

## Стабилизация неустойчивых объектов: связанные осцилляторы

Семенов М.Е.<sup>1\*</sup>, Соловьев А.М.<sup>1\*\*</sup>, Попов М.А.<sup>2\*\*\*</sup>

<sup>1</sup>*Воронежский государственный университет,*

*Университетская пл., 1, Воронеж, 394006, Россия*

<sup>2</sup>*Воронежский государственный архитектурно-строительный университет,*

*улица 20-летия Октября, 84, Воронеж, 394006, Россия*

*\*e-mail: [mk1150@mail.ru](mailto:mk1150@mail.ru)*

*\*\*e-mail: [darkzite@yandex.ru](mailto:darkzite@yandex.ru)*

*\*\*\*e-mail: [soeltic@gmail.com](mailto:soeltic@gmail.com)*

### Аннотация

Построена математическая модель неустойчивой системы в виде обратных связанных маятников. Проведено исследование динамики данной механической системы и определены ее предельные параметры, обеспечивающие возможность стабилизации. Разработаны принципы стабилизации маятников в окрестности вертикального положения.

**Ключевые слова:** обратный маятник, связанные осцилляторы, стабилизация, управление

### Введение

Стабилизация обратного или перевернутого маятника является классической проблемой динамики и теории управления и широко используется в качестве эталона для тестирования алгоритмов управления (ПИД-регуляторов, нейронных

сетей, нечеткого управления и т. д.). Первое теоретическое исследование обратного маятника было проведено Стефенсоном в работе [1], а первые эксперименты по его стабилизации с помощью колебаний подвеса были рассмотрены П.Л. Капицей и описаны в его работе [2].

Задача стабилизации обратного маятника имеет большую историю исследований и кажется достаточно изученной, однако большая часть этих исследований рассматривает упрощенную модель. В некоторых технических приложениях требуется найти регулятор более сложной, связанной системы, представляющей собой набор обратных маятников с динамической связью.

В данной работе было проведено исследование динамики механической системы, представляющей собой два обратных маятника шарнирно закрепленных на подвижной платформе и связанных между собой посредством пружины. Сила, приложенная к платформе и вызывающая ее горизонтальное перемещение, трактуется как управление. Целью данной работы является решение задачи стабилизации маятников в вертикальном положении с помощью горизонтальных перемещений платформы при наличии информации об углах отклонения.

В процессе исследований был разработан алгоритм стабилизации маятников в окрестности вертикального положения, найдены области управляемости системы и их зависимость от величины жесткости пружины.

### **Физическая модель**

Рассмотрим систему из двух перевернутых маятников с массами  $m_1$  и  $m_2$ , жестко закрепленных на подвижной тележке и связанных между собой пружиной

жесткостью  $k$ , которая находится в нерастянутом состоянии, когда маятники занимают вертикальное положение. Точка закрепления пружины находится на расстоянии  $h$  от точек подвесов маятников (рис. 1).

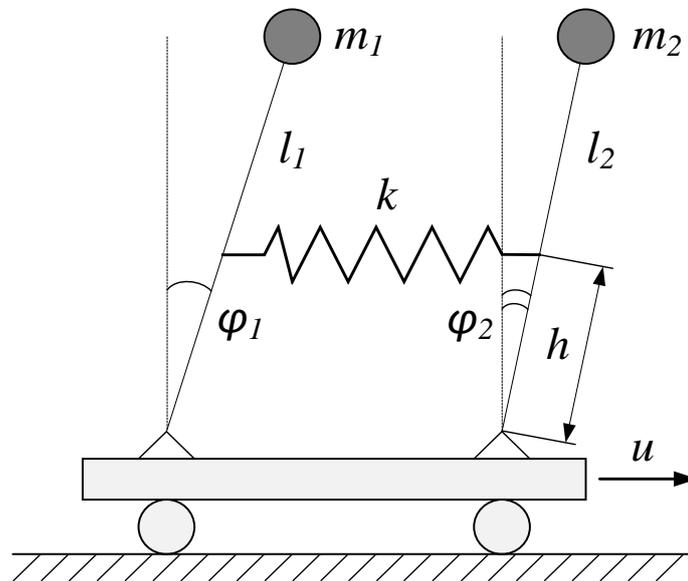


Рис. 1. Физическая модель связанных маятников

Будем считать, что тележка не имеет массы и движется без трения, а управляющее воздействие, приложенное к тележке, сообщает ей ускорение  $u$ . Для описания динамики системы запишем уравнения моментов, которые, если пренебречь затуханием, имеют вид

$$\begin{cases} I_1 \frac{d\bar{\omega}_1}{dt} = \bar{M}_1^{(g)} + \bar{M}_1^{(k)} - \bar{M}^{(u)} \\ I_2 \frac{d\bar{\omega}_2}{dt} = \bar{M}_2^{(g)} - \bar{M}_2^{(k)} - \bar{M}^{(u)} \end{cases} \quad (1)$$

