Труды МАИ. 2024. № 138
Trudy MAI, 2024, no. 138

Научная статья
УДК 531.01; 531.36; 531.131
URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=182655

ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ОРБИТАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ В ПЛОСКОЙ КРУГОВОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧЕ ЧЕТЫРЁХ ТЕЛ

Евгений Валерьевич Волков

[1]Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,

Москва, Россия

[2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),

Москва, Россия

evvolkov94@mail.ru

***Аннотация*:** Рассматривается плоская круговая ограниченная задача четырёх тел в следующей постановке. Тело малой массы движется под действием сил гравитационного притяжения трёх притягивающих тел, взаимодействующих друг с другом по закону всемирного тяготения. Притягивающие тела располагаются в треугольных точках либрации, т.е. движутся по круговым орбитам, образуя равносторонний треугольник. Движение всех четырёх тел происходит в одной плоскости. Предполагается, что выполнено достаточное условие линейной устойчивости точек либрации (условие Рауса), а массы двух притягивающих тел равны. В данной постановке ограниченная задача четырёх тел допускает частные решения, описывающие положения относительного равновесия тела малой массы во вращающейся вместе с притягивающими телами системе координат. В окрестности устойчивых положений относительного равновесия возможны периодические движения тела малой массы.

В данной работе рассматривается задача об орбитальной устойчивости периодических движений тела малой массы, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия. В предположении о малости амплитуды данных периодических движений выполнено аналитическое исследование их орбитальной устойчивости в линейном приближении. При помощи метода малого параметра построены явные асимптотические выражения для границ области параметрического резонанса. Результаты аналитического исследования хорошо согласуются с результатами численного исследования, проведённого ранее в работе [9].

Ключевые слова: задача четырёх тел, периодические движения, орбитальная устойчивость

Финансирование: исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00162, https://rscf.ru/project/24-11-00162/ в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете).

Для цитирования: Волков Е.В. Линейный анализ орбитальной устойчивости периодических движений в плоской круговой ограниченной задаче четырёх тел // Труды МАИ. 2024. № 138. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=182655

Original article

ANALYSIS LINEAR ORBITAL STABILITY OF PERIODIC MOTIONS IN THE PLANAR CIRCULAR RESTRICTED FOUR-BODY PROBLEM

Evgeny V. Volkov

[1]Mechanical Engineering Research Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

[2]Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

evvolkov94@mail.ru

***Abstract*:** In this work we consider the planar restricted circular four-body problem. A small body of negligible mass moves under the action of gravitational attraction forces of three attracting bodies interacting with each other according to the law of universal gravitation. Attracting bodies are located at triangular libration points, i.e. they move in circular orbits, form an equilateral triangle. The motion of all four bodies occurs in the same plane. It is assumed that the sufficient condition for the linear stability of libration points (the Routh's stability condition) is satisfied. The masses of the two attracting bodies are equal. In this formulation, the restricted four-body problem admits particular solutions that describe the relative equilibrium positions of a small body in a coordinate system rotating together with the attracting bodies. Periodic motions of a small body are possible in the vicinity of stable positions of relative equilibrium.

In this work considers the problem of orbital stability of periodic motions of a small body of negligible mass arising from a stable position of relative equilibrium. Under the assumption of small amplitude of these periodic motions, an analytical study of their orbital stability in a linear approximation was carried out. Using the small parameter method, explicit asymptotic expressions for the boundaries of the parametric resonance region are constructed. Explicit asymptotic expressions for the boundaries of the parametric resonance region are constructed by using method small parameter. The results of the analytical study are in good agreement with the results of the numerical study conducted in [9].

Keywords**:** four-body problem, periodic motions, orbital stability

Funding: This research was supported by the Russian Science Foundation under grant No. 24-11-00162 https://rscf.ru/en/project/24-11-00162/ and was carried out at the Moscow Aviation Institute (National Research University).

For citation: Volkov E.V. Analysis linear orbital stability of periodic motions in the planar circular restricted four-body problem. *Trudy MAI*, 2024, no. 138. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=182655

1. Введение

Ограниченной задачей четырёх тел называют задачу о движении тела малой массы под действием гравитационного притяжения трёх притягивающих тел. Данная задача была предметом обширных аналитических и численных исследований и продолжает привлекать значительное внимание исследователей как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. В настоящей работе рассматривается частный случай данной задачи, так называемая плоская круговая ограниченная задача четырёх тел. В этом случае предполагается, что притягивающие тела располагаются в вершинах равностороннего треугольника, движутся по круговым орбитам и все четыре тела располагаются в одной плоскости. В такой постановке задачи возможны положения относительного равновесия тела малой массы во вращающейся вместе с притягивающими телами системе координат [1, 2]. Когда тело малой массы находится в положении относительного равновесия, то все четыре тела образуют четырёхугольник неизменной формы и размеров. В окрестности устойчивого положения относительного равновесия возможны периодические движения тела малой массы. Вблизи положения относительного равновесия эти периодические движения могут быть получены аналитически, а также могут быть численно продолжены во всей области их существования. Решение вопроса о существовании и орбитальной устойчивости данных периодических орбит имеет важное значение для понимания динамики задачи.

