УДК 536.2

Математическое моделирование процессов теплопереноса в двухфазном материале с поглощающими проникающее излучение включениями в виде шарового слоя. 1. Иерархия упрощенных аналогов базовой модели теплопереноса

А.В. Аттетков, И.К. Волков, К.А. Гайдаенко, А.В. Котович

Московский государственный технический университет им Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва, 105005, Россия
e-mail: fn2@bmstu.ru, kseniyagaydaenko@gmail.com

DOI: 10.34759/tpt-2021-13-30-36

Поступила в редакцию 11.12.2020
После доработки 30.12.2020
Принята к публикации 30.12.2020

Разработана иерархия упрощенных аналогов базовой математической модели процесса теплопереноса в двухфазном материале с поглощающими проникающее излучение включениями в виде шарового слоя, включающая «уточненную модель сосредоточенной емкости», модель «сосредоточенная емкость» и «усеченную модель сосредоточенной емкости». Каждая из математических моделей иерархии предполагает тепловую изоляцию внешней границы шарового слоя и представляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа со специфическим краевым условием, фактически учитывающим наличие поглощающих включений в двухфазном материале. Определены достаточные условия, при удовлетворении которых упрощенные аналоги базовой математической модели позволяют с заданной точностью идентифицировать температурное поле двухфазного материала.

Ключевые слова: двухфазный материал, лазерное излучение, поглощающие включения в виде шарового слоя, температурное поле.

Введение

В проблеме лазерного инициирования взрывного разложения энергетических материалов важное место занимает «микроочаговая модель» процесса теплопереноса в двухфазном материале с поглощающими проникающее излучение сферическими включениями [1−7]. Известны трудности, возникающие при нахождении аналитического решения соответствующей смешанной задачи для системы двух уравнений в частных производных второго порядка параболического типа даже в простейшей ситуации наличия в прозрачном для излучения материале одного поглощающего включения сферической формы [8]. Возможный путь их преодоления связан с принятием разного рода допущений, приводящих к замене исходной (базовой) математической модели ее упрощенными аналогами [8, 9].

Теоретический и практически значимый интерес при изучении процессов теплопереноса в анализируемом двухфазном материале представляют поглощающие включения других геометрических форм. Изучению этого вопроса посвящены работы [10, 11], где в качестве объекта исследований рассмотрен изотропный материал с термически тонким поглощающим включением в виде шарового слоя. Дальнейшее развитие эти исследования получили в работе [12]. Предложена базовая математическая модель процесса теплопереноса в прозрачном для излучения двухфазном материале с поглощающими включениями в виде шарового слоя, и с использованием разработанного интегрального преобразования по пространственному переменному в аналитически замкнутом виде найдено решение соответствующей задачи нестационарной теплопроводности. Представленные результаты показывают, что при проведении параметрического анализа изучаемого температурного поля могут возникать значимые технические трудности, обусловленные сложным характером зависимости ядра и спектра собственных значений разработанного интегрального преобразования от параметров исходной модели. В связи с этим целесообразно, используя исходную математическую модель как базовую, разработать иерархию ее упрощенных аналогов с последующим определением диапазона возможного применения каждого из них. Рассмотрению этого вопроса и посвящены проводимые исследования.

Постановка задачи и базовая математическая модель

В качестве объекта исследований рассматривается двухфазный изотропный материал, содержащий включения радиуса R_1 в виде шарового слоя шириной $\Delta = R_1 - 1$ (регулярная ячеистая система [13]). Наличием газа или среды других физических свойств в шаровой полости единичного радиуса пренебрегаем. На объект исследований воздействует поток излучения с плотностью мощности f, для которого он абсолютно прозрачен, но может поглощаться шаровым слоем.