Здесь  $I_{1,2}$  – моменты инерции маятников,  $\bar{\omega}_{1,2}$  – угловые скорости,  $\bar{M}_{1,2}^{(g)}$  и  $\bar{M}_{1,2}^{(k)}$  – возвращающие моменты силы тяжести и силы упругости пружины, соответственно.

Поскольку движение плоское, все эти векторы направлены перпендикулярно плоскости рисунка, что позволяет от векторных уравнений перейти к скалярным.

Положения маятников будем характеризовать углами отклонения от вертикальной оси  $\varphi_{1,2}$ , причем будем ограничиваться малыми (линейными) колебаниями маятников и считать, что  $\varphi_{1,2} \ll 1$ . Тогда для удлинения пружины  $\Delta x$  можно приближенно записать следующее выражение:

$$\Delta x \approx h(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (2)$$

Тогда для момента упругости пружины найдем

$$\begin{cases} M_1^{(k)} = kh^2(\varphi_2 - \varphi_1) \\ M_2^{(k)} = -kh^2(\varphi_2 - \varphi_1) \end{cases}, \quad (3)$$

а для момента силы тяжести

$$\begin{cases} M_1^{(g)} = m_1 g l_1 \varphi_1 \\ M_2^{(g)} = m_2 g l_2 \varphi_2 \end{cases}, \quad (4)$$

где  $m_{1,2}$  – массы маятников,  $l$  – расстояние от точек крепления до центров масс.

Момент управления маятниками запишем аналогично

$$\begin{cases} M_1^{(u)} = -m_1 l_1 u \\ M_2^{(u)} = -m_2 l_2 u \end{cases}. \quad (5)$$

Таким образом, из системы (1), с учетом (3) – (5), получим следующие уравнения:

$$\begin{cases} I_1 \ddot{\varphi}_1 = m_1 g l_1 \varphi_1 + kh^2(\varphi_2 - \varphi_1) - m_1 l_1 u \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 = m_2 g l_2 \varphi_2 - kh^2(\varphi_2 - \varphi_1) - m_2 l_2 u \end{cases}. \quad (6)$$

Введем собственную частоту колебаний изолированных маятников

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I}}. \quad (7)$$

Если маятники можно считать математическими, то  $I = ml^2$ ,  $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ . Тогда система

(6) примет вид

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \omega_1^2 \varphi_1 + \frac{kh^2}{I_1} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{u}{l_1}, \\ \ddot{\varphi}_2 = \omega_2^2 \varphi_2 - \frac{kh^2}{I_2} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{u}{l_2} \end{cases}, \quad (8)$$

где

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l_1}} \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l_2}} \end{cases}. \quad (9)$$

В качестве управляющего воздействия рассмотрим управление по принципу обратной связи следующего вида

$$u = a \cdot \text{sign}(bs + \dot{s}), \quad (10)$$

где  $s = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $a = \text{const}$ ,  $b = \text{const}$ .

Очевидно, что при  $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ , когда маятники находятся по разные стороны от вертикали с одинаковым отклонением, управление  $u$  не действует и положение маятников определяется жесткостью пружины  $k$ .

Целью данной работы является исследование динамики представленной механической системы, поиск коэффициентов  $a$ ,  $b$ , приводящих к стабилизации маятников в окрестности вертикального положения, определение областей управляемости в зависимости от параметров системы  $(k, m, l, h)$ .

