УДК 536.2

Температурное поле анизотропной разделительной стенки двух различных сред при локальном тепловом воздействии

А. В. Аттетков, И. К. Волков

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Москва;
e-mail: fn2@bmstu.ru

Поступила в редакцию 5.05.2018

Предложена математическая модель процесса формирования температурного поля в анизотропной разделительной стенке двух различных сред, подверженной локальному тепловому воздействию. Показано, что температурное поле объекта исследований представляют собой сумму двух аддитивных составляющих. Первая из составляющих определяется из решения задачи об определении температурного поля изотропной стенки, находящейся в условиях конвективного теплообмена с двумя различными средами при отсутствии внешнего теплового воздействия на объект исследований. Аналитическое решение рассматриваемой задачи нестационарной теплопроводности получено путем применения интегрального преобразования Лапласа. Идентифицирована вторая независимая аддитивная составляющая температурного поля, формируемого за счет воздействия на анизотропную стенку нестационарного теплового потока при совпадении ее начальной температуры с температурами внешних разделительных сред. С использованием композиции двухмерного экспоненциального преобразования Фурье и интегрального преобразования Лапласа в аналитически замкнутом виде найдено решение соответствующей задачи нестационарной теплопроводности. Полученные результаты подтверждают обнаруженный ранее эффект «сноса» температурного поля в анизотропном материале с анизотропией свойств общего вида.

Ключевые слова: анизотропная разделительная стенка, локальное тепловое воздействие, температурное поле, интегральные преобразования.

Введение

Повышенный интерес к аналитическим методам исследований процессов теплопереноса в твердых телах [1–4] в определенной степени связан с широким внедрением композиционных материалов в инженерную практику. Специфика математических моделей «анизотропной теплопроводности» [3–5] и необходимость решения реальных практически важных задач стимулируют интенсивное развитие новых высокопроизводительных и абсолютно устойчивых вычислительных методов [6–8], для тестирования которых желательно иметь решения соответствующих задач нестационарной теплопроводности, представленные в аналитически замкнутом виде, – тестовые задачи. А так как множество тестовых задач в «анизотропном разделе» математической теории теплопроводности весьма ограничено [5, 9–19] и аналитические методы нередко оказываются эффективным инструментом для решения прикладных задач рассматриваемого класса, среди которых отметим лишь задачи оптимизации и оценивания эффективных значений теплофизических и геометрических параметров элементов конструкций, то любой новый результат в этой области представляется полезным.

Основная цель проведенных исследований – решение задачи об определении процесса формирования температурного поля анизотропной разделительной стенки двух различных сред при локальном тепловом воздействии с последующим анализом полученных результатов.

Исходные допущения и математическая модель

Для достижения поставленной цели при построении исходной математической модели процесса формирования температурного поля $T(x_1, x_2, x_3, t)$ объекта исследований в фиксированной декартовой системе координат $Ox_1x_2x_3$ пространства $\mathbb{R}^3$ предполагалось, что:

1) объект исследований представляет собой анизотропную разделительную стенку двух различных сред

$$\Omega = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \colon \begin{matrix} -\infty < x_1 < \infty \\ -\infty < x_3 < \infty \\ 0 \le x_2 \le H \end{matrix} \right\}$$

постоянной толщины H, одна из поверхностей которой (плоскость $x_2=0$) находится как под воздействием внешней среды с температурой $T_{\text{со}}=\text{const}$, так и внешнего теплового потока с плотностью мощности $q(x_1, x_3, t)$;

2) вторая поверхность объекта исследований (плоскость $x_2=H$) находится лишь под воздействием внешней среды с температурой $T_{\text{сн}}=\text{const}$;

3) температуры $T_{\text{со}}$ и $T_{\text{сн}}$ разделенных сред различаются между собой и отличны от начальной температуры T_0 объекта исследований;

4) внешний тепловой поток $q(x_1, x_3, t)$ воздействует на поверхность $x_2=0$ разделительной стенки Ω в направлении, противоположном направлению ее внешней нормали;