В предположении, что тепловой контакт в анализируемой системе является идеальным, и с учетом ранее полученных результатов [12] математическую модель процесса формирования температурного поля объекта исследований можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \chi\left\{\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho} + \Lambda f(\rho,\mathrm{Fo})\right\},$$

$$1 < \rho < R_1,\ \mathrm{Fo} > 0;$$

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho},$$

$$R_1 < \rho < R_2,\ \mathrm{Fo} > 0;$$

$$\theta(\rho,0) = 0;$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=1} = 0;$$

$$\left.\theta(\rho,\mathrm{Fo})\right|_{\rho=R_1-0} = \left.\theta(\rho,\mathrm{Fo})\right|_{\rho=R_1+0}; \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_1-0} = \Lambda\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_1+0};$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_2} = 0;$$

$$\left.\theta(\rho,\mathrm{Fo})\right|_{\mathrm{Fo}\ge 0} \in L^2_{\rho^2}\left[1,R_2\right];$$

$$\left.f\left(\rho,\mathrm{Fo}\right)\right|_{\mathrm{Fo}\ge 0} \in L^2\left[1,R_1\right];$$

$$\left.\theta(\rho,\mathrm{Fo})\right|_{1\le\rho\le R_2} \in L^2\left[0,+\infty\right);$$

$$\left.f\left(\rho,\mathrm{Fo}\right)\right|_{1\le\rho\le R_1} \in L^2\left[0,+\infty\right).$$

В математической модели (1) использованы следующие обозначения: $\mathrm{Fo} = \frac{a_s t}{r_0^2}$; $\rho = \frac{r}{r_0}$; $\theta = \frac{T - T_0}{T_* - T_0}$; $R_1 = \frac{r_0 + \tilde{\Delta}}{r_0}$; $R_2 = \frac{r_2}{r_0}$; $\chi = \frac{a_h}{a_s}$; $\Lambda = \frac{\lambda_s}{\lambda_h}$; $f = \frac{q r_0}{\lambda_s\left(T_* - T_0\right)}$; $T(r,t)$ – температура в момент времени t в точках изучаемой системы, отстоящих от центра шаровой полости радиуса r_0 на расстоянии r; λ – теплопроводность; a – температуропроводность; T_* – масштабная температура; индексы: s – изотропный материал; h – поглощающий шаровой слой ширины $\tilde{\Delta}$; 0 – начальное значение.

Математическая модель (1) представляет собой смешанную задачу для системы двух уравнений в частных производных второго порядка параболического типа при наличии теплового источника в системе. Трудности, возникающие при решении данной задачи аналитическими методами, подробно обсуждены в [12].

Иерархия упрощенных аналогов базовой математической модели

Для достижения основной цели исследований введем среднеинтегральную температуру

$$\left\langle\theta(\mathrm{Fo})\right\rangle=\frac{3}{R_1^3-1}\int\limits_1^{R_1}\theta(\rho,\mathrm{Fo})\rho^2 d\rho \qquad (2)$$

и воспользуемся следующими допущениями:

1) температура поглощающего шарового слоя на его границах равна среднеинтегральной температуре, т.е.

$$\theta(1+0,\mathrm{Fo})=\theta(R_1-0,\mathrm{Fo})=\left\langle\theta(\mathrm{Fo})\right\rangle,\ \mathrm{Fo}\geq 0; \quad (3)$$

2) «механизм» теплообмена в изучаемой системе может быть аппроксимирован законом Фурье–Ньютона–Рихмана [14, 15] с подлежащим идентификации параметром μ, являющимся аналогом коэффициента теплоотдачи, т.е.

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_1+0}=\mu\left\{\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R_1+0}-\left\langle\theta(\mathrm{Fo})\right\rangle\right\}. \quad (4)$$

Используемые допущения фактически означают принятие гипотезы о допустимости реализации идеи «уточненная модель сосредоточенной емкости» [16].