### Исследование

Проанализируем частный случай, когда  $l_1 = l_2$  и  $m_1 = m_2$ . Система (8) переписывается следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \omega_1^2 \varphi_1 + \frac{kh^2}{I_1} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{u}{l_1} \\ \ddot{\varphi}_2 = \omega_2^2 \varphi_2 - \frac{kh^2}{I_2} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{u}{l_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\varphi}_1 = \omega^2 \varphi_1 + \frac{kh^2}{I} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{u}{l} \\ \ddot{\varphi}_2 = \omega^2 \varphi_2 - \frac{kh^2}{I} (\varphi_2 - \varphi_1) - \frac{u}{l} \end{cases}. \quad (11)$$

Найдем сумму  $s$  и разность  $d$  уравнений системы:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1 + \ddot{\varphi}_2 = \omega^2 (\varphi_1 + \varphi_2) - \frac{2u}{l} \\ \ddot{\varphi}_2 - \ddot{\varphi}_1 = \left( \omega^2 - \frac{2kh^2}{I} \right) (\varphi_2 - \varphi_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{s} = \omega^2 s - \frac{2u}{l} \\ \ddot{d} = \left( \omega^2 - \frac{2kh^2}{I} \right) d \end{cases}. \quad (12)$$

Очевидно, что сумма углов отклонения  $s$  пропорциональна усредненному положению маятников в пространстве, а их разность  $d$  – положению маятников по отношению друг к другу.

Как видно из системы (12), в случае, когда  $l_1=l_2$  и  $m_1=m_2$ , управление  $u$  влияет на усреднённое положение маятников в пространстве, но не влияет на их относительное положение. Жесткость пружины  $k$  влияет на относительное положение, но не влияет на усредненное.

Таким образом, управление  $u$  отвечает за стабилизацию маятников в случае, когда  $\varphi_2 - \varphi_1 \neq 0$ ,  $u = a \cdot \text{sign}(bs + \dot{s}) \neq 0$ , а коэффициент жесткости пружины  $k$ , когда  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ,  $u = a \cdot \text{sign}(bs + \dot{s}) = 0$ . Решение системы (12) имеет вид

$$\begin{cases} s = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{2u}{\omega^2 l} \\ d = D_1 e^{\sqrt{\alpha} t} + D_2 e^{-\sqrt{\alpha} t}, \quad \alpha = \omega^2 - \frac{2kh^2}{I} \end{cases}. \quad (13)$$

Пусть начальное значение суммы отклонений  $s(0) = s_0$ , а производной  $\dot{s}(0) = \dot{s}_0$ .

. Тогда решение задачи Коши первого уравнения имеет следующий вид:

$$s = \left( \frac{s_0}{2} + \frac{\dot{s}_0}{2\omega} - \frac{u}{\omega^2 l} \right) e^{\omega t} + \left( \frac{s_0}{2} - \frac{\dot{s}_0}{2\omega} - \frac{u}{\omega^2 l} \right) e^{-\omega t} + \frac{2u}{\omega^2 l}. \quad (14)$$

Исследуем фазовый портрет динамики системы (рис. 2) исходя из решения (14):

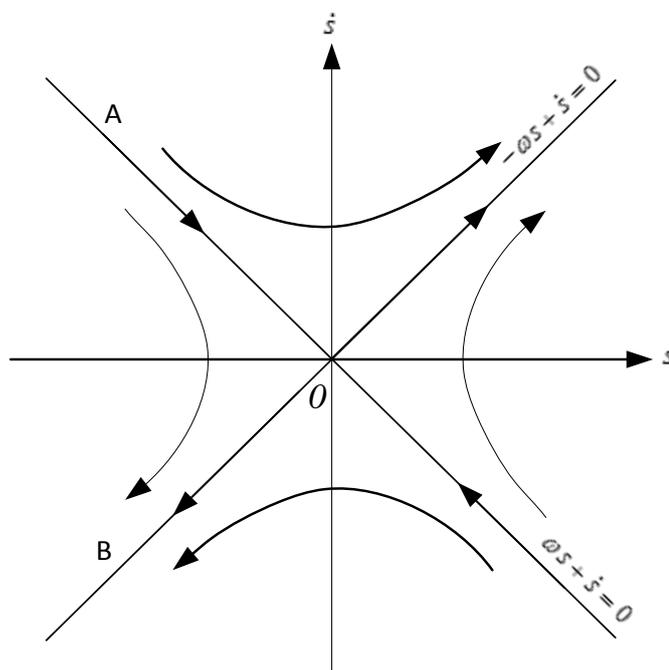


Рис. 2. Фазовый портрет динамики системы

При  $u=0$  видно, что попадая на прямую  $\omega s + \dot{s} = 0$ , фазовые координаты будут стремиться к нулевому положению равновесия. Таким образом, если управление  $u$  способно довести маятник до прямой  $\omega s + \dot{s} = 0$ , то система будет стабилизирована [3].