5) при любом фиксированном значении временного переменного $t \ge 0$ функционал $q(x_1, x_3, t)$ интегрируем с квадратом по совокупности пространственных переменных x_1, x_3, т. е. [20]

$$q(x_1, x_3, t)\Big|_{(t \ge 0)} \in L^2\left(\mathbb{R}^2\right);$$

6) при любых фиксированных значениях пространственных переменных x_1, x_3 функционал $q(x_1, x_3, t)$ интегрируем с квадратом на полуинтервале $[0, +\infty)$ по временному переменному t, т. е.

$$q(x_1, x_3, t)\Big|_{\left([x_1, x_3]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2\right)} \in L^2[0, +\infty);$$

7) теплообмен в системе «объект исследований–внешняя среда» реализуется по закону Ньютона с постоянными коэффициентами теплоотдачи [2, 3] α_0 для среды при $x_2<0$ и $\alpha_{\text{н}}$ для среды при $x_2>H$.

Согласно допущениям, представленным выше, при использовании следующих обозначений:

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_0}, \theta_{c0} = \frac{T_{c0} - T_0}{T_0}; \theta_{ch} = \frac{T_{cH} - T_0}{T_0};$$

$$x = \frac{x_1}{l}, y = \frac{x_2}{l}, z = \frac{x_3}{l};$$

$$\text{Fo} = \frac{\lambda_{22}}{c\rho l^2} t;\ h = \frac{H}{l},\ \mu_{ij} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{22}},\ \text{Bi}^{(0)} = \frac{\alpha_0 l}{\lambda_{22}},\ \text{Bi}^{(h)} = \frac{\alpha_H l}{\lambda_{22}};$$

$$Q = \frac{ql}{\lambda_{22} T_0},$$

где l – используемая единица масштаба пространственных переменных; $\lambda_{ij} \equiv \lambda_{ji}$ – элемент тензора теплопроводности анизотропного материала объекта исследований, а c и ρ – его удельная массовая теплоемкость и плотность соответственно; функционал $\theta(x, y, z, \text{Fo})$, определяющий процесс формирования температурного поля, должен удовлетворять линейному дифференциальному уравнению в частных производных второго порядка параболического типа [3, 4]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial\text{Fo}} = \mu_{11}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2\mu_{12}\frac{\partial^2\theta}{\partial x \partial y} + 2\mu_{13}\frac{\partial^2\theta}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + 2\mu_{23}\frac{\partial^2\theta}{\partial y \partial z} + \mu_{33}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2},$$

$$\begin{bmatrix} x \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ 0 < y < h,\ \text{Fo} > 0, \tag{1}$$

нулевым начальным и неоднородными краевыми условиями [4, 21]:

$$\theta(x, y, z, \text{Fo})|_{\text{Fo}=0} = 0 \tag{2}$$

$$\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\Bigg|_{y=0} = -\text{Bi}^{(0)}\left(\theta_{c0} - \theta\right)\Big|_{y=0} - Q(x, z, \text{Fo}); \tag{3}$$

$$\left[\mu_{12}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial y} + \mu_{23}\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]\Bigg|_{y=h} = \text{Bi}^{(h)}\left(\theta_{ch} - \theta\right)\Big|_{y=h}. \tag{4}$$

При этом если предположить, что

$$\theta(x, y, z, \text{Fo}) = \theta_1(y, \text{Fo}) + \theta_2(x, y, z, \text{Fo}) \tag{5}$$

и потребовать, чтобы функционал $\theta_1(y, \text{Fo})$ являлся решением одномерной смешанной задачи:

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial\text{Fo}} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial y^2}, 0 < y < h, \text{Fo} > 0;$$

$$\theta_1(y,0)=0$$
$$\left[\frac{\partial\theta_1}{\partial y}-\mathrm{Bi}^{(0)}\theta_1\right]\Bigg|_{y=0}=-\mathrm{Bi}^{(0)}\theta_{c0}; \tag{6}$$
$$\left[\frac{\partial\theta_1}{\partial y}+\mathrm{Bi}^{(h)}\theta_1\right]\Bigg|_{y=h}=\mathrm{Bi}^{(h)}\theta_{ch};$$
$$\theta_1(y,\mathrm{Fo})\big|_{(y\in[0,h])}\in L^2[0,+\infty),$$

