac{a_0^T X + d_0}{b_0}\right) \frac{\varphi_1^{\mathcal{I}} - \left|a_0^T X + d_0\right|}{1-\varepsilon_k}\right\}(1+\varepsilon_0)\right| \leq \\ \leq q\,|b_k|\,(1+\varepsilon_k) - \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}, \\ \left| a_0^T X + d_0 + \max\left\{0,\ \mathsf{sign}\left(\frac{a_0^T X + d_0}{b_0}\right) \frac{\varphi_1^{\mathcal{I}} - \left|a_0^T X + d_0\right|}{1-\varepsilon_k}\right\}(1-\varepsilon_0)\right| \leq \\ \leq q\,|b_k|\,(1+\varepsilon_k) - \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}. \end{cases}$$

Если данная система неравенств разрешима для исходных параметров задачи для всех $k \in \overline{0, K}$, то оптимальным в задаче с ограничениями является неограниченное управление.

3.5. Выводы по главе 3

1. Для задачи оптимального управления билинейной дискретной стохастической системой со скалярным ограниченным управлением и гауссовской ошибкой исполнения управляющего воздействия найдены в явном виде поверхности уровня 1 и 0, двусторонние оценки функции Беллмана, двусторонняя оценка для функции оптимального значения вероятностного критерия.

2. Для задачи п. 1 найдено субоптимальное управление, являющееся оптимальным для состояний, принадлежащих поверхностям уровня 1 и 0, случая одного шага по времени и максимизирующее нижнюю оценку функции правой части уравнения метода динамического программирования в остальных случаях.

3. Для задачи оптимального управления билинейной дискретной стохастической системой со скалярным неограниченным управлением и равномерной ошибкой исполнения управляющего воздействия найдены в явном виде поверхности уровня 1 и 0, двусторонние оценки функции Беллмана, двусторонняя оценка для функции оптимального значения вероятностного критерия, оптимальное управление.

4. Проведены численные эксперименты, в рамках которых показано, что путем специального выбора управления на оптимальном отрезке, оптимальное управление является нечувствительным к аддитивным случайным возмущениям.

5. Найдены условия, при которых управление, оптимальное в задаче п. 3 без ограничений оказывается оптимальным в задаче с геометрическими симметричными

ограничениями.

Основные результаты главы опубликованы в [3–5]

Глава 4. Оптимальная двухпараметрическая импульсная коррекция с вероятностным критерием

В данной главе рассматривается модель оптимальной по вероятностному критерию импульсной коррекции траектории движения искусственного спутника Земли в окрестности ГСО. Отличием такой постановки от рассмотренной в главе 3 является то, что точностной функционал представляется не в виде абсолютного значения линейной комбинации вектора состояния в терминальный момент времени, а в виде Гельдеровой бесконечной нормы вектора состояния. Таким образом максимизируется вероятность выполнения нескольких неравенств, характеризующих терминальную точность системы. Указанная модель рассматривалась в [63–65, 74]. Подобные модели используются, в частности, в других задачах оптимизации импульсной коррекции траектории движущихся объектов [22–24].

В разделе 4.1 приводится математическая постановка задачи.

В разделе 4.2 описывается модель импульсной коррекции с вероятностным критерием, рассмотренная в главе 3, в двухпараметрической постановке.

В разделе 4.3 исследуется случай, когда мультипликативные к управлению ошибки имеют гауссовский закон распределения.

В разделе 4.4 рассмотрен случай равномерного распределения мультипликативных возмущений.

4.1. Описание модели двухпараметрической импульсной коррекции

Основным недостатком однопараметрической модели, рассмотренной в главе 3, является тот факт, что управление, оптимальное в смысле критерия (3.3), не гарантирует попадание координат вектора состояния, не входящих в точностной функционал, на какое-либо терминальное множество. Это может привести к тому, что линейная комбинация вектора состояния в терминальный момент времени (см. точностной функционал в (3.3)) оказывается в заданной окрестности нуля с максимальной вероятностью, а отдельные координаты вектора состояния принимают достаточно “большие” значения. С другой стороны, управление, которое максимизирует вероятность попадания вектора состояния в окрестность нуля, заданную, например, в виде многогранника, может оказаться приемлимым и в однопараметрической постановке. Такая задача является более трудной как в смысле аналитического анализа, так и численного решения. В рамках моделей импульсной коррекции движения ее принято называть “многопараметрической”. Для задач оптимизации коррекции траектории движения ИСЗ в окрестности ГСО подобная постановка является актуальной. Более того, она рассматривалась в [64] в задаче оптимального управления двумерной системой (3.1) при отсутствии детерминированных возмущений. Рассмотрим двухпараметрическу постановку задачи импульсной коррекции траектории движения геостационарного спутника [64]. Опишем систему движения ИСЗ в плоскости ГСО, аналогичную рассмотренной в главе 3. Будем полагать, что:

1) N – число исполняемых корректирующих импульсов тяги КДУ;

2) k – момент приложения k-го корректирующего импульса;

3) x_k^1 – отклонение долготы восходящего узла от требуемого значения (в градусах);

4) x_k^2 – скорость дрейфа ИСЗ (в градусах/звездные сутки);

5) $X = (x_0^1, x_0^2)^T$ – начальное отклонение спутника относительно расчетных значений;

6) u_k – величина k-го корректирующего импульса тяги (в градусах/(звездные сутки)^2);

7) ξ_k – ошибка исполнения k-го корректирующего импульса во время пассивного участка полёта между k-ым и $k+1$-ым приложением корректирующего импульса;

8) Δt_k – длительность k-го пассивного участка полета;

Динамика средней долготы и периода обращения (скорости дрейфа) с учетом случайных ошибок реализации управляющего ускорения, детерминированных возмущений, связанных с внешними силами, и случайных ошибок измерения параметров движения имеет вид (3.1)

$$\begin{cases} x_{k+1}^1 = x_k^1 + \Delta t_k x_k^2, \\ x_{k+1}^2 = x_k^2 + \Delta t_k u_k \left(1 + \xi_k\right), \qquad k = \overline{0, N}. \\ x_0^1 = X^1,\ x_0^2 = X^2. \end{cases}$$

Задача [64] двухпараметрической коррекции для такой модели заключается в нахождении последовательностей функций $u_k = \gamma_k\left(x_k\right)$, $k = \overline{0, N}$, которые обеспечивают перевод спутника в заданную долготу, причем остаточная скорость дрейфа должна быть такой, чтобы спутник оставался в заданной долготе требуемое время t_{N+1}, что формализуется в виде неравенств

$$\left|x_{N+1}^1\right| \le \varphi, \quad \left|x_{N+1}^1 + \Delta t_{N+1} x_{N+1}^2\right| \le \varphi.$$

В вероятностной постановке ее можно записать в следующем виде

$$P_\varphi\left(u\left(\cdot\right)\right) \to \max_{u(\cdot)}, \quad \mathbf{P}\left(\max\left\{\left|x_{N+1}^1\right|,\ \left|x_{N+1}^1 + \Delta t_{N+1} x_{N+1}^2\right|\right\} \le \varphi\right), \tag{4.1}$$

где $\Delta t_{N+1} > 0$ – требуемое время пребывания долготы восходящего узла с учетом остаточной скорости дрейфа после проведения последней коррекции, а $\varphi > 0$ – заданный показатель точности.

Задача (4.1) была рассмотрена в [64] для случая “одноразовой” коррекции $N = 0$, гауссовского распределения случайной величины ξ_k.

Воспользуемся результатами первой главы для решения задачи (4.1) для случая заданного горизонта управления N.

4.2. Импульсная коррекция с гауссовскими ошибками управления

Рассмотрим задачу синтеза оптимального управления системой с вероятностным критерием. Предположим дополнительно, что

1) мультипликативное возмущение имеет гауссовский закон распределения $\xi_k \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$,

2) на управление не наложено геометрических ограничений $U_k = \mathbb{R}$.

Перейдем к решению задачи (4.1). Определим матрицы

$$\Theta_k = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=k}^{N} t_i \\ 1 & \sum_{i=k}^{N} t_i + t_{N+1} \end{pmatrix}, \quad \theta_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ t_N t_{N+1} \end{pmatrix}, & k = N, \\ \begin{pmatrix} t_k \sum_{i=k+1}^{N} t_i \\ t_k \left(\sum_{i=k+1}^{N} t_i + t_{N+1} \right) \end{pmatrix}, & k = \overline{0, N-1}. \end{cases}$$

Смысл матрицы Θ_k в том, что $\|\Theta_k x_k\|_\infty$ отражает величину точностного функционала на k-ом шаге. Важно, что первый элемент вектора θ_N равен нулю. Это объясняет нижеизложенный факт того, что изобелла уровня 0 непуста только для $k = N$ (далее это доказывается в утверждении 4.1).

В соответствии с МДП, описанным в разделе 1.2 получаем выражение для функции Беллмана при $k = N$

$$\begin{aligned} \mathsf{B}_N^\varphi(x) &= \max_{u_N} \mathbf{M}\left[\mathsf{B}_{N+1}^\varphi\left(f_N(x, u_N, \xi_N)\right)\right] = \\ &= \max_{u_N} \mathbf{M}\left[\mathbf{I}_{(-\infty,\varphi]}\left(\Phi\left(f_N(x, u_N, \xi_N)\right)\right)\right] = \\ &= \max_{u_N} \mathbf{P}\left(\max\left\{\left|e_1^T \Theta_N x\right|,\ \left|e_2^T \Theta_N x + e_2^T \theta_N u_N (1+\xi_N)\right|\right\} \le \varphi\right) = \\ &= \begin{cases} \max\limits_{u_N} \mathbf{P}\left(\left|e_2^T \Theta_N x + e_2^T \theta_N u_N (1+\xi_N)\right| \le \varphi\right), & \left|e_1^T \Theta_N x\right| \le \varphi, \\ 0 & \left|e_1^T \Theta_N x\right| > \varphi. \end{cases} \end{aligned}$$

Решение задачи стохастического программирования в первой ветви вышеуказанного соотношения найдено в [64]. Во введенных обозначениях оно имеет следующий вид

$$u_N^\varphi = \\ = \begin{cases} 0, & \left|e_2^T \Theta_N x_N\right| \le \varphi, \\ -2 e_2^T \Theta_N x_N \left(e_2^T \theta_N \left(1 + \sqrt{1 + 2\sigma^2 \ln\left(\frac{\left|e_2^T \Theta_N x_N\right| + \varphi}{\left|e_2^T \Theta_N x_N\right| - \varphi} \right)} \right) \right)^{-1}, & \left|e_2^T \Theta_N x_N\right| > \varphi. \end{cases}$$

Подставим u_N^φ в правую часть уравнения МДП и получим выражение для функции

Беллмана при $k = N$

$$\mathsf{B}_N^{\varphi}(x) =$$
$$= \begin{cases} 1, & \left|e_1^T \Theta_N x\right| \le \varphi, \ \left|e_2^T \Theta_N x\right| \le \varphi, \\ \Phi_0\left(\frac{\varphi + \left|e_2^T \Theta_N x\right|}{\sigma e_2^T \theta_k \left|u_N^{\varphi}\right|} - \frac{1}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\varphi + \left|e_2^T \Theta_N x\right|}{\sigma e_2^T \theta_N \left|u_N^{\varphi}\right|} - \frac{1}{\sigma}\right), & \left|e_1^T \Theta_N x\right| \le \varphi, \ \left|e_2^T \Theta_N x\right| > \varphi, \\ 0, & \left|e_1^T \Theta_N x\right| > \varphi, \end{cases}$$

где $\Phi_0(x)$ - функция Лапласа

$$\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{t^2/2} dt.$$

Дальнейшее использование МДП для шагов $k \in \{0, ..., N\}$ затруднено ввиду сложной структуры функции $\mathsf{B}_N^{\varphi}(x)$ и, соответственно, сложной структуры задачи стохастического программирования на шаге $k = N - 1$.