Очевидно, что для того, чтобы маятники пришли в устойчивое положение необходимо выполнение условия

$$\frac{s_0}{2} + \frac{\dot{s}_0}{2\omega} - \frac{u}{\omega^2 l} = 0. \quad (15)$$

Отсюда

$$u = \frac{\omega l}{2} (\omega s_0 + \dot{s}_0). \quad (16)$$

Так как  $u = a \cdot \text{sign}(bs + \dot{s})$ , представим (16) как

$$u = \frac{\omega l}{2} |\omega s_0 + \dot{s}_0| \text{sign}(\omega s_0 + \dot{s}_0). \quad (17)$$

Таким образом, коэффициенты управления, приводящие к устойчивому положению маятников:

$$\begin{cases} a = \frac{\omega l}{2} |\omega s_0 + \dot{s}_0| \\ b = \omega \end{cases} \quad (18)$$

Следует заметить, что данное устойчивое положение не является вертикалью, так как при выполнении (18) сумма углов  $s = \frac{2u}{\omega^2 l}$ . Однако, из решения (14) также следует, что в случае, если

$$\frac{s_0}{2} + \frac{\dot{s}_0}{2\omega} - \frac{u}{\omega^2 l} < 0, \quad (19)$$

управление будет возвращать маятник в сторону вертикального положения, в момент пересечения вертикали знак управления изменится на противоположный и процесс повторится. Таким образом, условие (19) является условием стабилизации маятников в окрестности вертикального положения. Исходя из этого, перепишем условие (18):

$$\begin{cases} a \geq \frac{\omega l}{2} |\omega s_0 + \dot{s}_0| \\ b = \omega \end{cases} \quad (20)$$

Полученное неравенство является условием стабилизации маятников.

Исследуем фазовый портрет системы исходя из условия (20). Из данного неравенства очевидно, что

$$\begin{cases} a \geq \frac{\omega l}{2} (\omega s_0 + \dot{s}_0), & \text{если } s_0 > 0, \dot{s}_0 > 0 \\ -a \leq \frac{\omega l}{2} (\omega s_0 + \dot{s}_0), & \text{если } s_0 < 0, \dot{s}_0 < 0 \end{cases} \quad (21)$$

Неравенства (21) можно отобразить на фазовой плоскости как область всех возможных начальных условий, приводящих к стабилизации системы при фиксированном управлении (рис. 3).

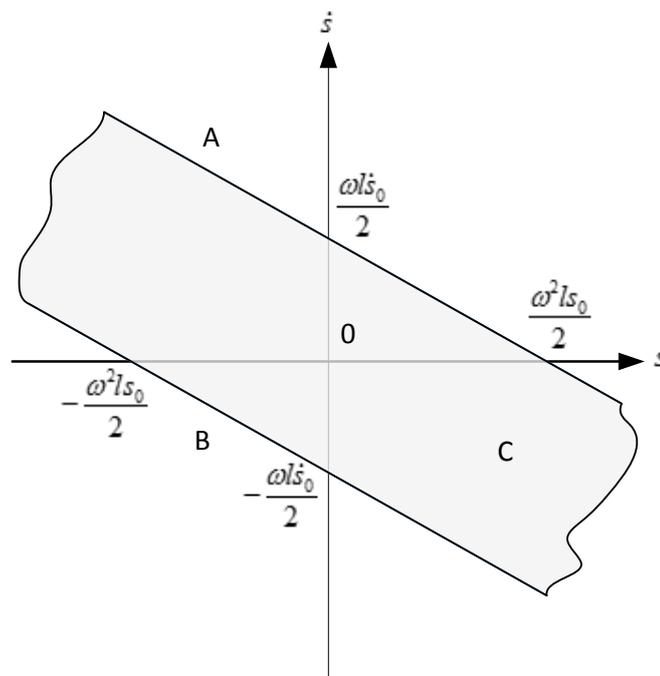


Рис. 3. Область устойчивости системы

Таким образом, область  $A$ , изображенная на рис. 3, определяет все возможные начальные состояния системы, при которых маятники невозможно привести в устойчивое вертикальное положение, а область  $B$  является областью устойчивости системы.

Рассмотрим второе уравнение системы (13). Очевидно, что в случае  $D_I=0$ , разность  $d$  будет стремиться к нулю, что соответствует стабилизации маятников относительно друг друга. Однако такая ситуация невозможна, так как величина  $D_I$  определяется начальными условиями, отличными от нуля и не зависит от управления  $u$ .