то с учетом (1)–(6) и исходных допущений функционал $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$ должен удовлетворять уравнению (1), начальному условию (2), краевым условиям (3), (4) при

$$\theta_{c0}=0=\theta_{ch}$$
$$Q(x,z,\mathrm{Fo})\big|_{(\mathrm{Fo}\geq 0)}\in L^2(\mathbb{R}^2); \tag{7}$$
$$Q(x,z,\mathrm{Fo})\big|_{([x,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2)}\in L^2[0,+\infty)$$

и требованиям

$$\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})\big|_{(0\leq y\leq h)\wedge(\mathrm{Fo}\geq 0)}\in L^2(\mathbb{R}^2);$$
$$\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})\big|_{([x,z]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2)\wedge(0\leq y\leq h)}\in L^2[0,+\infty). \tag{8}$$

Таким образом, реализуемость гипотезы, представленной равенством (5), означает, что искомое температурное поле представляет собой композицию двух его независимых аддитивных составляющих $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$ и $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$.

Температурное поле: аддитивная составляющая $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$

Согласно математической модели (6), функционал $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$ является оригиналом интегрального преобразования Лапласа, задаваемого парой линейных интегральных операторов [2]:

$$L[\cdot]\equiv\int_0^{\infty}\cdot\exp(-s\mathrm{Fo})d\mathrm{Fo};\ L^{-1}[\cdot]\equiv\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\cdot\exp(s\mathrm{Fo})ds, \tag{9}$$

и описывает процесс формирования температурного поля в изотропной разделительной стенке двух различных сред, обладающих различными постоянными температурами, отличными от начальной температуры объекта исследований. При этом предполагается, что теплообмен в системе «стенка–внешняя среда» реализуется по закону Ньютона [2].

Для определения функционала $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$ полагаем

$$U(y,s)\triangleq L[\theta_1(y,\mathrm{Fo})] \tag{10}$$

и в пространстве изображений интегрального преобразования Лапласа (9), применяемого по временному переменному Fo с использованием стандартных свойств оператора $L[\cdot]$, смешанную задачу (6) представляем в следующем виде:

$$\frac{d^2U}{dy^2}-sU=0,\ 0<y<h;$$
$$\left[\frac{dU}{dy}-\mathrm{Bi}^{(0)}U\right]\Bigg|_{y=0}=-\frac{\mathrm{Bi}^{(0)}\theta_{c0}}{s}; \tag{11}$$
$$\left[\frac{dU}{dy}+\mathrm{Bi}^{(h)}U\right]\Bigg|_{y=h}=\frac{\mathrm{Bi}^{(h)}\theta_{ch}}{s}.$$

Таким образом, изображение $U(y,s)$ функционала $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$ является решением краевой задачи (11) для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка, которое может быть найдено стандартными методами [22]:

$$U(y,s)=c_1(s)\exp\left(-y\sqrt{s}\right)+c_2(s)\exp\left(y\sqrt{s}\right),\ 0\leq y\leq h;$$
$$\begin{bmatrix}c_1(s)\\ c_2(s)\end{bmatrix}=\frac{1}{s\Delta(s)}\begin{bmatrix}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)\exp\left(h\sqrt{s}\right) & \left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)\\ \left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)\exp\left(-h\sqrt{s}\right) & \left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{Bi}^{(0)}\theta_{c0}\\ \mathrm{Bi}^{(h)}\theta_{ch}\end{bmatrix}; \tag{12}$$
$$\Delta(s)=\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)\exp\left(h\sqrt{s}\right)-\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)\exp\left(-h\sqrt{s}\right).$$