Тем не менее, результаты главы 1 позволяют найти управление, которое является субоптимальным в определенном смысле в задаче (4.1), а теорема 1.2 позволяет найти двустороннюю оценку для функции Беллмана, с помощью которой можно оценить точность субоптимального решения.

Рассмотрим множество, называемое в [64] зоной нечувствительности.

$$\mathcal{D}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad 0 \in \operatorname{Arg}\max_{u_k} \mathbf{M}\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right)\right]\right\}.$$

В следующем утверждении находится явный вид изобелл.

Утверждение 4.1. *Для изобеллы уровня 1 справедливо равенство*

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \mathcal{D}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \|\Theta_k x\|_{\infty} \le \varphi\right\}, \quad k = \overline{0, N},$$

изобелла уровня 0 определяется выражениями

$$\mathcal{O}_N^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \left|e_1^T \Theta_N x\right| > \varphi\right\}, \quad \mathcal{O}_k^{\varphi} = \varnothing, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Доказательство утверждения 4.1. В соответствии с первым пунктом леммы 1.1, для множества $\mathcal{I}_N^{\varphi}$ справедливо равенство

$$\mathcal{I}_N^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \exists u_N : \quad \mathbf{P}\left(\|\Theta_N x + \theta_N u_N\left(1 + \xi_N\right)\|_{\infty} \le \varphi\right) = 1\right\}.$$

С учетом $e_1^T\theta_N = 0$, последнее выражение примет вид

$$\mathcal{I}_N^{\varphi} = \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 : \quad \exists u_N : \\ \mathbf{P}\left(\max\left\{\left|e_1^T\Theta_N x\right|, \left|e_2^T\Theta_N x + e_2^T\theta_N u_N\left(1+\xi_N\right)\right|\right\} \le \varphi\right) = 1 \Big\}.$$

Далее запишем

$$\mathbf{P}\left(\max\left\{\left|e_1^T\Theta_N x\right|, \left|e_2^T\Theta_N x + e_2^T\theta_N u_N\left(1+\xi_N\right)\right|\right\} \le \varphi\right) = \\ = \begin{cases} \mathbf{P}\left(\left|e_2^T\Theta_N x + e_2^T\theta_N u_N\left(1+\xi_N\right)\right| \le \varphi\right), & \left|e_1^T\Theta_N x\right| \le \varphi, \\ 0, & \left|e_1^T\Theta_N x\right| > \varphi, \end{cases}$$

Подставим в первую ветвь последнего выражения $u_N = 0$. Тогда при $\left|e_2^T\Theta_N x\right| \le \varphi$ первая ветвь обращается в единицу и следовательно

$$\left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \|\Theta_N x\|_\infty \le \varphi\right\} \subset \mathcal{I}_N^{\varphi}.$$

Предположим теперь, что $u_N \ne 0$ и преобразуем первую ветвь

$$\mathbf{P}\left(\left|e_2^T\Theta_N x + e_2^T\theta_N u_N\left(1+\xi_N\right)\right| \le \varphi\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\frac{-\mathsf{sign}\left(u_N\right)\varphi - e_2^T\Theta_N x}{e_2^T\theta_N u_N} \le \xi_N \le \frac{\mathsf{sign}\left(u_N\right)\varphi - e_2^T\Theta_N x}{e_2^T\theta_N u_N\left(x\right)}\right).$$

Поскольку случайная величина ξ_N имеет гауссовский закон распределения, а также выполнено $u_N < \infty$, последнее выражение принимает значение 1 только в случае $u_N = 0$, т.е. выполнено

$$\mathcal{I}_N^{\varphi} = \mathcal{D}_N = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \|\Theta_N x\|_\infty \le \varphi\right\}.$$

Аналогичные рассуждения справедливы для всех $k = \overline{0, N}$, а множества $\mathcal{I}_k^{\varphi}$ совпадают с точностью до матриц Θ_k.

Для определения множеств $\mathcal{O}_k^{\varphi}$ воспользуемся вторым пунктом леммы 1. Для $k = N$ с учетом использованных преобразований имеем

$$\mathcal{O}_N^{\varphi} = \Big\{ x \in \mathbb{R}^2 : \quad \forall u_N : \\ \mathbf{P}\left(\max\left\{\left|e_1^T\Theta_N x\right|, \left|e_2^T\Theta_N x + e_2^T\theta_N u_N\left(1+\xi_N\right)\right|\right\} > \varphi\right) = 1 \Big\}.$$

В силу того, что на управление не наложено ограничений, $\forall u_N$ записанное ниже равенство выполнено только при $\left|e_1^T\Theta_N x\right| > \varphi$

$$\mathbf{P}\left(\max\left\{\left|e_1^T\Theta_N x\right|, \left|e_2^T\Theta_N x + e_2^T\theta_N u_N\left(1+\xi_N\right)\right|\right\} > \varphi\right) = 1.$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{O}_N^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \left|e_1^T\Theta_N x\right| > \varphi\right\}.$$

На следующих шагах поверхность уровня 0 будет пустым множеством, так как $e_1^T\theta_k \neq 0$, $e_2^T\theta_k \neq 0$, а в этом случае для всех u_k выполнено

$$\mathbf{P}\left(\left\|\Theta_k x + \theta_k u_k\left(1+\xi_k\right)\right\|_{\infty} > \varphi\right) \neq 1.$$

Утверждение доказано. $\square$

Из п. 1 следствия 1.1 получаем, что любой элемент из множества

$$U_k^{\mathcal{I}}\left(x_k\right) = \left\{u_k \in \mathbb{R} : \quad \mathbf{P}\left(\left\|\Theta_k x + \theta_k u_k\left(1+\xi_k\right)\right\|_{\infty} \leq \varphi\right) = 1\right\}$$

является оптимальным управлением при $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$. Нетрудно убедиться, что в данном случае множество $U_k^{\mathcal{I}}\left(x_k\right)$ состоит из одного элемента $u_k^{\varphi} = 0$. Таким образом на шагах $k \in \{0, ..., N-1\}$, при $x \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$ оптимальным является управление $u_k^{\varphi} = 0$, а при $x_k \in \mathcal{O}_k^{\varphi}$ – любой элемент из $\mathbb{R}$. Перейдем к исследованию свойств функции Беллмана в области $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$. В данном случае найти оптимальное управление в явном виде оказывается затруднительным.

С использованием теоремы 1.2 и утверждения 4.1 найдем нижнюю и верхнюю оценки для функции Беллмана, которые из определения имеют следующий вид

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k}\mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right) = \\ = \max_{u_k}\mathbf{P}\left(\left\|\Theta_k x + \theta_k u_k\left(1+\xi_k\right)\right\|_{\infty} \leq \varphi\right), \quad (4.2)$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k}\left\{1 - \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right)\right\} = \\ = \begin{cases} \max\limits_{u_k}\mathbf{P}\left(\left|e_1^{\mathrm{T}}\Theta_k x + e_1^{\mathrm{T}}\theta_k u_k\left(1+\xi_k\right)\right| \leq \varphi\right), & k = N-1, \\ 1, & k \in \{0, ..., N-2\}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Введем в рассмотрение функции $\varphi_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ и $\psi_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\varphi_k\left(x_k\right) = \frac{1}{2}\left(\min_{i=1,2} \frac{\varphi - e_i^T \Theta_k x_k}{e_i^T \theta_k} - \max_{i=1,2} \frac{-\varphi - e_i^T \Theta_k x_k}{e_i^T \theta_k}\right),$$

$$\psi_k\left(x_k\right) = \frac{1}{2}\left(\min_{i=1,2} \frac{\varphi - e_i^T \Theta_k x_k}{e_i^T \theta_k} + \max_{i=1,2} \frac{-\varphi - e_i^T \Theta_k x_k}{e_i^T \theta_k}\right).$$

Нетрудно видеть, что неравенства

$$\left\|\Theta_k x_k\right\|_\infty \leq \varphi, \quad \left|\psi_k\left(x_k\right)\right| \leq \varphi_k\left(x_k\right)$$

эквивалентны.

Утверждение 4.2. *Для задачи (4.1) справедливы утверждения:*

1) *Нижняя оценка для функции Беллмана в области $x \in \mathcal{B}_k^\varphi$ определяется выражением*

$$\underline{\mathsf{B}}_k^\varphi\left(x\right) = \Phi_0\left(\frac{\varphi_k\left(x\right) + \left|\psi_k\left(x\right)\right|}{\sigma\left|\underline{u}_k^\varphi\right|} - \frac{1}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\varphi_k\left(x\right) + \left|\psi_k\left(x\right)\right|}{\sigma\left|\underline{u}_k^\varphi\right|} - \frac{1}{\sigma}\right),$$

решение $\underline{u}_k^\varphi$ задачи стохастического программирования (4.2) имеет вид

$$\underline{u}_k^\varphi = \begin{cases} 0, & \left\|\Theta_k x_k\right\|_\infty \leq \varphi, \\ -2\psi_k\left(x_k\right)\left(1 + \sqrt{1 + 2\sigma^2 \ln\left(\frac{\left|\psi_k(x_k)\right| + \varphi_k(x_k)}{\left|\psi_k(x_k)\right| - \varphi_k(x_k)}\right)}\right)^{-1}, & \left\|\Theta_k x_k\right\|_\infty > \varphi. \end{cases}$$

2) *Верхняя оценка для функции Беллмана в области $x \in \mathcal{B}_k^\varphi$ определяется выражением*

$$\overline{\mathsf{B}}_k^\varphi\left(x\right) = \\ = \begin{cases} \Phi_0\left(\frac{\varphi + \left|e_1^T \Theta_k x\right|}{\sigma e_1^T \theta_k \left|\overline{u}_k^\varphi\right|} - \frac{1}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\varphi + \left|e_1^T \Theta_k x\right|}{\sigma e_1^T \theta_k \left|\overline{u}_k^\varphi\right|} - \frac{1}{\sigma}\right), & k = N-1, \\ 1, & k \in \{0, ..., N-2\}, \end{cases}$$

решение $\overline{u}_k^\varphi$ задачи стохастического программирования (4.3) имеет вид

$$\overline{u}_k^\varphi = \\ = \begin{cases} 0, & \left|e_1^T \Theta_k x_k\right| \leq \varphi, \\ -2 e_1^T \Theta_k x_k\left(e_1^T \theta_k\left(1 + \sqrt{1 + 2\sigma^2 \ln\left(\frac{\left|e_1^T \Theta_k x_k\right| + \varphi}{\left|e_1^T \Theta_k x_k\right| - \varphi}\right)}\right)\right)^{-1}, & \left|e_1^T \Theta_k x_k\right| > \varphi. \end{cases}$$

Доказательство утверждения 4.2. Преобразуем целевую функцию в правой части (4.2), принимая во внимание $e_i^T\theta_k > 0$, $i = 1, 2$

$$\mathbf{P}\left(\|\Theta_k x_k + \theta_k u_k (1+\xi_k)\|_\infty \le \varphi\right) = \mathbf{P}\left(\max_{i=1,2}\left|e_i^T\Theta_k x_k + e_i^T\theta_k u_k(1+\xi_k)\right| \le \varphi\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\max_{i=1,2}\frac{-\varphi - e_i^T\Theta_k x_k}{e_i^T\theta_k} \le u_k(1+\xi_k) \le \min_{i=1,2}\frac{\varphi - e_i^T\Theta_k x_k}{e_i^T\theta_k}\right).$$