Таким образом, единственный параметр, влияющий на относительное положение маятников – это коэффициент  $\alpha$ . Если  $\alpha=0$ , то  $d=const$ , что соответствует случаю, когда момент силы тяжести уравновешивается возвращающим моментом силы упругости пружины. Если  $\alpha>0$ , то разность  $d$  неограниченно увеличивается с течением времени, что приведет к потере управляемости маятниками. Если  $\alpha<0$ , в решении появляются комплексные числа, что свидетельствует о появлении гармонического процесса. Таким образом, условием управляемости маятников является

$$\alpha \leq 0 \Rightarrow k \geq \frac{I\omega^2}{2h^2}. \quad (22)$$

Выше описывался случай, когда измерение параметров положения системы  $s$ ,  $\dot{s}$  и управляющее воздействие происходит мгновенно. Однако в реальных системах автоматического управления этот процесс занимает определенное время. Введем параметр  $T$  – временной интервал смены управления. Пусть управляющее воздействие, приложенное к маятникам переопределяется с периодом времени  $T$ . Исходя из этого, решение первого уравнения системы (13) можно записать в рекуррентной форме:

$$s_k(t) = \left( \frac{s_{k-1}}{2} + \frac{\dot{s}_{k-1}}{2\omega} - \frac{u_{k-1}}{\omega^2 l} \right) e^{\omega(t-t_{k-1})} + \left( \frac{s_{k-1}}{2} - \frac{\dot{s}_{k-1}}{2\omega} - \frac{u_{k-1}}{\omega^2 l} \right) e^{-\omega(t-t_{k-1})} + \frac{2u_{k-1}}{\omega^2 l}, \quad (23)$$

где  $t_k$  – момент времени смены управления,  $s_{k-1}$  – сумма углов в момент времени  $t_{k-1}$ , а  $u_{k-1}$  – управляющее воздействие на временных интервалах  $[t_{k-1}, t_k]$ .

Очевидно, что уравнение (23) описывает динамику системы в более реалистичных условиях, а также удобно в использовании для проведения численного моделирования.

### Результаты численного моделирования

Проведем численное моделирование динамики исследуемой системы с помощью уравнения (23). Рассмотрим фазовые портреты динамики системы при различных начальных условиях (рис. 4 – рис. 8).

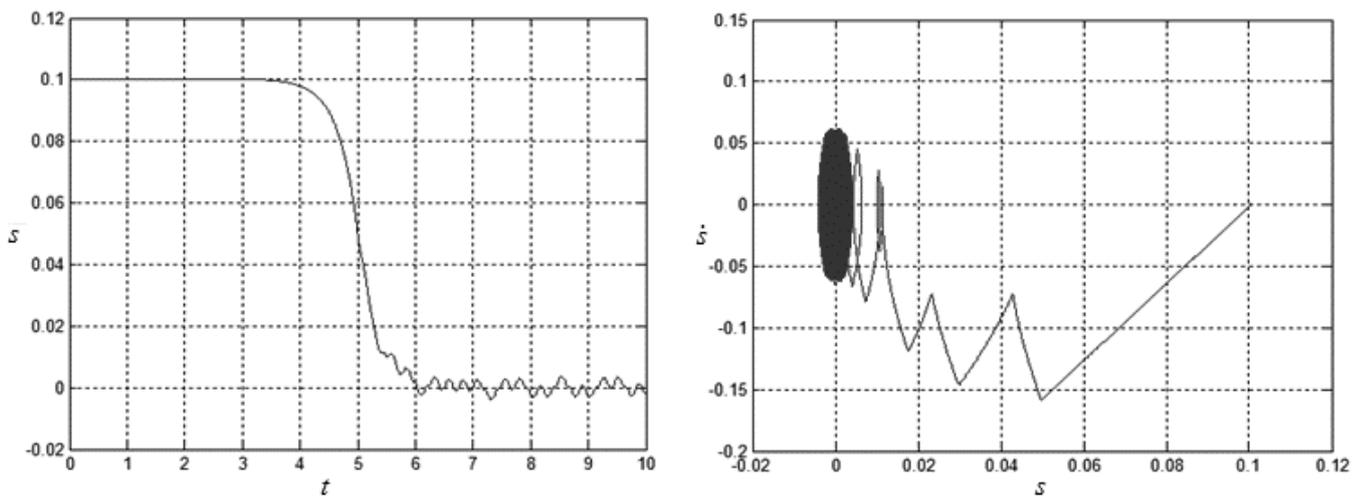


Рис 4. Слева – функция  $s(t)$ , справа – фазовый портрет, при разных начальных отклонениях и нулевой начальной скорости