Умножив левую и правую части первого уравнения в (1) на $3(R_1^3-1)^{-1}$ с последующим интегрированием по пространственному переменному ρ в пределах от единицы до R_1, воспользовавшись условиями сопряжения при $\rho=R_1$, краевым условием $\rho=1$ и равенствами (2)–(4), трансформируем математическую модель (1) к виду:

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho},$$

$$R_1<\rho<R_2,\ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\frac{d\left\langle\theta(\mathrm{Fo})\right\rangle}{d\mathrm{Fo}}=\varepsilon^{-1}\left\{Q(\mathrm{Fo})+R_1^2\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_1+0}\right\},$$

$$\mathrm{Fo}>0;$$

$$\theta(\rho,0)=0=\left\langle\theta(0)\right\rangle;$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_1+0}=\mu\left\{\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\rho=R_1+0}-\left\langle\theta(\mathrm{Fo})\right\rangle\right\}; \quad (5)$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_2}=0;$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\geq 0}\in L^2_{\rho^2}\left[R_1,R_2\right];$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{R_1\leq\rho\leq R_2}\in L^2\left[0,+\infty\right];$$

$$Q(\mathrm{Fo})\in L^2\left[0,+\infty\right],$$

где

$$Q(\mathrm{Fo})\triangleq\int\limits_1^{R_1}f(\rho,\mathrm{Fo})\rho^2 d\rho;$$

$\varepsilon\triangleq\left(3\chi\Lambda\right)^{-1}\left(R_1^3-1\right)$ – определяющий параметр иерархии упрощенных аналогов базовой модели (1). По смыслу решаемой задачи параметр ε может принимать только положительные значения и зависит и от ширины поглощающего шарового слоя, и от симплекса подобия $\chi\Lambda$ физических свойств двухфазного материала.

По сложившейся терминологии (см., например, [16, 17]) упрощенный аналог (5) исходной математической модели (1) будем называть «уточненной моделью сосредоточенной емкости».

С учетом очевидных равенств [17]

$$\left\langle\theta(\mathrm{Fo})\right\rangle=\left.\left\{\theta(\rho,\mathrm{Fo})-\mu^{-1}\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right\}\right|_{\rho=R_1+0};$$

$$\frac{d\left\langle\theta(\mathrm{Fo})\right\rangle}{d\mathrm{Fo}}=\left.\left\{\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}-\mu^{-1}\frac{\partial^2\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}\partial\rho}\right\}\right|_{\rho=R_1+0}$$

допустимо эквивалентное представление математической модели (5), более удобное для ее практической реализации:

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho},$$

$$R_1<\rho<R_2,\ \mathrm{Fo}>0;$$

$$\theta(\rho,0)=0;$$

$$R_1^2\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_1}=$$

$$=-Q(\mathrm{Fo})+\varepsilon\left.\left\{\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}-\mu^{-1}\frac{\partial^2\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}\partial\rho}\right\}\right|_{\rho=R_1}; \quad (6)$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_2}=0;$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\geq 0}\in L^2_{\rho^2}\left[R_1,R_2\right];$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{R_1\leq\rho\leq R_2}\in L^2\left[0,+\infty\right);$$

$$Q(\mathrm{Fo})\in L^2\left[0,+\infty\right).$$

Заметим, что практическое применение разработанной математической модели (6) приводит к необходимости решения задачи идентификации параметра μ [16]. Относительно значения этого параметра можно высказать различные соображения. Например, его выбор можно проводить из решения задачи минимаксной оптимизации – задачи нахождения минимума максимального отклонения температуры контактной границы фаз двухфазного материала, определяемой математической моделью (6), от ее истинного значения, определяемого базовой моделью (1).

При $\mu = +\infty$ математическая модель (6) формально трансформируется в модель «сосредоточенная емкость»

$$\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\rho}\rho^2\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho},$$

$$R_1 < \rho < R_2,\ \mathrm{Fo} > 0;$$

$$\theta(\rho,0) = 0;$$

$$R_1^2\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_1} = -Q(\mathrm{Fo}) + \varepsilon\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=R_1};$$

$$\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\rho}\right|_{\rho=R_2} = 0; \qquad (7)$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{\mathrm{Fo}\ge 0} \in L^2_{\rho^2}\left[R_1,R_2\right];$$

$$\theta(\rho,\mathrm{Fo})\big|_{R_1\le\rho\le R_2} \in L^2\left[0,+\infty\right);$$

$$Q(\mathrm{Fo}) \in L^2\left[0,+\infty\right).$$

Реализация данной модели базируется на допущении, что среднеинтегральная температура (2) шарового слоя равна и температурам его границ, и температуре контактной границы фаз двухфазного материала, т.е.