С учетом определения функций φ_k и ψ_k продолжим преобразование целевой функции (4.2)

$$\mathbf{P}\left(\max_{i=1,2}\frac{-\varphi - e_i^T\Theta_k x_k}{e_i^T\theta_k} \le u_k(1+\xi_k) \le \min_{i=1,2}\frac{\varphi - e_i^T\Theta_k x_k}{e_i^T\theta_k}\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(-\varphi_k(x_k) - \psi_k(x_k) \le u_k(1+\xi_k) \le \varphi_k(x_k) - \psi_k(x_k)\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(|\psi_k(x_k) + u_k(1+\xi_k)| \le \varphi_k(x_k)\right).$$

Таким образом, выражение (4.2) можно записать в следующем виде

$$\underline{\mathsf{B}}_k^\varphi(x) = \arg\max_{u_k}\mathbf{P}\left(|\psi_k(x) + u_k(1+\xi_k)| \le \varphi_k(x)\right).$$

С точностью до параметров $\varphi_k(x_k)$, $\psi_k(x_k)$ целевая функция в задаче (4.2) совпадает с целевой функцией в задаче стохастического программирования для шага $k = N$ МДП. Отсюда получаем ее решение

$$\underline{u}_k^\varphi = \begin{cases} 0, & \|\Theta_k x_k\|_\infty \le \varphi, \\ -2\psi_k(x_k)\left(1 + \sqrt{1 + 2\sigma^2\ln\left(\frac{|\psi_k(x_k)| + \varphi_k(x_k)}{|\psi_k(x_k)| - \varphi_k(x_k)}\right)}\right)^{-1}, & \|\Theta_k x_k\|_\infty > \varphi. \end{cases}$$

Рассмотрим теперь выражение (4.3). С точностью до параметров e_1 и e_2 целевая функция в правой части (4.3) совпадает с целевой функцией в задаче стохастического программирования при $k = N$ МДП, откуда получаем ее решение

$$\overline{u}_k^\varphi = \begin{cases} 0, & \left|e_1^T\Theta_k x_k\right| \le \varphi, \\ -2e_1^T\Theta_k x_k\left(e_1^T\theta_k\left(1 + \sqrt{1 + 2\sigma^2\ln\left(\frac{\left|e_1^T\Theta_k x_k\right| + \varphi}{\left|e_1^T\Theta_k x_k\right| - \varphi}\right)}\right)\right)^{-1}, & \left|e_1^T\Theta_k x_k\right| > \varphi. \end{cases}$$

Для получения явных выражений для оценок функции Беллмана достаточно подставить найденные решения $\underline{u}_k^\varphi$, $\overline{u}_k^\varphi$ в целевые функции соответствующих задач стохастического программирования.

Утверждение доказано. $\square$

Покажем теперь, что управление $\underline{u}^\varphi(\cdot) = \left(\underline{\gamma}_0(\cdot), ..., \underline{\gamma}_N(\cdot)\right)$, образованное функциями $\underline{u}_k^\varphi = \underline{\gamma}_k(\cdot)$, найденными в явном виде в п. 1 утверждения 4.2, можно считать субоптимальным в определенном смысле в задаче (4.1). Для этого обратимся к п. 3 следствия 1.1, где для $x \in \mathcal{B}_k^\varphi$ доказано, что правая часть уравнения МДП удовлетворяет двустороннему неравенству (1.13). Из (1.13) справедливо

$$\mathbf{M}\left[\mathsf{B}_{k+1}^\varphi\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right)\right] \geq \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}^\varphi\right) = \\ = \mathbf{P}\left(\|\Theta_k x + \theta_k u_k\left(1 + \xi_k\right)\|_\infty \leq \varphi\right).$$

Из этого неравенства видно, что стратегия $\underline{u}_k^\varphi$, максимизирующая по определению его правую часть, косвенно максимизирует функцию $\mathbf{M}\left[\mathsf{B}_{k+1}^\varphi\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right)\right)\right]$. Оперируя данным фактом будем считать управление $\underline{u}^\varphi(\cdot)$ субоптимальным.

Таким образом, для задачи (4.1) найдено новое субоптимальное решение. Получение качественной оценки близости субоптимального управления к оптимальному (близость понимается в смысле значений вероятностного критерия) в общем случае затруднено. Тем не менее представляется возможным сравнение стратегии $\underline{u}^\varphi(\cdot)$ со среднеквадратической стратегией, найденной в [64], которая была предложена в [64] в качестве субоптимальной в задаче (4.1).

Пример 4.1. Проведем сравнение субоптимальной стратегии $\underline{u}^\varphi(\cdot)$, найденой в утверждении 4.2 с другой субоптимальной стратегией, предложенной в [64]. В [64] было показано, что управление, минимизирующее среднеквадратический критерий следующего вида

$$J\left(u(\cdot)\right) = \mathbf{M}\left[x_{N+1}^T T x_{N+1}\right], \quad T = \begin{pmatrix} \left(t_{N+1}\right)^{-2} & \left(2t_{N+1}\right)^{-1} \\ \left(2t_{N+1}\right)^{-1} & 1 \end{pmatrix}$$

является субоптимальным в задаче (4.1). Субоптимальность указанного решения обосновывается неравенством Чебышева, из которого можно получить следующую оценку

$$P_\varphi\left(u(\cdot)\right) \geq 1 - \frac{J\left(u(\cdot)\right)}{\varphi^2},$$

которая справедлива в силу следующих неравенств

$$P_{\varphi}(u(\cdot)) = \mathbf{P}\left(\|\Lambda x_{N+1}\|_{\infty} \le \varphi\right) \ge$$
$$\ge \mathbf{P}\left(x_{N+1}^T T x_{N+1} \le \varphi\right) \ge 1 - \frac{\mathbf{M}\left[x_{N+1}^T T x_{N+1}\right]}{\varphi^2} = 1 - \frac{J(u(\cdot))}{\varphi^2}.$$

При этом неравенство $\mathbf{P}\left(\|\Lambda x_{N+1}\|_{\infty} \le \varphi\right) \ge \mathbf{P}\left(x_{N+1}^T T x_{N+1} \le \varphi\right)$ является справедливым поскольку эллипс $x_{N+1}^T T x_{N+1}$ является вписанным в параллелограмм $\|\Lambda x_{N+1}\|_{\infty}$.

Таким образом, среднеквадратическая стратегия максимизирует нижнюю (Чебышевскую) оценку вероятностного критерия.

Для среднеквадратической задачи оптимальная стратегия коррекции $u^J(\cdot)$ определяется соотношениями

$$u_k^J = -L_k^{\mathtt{T}} x_k, \tag{4.4}$$

где $L_k = (L_k^1, L_k^2)^{\mathtt{T}} \in \mathbb{R}^2$ - так называемая матрица (в данном случае – вектор) обратной связи, имеющий вид

$$L_k^1 = \frac{(\lambda_{12})_{k+1}}{\Gamma_k}, \quad L_k^2 = \frac{t_k (\lambda_{12})_{k+1} + (\lambda_{22})_{k+1}}{\Gamma_k},$$

с коэффициентами, удовлетворяющими рекуррентным соотношениям

$$\Gamma_k = \left(1+\sigma^2\right)(\lambda_{22})_{k+1},$$
$$(\lambda_{11})_k = (\lambda_{11})_{k+1} - \Gamma_k \left((\lambda_{12})_{k+1}\right)^2,$$
$$(\lambda_{12})_k = t_k (\lambda_{11})_{k+1} + (\lambda_{12})_{k+1},$$
$$(\lambda_{22})_k = \left(L_k^1\right)^2 (\lambda_{11})_{k+1} + 2t_k (\lambda_{12})_{k+1} + (\lambda_{22})_{k+1} - \Gamma_k \left(L_k^2\right)^2,$$

с граничными условиями

$$(\lambda_{11})_{N+1} = 2,\ (\lambda_{12})_{N+1} = t_{N+1},\ (\lambda_{22})_{N+1} = (t_{N+1})^2.$$

Оптимальное значение среднеквадратического критерия определяется выражением [64]

$$J\left(u^J(\cdot)\right) = (\lambda_{11})_0 \left(X^1\right)^2 + 2(\lambda_{12})_0 X^1 X^2 + (\lambda_{22})_0 \left(X^2\right)^2.$$

Из выражения (4.4) видно, что среднеквадратическая стратегия является линейной по состоянию.

Проведем несколько численных экспериментов, в рамках которых сравним значения вероятностного и среднеквадратического критериев при стратегиях $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ и $u^{J}(\cdot)$. Будем варьировать параметр σ для более детальной оценки влияния случайного возмущения ξ_k. Для получения численных оценок критериев используется метод Монте-Карло с объемом выборки 150000. Числовые значения параметров задачи при разных экспериментах занесены в таблицу 4.1. Результаты расчетов для

Таблица 4.1. Числовые значения параметров системы

№ эксперимента	N	φ	t_{N+1}	t_k	μ	K
a)	6	$0,95$	60	1	$(12,9 \quad 41,5)$	$\operatorname{diag}[0,1 \quad 0,01]$
b)	15	$0,05$	60	2	$(92 \quad 112)$	$\operatorname{diag}[0,1 \quad 0,01]$

вероятностного критерия занесены в таблицы 4.2 (эксперимент a)) и 4.3 (эксперимент b)) а для среднеквадратического критерия – в таблицы 4.4 (эксперимент a)) и 4.5 (эксперимент b)).

Таблица 4.2. Значения вероятностного критерия в эксперименте а) при разном управлении

σ	$0,1$	$0,4$	$0,7$	$1,0$	$1,3$	$1,6$	$1,9$	$2,2$	$2,5$
$P_{\varphi}(\underline{u}^{\varphi}(\cdot))$	$0,99$	$0,99$	$0,94$	$0,88$	$0,83$	$0,79$	$0,72$	$0,57$	$0,49$
$P_{\varphi}(u^{J}(\cdot))$	$0,97$	$0,92$	$0,87$	$0,62$	$0,51$	$0,42$	$0,34$	$0,19$	$0,09$

Таблица 4.3. Значения вероятностного критерия в эксперименте б) при разном управлении

σ	$0,1$	$0,4$	$0,7$	$1,0$	$1,3$	$1,6$	$1,9$	$2,2$	$2,5$
$P_{\varphi}(\underline{u}^{\varphi}(\cdot))$	$0,99$	$0,99$	$0,91$	$0,89$	$0,84$	$0,75$	$0,72$	$0,61$	$0,5$
$P_{\varphi}(u^{J}(\cdot))$	$0,94$	$0,91$	$0,75$	$0,7$	$0,53$	$0,44$	$0,41$	$0,32$	$0,21$

Таблица 4.4. Значения среднеквадратического критерия в эксперименте а) при разном управлении

σ	$0,1$	$0,4$	$0,7$	$1,0$	$1,3$	$1,6$	$1,9$	$2,2$	$2,5$
$J\left(\underline{u}^{\varphi}(\cdot)\right)$	$0,00$	$0,11$	$0,23$	$1,9$	$6,2$	$10,2$	$16,1$	$22,9$	$25,3$
$J\left(u^{J}(\cdot)\right)$	$0,01$	$0,15$	$0,9$	$1,7$	$3,8$	$7,2$	$12,6$	$14,1$	$17,2$

Таблица 4.5. Значения среднеквадратического критерия в эксперименте б) при разном управлении

σ	$0,1$	$0,4$	$0,7$	$1,0$	$1,3$	$1,6$	$1,9$	$2,2$	$2,5$
$J\left(\underline{u}^{\varphi}(\cdot)\right)$	$0,21$	$0,96$	$1,2$	$1,9$	$5,2$	$8,4$	$12,1$	$17,9$	$23,2$
$J\left(u^{J}(\cdot)\right)$	$0,01$	$0,06$	$0,37$	$0,91$	$2,9$	$4,2$	$6,8$	$9,2$	$14,3$

Из эксперимента а) видно, что управление $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ обеспечивает более высокую оценку значения вероятностного критерия нежели среднеквадратическое управление $u^{J}(\cdot)$, причём при разница становится существенной при относительно малых и относительно больших значений параметра σ.
Из эксперимента б) наблюдается схожий эффект: при малых и больших значениях параметра σ оценка значений вероятностного критерия при субоптимальном управлении $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ становится существенно выше, чем при среднеквадратической управлении.