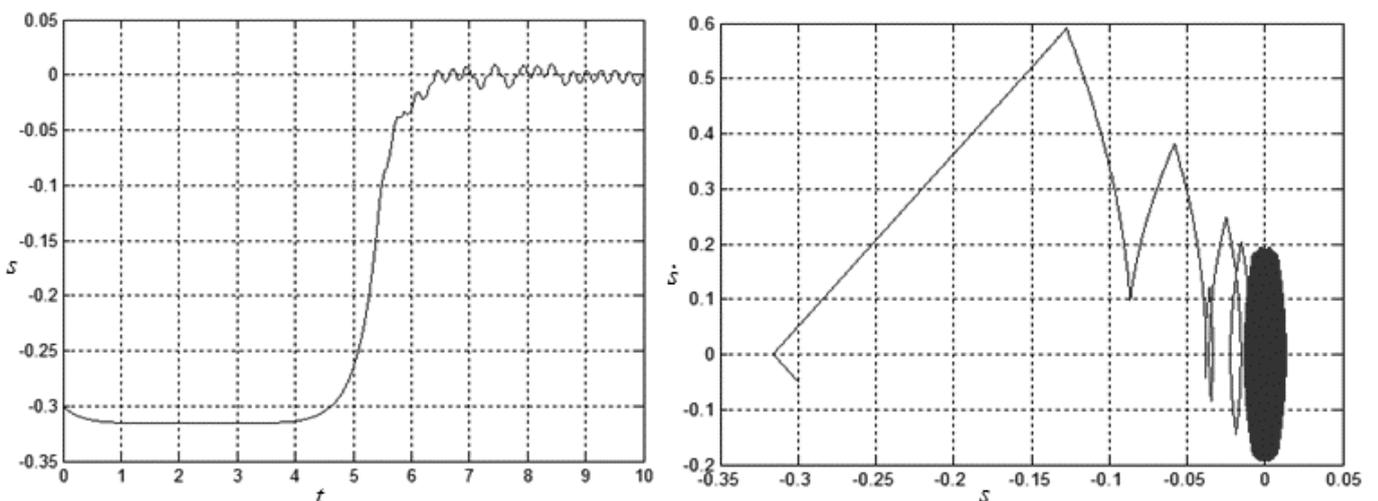


Рис. 5. Слева – функция  $s(t)$ , справа – фазовый портрет, при других начальных отклонениях и нулевой начальной скорости

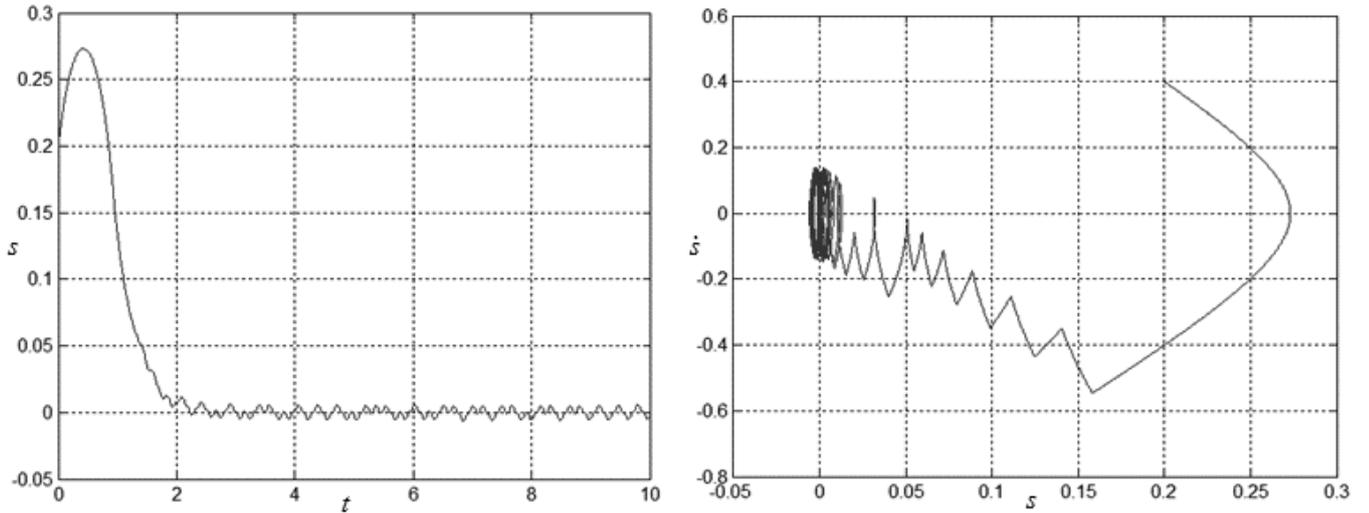


Рис. 6. Слева – функция  $s(t)$ , справа – фазовый портрет, при разных начальных отклонениях и ненулевой начальной скорости