$$\theta(1+0,\mathrm{Fo}) = \theta(R_1-0,\mathrm{Fo}) =$$

$$= \langle\theta(\mathrm{Fo})\rangle = \theta(R_1+0,\mathrm{Fo}),\ \mathrm{Fo} \ge 0.$$

Математическую модель (7) можно ассоциировать с принятием гипотезы, что поглощающий шаровой слой является термически тонким [10, 11]. Его наличие в реализуемой модели фактически учитывается краевым условием при $\rho = R_1$, явно содержащим производную безразмерной температуры по переменному Fo.

Дальнейшее упрощение этой модели связано с допущением

$$\varepsilon\left.\frac{\partial\theta(\rho,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}\right|_{\rho=R_1} \ll 1,$$

что позволяет трансформировать математическую модель (7) в «усеченную модель сосредоточенной емкости».

Базовую математическую модель (1) и три ее упрощенных аналога можно рассматривать как иерархию математических моделей процесса теплопереноса в двухфазном материале с поглощающими проникающее излучение включениями в виде шарового слоя. При этом все упрощенные аналоги базовой модели теплопереноса представляют собой смешанные задачи для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа со специфическим краевым условием на контактной границе фаз, фактически учитывающим наличие поглощающих включений в виде шарового слоя в двухфазном материале. Нахождение решений этих задач нестационарной теплопроводности в аналитически замкнутом виде является предметом дальнейших исследований авторов.

Условия применимости упрощенных аналогов базовой математической модели

Идентифицируем условия, при удовлетворении которых упрощенные аналоги базовой математической модели (1) определяют функцию $\theta(\rho,\mathrm{Fo})$, $R_1 \le \rho \le R_2$, $\mathrm{Fo} \ge 0$, с заданной точностью $\delta > 0$. Для достижения поставленной цели введем в рассмотрение множество моделей G_δ^k, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$, где $k = 0$ соответствует базовой модели, $k = 1$ – «уточненной модели сосредоточенной емкости», $k = 2$ – модели «сосредоточенная емкость», $k = 3$ – «усеченной модели сосредоточенной емкости». Можно утверждать, что параметрическая идентификация множеств G_δ^k упрощенных аналогов базовой модели теплопереноса эквивалентна факту установления условий применимости этих моделей.

Каждый этап упрощения базовой математической модели сопровождается ростом погрешности в определении температурного поля двухфазного материала, поэтому $\mathrm{G}_\delta^3 \subset \mathrm{G}_\delta^2 \subset \mathrm{G}_\delta^1$. При этом абсолютная погрешность

$$\sigma_k \triangleq \left|\theta_k(R_1,\mathrm{Fo}) - \theta_0(R_1,\mathrm{Fo})\right|,$$

$$k \in \{1,2,3,\}$$

должна иметь максимум при некотором фиксированном значении $\mathrm{Fo} \in \left(0,+\infty\right)$.

Если ввести в рассмотрение вектор определяющих параметров $\mathbf{\Pi} = \left[\chi\Lambda, \Delta, Q\right]^{\mathrm{T}}$ и функцию

$$E_k\left(\Pi\right) = \max_{\mathrm{Fo}} \left|\theta_k(R_1, \mathrm{Fo}) - \theta_{k-1}(R_1, \mathrm{Fo})\right|,$$

которая при каждом фиксированном значении $k \in \{1, 2, 3\}$ равна максимально возможной погрешности в определении температурного поля двухфазного материала, обусловленной k-ым этапом упрощения реализуемой модели, то можно считать, что

$$\mathrm{G}_{\delta}^{1} \triangleq \left\{\Pi \middle| E_1\left(\Pi\right) < \delta\right\};$$

$$\mathrm{G}_{\delta}^{2} \triangleq \left\{\Pi \middle| E_1\left(\Pi\right) + E_2\left(\Pi\right) < \delta\right\};$$

$$\mathrm{G}_{\delta}^{3} \triangleq \left\{\Pi \middle| E_1\left(\Pi\right) + E_2\left(\Pi\right) + E_2\left(\Pi\right) < \delta\right\}.$$