Периодические орбиты в задаче четырёх тел изучались во многих работах, включая работы [3–10]. В случае, когда массы двух притягивающих тел равны, исследования для симметричных и несимметричных плоских периодических орбит проведены в работах [3–7]. В работе [8] исследования были проведены в предположении, что притягивающие тела лежат на одной прямой, т.е. в точках либрации Эйлера. Линейный анализ орбитальной устойчивости периодических движений, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия, был проведен в работе [9], а нелинейный анализ орбитальной устойчивости данных периодических движений проведён в работе [10]. В работах [9, 10] периодические движения были построены численно, а выводы об их устойчивости были получены на основе известных достаточных условий, полученных на основе теории КАМ [11–14], которые также проверялись численно. В данной работе выполняется аналитическое исследование устойчивости периодических движений системы в предположении, что их амплитуда мала. Результаты данной работы дополняют и уточняют результаты работ [9, 10], поскольку при малых значениях амплитуд численный анализ орбитальной устойчивости является затруднительным в силу потери точности вычисления при уменьшении амплитуды.

2. Постановка задачи

Рассмотрим движение тела малой массы P под действием сил гравитационного притяжения трёх притягивающих тел P_1, P_2 и P_3, обладающих массами m_1, m_2 и m_3. Притягивающие тела находятся в точках либрации плоской круговой ограниченной задачи трёх тел, т.е. движутся по круговым орбитам вокруг центра масс системы, располагаясь в вершинах равностороннего треугольника (см. Рис. 1). Движение всех четырёх тел происходит в одной плоскости. Предполагается, что массы m_2 и m_3 двух притягивающих тел P_2 и P_3 равны.

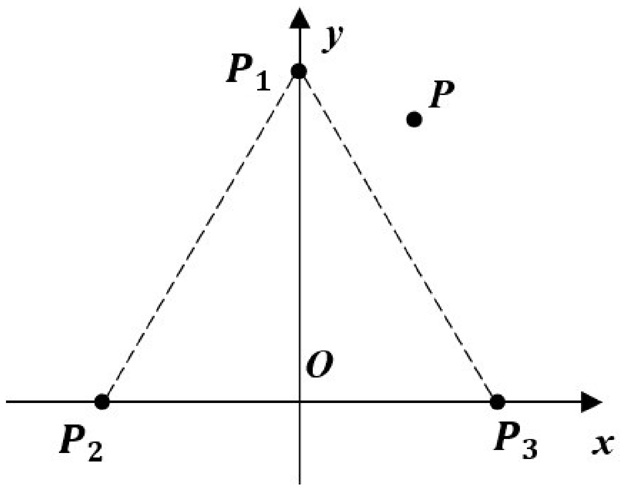

Рис. 1. Система координат

Для изучения движения тела малой массы P введём подвижную систему координат *Oxyz* с началом в точке *O*, расположенным в центре стороны P_2P_3 треугольника $P_1P_2P_3$. Ось *Oy* перпендикулярна оси *Ox* и проходит через тело P_1, а ось *Oz* перпендикулярна плоскости движения и дополняет систему координат *Oxyz* до правой ортогональной тройки. Затем перейдём к безразмерным координатам Нехвила ξ и η по формулам:

$$x = r\xi, \qquad y = r\eta, \tag{1}$$

где *r* – расстояние между притягивающими телами.