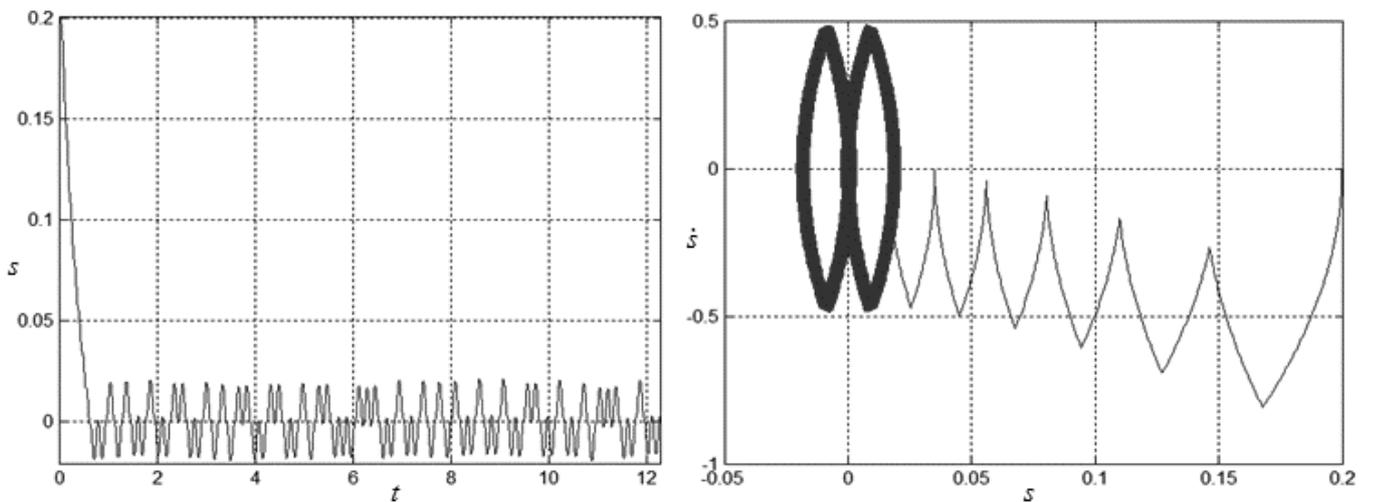


Рис. 7. Слева – функция  $s(t)$ , справа – фазовый портрет, при разных начальных отклонениях, ненулевой начальной скорости и больших значениях коэффициента  $a$