Идентификация допустимых множеств G_{δ}^{k}, $k \in \{1, 2, 3\}$, иерархии упрощенных аналогов базовой модели процесса теплопереноса в двухфазном материале и устанавливает условия применимости реализуемых математических моделей.

Заключение

Разработана иерархия упрощенных аналогов базовой модели процесса теплопереноса в двухфазном материале с поглощающими проникающее излучение включениями в виде шарового слоя. Каждая из математических моделей иерархии представляет собой смешанную задачу для уравнения в частных производных второго порядка параболического типа со специфическим краевым условием на контактной границе фаз, фактически учитывающим наличие поглощающих включений в двухфазном материале. Определены достаточные условия применимости упрощенных аналогов базовой математической модели, позволяющие с заданной точностью идентифицировать температурное поле двухфазного материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ассовский И.Г.** Физика горения и внутренняя баллистика. М.: Наука, 2005. 357 с.
2. **Чернай А.В.** О механизме зажигания конденсированных вторичных ВВ лазерным импульсом // Физика горения и взрыва. 1996. Т. 32. № 1. С. 11–19.
3. **Буркина Р.С., Морозова Е.Ю., Ципилев В.П.** Инициирование реакционноспособного вещества потоком излучения при поглощении его неоднородностями вещества // Физика горения и взрыва. 2011. Т. 47. № 5. С. 95–105.
4. **Кригер В.Г., Каленский А.В., Звеков А.А., Зыков И.Ю., Никитин А.П.** Процессы теплопереноса при лазерном разогреве включений в инертной матрице // Теплофизика и аэромеханика. 2013. Т. 20. № 3. С. 375–382.
5. **Адуев Б.П., Ананьева М.В., Звеков А.А., Каленский А.В., Кригер В.Г., Никитин А.П.** Микроочаговая модель лазерного инициирования взрывного разложения энергетических материалов с учетом плавления // Физика горения и взрыва. 2014. Т. 50. № 6. С. 92–99.
6. **Каленский А.В., Звеков А.А., Никитин А.П.** Микроочаговая модель с учетом зависимости коэффициента эффективности поглощения лазерного импульса от температуры // Химическая физика. 2017. Т. 36. № 4. С. 43–49.
7. **Каленский А.В., Газенаур Н.В., Звеков А.А., Никитин А.П.** Критические условия инициирования реакции в ТЭНе при лазерном нагреве светопоглощающих наночастиц // Физика горения и взрыва. 2017. Т. 53. № 2. С. 107–117.
8. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Температурное поле прозрачного для излучения твердого тела с поглощающим сферическим включением // Тепловые процессы в технике. 2018. Т. 10. № 5–6. С. 256–264.
9. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Процессы теплопереноса в твердом теле с поглощающим включением при воздействии лазерного излучения // Тепловые процессы в технике. 2019. Т. 11. № 5. С. 216–221.
10. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Процессы теплопереноса в твердом теле с поглощающим проникающее излучение включением в виде шарового слоя // Тепловые процессы в технике. 2020. Т. 12. № 1. С. 18–24.
11. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А.** Автомодельные процессы теплопереноса в прозрачном для излучения твердом теле с поглощающим включением в виде шарового слоя // Тепловые процессы в технике. 2020. Т. 12. № 5. С. 219–224.
12. **Аттетков А.В., Волков И.К., Гайдаенко К.А., Котович А.В.** Процессы теплопереноса в двухфазном материале с поглощающими проникающее излучение включениями в виде шарового слоя // Тепловые процессы в технике. 2020. Т. 12. № 10. С. 458–464.
13. **Нигматулин Р.И.** Динамика многофазных сред. В 2-х ч. М.: Наука, 1987. 464 с. (ч. I), 359 с. (ч. II).
14. **Лыков А.В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
15. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
16. **Пудовкин М.А., Волков И.К.** Краевые задачи математической теории теплопроводности в приложении к расчетам температурных полей в нефтяных пластах при заводнении. Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1978. 188 с.
17. **Аттетков А.В., Волков И.К.** «Уточненная модель сосредоточенной емкости» процесса теплопереноса в твердом теле со сферическим очагом разогрева, обладающим покрытием // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 2. С. 92–96.