Уравнения движения тела малой массы P можно записать в гамильтоновой форме:

$$\frac{d\xi}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_\xi}, \quad \frac{d\eta}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p_\eta}, \quad \frac{dp_\xi}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \frac{dp_\eta}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \eta}. \tag{2}$$

Функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\left(p_\xi^2 + p_\eta^2\right) + p_\xi\left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2}(1-2\mu)\right) - p_\eta\xi - \frac{1-2\mu}{\rho_1} - \frac{\mu}{\rho_2} - \frac{\mu}{\rho_3}, \tag{3}$$

где

$$\rho_1 = \left(\xi^2 + \left(\eta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)^{1/2}, \qquad \rho_2 = \left(\left(\xi + \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2\right)^{1/2},$$
$$\rho_3 = \left(\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \eta^2\right)^{1/2}, \tag{4}$$

а безразмерный параметр задачи μ вводится по формуле

$$\mu = \frac{m_2}{m_1 + 2m_2}. \tag{5}$$

Независимую переменную $\nu = \omega t$ можно рассматривать как угол поворота треугольника $P_1P_2P_3$, образованного основными притягивающими телами, где $\omega^2 = f(m_1 + 2m_2)r^{-3}$, а f – универсальная гравитационная постоянная.

Далее рассматривается только случай, когда треугольная конфигурация из трёх притягивающих тел P_1, P_2 и P_3 устойчива в линейном приближении. Это имеет место при выполнении условия [15]:

$$0 < \mu < \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{9}, \tag{6}$$

Система дифференциальных уравнений (2) допускает следующее стационарное решение:

$$\xi = 0, \qquad \eta = \eta_*,$$
$$p_\xi = p_{\xi *} = -\eta_* + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - 2\mu), \qquad p_\eta = 0, \tag{7}$$

где η_* определяется в результате решения алгебраического уравнения

$$\eta - \frac{\sqrt{3}}{2}(1 - 2\mu) - \frac{4(1 - 2\mu)\operatorname{sign}\left(2\eta - \sqrt{3}\right)}{\left(2\eta - \sqrt{3}\right)^2} - \frac{16\mu\eta}{(4\eta^2 + 1)^{3/2}} = 0. \tag{8}$$

Решения уравнения (8) описывают положения относительного равновесия тела малой массы, расположенные на оси $O\eta$. В работах [16, 17] было показано, что существует устойчивое положение относительного равновесия, которое расположено на оси $O\eta$ вне треугольника, образованного притягивающими телами (см. Рис. 2).

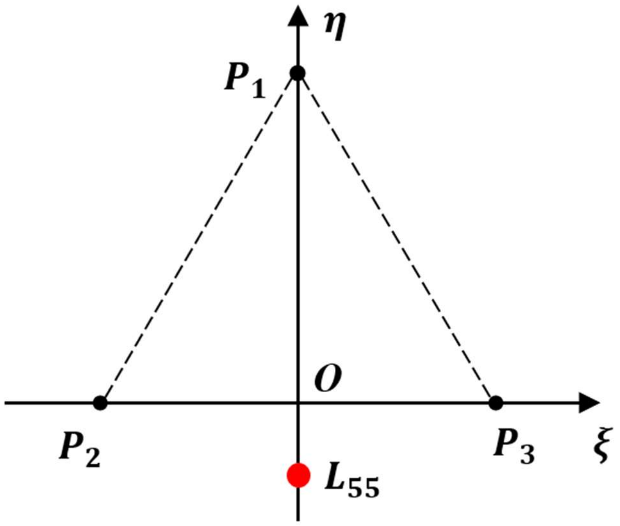

Рис. 2. Устойчивое положение относительного равновесия тела малой массы P

Согласно теореме Ляпунова о голоморфном интеграле [18], в малой окрестности устойчивого положения относительного равновесия системы существуют два типа периодических решений, классифицируемых по периоду: короткопериодические решения с периодом T_S и долгопериодические решения с периодом T_L ($T_L > T_S$).

Во вращающейся системе координат $O\xi\eta$ периодические решения Ляпунова описывают замкнутые орбиты тела малой массы в окрестности его положения относительного равновесия. Периодические орбиты образуют так называемые натуральные семейства, определяемые параметрами задачи: константой энергии h и параметром μ. Вблизи положения относительного равновесия периоды T_S и T_L близки к $2\pi/\omega_1$ и $2\pi/\omega_2$ соответственно, где ω_1 и ω_2 – частоты системы, линеаризованной в окрестности рассматриваемого положения относительного равновесия ($\omega_1 > \omega_2$).