Пример 4.2. Рассмотрим так называемый случай “двухимпульсной коррекции” $N = 1$. В данном примере удается построить численную оценку “близости” управления $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ к оптимальному, при этом близость понимается в смысле близости значений вероятностного критерия при оптимальном управлении и управлении $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$. Оптимальное управление не известно, однако известны двусторонние оценки для оптимального значения вероятностного критерия.

С использованием следствия 1.2 и утверждения 4.2 построим двустороннюю оценку для функции оптимального значения вероятностного критерия. Для этого найдем функции $\underline{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ и $\overline{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, которые по определению имеют вид

$$\underline{F}(\varphi, x) = \underline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(x) = \\ = \Phi_0\left(\frac{\varphi_0(\varphi, x) + |\psi_0(\varphi, x)|}{\sigma\,|\underline{u}_0^{\varphi}(\varphi, x)|} - \frac{1}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\varphi_0(\varphi, x) + |\psi_k(\varphi, x)|}{\sigma\,|\underline{u}_0^{\varphi}(\varphi, x)|} - \frac{1}{\sigma}\right),$$

$$\overline{F}(\varphi, x) = \overline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(x) = \ = \Phi_0\left(\frac{\varphi + \left|e_1^T\Theta_0 x\right|}{\sigma e_1^T\theta_0\,|\overline{u}_k^{\varphi}(\varphi, x)|} - \frac{1}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\varphi + \left|e_1^T\Theta_0 x\right|}{\sigma e_1^T\theta_0\,|\overline{u}_0^{\varphi}(\varphi, x)|} - \frac{1}{\sigma}\right).$$

Выше указана зависимость функций φ_0, ψ_0, $\underline{u}_0^{\varphi}$, $\overline{u}_0^{\varphi}$ от параметров φ и x.

По условию задачи $X \sim \mathcal{N}(\mu, K)$ и, следовательно, воспользовавшись п. 2 следствия 1.2 получаем, что функция оптимального значения вероятностного критерия

$$F(\varphi) = \mathbf{M}\left[\mathsf{B}_0^{\varphi}(X)\right]$$

удовлетворяет двустороннему неравенству

$$\mathbf{M}\left[\underline{F}(\varphi, X)\right] \leq F(\varphi) \leq \mathbf{M}\left[\overline{F}(\varphi, X)\right].$$

Покажем теперь, что значение вероятностного критерия $P_{\varphi}(\underline{u}^{\varphi}(\cdot))$ при управлении $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ также ограничена снизу функцией $\underline{F}(\varphi)$ при любом φ. Учитывая, что $N = 1$ запишем

$$P_{\varphi}(\underline{u}^{\varphi}(\cdot)) = \mathbf{P}\left(\max\left\{\left|\underline{x}_{N+1}^1\right|,\ \left|\underline{x}_{N+1}^1 + t_{N+1}\underline{x}_{N+1}^2\right|\right\} \leq \varphi\right),$$

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1}^1 = \underline{x}_k^1 + t_k\underline{x}_k^2, \\ \underline{x}_{k+1}^2 = \underline{x}_k^2 + t_k\underline{u}_k^{\varphi}(1 + \xi_k), \qquad k = \overline{0, N}, \\ \underline{x}_0 = X, \end{cases}$$

где $\{\underline{x}_k\}_{k=0}^{N+1}$ - случайный процесс, определяющий траекторию системы (4.1), замкнутую управлением $\underline{u}_k^{\varphi}$ (п. 1 утверждения 4.2).

Пусть $k = 1$. Введем в рассмотрение гипотезы

$$\left\{\|\Theta_k\underline{x}_k\|_{\infty} \leq \varphi\right\}, \quad \left\{\|\Theta_k\underline{x}_k\|_{\infty} > \varphi\right\},$$

образующие полную группу несовместных событий. Заметим, что первая гипотеза соответствует $\underline{x}_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$, где оптимальным управлением является $u_k^{\varphi} = 0$. Используя формулу полной вероятности, получаем

$$P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right) = \mathbf{P}\left(\max\left\{\left|\underline{x}^1_{N+1}\right|,\ \left|\underline{x}^1_{N+1} + t_{N+1}\underline{x}^2_{N+1}\right|\right\} \le \varphi\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\|\Theta_k\underline{x}_k\|_\infty \le \varphi\right)\mathbf{P}\left(\|\Theta_k\underline{x}_k + \theta_k\underline{u}^\varphi_k\left(1+\xi_k\right)\|_\infty \le \varphi\Big|\ \|\Theta_k\underline{x}_k\|_\infty \le \varphi\right) +$$
$$+ \mathbf{P}\left(\|\Theta_k\underline{x}_k\|_\infty > \varphi\right)\mathbf{P}\left(\|\Theta_k\underline{x}_k + \theta_k\underline{u}^\varphi_k\left(1+\xi_k\right)\|_\infty \le \varphi\Big|\ \|\Theta_k\underline{x}_k\|_\infty > \varphi\right) =$$
$$= \mathbf{P}\left(\|\Theta_k\underline{x}_k\|_\infty \le \varphi\right) +$$
$$+ \mathbf{P}\left(\|\Theta_k\underline{x}_k\|_\infty > \varphi\right)\mathbf{P}\left(\|\Theta_k\underline{x}_k + \theta_k\underline{u}^\varphi_k\left(1+\xi_k\right)\|_\infty \le \varphi\Big|\ \|\Theta_k\underline{x}_k\|_\infty > \varphi\right).$$

Пусть теперь $k = 0$. Для первого слагаемого в последнем выражении выполнено равенство

$$\mathbf{P}\left(\left\|\Theta_{k+1}\underline{x}_{k+1}\right\|_\infty \le \varphi\right) = \mathbf{P}\left(\|\Theta_0 X + \theta_0\underline{u}^\varphi_0\left(1+\xi_0\right)\|_\infty \le \varphi\right).$$

Из определения $\underline{u}^\varphi_k$ и функции $\underline{F}\left(\varphi, x\right)$ (см. следствие 1.2) преобразуем последнее равенство

$$\mathbf{P}\left(\left\|\Theta_{k+1}\underline{x}_{k+1}\right\|_\infty \le \varphi\right) = \mathbf{P}\left(\|\Theta_0 X + \theta_0\underline{u}^\varphi_0\left(1+\xi_0\right)\|_\infty \le \varphi\right) =$$
$$= \max_{u_k}\mathbf{P}\left(\|\Theta_0 X + \theta_0 u_0\left(1+\xi_0\right)\|_\infty \le \varphi\right) = \mathbf{M}\left[\underline{F}\left(\varphi, X\right)\right],$$

откуда окончательно получаем

$$P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right) = \mathbf{M}\left[\underline{F}\left(\varphi, X\right)\right] +$$
$$+ \mathbf{P}\left(\|\Theta_1\underline{x}_1\|_\infty > \varphi\right)\mathbf{P}\left(\|\Theta_1\underline{x}_1 + \theta_1\underline{u}^\varphi_1\left(1+\xi_1\right)\|_\infty \le \varphi\Big|\ \|\Theta_1\underline{x}_1\|_\infty > \varphi\right),$$

Таким образом, для значения вероятностного критерия при управлении $\underline{u}^\varphi(\cdot)$ и любом φ выполнено неравенство

$$\mathbf{M}\left[\underline{F}\left(\varphi, X\right)\right] \le P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right) \le \mathbf{M}\left[\overline{F}\left(\varphi, X\right)\right].$$

Рассмотрим функцию

$$\Delta\left(\varphi\right) = \mathbf{M}\left[\overline{F}\left(\varphi, X\right)\right] - \mathbf{M}\left[\underline{F}\left(\varphi, X\right)\right].$$

Проведем расчеты значений функции $\Delta\left(\varphi\right)$. Зададимся следующими численными значениями параметров системы (таблица 2.6) Результаты расчетов $\Delta\left(\varphi\right)$ приведены в таблице 4.7. По результатам расчётов заключаем, что разница между верхней

Таблица 4.6. Числовые значения параметров системы

N	t_{N+1}	t_k	μ	K	σ
1	$0,95$	1	$(0,9 \quad 4,2)$	$\mathrm{diag}\,[0,01 \quad 0,03]$	$0,7$

Таблица 4.7. Значения функции $\Delta(\varphi)$

φ	$0,9$	$0,7$	$0,5$	$0,1$	$0,05$
$\Delta_k(\varphi)$	$0,0002$	$0,0000$	$0,0004$	$0,0009$	$0,0009$

и нижней оценок функции оптимального значения вероятностного критерия мала, что говорит о высокой точности двусторонней оценки в “двухимпульсной” задаче коррекции, и, следовательно, близости значений функционала вероятности при субоптимальном управлении $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ к оптимальным.

4.3. Импульсная коррекция с равномерными ошибками управления

Рассмотрим теперь случай равномерного распределения мультипликативной ошибки управления ξ_k.

В отношении задачи (4.1) введем дополнительные предположения

1) $\xi_k \sim \mathcal{R}[-\varepsilon_k, \varepsilon_k]$ – случайные ошибки реализации управляющего воздействия имеют равномерный закон распределения, где $\varepsilon_k < 1$,

2) $U_k = \mathbb{R}$ – на управление не наложено геометрических ограничений.