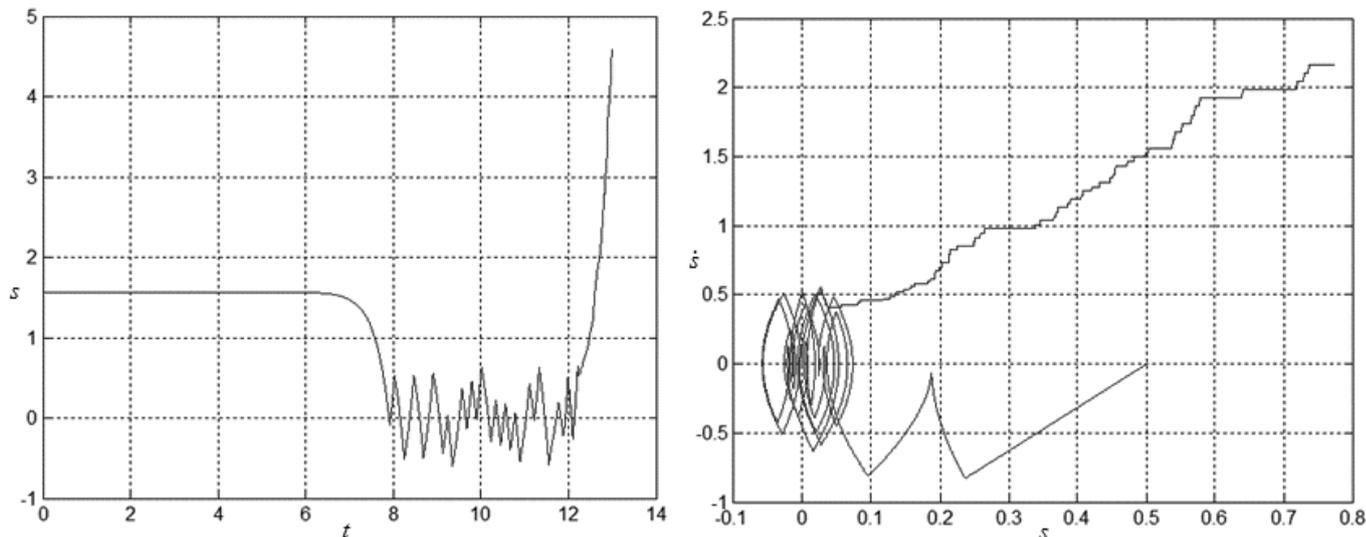


Рис. 8. Слева – функция  $s(t)$ , справа – фазовый портрет, при разных начальных отклонениях, ненулевой начальной скорости и при невыполнении условий стабилизации

Как видно из результатов моделирования, при выполнении условий стабилизации (21) и (22), система успешно стабилизируется в окрестности вертикального положения с помощью управления вида (10). Следует заметить, что условие (21) накладывает ограничение на величину коэффициента  $a$  только снизу, и как видно из рис. 7, даже достаточно большие значения этого коэффициента также приводят систему в устойчивое состояние, однако осцилляции маятников вокруг вертикальной оси происходят с большей амплитудой.

## Выводы

В процессе численного моделирования было проведено исследование динамики обратных связанных маятников, найдены области управляемости в зависимости от параметров системы  $(k, m, l, h)$ . Анализ динамики построенной модели показал, что стабилизация таких сложных неустойчивых систем как связанные осцилляторы, при соблюдении определенных условий, возможна с помощью достаточно простого управления, представляющего собой знакопеременное воздействие постоянное по абсолютной величине.

*Работа поддержана грантом РФФИ № 16-08-00312*

### **Библиографический список**

1. Stephenson A. On an induced stability // Philosophical Magazine. 1908. No.15. Pp. 233-236.
2. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // Успехи физических наук. 1951. № 44. С. 7–20.
3. Semenov M.E., Grachikov D.V., Mishin M.Y., Shevlyakova D.V. Stabilization and control models of systems with hysteresis nonlinearities // European Researcher. 2012. No. 20. Pp. 523 –528.
4. Semenov M.E., Shevlyakova D.V., Meleshenko P.A. Inverted pendulum under hysteretic control: stability zones and periodic solutions // Nonlinear Dynamics. 2014. No. 75. Pp. 247–256.
5. Semenov M.E., Solovyov A.M., Meleshenko P.A.. Elastic inverted pendulum with backlash in suspension: stabilization problem // Nonlinear Dynamics. 2015. No. 82. Pp. 677-688.

6. Elmer P.D., Patrick S.F. and Williams D.J. Genetic Algorithm On Line Controller for the Flexible Inverted Pendulum Problem // Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics. 2006. Vol. 10. No. 2. Pp. 65-71.
7. Tang Jiali, Ren Gexue. Modeling and Simulation of a Flexible Inverted Pendulum System // Tsinghua Science and Technology. 2009. Vol. 14. No. 2. Pp. 22-26.
8. Semenov M.E., Solovyov A.M., Semenov A.M., Gorlov V.A. and Meleshenko P.A. Elastic inverted pendulum under hysteretic nonlinearity in suspension: stabilization and optimal control // 5th ECCOMAS Thematic Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering (COMPDYN 2015). Greece. 25–27 May 2015. - Athens: National Technical University of Athens, 2015. Pp. 683-689.
9. Mikheev Y.V., Sobolev V.A., Fridman E.M. Asymptotic analysis of digital control systems // Automation and Remote Control. 1988. No. 49. Pp. 1175–1180.
10. Sazhin S., Shakked T., Katoshevski D., Sobolev V. Particle grouping in oscillating flows // European Journal of Mechanics - B/Fluids. 2008. Vol. 27. No. 2. Pp. 131–149.
11. Безгласный С.П., Батина Е.С., Пиякина Е.Е. Параметрическое управление с ограничением движениями двухмассового маятника // Труды МАИ. 2014. № 72. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=47314>
12. Безгласный С.П., Краснов М.В., Мухаметзянова А.А. Ограниченное управление движениями двухмассового маятника // Труды МАИ. 2015. № 79. URL: <http://www.mai.ru/science/trudy/published.php?ID=55758>