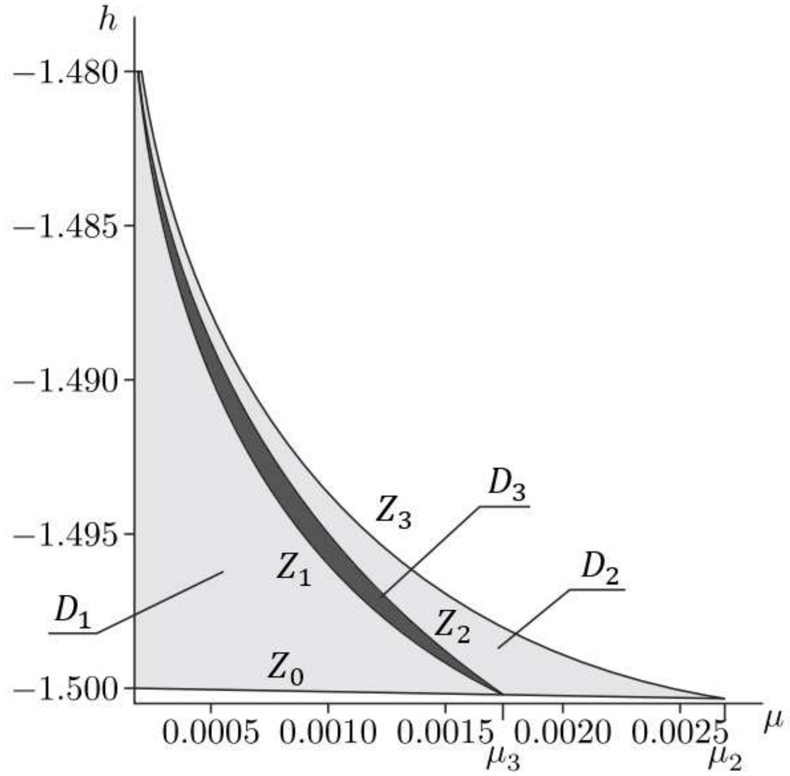

Рис. 3. Диаграмма орбитальной устойчивости в линейном приближении семейства короткопериодических движений

В работе [9] для всех допустимых значений параметров задачи μ и h численно был проведён линейный анализ орбитальной устойчивости короткопериодических движений, а в работе [10] был выполнен строгий нелинейный анализ их орбитальной устойчивости. В частности, в работе [9] была получена область орбитальной неустойчивости (область параметрического резонанса). На Рис. 3 представлена диаграмма устойчивости короткопериодических движений, изображенная в плоскости параметров задачи μ и h, где h – постоянная энергии на исследуемом периодическом движении. Тёмно-серым цветом обозначена область параметрического резонанса, где короткопериодические движения орбитально неустойчивы. В серой области короткопериодические движения орбитально устойчивы в линейном приближении. Вопросы существования, бифуркации и орбитальной устойчивости периодических решений консервативных и неконсервативных систем также исследовались в работах [19-22].

В данной работе при малых значениях амплитуды короткопериодических движений аналитически строятся границы области их орбитальной неустойчивости (области параметрического резонанса). Необходимость получения аналитических выражений для границ областей параметрического резонанса объясняется тем, что их численное построение является затруднительным при приближении значений энергии h к её значению в положении относительного равновесия.

3. Аналитическое исследование орбитальной устойчивости и построение границ области параметрического резонанса

Построение областей параметрического резонанса будем выполнять на основе методики, предложенной в работе [23]. В соответствии с результатами данной работы область параметрического резонанса возникает вблизи значений параметра μ, отвечающих резонансу третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$. Данное соотношение имеет место при $\mu_0 = 0.00175770$. Далее полагая, что значение параметра μ мало отличается от μ_0, введём малый параметр ε

$$\varepsilon = \mu - \mu_0. \tag{9}$$

В случае резонанса третьего порядка канонической заменой переменных гамильтониан задачи (3) можно привести к следующей нормальной форме [14]

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 - A r_2 \sqrt{r_1} \sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O_4, \qquad (10)$$

где через O_4 обозначен сходящийся ряд, который начинается с членов не ниже четвёртой степени. Явные выражения для ω_1, ω_2 и коэффициента нормальной формы A были получены в работе [24]. Используя данные выражения, имеем

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 0.88595524 - 90.91930642\varepsilon - 27235.59685532\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ \omega_2 &= 0.44297762 + 169.76439834\varepsilon + 12630.04414059\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3), \\ A &= 0.37446196 + 5643.05422766\varepsilon + 2.86487085 \cdot 10^6 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \end{aligned} \qquad (11)$$

Выполним теперь каноническую замену переменных $\varphi_i, r_i \to \theta_i, \rho_i$ $(i = 1, 2)$ с валентностью $(\varepsilon\alpha)^{-2}$ по следующим формулам

$$\varphi_i = \theta_i, \qquad r_i = \varepsilon^2 \alpha^2 \rho_i, \qquad (i = 1, 2). \qquad (12)$$