Перейдем к решению задачи (4.1). Определим матрицы

$$\Theta_k = \begin{pmatrix} 1 & \sum_{i=k}^{N} t_i \\ 1 & \sum_{i=k}^{N} t_i + t_{N+1} \end{pmatrix}, \quad \theta_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ t_N t_{N+1} \end{pmatrix}, & k = N, \\ \begin{pmatrix} t_k \sum_{i=k+1}^{N} t_i \\ t_k \left(\sum_{i=k+1}^{N} t_i + t_{N+1} \right) \end{pmatrix}, & k = \overline{0, N-1}. \end{cases}$$

В соответствии с МДП, описанным в разделе 1.2 получаем выражение для функции Беллмана при $k = N$

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_N^{\varphi}(x) &= \max_{u_N} \mathbf{M}\left[\mathsf{B}_{N+1}^{\varphi}\left(f_N\left(x, u_N, \xi_N\right)\right)\right] = \\ &= \max_{u_N} \mathbf{M}\left[\mathbf{I}_{(-\infty,\varphi]}\left(\Phi\left(f_N\left(x, u_N, \xi_N\right)\right)\right)\right] = \\ &= \max_{u_N} \mathbf{P}\left(\max\left\{\left|e_1^T \Theta_N x\right|,\ \left|e_2^T \Theta_N x + e_2^T \theta_N u_N\left(1+\xi_N\right)\right|\right\} \le \varphi\right) = \\ &= \begin{cases} \max\limits_{u_N} \mathbf{P}\left(\left|e_2^T \Theta_N x + e_2^T \theta_N u_N\left(1+\xi_N\right)\right| \le \varphi\right), & \left|e_1^T \Theta_N x\right| \le \varphi, \\ 0 & \left|e_1^T \Theta_N x\right| > \varphi. \end{cases}\end{aligned}$$

Задача стохастического программирования в первой ветви правой части полученного соотношения с точностью до параметров совпадает с задачей (3.8) раздела 3.3. Используя решение задачи (3.8), получаем решение настоящей задачи

$$u_N^{\varphi} = \begin{cases} -\mathsf{sign}\left(\frac{e_2^T \Theta_N x_N}{e_2^T \theta_N}\right) \frac{\varphi + \left|e_2^T \Theta_N x_N\right|}{e_2^T \theta_N (1+\varepsilon_N)}, & \left|e_1^T \Theta_N x\right| \le \varphi,\ \left|e_2^T \Theta_N x\right| \varepsilon_N > \varphi \\ \text{любое из } U_N^{\mathcal{I}}\left(x_N\right), & \left|e_1^T \Theta_N x\right| \le \varphi,\ \left|e_2^T \Theta_N x\right| \varepsilon_N \le \varphi, \\ \text{любое из } \mathbb{R}, & \left|e_1^T \Theta_N x\right| > \varphi \end{cases} \tag{4.5}$$

и функцию Беллмана при $k = N$

$$\mathsf{B}_N^{\varphi}(x) = \begin{cases} 1, & \left|e_1^T \Theta_N x\right| \le \varphi,\ \left|e_2^T \Theta_N x\right| \varepsilon_N \le \varphi, \\ \frac{\varphi}{\varphi + \left|e_2^T \Theta_N x\right|} \frac{1+\varepsilon_N}{\varepsilon_N}, & \left|e_1^T \Theta_N x\right| \le \varphi,\ \left|e_2^T \Theta_N x\right| \varepsilon_N > \varphi, \\ 0 & \left|e_1^T \Theta_N x\right| > \varphi. \end{cases} \tag{4.6}$$

Из выражения (4.6) видно, что при $k = N$ поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана при определяются выражениями

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_N^{\varphi} &= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \max\left\{\left|e_1^T \Theta_N x\right|,\ \left|e_2^T \Theta_N x\right| \varepsilon_N\right\} \le \varphi\right\}, \\ \mathcal{O}_N^{\varphi} &= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \left|e_1^T \Theta_N x\right| > \varphi\right\}.\end{aligned}$$

Дальнейшее использование МДП ввиду трудностей вычисления $\mathbf{M}\left[\mathsf{B}_N^{\varphi}\left(f_{N-1}\left(x, u_{N-1}, \xi_{N-1}\right)\right)\right]$. Попытка прямого интегрирования функции $\mathsf{B}_N^{\varphi}\left(f_{N-1}\left(x, u_{N-1}, \xi_{N-1}\right)\right)$ была предпринята в [9], в результате чего была получена функция, трудная для анализа.

Воспользуемся результатами первой главы для поиска изобелл, двусторонних оценок функции Беллмана и субоптимального управления. Оказывается, что в данной постановке отыскание изобелл оказывается нетривиальной задачей. Для начала рассмотрим случай $k = N-1$.

Утверждение 4.3. *Для $k = N-1$ справедливы утверждения:*

1) Поверхность уровня 1 функции Беллмана определяется выражением

$$\mathcal{I}_{N-1}^{\varphi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \quad \left| c_{N-1}(x) \right| \varepsilon_{N-1} \le r_{N-1}(x) \right\}. \tag{4.7}$$

2) Поверхность уровня 0 является пустым множеством $\mathcal{O}_{N-1}^{\varphi} = \varnothing$.

3) Любой элемент из множества $U_{N-1}^{\mathcal{I}}(x_{N-1})$

$$U_{N-1}^{\mathcal{I}}(x_{N-1}) = \\ = \left[\max\left\{ 0,\ \frac{-r_{N-1}(x_{N-1}) + \left| c_{N-1}(x_{N-1}) \right|}{1-\varepsilon_{N-1}} \right\},\ \frac{r_{N-1}(x_{N-1}) + \left| c_{N-1}(x_{N-1}) \right|}{1+\varepsilon_{N-1}} \right]$$

является оптимальным управлением при $x \in \mathcal{I}_{N-1}^{\varphi}$,

где функции $c_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $r_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ определяются выражениями

$$c_k(x) = \frac{1}{2}\left(\min_{i=\overline{1,2}} \overline{\psi}_k^i(x) + \max_{i=\overline{1,2}} \underline{\psi}_k^i(x) \right), \quad r_k(x) = \frac{1}{2}\left(\min_{i=\overline{1,2}} \overline{\psi}_k^i(x) - \max_{i=\overline{1,2}} \underline{\psi}_k^i(x) \right),$$

$$\underline{\psi}_k^1(x) = \frac{-\varphi - e_1^T \Theta_k x}{e_1^T \theta_k}, \quad \underline{\psi}_k^2(x) = \frac{-\varphi \varepsilon_{k+1}^{-1} - e_2^T \Theta_k x}{e_2^T \theta_k},$$
$$\overline{\psi}_k^1(x) = \frac{\varphi - e_1^T \Theta_k x}{e_1^T \theta_k}, \quad \overline{\psi}_k^2(x) = \frac{\varphi \varepsilon_{k+1}^{-1} - e_2^T \Theta_k x}{e_2^T \theta_k}.$$

Доказательство утверждения 4.3. В рамках доказательства утверждения для краткости примем $k = N-1$. С использованием леммы 1.1 получим выражение для поверхности уровня 1 функции Беллмана

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists u_k \in U_k : \quad \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi} \right) = 1 \right\} = \\ = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \quad \exists u_k \in \mathbb{R} : \quad \mathbf{P}\left(\max\left\{ \begin{array}{c} \left| e_1^T \Theta_k x + e_1^T \theta_k u_k (1+\xi_k) \right|, \\ \left| e_2^T \Theta_k x + e_2^T \theta_k u_k (1+\xi_k) \right| \varepsilon_{k+1} \end{array} \right\} \le \varphi \right) = 1 \right\} = \\ = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \quad \exists u_k \in \mathbb{R} : \quad \mathbf{P}\left(\left\{ \begin{array}{c} \frac{-\varphi - e_1^T \Theta_k x}{e_1^T \theta_k} \le u_k (1+\xi_k) \le \frac{\varphi - e_1^T \Theta_k x}{e_1^T \theta_k} \\ \frac{-\varphi \varepsilon_{k+1}^{-1} - e_2^T \Theta_k x}{e_2^T \theta_k} \le u_k (1+\xi_k) \le \frac{\varphi \varepsilon_{k+1}^{-1} - e_2^T \Theta_k x}{e_2^T \theta_k} \end{array} \right\} \right) = 1 \right\}.$$

В правой части последнего выражения под фигурными скобками понимается вероятность одновременного выполнения событий. Введем в рассмотрение функции $\underline{\psi}_k^1 : \mathbb{R}^2 :\rightarrow \mathbb{R}$, $\underline{\psi}_k^2 : \mathbb{R}^2 :\rightarrow \mathbb{R}$, $\overline{\psi}_k^1 : \mathbb{R}^2 :\rightarrow \mathbb{R}$, $\overline{\psi}_k^2 : \mathbb{R}^2 :\rightarrow \mathbb{R}$

$$\underline{\psi}_k^1(x) = \frac{-\varphi - e_1^T\Theta_k x}{e_1^T\theta_k}, \quad \underline{\psi}_k^2(x) = \frac{-\varphi\varepsilon_{k+1}^{-1} - e_2^T\Theta_k x}{e_2^T\theta_k},$$
$$\overline{\psi}_k^1(x) = \frac{\varphi - e_1^T\Theta_k x}{e_1^T\theta_k}, \quad \overline{\psi}_k^2(x) = \frac{\varphi\varepsilon_{k+1}^{-1} - e_2^T\Theta_k x}{e_2^T\theta_k},$$

и функции $c_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $r_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$c_k(x) = \frac{1}{2}\left(\min_{i=\overline{1,2}} \overline{\psi}_k^i(x) + \max_{i=\overline{1,2}} \underline{\psi}_k^i(x)\right),$$
$$r_k(x) = \frac{1}{2}\left(\min_{i=\overline{1,2}} \overline{\psi}_k^i(x) - \max_{i=\overline{1,2}} \underline{\psi}_k^i(x)\right).$$

Нетрудно видеть, что введенные функции удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} r_k(x) - c_k(x) = \min\limits_{i=\overline{1,2}} \overline{\psi}_k^i(x), \\ -r_k(x) - c_k(x) = \max\limits_{i=\overline{1,2}} \underline{\psi}_k^i(x). \end{cases} \tag{4.8}$$

По своему смыслу функция c_k представляет собой центр, а функция r_k – радиус отрезка $\left[\max_{i=\overline{1,2}} \underline{\psi}_k^i(x),\ \min_{i=\overline{1,2}} \overline{\psi}_k^i(x)\right]$. С помощью введенных конструкций преобразуем выражение для поверхности уровня 1 функции Беллмана при $k = N-1$

$$\mathcal{I}_k^\varphi =$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \exists u_k \in \mathbb{R} : \quad \mathbf{P}\left(\left\{\begin{matrix} \frac{-\varphi - e_1^T\Theta_k x}{e_1^T\theta_k} \le u_k(1+\xi_k) \le \frac{\varphi - e_1^T\Theta_k x}{e_1^T\theta_k} \\ \frac{-\varphi\varepsilon_{k+1}^{-1} - e_2^T\Theta_k x}{e_2^T\theta_k} \le u_k(1+\xi_k) \le \frac{\varphi\varepsilon_{k+1}^{-1} - e_2^T\Theta_k x}{e_2^T\theta_k} \end{matrix}\right\}\right) = 1\right\} =$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \exists u_k \in \mathbb{R} : \quad \mathbf{P}\left(\max_{i=\overline{1,2}} \underline{\psi}_k^i(x) \le u_k(1+\xi_k) \le \min_{i=\overline{1,2}} \overline{\psi}_k^i(x)\right) = 1\right\} =$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \exists u_k \in \mathbb{R} : \quad \mathbf{P}\left(-r_k(x) - c_k(x) \le u_k(1+\xi_k) \le r_k(x) - c_k(x)\right) = 1\right\} =$$
$$= \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \quad \exists u_k \in \mathbb{R} : \quad \mathbf{P}\left(|c_k(x) + u_k(1+\xi_k)| \le r_k(x)\right) = 1\right\}.$$

Используя результаты раздела 3.3 получаем, что равенство

$$\mathbf{P}\left(|c_k(x) + u_k(1+\xi_k)| \le r_k(x)\right) = 1$$

выполнено только для таких x и u_k, что

$$|c_k(x)|\,\varepsilon_k \le r_k(x), \quad u_k \in \left[\max\left\{0,\ \frac{-r_k(x) + |c_k(x)|}{1-\varepsilon_k}\right\},\ \frac{r_k(x) + |c_k(x)|}{1+\varepsilon_k}\right].$$

Отсюда получаем явное выражение для поверхности уровня 1 функции Беллмана при $k = N-1$

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \quad |c_k(x)| \, \varepsilon_k \le r_k(x) \right\},$$

выражение для множества $U_k^{\mathcal{I}}(x_k)$

$$U_k^{\mathcal{I}}(x_k) = \left[\max\left\{ 0, \ \frac{-r_k(x) + |c_k(x)|}{1-\varepsilon_k} \right\}, \ \frac{r_k(x) + |c_k(x)|}{1+\varepsilon_k} \right].$$