Mathematical modelling of heat transfer processes in a two-phase material with inclusions in the form of a ball layer absorbing penetrating radiation. 1. Hierarchy of simplified analogs of the heat transfer basic model

A.V. Attetkov, I.K. Volkov, K.A. Gaydaenko, A.V. Kotovich

Bauman Moscow State Technical University
(national research university), Moscow, 105005, Russia
e-mail: fn2@bmstu.ru, kseniyagaydaenko@gmail.com

«Micro-focal» model of the heat transfer process in a two-phase material with spherical inclusions absorbing penetrating radiation occupies an important place in the problem of laser initiation of the energy materials explosive decomposition. Difficulties occurring while obtaining analytical solution to the corresponding mixed problem for the system of two equations in second order partial derivatives of the parabolic type even in the simplest situation of the presence of the single absorbing inclusion of spherical shape in the material transparent to radiation are well known. A possible way to overcome them is associated with adoption of various kinds of assumptions, leading to the initial (basic) mathematical model replacement with its simplified analogs with further definition of the range of possible application of each of them.

Absorbing inclusions of other geometric forms represent theoretical and significant practical interest while heat transfer processes studying in the analyzed two-phase material. Earlier, the authors formulated and solved the problem of determining the temperature field of the material transparent for radiation with absorbing inclusions in the form of the ball layer. The presented results demonstrate that while parametric analysis performing of the temperature field under study significant technical difficulties, stipulated by the complex nature of dependence of the kernel and specter of eigenvalues of the developed integral transformation on the parameters of the initial (basic) mathematical model my occur.

A hierarchy of simplified analogs of the basic mathematical model of the heat transfer process in a two-phase material with radiation-absorbing inclusions in the form of a ball layer has been developed, including a “refined model of concentrated capacitance”, a “concentrated capacitance” model and a "truncated model of concentrated capacitance”. Each of the mathematical models of the hierarchy assumes thermal isolation of the outer boundary of the ball layer and is a mixed problem for an equation in partial second-order derivatives of the parabolic type with a specific boundary condition that actually accounts for the presence of absorbing inclusions in the two-phase material.

Sufficient conditions, at which satisfaction the simplified analogues of the basic mathematical model allowed identifying the temperature field of the two-phase material with the specified accuracy were determined.

Keywords: two-phase material, laser radiation, absorbing inclusions in the form of a ball layer, temperature field.

REFERENCES

1. **Assovsky I.G.** *Fizika goreniya i vnutrennyaya ballistika* [Combustion physics and internal ballistics]. Moscow: Nauka, 2005. 357 p. In Russ.
2. **Chernai A.V.** On the mechanism of ignition of condensed secondary explosives by a laser pulse. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 1996, vol. 32, no. 1, pp. 8–15.
3. **Burkina R.S., Morozova E.Y., Tsipilev V.P.** Initiation of a reactive material by a radiation beam absorbed by optical heterogeneities of the material. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2011, vol. 47, no. 5, pp. 581–590.
4. **Kriger V.G., Kalenskii A.V., Zykov I.Y., Nikitin A.P., Zvekov A.A.** Heat-transfer processes upon laser heating of inert-matrix-hosted inclusions. *Thermophysics and Aeromechanics,* 2013, vol. 20, no.3, pp. 367–374
5. **Aduev B.P., Anan'eva M.V., Zvekov A.A., Kalenskii A.V., Kriger V.G., Nikitin A.P.** Miro-hotspot model for the laser initiation of explosive decomposition of energetic materials with melting taken into account. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2014, vol. 50, no. 6, pp. 704–710.
6. **Kalensky A.V., Zvekov A.A., Nikitin A.P.** Mikrochagovaya model' s uchetom zavisimosti koeffitsienta effektivnosti pogloshheniya lazernogo impul'sa ot temperatury [Micro-focal model taking into account the dependence of the efficiency coefficient of a laser pulse absorption on temperature]. *Khimicheskaya fizika – Chemical Physics,* 2017, vol. 36, no. 4, pp. 43–49. In Russ.