где ε – малая величина, а α – неопределенная пока постоянная величина. Помимо этого, выполним замену независимой переменной $\nu = \omega_2^{-1}\tau$. В переменных θ_i, ρ_i $(i = 1, 2)$ гамильтониан задачи (10) примет вид:

$$H = \frac{\omega_1}{\omega_2}\rho_1 - \rho_2 - \varepsilon \frac{A}{\omega_2} \alpha \rho_2 \sqrt{\rho_1} \sin(\theta_1 + 2\theta_2) + O_4. \qquad (13)$$

Введём резонансную расстройку κ:

$$\kappa = \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2, \qquad (14)$$

и выполним ещё одну каноническую унивалентную замену переменных $\theta_i, \rho_i \to \psi_i, R_i$ $(i = 1, 2)$

$$\begin{aligned} \theta_1 = \psi_1, \qquad \theta_2 = -\frac{\psi_1}{2} + \psi_2, \\ \rho_1 = R_1 + \frac{1}{2}R_2, \qquad \rho_2 = R_2. \end{aligned} \qquad (15)$$

Далее полагаем, $\alpha = \omega_2/A$, тогда в переменных ψ_i, R_i гамильтониан принимает вид

$$H = (2+\kappa)\left(R_1 + \frac{1}{2}R_2\right) - R_2 - \varepsilon R_2 \sqrt{R_1 + \frac{1}{2}R_2} \sin 2\psi_2 + O_4. \tag{16}$$

Введём декартовы координаты x_2, y_2 по формулам

$$x_2 = \sqrt{2R_2}\sin\psi_2, \qquad y_2 = \sqrt{2R_2}\cos\psi_2. \tag{17}$$

Гамильтониан задачи (16) примет вид

$$H = (2+\kappa)R_1 + \frac{1}{4}\kappa(x_2^2 + y_2^2) - \varepsilon x_2 y_2 \sqrt{R_1 + \frac{1}{4}(x_2^2 + y_2^2)} + O_4. \tag{18}$$

Уравнения с гамильтонианом (18) допускают частное решение

$$\psi_1 = \Omega_1(\tau + \tau_0), \qquad R_1 = \frac{c^2}{2}, \qquad x_2 = y_2 = 0, \tag{19}$$

где $\Omega_1 = 2 + \kappa + O(\varepsilon^2)$. Данное решение описывает периодическую орбиту: движение с периодом $2\pi/\Omega_1$ и амплитудой c.

В окрестности решения (19) введём возмущения γ, α_2, β_2 по формулам

$$R_1 = \frac{c^2}{2} + \gamma, \qquad x_2 = \alpha_2, \qquad y_2 = \beta_2. \tag{20}$$

Гамильтониан уравнений возмущенного движения примет вид

$$\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_4 + \cdots, \tag{21}$$

где $\Gamma_2 = \Omega_1\gamma + \Gamma_2^*$, а

$$\Gamma_2^* = \frac{1}{4}\kappa(\alpha_2^2 + \beta_2^2) - \varepsilon\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha_2\beta_2 c + O(\varepsilon^2). \tag{22}$$

Характеристическое уравнение системы с гамильтонианом (22) имеет вид

$$\lambda^2 + \frac{1}{4}(\kappa^2 - 2\varepsilon^2 c^2) = 0. \tag{23}$$

При достаточно малых ε уравнение (23) имеет вещественный положительный корень при условии [23]

$$|\kappa| < \varepsilon\sqrt{2}c. \qquad (24)$$

Условие (24) задаёт область орбитальной неустойчивости (область параметрического резонанса). Вне этой области короткопериодические движения с малыми амплитудами орбитально устойчивы в линейном приближении.

Гамильтониан (10) является первым интегралом уравнений движения (интеграл энергии). Обозначим через Δh постоянную этого интеграла на периодической орбите. Эта постоянная имеет смысл отклонения энергии на периодической орбите от её значения в положении относительного равновесия.