Утверждение доказано. □

Выпишем выражения для нижней и верхней оценок функции Беллмана

$$\underline{\mathsf{B}}_{N-1}^{\varphi}(x) = \sup_{u_{N-1} \in U_{N-1}} \mathbf{P}\left(f_{N-1}(x, u_{N-1}, \xi_{N-1}) \in \mathcal{I}_{N-1}^{\varphi} \right) =$$
$$= \max_{u_{N-1}} \mathbf{P}\left(|c_{N-1}(x) + u_{N-1}(1+\xi_{N-1})| \le r_{N-1}(x) \right), \quad (4.9)$$

$$\overline{\mathsf{B}}_{N-1}^{\varphi}(x) = \sup_{u_{N-1} \in U_{N-1}} \left\{ 1 - \mathbf{P}\left(f_{N-1}(x, u_{N-1}, \xi_{N-1}) \in \mathcal{I}_{N-1}^{\varphi} \right) \right\} =$$
$$= \max_{u_{N-1}} \mathbf{P}\left(\left| e_1^T \Theta_{N-1} x + e_1^T \theta_{N-1} u_{N-1}(1+\xi_{N-1}) \right| \le \varphi \right) \quad (4.10)$$

Задачи стохастического программирования (4.9), (4.10) с точностью до параметров $c_{N-1}(x)$, $r_{N-1}(x)$, $e^T \Theta_{N-1} x$, $e_1^T \theta_{N-1}$, φ совпадают с (3.8), для котрой в утверждении 3.5 было найдено аналитическое решение. По аналогии с утверждением 3.5 найдем решение задач (4.9), (4.10)

Утверждение 4.4. *Для $k = N-1$ справедливы утверждения:*

1) Нижняя оценка для функции Беллмана определяется выражением

$$\underline{\mathsf{B}}_{N-1}^{\varphi}(x) = \min\left\{ 1, \quad \frac{r_{N-1}(x)}{r_{N-1}(x) + |c_{N-1}(x)|} \frac{1+\varepsilon_{N-1}}{\varepsilon_{N-1}} \right\} \quad (4.11)$$

решение $\underline{u}_{N-1}^{\varphi}$ задачи стохастического программирования (4.2) имеет вид

$$\underline{u}_{N-1}^{\varphi} =$$
$$= \begin{cases} -\mathsf{sign}\left(c_{N-1}(x_{N-1})\right) \frac{r_{N-1}(x_{N-1}) + |c_{N-1}(x_{N-1})|}{1+\varepsilon_{N-1}}, & |c_{N-1}(x_{N-1})| > \frac{r_{N-1}(x_{N-1})}{\varepsilon_{N-1}} \\ \text{любое из } U_{N-1}^{\mathcal{I}}(x_{N-1}), & |c_{N-1}(x_{N-1})| \le \frac{r_{N-1}(x_{N-1})}{\varepsilon_{N-1}}, \end{cases}$$
$$(4.12)$$

2) Верхняя оценка для функции Беллмана в области $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ определяется выражением

$$\overline{\mathsf{B}}_{N-1}^{\varphi}(x) = \min\left\{1, \quad \frac{\varphi}{\varphi + |e_1^T \Theta_{N-1} x|} \frac{1+\varepsilon_{N-1}}{\varepsilon_{N-1}}\right\} \tag{4.13}$$

решение $\underline{u}_{N-1}^{\varphi}$ задачи стохастического программирования (4.2) имеет вид

$$\overline{u}_{N-1}^{\varphi} =$$
$$= \begin{cases} -\mathsf{sign}\left(\frac{e_1^T \Theta_{N-1} x_{N-1}}{e_1^T \theta_{N-1}}\right) \frac{\varphi + \left|e_1^T \Theta N-1 x_{N-1}\right|}{1+\varepsilon_{N-1}}, & \left|e_1^T \Theta_{N-1} x_{N-1}\right| \varepsilon_{N-1} > \varphi, \\ \text{любое из } U_{N-1}^{\mathcal{O}}(x_{N-1}), & \left|e_1^T \Theta_{N-1} x_{N-1}\right| \varepsilon_{N-1} \le \varphi, \end{cases} \tag{4.14}$$

где множество $U_{N-1}^{\mathcal{O}}(x_{N-1})$ имеет вид

$$U_{N-1}^{\mathcal{O}}(x_{N-1}) = \left[\max\left\{0, \ \frac{-\varphi + \left|e_1^T \Theta_{N-1} x_{N-1}\right|}{1-\varepsilon_{N-1}}\right\}, \ \frac{\varphi + \left|e_1^T \Theta_{N-1} x_{N-1}\right|}{1+\varepsilon_{N-1}}\right].$$

Воспользуемся утверждением 4.4 для получения условий оптимальности управления $\underline{u}^{\varphi}(\cdot)$ для случая “двухимпульсной коррекции” $N = 1$. Предположим, что $N = 1$ и $X \in \mathbb{R}^2$ – детерминированный вектор. Из теоремы 1.2 и утверждения 4.4 вытекает, что из равенства $\underline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(X) = \overline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(X)$ следует $\mathsf{B}_0^{\varphi}(X) = \underline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(X) = \overline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(X)$. Так как $\underline{u}_k^{\varphi}$ является оптимальным управлением при $k = N = 1$, то из указанного равенства получается, что $\underline{u}_k^{\varphi}$ является оптимальным управлением в том числе для $k = N-1 = 0$. Получим теперь условия, при которых нижняя оценка функции Беллмана равна верхней. Приравнивая правые части (4.11) (4.13) при $k = 0$, получаем, что указанные условия выполнены тогда и только тогда, когда выполнены неравенства

$$\frac{-\varphi\varepsilon_1^{-1} - e_2^T \Theta_0 X}{e_2^T \theta_0} \le \frac{-\varphi - e_1^T \Theta_0 X}{e_1^T \theta_0}, \quad \frac{\varphi - e_1^T \Theta_0 X}{e_1^T \theta_0} \le \frac{\varphi\varepsilon_1^{-1} - e_2^T \Theta_0 X}{e_2^T \theta_0}, \tag{4.15}$$

при этом функции $r_0(X)$, $c_0(X)$ принимают следующий вид

$$r_0(X) = \varphi, \quad c_0(X) = \left|e_1^T \Theta_0 X\right|.$$

Аналогичные условия можно получить для случая, когда X является случайным вектором с известным распределением $\mathbf{P}_X$. Для этого надо потребовать, чтобы равенство нижней и верхней оценок функции Беллмана выполнялось с вероятностью единица. Сами условия принимают следующий вид

$$\mathbf{P}_X\left(\left\{\frac{-\varphi\varepsilon_1^{-1} - e_2^T \Theta_0 X}{e_2^T \theta_0} \le \frac{-\varphi - e_1^T \Theta_0 X}{e_1^T \theta_0}\right\} \cap \left\{\frac{\varphi - e_1^T \Theta_0 X}{e_1^T \theta_0} \le \frac{\varphi\varepsilon_1^{-1} - e_2^T \Theta_0 X}{e_2^T \theta_0}\right\}\right) = 1.$$

4.4. Выводы по главе 4

1. Для задачи оптимального управления двумерной билинейной дискретной стохастической системой со скалярным неограниченным управлением и гауссовской ошибкой исполнения управляющего воздействия найдены в явном виде поверхности уровня 1 и 0, двусторонние оценки функции Беллмана, двусторонняя оценка для функции оптимального значения вероятностного критерия.

2. Для задачи п. 1 найдено субоптимальное управление, являющееся оптимальным для состояний, принадлежащих поверхностям уровня 1 и 0, случая одного шага по времени и максимизирующее нижнюю оценку функции правой части уравнения метода динамического программирования в остальных случаях.

3. Получена численная оценка точности субоптимального управления для случая двух шагов по времени и проведено сравнение найденного субоптимального управления со среднеквадратическим.

4. Для задачи п. 1 и случая равномерного распределения мультипликативной ошибки реализации управляющего воздействия и двух шагов по времени найдены в явном виде поверхности уровня 1 и 0, двусторонние оценки функции Беллмана, двусторонняя оценка для функции оптимального значения вероятностного критерия.

5. Для задачи п. 4 найдено субоптимальное управление, являющееся оптимальным для состояний, принадлежащих поверхностям уровня 1 и 0, случая одного шага по времени и максимизирующее нижнюю оценку функции правой части уравнения метода динамического программирования в остальных случаях.

6. Для случая двух шагов по времени получены условия оптимальности управления п. 5, зависящие от начальных условий.

Основные результаты главы опубликованы в [3, 5]

Заключение

В диссертационной работе рассмотрены задачи оптимального управления марковскими дискретными стохастическими системами с вероятностным терминальным критерием.

В первой главе рассмотрена задача оптимального управления дискретной стохастической марковской системой общего вида. Получены соотношения для поверхностей уровня 1 и 0 функции Беллмана, не зависящие от самой функции Беллмана. Предложено модифицированное уравнение Беллмана и выражения для оптимального управления для состояний, принадлежащих поверхностям уровня 1 и 0 функции Беллмана. Найдены двусторонние оценки функции правой части уравнения МДП, двусторонние оценки функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. Нижняя оценка представляет собой максимальную вероятность попадания траекторией системы на поверхность уровня 1 функции Беллмана на следующем шаге дискретного времени. Верхняя оценка представляет собой максимальную вероятность непопадания траекторией системы на поверхность уровня 0 функции Беллмана на следующем шаге дискретного времени.

Во второй главе рассмотрены модельные задачи оптимального управления с вероятностным критерием. Исследована модель оптимального управления линейной дискретной стохастической системой с критерием в форме вероятности попадания первой координаты вектора состояния в заданную окрестность нуля за время, не превышающее фиксированную величину. Для указанной задачи найдены в явном виде поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана и оптимальное управление, представляющее собой линейную функцию состояния системы. Получены условия, при которых найденное управление является оптимальным по квантильному критерию. С помощью этих результатов найдено аналитическое решение задач оптимального управления возмущенным движением материальной точки. Также во второй главе рассмотрена модель оптимального капиталовложения с учетом риска. Для постановки с вероятностным критерием найдены в явном виде двусторонние оценки функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия. С помощью нижней оценки функции правой части уравнения МДП приведено обоснование субоптимальности “рисковой” стратегии. Получены условия асимптотической оптимальности рисковой стратегии. Показано, что данными условиями обладает рисковая стратегия.

В третьей главе рассмотрена задача оптимального управления билинейной дискретной стохастической системой с критерием в форме вероятности попадания линейной комбинации вектора состояния в заданную окрестность нуля в терминальный момент времени. Такая модель используется в задачах оптимизации импульсной коррекции траектории движения летательных аппаратов. Для случая гауссовского распределения ошибки исполнения управляющего воздействия найдены двусторонние оценки функции Беллмана и субоптимальное управление. Для случая равномерного распределения указанной ошибки найдено в явном виде оптимальное управление. Получены условия, при которых управление, являющееся оптимальным в задаче без геометрических ограничений является оптимальным в задаче с симметричными ограничениями.

В четвертой главе рассмотрена задача оптимального управления двумерной билинейной дискретной стохастической системой с критерием в форме вероятности попадания траекторией системы в терминальный момент времени на заданный параллелограмм. Для случая гауссовского распределения ошибки исполнения управляющего воздействия получено соотношение для субоптимального управления. С помощью двусторонней оценки функции оптимального значения вероятностного критерия для последнего численно найдены оценки точности. Для случая равномерного распределения мультипликативной ошибки управления получено субоптимальное управление в двухшаговой постановке. С использованием двусторонней оценки функции Беллмана получены условия, при которых данное субоптимальное управление является оптимальным.

Основные результаты, выносимые на защиту.