Для преодоления трудностей, связанных с переходом из пространства изображений в пространство оригиналов, представим комплексную функцию $\Delta^{-1}(s)$ суммой ее равномерно сходящегося функционального ряда:

$$\frac{1}{\Delta(s)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^k}{\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}\exp\left[-(2k+1)h\sqrt{s}\right]$$

и, согласно (12), представим изображение $U(y,s)$ в следующем виде:

$$U(y,s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{s}}F_k\left(y,\sqrt{s}\right);$$

$$F_k\left(y,\sqrt{s}\right)=\frac{\theta_0\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^k}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^k}\exp\left\{-(2kh+y)\sqrt{s}\right\}+\frac{\theta_h\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^k}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}\times$$

$$\times\exp\left\{-\left[(2k+1)h+y\right]\sqrt{s}\right\}+\frac{\theta_0\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}\exp\left\{-\left[(2k+2)h-y\right]\sqrt{s}\right\}+ \quad (13)$$

$$+\frac{\theta_h\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^k}{\sqrt{s}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}\exp\left\{-\left[(2k+1)h-y\right]\sqrt{s}\right\},$$

где

$$\theta_0\triangleq\mathrm{Bi}^{(0)}\theta_{c0},\ \theta_h\triangleq\mathrm{Bi}^{(h)}\theta_{ch}. \quad (14)$$

При этом если

$$f_k(y,\mathrm{Fo})\triangleq L^{-1}\left[F_k(y,s)\right], \quad (15)$$

то согласно (10), (13), (15) с учетом свойства линейности оператора $L^{-1}[\cdot]$ обращения интегрального преобразования Лапласа (9) и теоремы Эфроса [2] имеем:

$$\theta_1(y,\mathrm{Fo})=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi\mathrm{Fo}}}\int_0^{\infty}f_k(y,\rho)\exp\left(-\frac{\rho^2}{4\mathrm{Fo}}\right)d\rho, 0\le y\le h, \mathrm{Fo}\ge 0. \quad (16)$$

Таким образом, для завершения процедуры нахождения аддитивной составляющей $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$ искомого температурного поля $\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})$, согласно равенству (16), осталось определить оригиналы $\left\{f_k(y,\mathrm{Fo})\right\}_{k=0}^{\infty}$, для чего с учетом (15) и (13) достаточно воспользоваться теоремой запаздывания и формулой нахождения оригиналов для изображений, представленных рациональными дробями [2]:

$$f_k(y,\mathrm{Fo})=\theta_0 f_{k1}(y,\mathrm{Fo})J\left[\mathrm{Fo}-(2kh+\mathrm{y})\right]+\theta_h f_{k2}(y,\mathrm{Fo})J\left[\mathrm{Fo}-((2k+1)h+\mathrm{y})\right]+$$
$$+\theta_0 f_{k3}(y,\mathrm{Fo})J\left[\mathrm{Fo}-((2k+2)h-\mathrm{y})\right]+\theta_h f_{k4}(y,\mathrm{Fo})J\left[\mathrm{Fo}-((2k+1)h-\mathrm{y})\right];$$

$$f_{k1}(y,\mathrm{Fo})=\frac{1}{\mathrm{Bi}^{(0)}}+\lim_{s\to-\mathrm{Bi}^{(0)}}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left\{\frac{\left(s-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(s-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^k}{s\left(s+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^k}\exp\left\{-\left[\mathrm{Fo}-(2kh+y)\right]s\right\}\right\}+$$
$$+\lim_{s\to-\mathrm{Bi}^{(h)}}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left\{\frac{\left(s-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(s-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^k}{s\left(s+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}}\exp\left\{-\left[\mathrm{Fo}-(2kh+y)\right]s\right\}\right\}; \quad (17)$$