В переменных φ_i, r_i $(i = 1, 2)$ решение (19) имеет вид:

$$r_1 = \frac{\varepsilon^2\alpha^2c^2}{2}, \qquad r_2 = 0. \qquad (25)$$

Подставив (25) в (10), найдём связь между Δh и амплитудой c:

$$\frac{\omega_1\omega_2^2\varepsilon^2c^2}{2A^2} = \Delta h. \qquad (26)$$

Подставляя разложения (11) для ω_1 и ω_2 в выражение (14) для резонансной расстройки κ, имеем

$$\kappa = -971.71524295\varepsilon + 253888.60299808\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \qquad (27)$$

На границе области параметрического резонанса неравенство (24) обращается в равенство. Если подставить в это равенство выражение (27), то амплитуду c можно получить в виде ряда по малому параметру ε. Данный ряд имеет следующий вид

$$c = \frac{\sqrt{2}\kappa}{2\varepsilon} = -687.10643767 + 179526.35284592\varepsilon + O(\varepsilon^2). \qquad (28)$$

В результате подстановки разложений (11) для ω_1, ω_2 и коэффициента нормальной формы A, а также разложения (28) для амплитуды c в выражение (26) для Δh, получим следующее выражение

$$\Delta h = 292669.84177512\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \qquad (29)$$

На границе области параметрического резонанса постоянная энергии h вычисляется по следующей формуле:

$$h = h_0 + \Delta h, \qquad (30)$$

где через h_0 обозначена постоянная энергии в положении относительного равновесия при $\mu = \mu_0 + \varepsilon$. Разложение h_0 по степеням малого параметра ε можно записать в следующем виде

$$h_0 = -1.50023460 - 0.13527950\varepsilon - 1.02483732\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \qquad (31)$$

На границе области параметрического резонанса постоянную интеграла энергии h можно записать в виде следующего ряда

$$h = -1.50023460 - 0.13527950\varepsilon + 292668.81693780\varepsilon^2 + O(\varepsilon^3). \qquad (32)$$

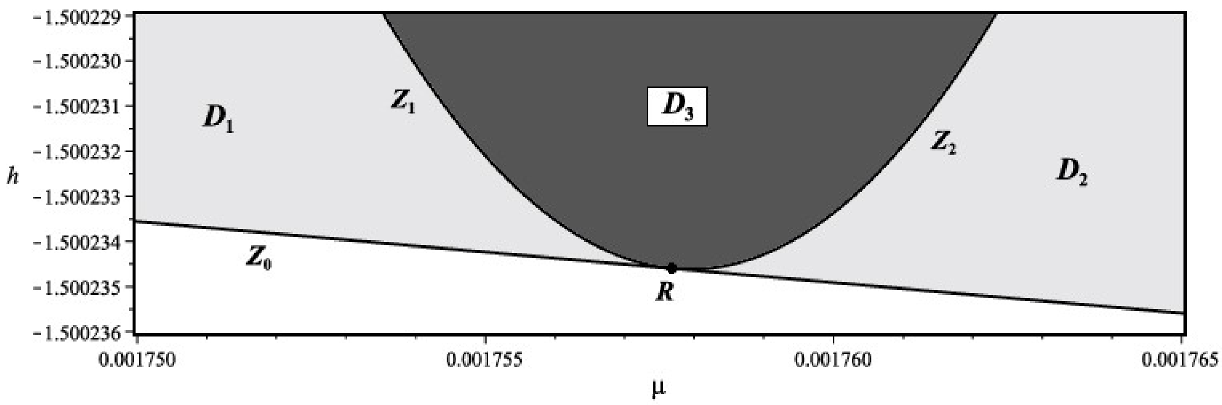

Рис. 4. Диаграмма орбитальной устойчивости в линейном приближении семейства короткопериодических движений при малых значениях амплитуды c

На Рис. 4 представлены результаты аналитического исследования орбитальной устойчивости короткопериодических движений тела малой массы, рождающихся из устойчивого положения относительного равновесия, при малых значениях амплитуды c. Область орбитальной неустойчивости D_3 (область параметрического резонанса) закрашена тёмно-серым цветом, а области D_1 и D_2, в которых короткопериодические движения орбитально устойчивы в линейном приближении, закрашены серым цветом. Нижняя граница серой области соответствует положению относительного равновесия. Точка R, в которой область параметрического резонанса касается этой нижней границы, отвечает положению относительного равновесия при $\mu = \mu_0$.

Сравнение результатов проведённого исследования с результатами работы [9] показало, что границы области параметрического резонанса, построенные в данной работе аналитически, достаточно точно совпадают с границами этой области, построенными численно.

Заключение

Исследован вопрос об орбитальной устойчивости короткопериодических движений при малых значениях амплитуды. Аналитически построены границы области параметрического резонанса. Вне областей параметрического резонанса короткопериодические движения с малыми амплитудами орбитально устойчивы в линейном приближении. Результаты аналитического исследования хорошо согласуются с результатами численного исследования, проведённого в работе [9].