1) Предложено модифицированное уравнение Беллмана и выражения для оптимального управления для состояний, принадлежащих поверхностям уровня 1 и 0 функции Беллмана.

2) Найдены выражения для двусторонних оценок функции Беллмана и функции

оптимального значения вероятностного критерия.

3) Получены аналитические выражения для приближенного определения оптимальных управлений.

4) Найдено решение задач оптимизации импульсной коррекции с вероятностным критерием для однопараметрической и двухпараметрической постановок.

5) Найдено решение семейства задач оптимального управления линейной дискретной стохастической системой с вероятностным критерием и нефиксированным, но ограниченным сверху моментом окончания.

6) Получено обоснование асимптотической оптимальности рисковой стратегии в задаче оптимального управления портфелем ценных бумаг по вероятностному критерию.

Список литературы

1. *Аграчев А.А., Сачков Ю.Л.* Геометрическая теория управления. М.:Наука, 2005.

2. *Азанов В.М.* Оптимальное управление линейной дискретной системой по критерию вероятности // Автоматика и Телемеханика. 2014. №10. С. 39–51.

3. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оптимизация коррекции околокруговой орбиты искусственного спутника Земли по вероятностному критерию // Тр. ИСА РАН. 2015. №2. С. 18-26.

4. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Однопараметрическая задача оптимальной коррекции траектории летательного аппарата по критерию вероятности // Изв. РАН Теория и Системы Управления. 2016. №2. С. 115-128.

5. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Синтез оптимальных стратегий в задачах управления дискретными системами по вероятностному критерию // Автоматика и Телемеханика, 2017, № 6, 57–83.

6. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // Автоматика и Телемеханика, 2018, № 2, С. 3–18.

7. *Азанов В.М.* "Оптимальное управление линейной дискретной стохастической системой по вероятностному и квантильному критериям". Конференция 7-11 апреля 2014, "XL Гагаринские чтения". Участие и публикация в трудах конференции "Научные труды Международной молодежной научной конференции в 9 томах".

8. *Азанов В.М.* "Оптимизация коррекции околокруговой орбиты исз по вероятностному критерию". Конференция ТПСА-2014 ("Теория и практика системного анализа"), Рыбинск, 21–23 мая 2014. Публикация в трудах конференции "Труды III Всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием"Том I, стр. 5–11.

9. *Азанов В.М.* Азанов В.М., "Оптимальное управление линейной дискретной системой по вероятностным критериям". Конференция ВСПУ-2014 ("XII Всероссийское совещание по проблемам управления"), Москва, 16–19 июня 2014. Публикация в трудах конференции "Труды ВСПУ-2014 стр. 820–826.

10. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оптимальная коррекция одного параметра траектории движения летательного аппарата по вероятностному критерию // (XX международная научная конференция Системный анализ, управление и навигация. г. Евпатория, Крым, Россия, 28 июня–5 июля 2015) тезисы в сборнике: Системный анализ управление и навигация: Тезисы докладов. Сборник. - М.: Изд-во МАИ, 2015. с. 140–141.

11. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Задача оптимальной импульсной коррекции одного параметра траектории движения летательного аппарата по критерию вероятности. В книге: 14-я Международная конференция "Авиация и космонавтика - 2015". Тезисы Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет). 2015. С. 380–381.

12. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оптимальное управление билинейной дискретной стохастической системой по вероятностному интегральному критерию// IV Всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Информатика, управление и системный анализ» (Тверь, 08–11 июня 2016): Сборник тезисов – С. 5–14.

13. *Azanov V.M., Kan Yu.S.* Optimal control for discrete-time stochastic systems w.r.t. the probabilistic performance index // 17th Baikal International Triennual School-Seminar Method of Optimization and Their Applications 31th of July - 6th August, 2017, Maksimikha, Buryatia.

14. *Ананьев Б.И., Куржанский А.Б., Шелементьев Г.С.* Минимаксный синтез в задачах импульсного наведения и коррекции движения // Прикладная математика и механика. 1976. Т. 40. Вып. 1. С. 3-13.

15. *Ананьев Б.И., Гредасова Н.В.* Многократная коррекция движения линейно-квадратичной управляемой системы // Вестник УГТУ-УПИ. Екатеринбург, 2005. № 4 (56). С. 280-288.

16. *Ананьев Б.И.* Минимаксная квадратичная задача коррекции движения // Прикл. математика и механика. 1977. Т. 41. Вып. 3. С. 436–445.

17. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 2003. – 615 с.

18. *Бахшиян Б.Ц.* Оценивание и коррекция параметров движущихся систем. М.:ИКИ, 2012.

19. *Бахшиян Б.Ц., Назиров Р.Р., Эльясберг П.Е.* Определение и коррекция движения. М.:Наука, 1980.

20. *Беллман Р.* Динамическое программирование. М.:ИИЛ, 1960.

21. *Бертсекас Д., Шрив С.* Стохастическое управление: случай дискретного времени. М.: Наука, 1985.

22. *Богуславский И. А.* Методы навигации и управления по неполной статистической информации. «Машиностроение», 1970.

23. *Богуславский И. А.* О статистически оптимальном управлении конечным состоянием. Автомат. и телемех., № 5, 1966.

24. *Богуславский И.А., Егорова А.В.* Стохастическое оптимальное управление движением при несимметричном ограничении. Автомат. и телемех., 1972, выпуск 8, 23–34.

25. *Богуславский И. А.* О синтезе стохастического оптимального управления. В сб. «Современные методы проектирования систем автоматического управления». «Машиностроение», 1967.

26. *Богуславский И. А.* О статически оптимальной импульсной коррекции космического полета. Кибернетика, № 1, 1966.

27. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. М.:Наука, 1969.

28. *Болтянский В.Г.* Оптимальное управление дискретными системами. М.:Наука, 1973.

29. *Босов А.В.* Обобщенная задача распределения ресурсов программной системы. // Информ. и её примен. 2014. 8:2. С. 39–47.

30. *Босов А.В.* Задачи анализа и оптимизации для модели пользовательской активности. Часть 3. Оптимизация внешних ресурсов. // Информ. и её примен. 2012. 6:2. С. 14–21.

31. *Босов А.В.* Задачи анализа и оптимизации для модели пользовательской активности. Часть 2. Оптимизация внутренних ресурсов. // Информ. и её примен. 2012. 6:1. С. 19–26.

32. *Братусь А.С* О численном решении одной модельной задачи управления движением в случайной среде. Космические исследования, 1971, 9, № 4, 527–530

33. *Братусь А.С* Приближенное решение уравнения Беллмана для одного класса задач оптимального управления конечным состоянием. Прикл. мат. и мех., 1973, 38, вып. 3, 414–425

34. *Братусь А.С* Метод приближенного решения уравнения Беллмана для задач оптимального управления системой, подверженной случайным возмущениям. Прикл. мат. и мех., 1975, 39, вып. 2, 235—245 (РЖМех. 1975, 8А169)

35. *Братусь А.С., Бородовский М.Ю., Черноусько Ф.Л.* Оптимальная импульсная коррекция при случайных возмущениях. // Прикладная математика и механика. 1975. том 39, № 5, с. 797–805.

36. *Братусь А.С., Черноусько Ф.Л.* Численное решение задач оптимальной коррекции при случайных возмущениях. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1974. том 14, № 1, с. 68-78

37. *Бунто Т.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг с ненулевой вероятностью разорения // Автоматика и телемеханика. №5. 2013. 114–136.

38. *Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Оптимизация двухшаговой модели изменения капитала по различным статистическим критериям // Автоматика и телемеханика. №7. 2005. С. 126–143.

39. *Вишняков Б.В., Кибзун А.И.* Детерминированные эквиваленты для задач стохастического программирования с вероятностными критериями // Автоматика и телемеханика. №6. 2006. С. 126–143.

40. *Григорьев П.В., Кан Ю.С.* Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг // Автоматика и телемеханика. №2. 2004. 179–197.

41. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975.

42. *Ибрагимов Д.Н.* Оптимальная по быстродействию коррекция орбиты спутника // Труды МАИ. 2017. №94.

43. *Кан Ю.С.* Об обосновании принципа равномерности в задаче оптимизации вероятностного показателя качества // Автоматика и телемеханика. №1. 2001. 54–70.

44. *Кан Ю.С.* Оптимизация управления по квантильному критерию // Автоматика и телемеханика. №5. 2001. 77–88.

45. *Кан Ю.С., Сысуев А.В.* Сравнение квантильного и гарантирующего подходов при анализе систем // Автоматика и телемеханика. №1. 2007. С. 57–67.

46. *Кан Ю.С., Кибзун А.И.* Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями, Физматлит, М., 2009.

47. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. М.:Мир, 1977.

48. *Кибзун А.И.* О наихудшем распределении в задачах стохастической оптимизации с функцией вероятности. // Автоматика и телемеханика, 1998, № 11, 104–116.

49. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* О существовании оптимальных стратегий в задаче управления стохастической системой с дискретным временем по вероятностному критерию. // Автоматика и телемеханика, 2017, № 10, С. 139–154.

50. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Сведение двухшаговой задачи стохастического оптимального управления с билинейной моделью к задаче смешанного целочисленного линейного программирования. // АиТ. 2016. № 12. С. 89–111.

51. *Кибзун А.И., Игнатов А.Н.* Двухшаговая задача формирования портфеля ценных бумаг из двух рисковых активов по вероятностному критерию. // АиТ. 2015. № 7. С. 78–100.

52. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Оптимальное управление портфелем ценных бумаг // Автоматика и телемеханика. №9. 2001. С. 101–113.

53. *Кибзун А.И., Кузнецов Е.А.* Позиционная стратегия формирования портфеля ценных бумаг // Автоматика и телемеханика. №1. 2003. С. 151–166.

54. *Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И.* О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочис- ленного программирования // АиТ. 2013. №6. С. 66–86.

55. *Красильщиков М.Н., Малышев В.В., Федоров А.В.* Автономная реализация динамических операций на геостационарной орбите. I. Формализация задачи управления // Изв. РАН. ТиСУ. 2015. №6. С. 82–95.

56. *Красовский Н.Н.* Об оптимальном регулировании при случайных возмущениях // Прикл. математика и механика. 1960. Т. 24. Вып. 1. С. 64–79.

57. *Красовский Н.Н.* Игровая задача о коррекции движения // Прикл. математика и механика. 1969. Т. 33. Вып. 3. С. 386–396

58. *Лебедев А.А, Красильщиков М.Н., Малышев В.В.* Оптимальное управление движением космических летательных аппаратов. М.Машиностроение, 1974.

59. *Лидов М.Л.* Игровые задачи оценивания параметров движения при наличии немодулируемых ускорений // Механика и научно-технический прогресс. М.: Наука, 987. Т. 1 : Общая и прикладная механика. С. 212–225.

60. *Лидов М.Л.* Игровая задача оценивания с немоделируемыми ускорениями и алгоритм ее решения // Космич. исслед. 1986. Т. 24, № 2. С. 246–276.

61. *Лидов М.Л., Ляхова В. А.* Численное решение минимаксной задачи оценивания параметров движения при наличии немоделируемых ускорений // Там же. 1987. Т. 25, № 1. С. 3–17.

62. *Лидов М.Л.* Математическая аналогия между некоторыми оптимальными задачами коррекции траектории и выбора состава измерений // Там же. 1971. Т. 9, № 5. С. 686—706.

63. *Малышев В.В.* Задача об оптимальном дискретном управлении конечным состоянием линейной стохастической системы. // АиТ. 1967. №5. С 64–70.

64. *Малышев В.В., Кибзун А.И.* Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.:Машиностроение, 1987.