7. **Kalenskii A.V., Gazenaur N.V., Zvekov A.A., Nikitin A.P.** Critical conditions of reaction initiation in the PETN during laser heating of light-absorbing nanoparticles. *Combustion, Explosion, and Shock Waves*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 219–228.
8. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Temperaturnoe pole prozrachnogo dlya izlucheniya tverdogo tela s pogloshhayushhim sfericheskim vklyucheniem [Temperature field of transparent for radiation solid with absorbing spherical inclusion]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2018, vol. 10, no. 5–6, pp. 256–264. In Russ.
9. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Protsessy teploperenosa v tverdom tele s pogloshhayushhim vklyucheniem pri vozdejstvii lazernogo izlucheniya [Heat transfer processes in a solid with absorbing inclusion while the laser radiation impact]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2019, vol. 19, no. 5, pp. 216–221. In Russ.
10. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Protsessy teploperenosa v tverdom tele s pogloshhayushhim pronikayushhee izluchenie vklyucheniem v vide sharovogo sloya [Heat transfer processes in a solid with an inclusion, absorbing penetrating radiation, as a spherical layer]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2020, vol. 12, no. 1, pp. 18–24. In Russ. DOI 10.34759/tpt-2020-12-1-18-24
11. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A.** Avtomodel'nye protsessy teploperenosa v prozrachnom dlya izlucheniya tverdom tele s pogloshhayushhim vklyucheniem v vide sharovogo sloya [Self-similar heat transfer processes in a transparent for radiation solid body with absorbing inclusion in the form of a spherical layer]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2020, vol. 12, no. 5, pp. 219–224. In Russ. DOI: 10.34759/tpt-2020-12-5-219-224
12. **Attetkov A.V., Volkov I.K., Gaydaenko K.A., Kotovich A.V.** Protsessy teploperenosa v dvukhfaznom materiale s pogloshhayushhimi pronikayushhee izluchenie vklyucheniyami v vide sharovogo sloya [Heat transfer processes in two-phase material with spherical inclusions, absorbing penetrating radiation]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2020, vol. 12, no. 10, pp. 458–464. In Russ. DOI: 10.34759/tpt-2020-12-10-458-464
13. **Nigmatulin R.I.** *Dinamika mnogofaznykh sred. V 2-kh ch.* [Dynamics of multiphase media. In 2 parts]. Moscow: Nauka, 1987. 464 p. (part I), 359 p. (hart II). In Russ.
14. **Lykov A.V.** *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. In Russ.
15. **Kartashov E.M.** *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvyordyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. M.: Vysshaya shkola, 2001. 552 p. In Russ.
16. **Pudovkin M.A., Volkov I.K.** Kraevye zadachi matematicheskoj teorii teploprovodnosti v prilozhenii k raschetam temperaturnykh polej v neftyanykh plastakh pri zavodnenii [Boundary-value problems of the mathematical theory of heat conduction in application to calculations of temperature fields in oil reservoirs in water flooding]. Kazan: Publishing house of Kazan University, 1978. 188 p. In Russ.
17. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** «Utochnennaya model' sosredotochennoj emkosti» protsessa teploperenosa v tverdom tele so sfericheskim ochagom razogreva, obladayushhim pokrytiem [«A refined model of concentrated capacity» of heat transfer in a solid with coated spherical hot spot]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2016, vol. 8, no. 2, pp. 92–96. In Russ.