Список источников

1. Pedersen P. Librationspunkte im restringierten Vierkörperproblem // Dan. Mat.-Fys. Medd, 1944, vol. 21, pp. 1–80.

2. Брумберг В.А. Постоянные конфигурации в задаче четырех тел и их устойчивость // Астрономический журнал. 1957. Т. 34. № 1. С. 55–74.

3. Burgos-Garcia J., Delangado J. Periodic orbits in the restricted four-body problem with two equal masses // Astrophysics and Space Science, 2013, vol. 345, no. 2, pp. 247–263. DOI: 10.1007/s10509-012-1118-2

4. Baltaggianis A.N., Papadakis K.N. Families of periodic orbits in the restricted four-body problem // Astrophysics and Space Science, 2011, vol. 336, no. 2, pp. 357–367. DOI: 10.1007/s10509-011-0778-7

5. Papadakis K.E. Asymptotic orbits in the restricted four-body problem // Planetary and Space Science, 2007, vol. 55, no. 10, pp. 1368–1379. DOI: 10.1016/j.pss.2007.02.005

6. Oshima K. Multiple families of synodic resonant periodic orbits in the bicircular restricted four-body problem // Advances in Space Research, 2022, vol. 70, no. 5, pp. 1325–1335. DOI: 10.1016/j.asr.2022.06.009

7. Alvares-Ramirez M., Vidal C. Dynamical aspects of an equilateral restricted four-body problem // Mathematical Problems in Engineering, 2009, vol. 2009, pp. 23.

8. Michalodimitrakis M. The circular restricted four-body problem // Astrophysics and Space Science, 1981, vol. 75, no. 2, pp. 289–305. DOI: 10.1007/BF00648643

9. Sukhov E.A., Volkov E.V. Numerical orbital stability analysis of nonresonant periodic motions in the planar restricted four-body problem // Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2022, vol. 18, no. 4, pp. 563–576. DOI: 10.20537/nd221201

10. Bardin B.S., Sukhov E.A., Volkov E.V. Nonlinear orbital stability of periodic motions in the planar restricted four-body problem // Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 2023, vol. 19, no. 4, pp. 545–557. DOI: 10.20537/nd231211

11. Арнольд В.И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Успехи математических наук. 1963. Т. 18. № 6. С. 91–192.

12. Carl Ludwig Siegel, Jurgen K. Moser. Lectures on Celestial Mechanics. Springer New York, NY, 1971, 290 p.

13. Маркеев А.П. Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс: монография. - Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2009. – 396 с.

14. Маркеев А.П. Точки либраций в небесной механике и космодинамике. - М.: Наука, 1978. – 312 с.

15. Routh E.J. On laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady motion // Proceedings of the London Mathematical Society, 1875, vol. 6, pp. 86–97. DOI: 10.1112/plms/s1-6.1.86

16. Bardin B.S., Volkov E.V. Analysis of linear stability and bifurcations of central configurations in the planar restricted circular four-body problem // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 2021, vol. 1191, no. 1, pp. 012002. DOI: 10.1088/1757-899X/1191/1/012002

17. Bardin B.S., Volkov E.V. On bifurcations and stability of central configurations in the planar circular restricted four-body problem // Journal of Physics: Conference Series, 2021, vol. 1959, no. 1, pp. 012006. DOI: 10.1088/1742-6596/1959/1/012006

18. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения: собрание сочинений. - М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. Т. 2. - 473 с.

19. Бардин Б.С., Савин А.А. Исследование орбитальной устойчивости плоских колебаний симметричного намагниченного спутника на круговой орбите // Труды МАИ. 2016. № 85. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=65212

20. Бардин Б.С., Панёв А.С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=62995

21. Холостова О.В., Сафонов А.И. О бифуркациях положений равновесия гамильтоновой системы в случаях двойного комбинационного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=93297

22. Сафонов А.И. О периодических движениях гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности кратного резонанса третьего порядка // Труды МАИ. 2022. № 126. URL: https://trudymai.ru/published.php?ID=168988. DOI: 10.34759/trd-2022-126-02

23. Маркеев А.П. О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1 // Прикладная математика и механика. 1999. Т. 63. № 5. С. 757–769.

24. Bardin B.S., Volkov E.V. The lyapunov stability of central configurations of the planar circular restricted four-body problem // Cosmic Research, 2024, vol. 62, no. 5, pp. 388–400.