65. *Малышев В.В., Красильщиков М.Н., Бобронников В.Т. и др.* Спутниковые системы мониторинга. М.:МАИ, 2000.

66. *Малышев В.В., Старков А.В., Федоров А.В.* Синтез оптимального управления при решении задачи удержания космического аппарата в орбитальной группировке. // Космонавтика и ракетостроение. 2012. №4. С 150–158.

67. *Малышев В.В., Старков А.В., Федоров А.В.* Совмещение задач удержания и уклонения в окрестности опорной геостационарной орбиты. // Вестник Московского городского педагогического университета. Серия: экономика. 2013. №1. С 68–74.

68. *Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М.* Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли // УФН. 1957. 63. №1a, С.36-51.

69. *Охоцимский Д.Е., Рясин В.А., Ченцов Н.Н.* Оптимальная стратегия при корректировании. Докл. АН СССР, 175:1 (1967), 47–50.

70. *Парусников Н.А., Морозов В.М., Борзов В.И.* Задача коррекции в инерциальной навигации. М.: Изд-во МГУ, 1982.

71. *Пшеничный Б.Н.* Синтез линейных импульсных систем // Автоматика и телемеханика. №5. 1966. С.24-39.

72. *Рясин В.А.* Оптимальный выбор моментов времени и величин импульсов корректирующих маневров в зависимости от результатов траекторных измерении. Теория вероятн. и ее примен., 20:3 (1975), 515–526

73. *Охоцимский Д.Е., Рясин В.А., Ченцов Н.Н.* Оптимальная одноразовая коррекция в модельной задаче. Теория вероятн. и ее примен., 11:4 (1966), 708–714.

74. *Решетнев М.Ф., Лебедев А.А., Бартенев В.А. и др.* Управление и навигация искусственных спутников Земли на околокруговых орбитах. М.:Машинстроение, 1988.

75. *Сиротин А.Н.* Анализ задач оптимального по вероятности программного управления линейной системой с дискретным временем // Автоматика и телемеханика. №1. 1992. С.86-96.

76. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* Экстремальные меры и хеджирование американских опционов // Автоматика и телемеханика. №6. 2016. С.121–144.

77. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* Суперхеджирование американских опционов на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом // Автоматика и телемеханика. № 9. 2015. С.125–149.

78. *Хаметов В.М., Зверев О.В.* Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 2. Минимаксное хеджирование // Проблемы управления. 2015. № 1. 47–52.

79. *Хаметов В.М., Зверев О.В.* Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 1. Суперхеджирование // Проблемы управления. 2014, № 6, 31–44.

80. *Хрусталев М.М., Румянцев Д.С.* Оптимизация квазилинейных динамических стохастических систем со сложной структурой // Автоматика и телемеханика. 2011, №10, 154–169.

81. *Хрусталев М.М., Румянцев Д.С.* Численные методы синтеза оптимального управления для стохастических динамических систем диффузионного типа // Изв. РАН Теория и системы управления, 2007, №3, 27–38.

82. *Хрусталев М.М., Румянцев Д.С.* Оптимальное управление квазилинейными системами диффузионного типа при неполной информации о состоянии // Изв. РАН Теория и системы управления, 2006, №5, 43–51.

83. *Цыпкин Я.З.* Об оптимальных процессах в импульсных автоматических системах // ДАН СССР, 134. 2. 1966. С.308-310.

84. *Черноусько Ф.Л.* Минимаксная задача одноразовой коррекции при погрешности измерений // Прикл. математика и механика. 1968. Т. 32. Вып. 4. С. 587–595

85. *Черноусько Ф.Л., Колмановский В.Б.* Оптимальное управление при случайных возмущениях. М.: Физматлит, 1978. 352 с.

86. *Черноусько Ф.Л., Меликян А.А.* Игровые задачи управления и поиска. М.: Наука, 1978. 272 с.

87. *Ярошевский В.А., Петухов С.В.* Оптимальная однопараметрическая коррекция траекторий космических аппаратов. // Космические исследования, 1970, 8 вып. 4, С. 515–525.

88. *Ярошевский В.А., Парышева Г.В.* Оптимальное распределение корректирующих импульсов при однопараметрической коррекции. // Космические исследования, т. III, вып. 6, 1965; т. IV, вып. 1, 1966.

89. *Barrera J., Homem-de-Mello T., Moreno E., Pagnoncelli B.K., Canessa G.* Chance-constrained problems and rare events: an importance sampling approach // Math. Program. 2016. Ser. B. No. 157 P. 153-–189.

90. *Benati S., Rizzi R.* A mixed integer linear programming formulation of the optimal of the optimal mean/Value-at-Risk portfolio problem // European Journal of Operational Research. 2007. V. 176. No 1. P. 423–434.

91. *Benes, V.E.* Existence of optimal stochastic control laws // SIAM Journal on Control and Optimization 9, 1971, pp. 446-475.

92. *Benes, V.E.* Existence of optimal policies based on specified information, for a class of stochastic decision problems // SIAM Journal on Control and Optimization 8, 1970, pp. 179-188.

93. *Beraldi P., Ruszczyński A.* A branch and bound method for stochastic integer problems under probabilistic constraints // Optimization Methods & Software. 2002. V. 17. No. 3. P. 359–382.

94. *Bodnar T., Parolya N., Schmid W.* On the exact solution of the multi-period portfolio choice problem for an exponential utility under return predictability // European Journal of Operational Research, 2015. V. 246. No. 2. P. 528–542

95. *Bottou L.* Large-Scale Machine Learning with Stochastic Gradient Descent // Proc. COMPSTAT'2010, Springer, 2010, P. 177–186.

96. *Calafiore G.* Multi-period portfolio optimization with linear control policies // Automatica. 2008. V.44. I. 10. P. 2463–2473.

97. *Charnes A., Cooper W.W.* Chance-constrained programming // Manag. Sci. 1959. No. 6. P. 73–79.

98. *Chen R.C.* Constrained Stochastic Control and Optimal Search," Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control, Bahamas, Vol. 3, pp. 3013-3020, 14-17 December 2004.

99. *Dentcheva D., Prékopa A., Ruszczyński A.* Concavity and efficient points of discrete distributions in probabilistic programming // Mathematical Programming. 2000. No. 89. P. 55–77.

100. *Genz A., Bretz F.* Computation of Multivariate Normal and t-Probabilities. Heidelberg: Springer, 2009.

101. *Guigues V., Henrion R.* Joint dynamic probabilistic constraints with projected linear decision rules // Optimization Methods & Software. 2017. V. 32. No. 5. P. 1006–1032.

102. *Guigues V., Juditsky A., Nemirovski A.* Non-asymptotic confidence bounds for the optimal value of a stochastic program // Optimization Methods & Software. 2017. V. 32. No. 5. P. 1033–1058.

103. *Hasuike T., Ishii H.* Probability maximization models for portfolio selection under ambiguity // Central European J. of Operations Research. 2009. V. 17. No. 2. P. 159–180.

104. *Henrion R.* Structural properties of linear probabilistic constraints // Optimization. 2007. V. 56. No.4. P. 425–440.

105. *Kataoka S.* On a Stochastic Programming Model // Econometrica. 1963. No. 31. P. 181–196.

106. *Kelly J.L.* A new interpretation of information rate.// Bell System Technical Journal, 1956. No. 35. P. 917–926.

107. *Barmish B.R., Lagoa C.M.* The uniform distribution: a rigorous justification for its use in robustness analysis // Math. Control, Signals, Systems. 1997. V. 10. P. 203—222.

108. *Wendell H. Fleming* Optimal Continuous-Parameter Stochastic Control // SIAM Rev., 11(4), 470–509, Oct. 1969

109. *Jasour A.M., Aybat N.S., Lagoa C.M.* Semidefinite Programming For Chance Constrained Optimization Over Semialgebraic Sets // SIAM Journal on Optimization 25 (3), 1411–1440, 2015.

110. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex Chance Constrained Model Predictive Control // arXiv preprint arXiv:1603.07413, 2016.

111. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex Relaxations of a Probabilistically Robust Control Design Problem // 52nd IEEE Conference on Decision and Control, 1892–1897, 2013.

112. *Jasour A.M., Lagoa C.M.* Convex constrained semialgebraic volume optimization: Application in systems and control, arXiv:1701.08910, 2017.

113. *Jondeau E., Poon S.-H., Rockinger M.* Financial modeling under non-Gaussian distributions. Springer, 2008.

114. *Jorion P.* Value at Risk: The New Benchmark For Managing Financial Risk. Irwin Professional Publishing, 1997.

115. *Lasserre J.B.* Global optimization with polynomials and the problem of moments // SIAM Journal on Optimization. 2001; 11(3):796–817.

116. *Lasserre J.B.* Moments, positive polynomials and their applications. World Scientific. 2009.

117. *Luedtke J., Ahmed S., Nemhauser G.* An integer programming approach for linear programs with probabilistic constraints // Math. Program. 2010. V. 122. No. 2. P. 247–272.

118. *Luh J.Y.S.* Optimizing of stochastic control processes with respect to probability of entering a target manifold, School Elec. Eng. Purdue Univ., Lafayette, Ind., Tech. Rep. EE 67-15. Oct. 1967.

119. *Luh J.Y.S., O'Connor G.E.* Approximate optimal controls that maximize the probability of entering a target manifold. Journal of the Franklin Institute Volume 288, Issue 1, July 1969, Pages 1-15.

120. *L. J. Van Mellaert, P. Dorato* Numerical solution of an optimal control problem with a probability criterion // IEEE Transactions on Automatic Control, Volume: 17, Issue: 4, August 1972.

121. *L. J. Van Mellaert* On the inclusion probabilities of a stochastic dynamical systems, in Proc.'4th Annu. Allerfan Conf. Circuit and System Theory, 1966, p. 300–308.

122. *MacLean L.C., Thorp E.O., Zhao Y., Ziemba W.T.* How does the fortune's formula Kelly capital growth model perform? // The Journal of Portfolio Management Summer, 2011, V. 37, No. 4, P. 96–111.

123. *Nekrasov V.* Kelly Criterion for Multivariate Portfolios: A Model-Free Approach, 2014. http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2259133.

124. *Odanaka T.* Stochastic Control Processes and Management Science // Journal of Mathematical Analysis and Applications 104, 128-136 (1984)

125. *Odanaka T.* Inventory control problem of H. C. Hamaker, Xeieikagaku 4, No. 2 (1960).

126. *Odanaka T., Miyazaki H.* A statistical quality control and control processes, in "International Conference on Quality Control, 1969, Tokyo," 1969.

127. *T. Odanaka* On some stochastic control processes, in "USCEE" No. 238, 1968.

128. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Conditional value-at-risk for general loss distributions // Journal of Banking and Finance. 2002. V. 26. No. 7. P. 1443–1471.

129. *Rockafellar R.T., Uryasev S.* Optimization of Conditional Value-At-Risk // The Journal of Risk. 2000. V. 2. No. 3. P. 21–41

130. *Skaf J., Boyd S.* Multi-Period Portfolio Optimization with Constraints and Transactions Costs. // $https://web.stanford.edu/boyd/papers/pdf/dyn_port_opt.pdf$. 2009

131. *Tang W., Zheng J., Zhang J.* Viability decision of linear discrete-time stochastic systems with probability criterion // J. Control Theory Appl, 2009, 7, (3), 297–300.

132. *Stoyanov S.V., Rachev S.T., Fabozzi F.J.* Optimal financial portfolios // Applied Mathematical Finance. 2007. V. 14. No. 5. P. 401-436.

133. *Ziemba W.T., Wickson R.G.* Stochastic Optimization Models in Finance. World Scientific, 2006.