References

1. Pedersen P. Librationspunkte im restringierten Vierkörperproblem, *Dan. Mat.-Fys. Medd*, 1944, vol. 21, pp. 1–80.

2. Brumberg V.A. *Astronomicheskii zhurnal*, 1957, vol. 34, no. 1, pp. 55–74.

3. Burgos-Garcia J., Delangado J. Periodic orbits in the restricted four-body problem with two equal masses, *Astrophysics and Space Science*, 2013, vol. 345, no. 2, pp. 247–263. DOI: 10.1007/s10509-012-1118-2

4. Baltaggianis A.N., Papadakis K.N. Families of periodic orbits in the restricted four-body problem, *Astrophysics and Space Science*, 2011, vol. 336, no. 2, pp. 357–367. DOI: 10.1007/s10509-011-0778-7

5. Papadakis K.E. Asymptotic orbits in the restricted four-body problem, *Planetary and Space Science,* 2007, vol. 55, no. 10, pp. 1368–1379. DOI: 10.1016/j.pss.2007.02.005

6. Oshima K. Multiple families of synodic resonant periodic orbits in the bicircular restricted four-body problem, *Advances in Space Research*, 2022, vol. 70, no. 5, pp. 1325–1335. DOI: 10.1016/j.asr.2022.06.009

7. Alvares-Ramirez M., Vidal C. Dynamical aspects of an equilateral restricted four-body problem, *Mathematical Problems in Engineering*, 2009, vol. 2009, pp. 23.

8. Michalodimitrakis M. The circular restricted four-body problem, *Astrophysics and Space Science,* 1981, vol. 75, no. 2, pp. 289–305. DOI: 10.1007/BF00648643

9. Sukhov E.A., Volkov E.V. Numerical orbital stability analysis of nonresonant periodic motions in the planar restricted four-body problem, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics,* 2022, vol. 18, no. 4, pp. 563–576. DOI: 10.20537/nd221201

10. Bardin B.S., Sukhov E.A., Volkov E.V. Nonlinear orbital stability of periodic motions in the planar restricted four-body problem, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics,* 2023, vol. 19, no. 4, pp. 545–557. DOI: 10.20537/nd231211

11. Arnol'd V.I. *Uspekhi matematicheskikh nauk*, 1963, vol. 18, no. 6, pp. 91–192.

12. Carl Ludwig Siegel, Jurgen K. Moser. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer New York, NY, 1971, 290 p.

13. Markeev A.P. *Lineinye gamil'tonovy sistemy i nekotorye zadachi ob ustoichivosti dvizheniya sputnika otnositel'no tsentra mass: monografiya*. - Izhevsk: Izhevskii institut komp'yuternykh issledovanii, 2009. – 396 s.

14. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* (Libration Points in Celestial Mechanics and Space Dynamics), Moscow, Nauka, 1978, 312 p.

15. Routh E.J. On laplace's three particles, with a supplement on the stability of steady motion, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1875, vol. 6, pp. 86–97. DOI: 10.1112/plms/s1-6.1.86

16. Bardin B.S., Volkov E.V. Analysis of linear stability and bifurcations of central configurations in the planar restricted circular four-body problem, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 2021, vol. 1191, no. 1, pp. 012002. DOI: 10.1088/1757-899X/1191/1/012002

17. Bardin B.S., Volkov E.V. On bifurcations and stability of central configurations in the planar circular restricted four-body problem, *Journal of Physics: Conference Series,* 2021, vol. 1959, no. 1, pp. 012006. DOI: 10.1088/1742-6596/1959/1/012006

18. Lyapunov A.M. *Obshchaya zadacha ob ustoichivosti dvizheniya: sobranie sochinenii* (Collected Works), Moscow-Leningrad, Izd-vo AN SSSR, 1956, vol. 2. - 473 p.

19. Bardin B.S., Savin A.A. *Trudy MAI*, 2016, no. 85. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=65212

20. Bardin B.S., Panev A.S. *Trudy MAI,* 2015, no. 84. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=62995

21. Kholostova O.V., Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93297

22. Safonov A.I. *Trudy MAI*, 2022, no. 126. URL: https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=168988. DOI: 10.34759/trd-2022-126-02

23. Markeev A.P. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 1999, vol. 63, no. 5, pp. 757–769.

24. Bardin B.S., Volkov E.V. The lyapunov stability of central configurations of the planar circular restricted four-body problem, *Cosmic Research*, 2024, vol. 62, no. 5, pp. 388–400.

Статья поступила в редакцию 11.10.2024
Одобрена после рецензирования 13.10.2024
Принята к публикации 25.10.2024
The article was submitted on 11.10.2024; approved after reviewing on 13.10.2024; accepted for publication on 25.10.2024