$$f_{k2}(y,\mathrm{Fo})=-\frac{1}{\mathrm{Bi}^{(h)}}+\lim_{s\to-\mathrm{Bi}^{(0)}}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left\{\frac{\left(s-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}\left(s-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^k}{s\left(s+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}\exp\left\{-\left[\mathrm{Fo}-((2k+1)h+y)\right]s\right\}\right\}+$$
$$+\lim_{s\to-\mathrm{Bi}^{(h)}}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left\{\frac{\left(s-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}\left(s-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^k}{s\left(s+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}}\exp\left\{-\left[\mathrm{Fo}-((2k+1)h+y)\right]s\right\}\right\};$$

$$f_{k3}\left(y,\mathrm{Fo}\right)=-\frac{1}{\mathrm{Bi}^{(0)}}+\lim_{s\to-\mathrm{Bi}^{(0)}}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left\{\frac{\left(s-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(s-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}{s\left(s+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}\exp\left\{-\left[\mathrm{Fo}-\left(\left(2k+2\right)h-y\right)\right]s\right\}\right\}+$$

$$+\lim_{s\to-\mathrm{Bi}^{(h)}}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left\{\frac{\left(s-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(s-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}{s\left(s+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}}\exp\left\{-\left[\mathrm{Fo}-\left(\left(2k+2\right)h-y\right)\right]s\right\}\right\};$$

$$f_{k4}\left(y,\mathrm{Fo}\right)=\frac{1}{\mathrm{Bi}^{(h)}}+\lim_{s\to-\mathrm{Bi}^{(0)}}\frac{1}{\left(k-1\right)!}\frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}}\left\{\frac{\left(s-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(s-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k}}{s\left(s+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}\exp\left\{-\left[\mathrm{Fo}-\left(\left(2k+1\right)h-y\right)\right]s\right\}\right\}+$$

$$+\lim_{s\to-\mathrm{Bi}^{(0)}}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{ds^k}\left\{\frac{\left(s-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(s-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k}}{s\left(s+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k}}\exp\left\{-\left[\mathrm{Fo}-\left(\left(2k+1\right)h-y\right)\right]s\right\}\right\}.$$

Температурное поле: аддитивная составляющая $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$

Согласно математической модели (1)–(4), (7), (8), функционалы $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$ и $Q(x,z,\mathrm{Fo})$ как функции временного переменного Fo являются оригиналами интегрального преобразования Лапласа (9), а как функции пространственных переменных x и z – оригиналами двухмерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье, задаваемого парой линейных интегральных операторов [23]:

$$\Phi\left[\cdot\right]\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\exp\left(-ipx-irz\right)dxdz;$$
$$\Phi^{-1}\left[\cdot\right]\equiv\frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdot\exp\left(ipx+irz\right)dpdr, \tag{18}$$

где i – «мнимая» единица [2]. При этом функционал $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$ описывает процесс формирования температурного поля анизотропной разделительной стенки двух различных сред, одна из поверхностей которой находится под воздействием внешнего теплового потока, а теплообмен с внешними средами, обладающими нулевой температурой, равной начальной температуре объекта исследований, реализуется по закону Ньютона [2].

Для определения аддитивной составляющей $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$ искомого температурного поля $\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})$ к математической модели (1)–(4), (7), (8) последовательно применяем сначала оператор $\Phi[\cdot]$ двухмерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье (18) по совокупности пространственных переменных x и z, а затем оператор $L[\cdot]$ интегрального преобразования Лапласа (9) по временному переменному Fo. Воспользовавшись стандартными свойствами этих операторов [2, 23] и следующими обозначениями:

$$\begin{gathered}V\left(p,y,r,\mathrm{Fo}\right)\triangleq\Phi[\theta_2\left(x,y,z,\mathrm{Fo}\right)];\\ a\left(p,r,\mathrm{Fo}\right)\triangleq\Phi\left[Q\left(x,z,\mathrm{Fo}\right)\right];\\ W\left(p,y,r,\mathrm{s}\right)\triangleq L\left[V\left(p,y,r,\mathrm{Fo}\right)\right];\\ A\left(p,r,\mathrm{s}\right)\triangleq L\left[a\left(p,r,\mathrm{Fo}\right)\right],\end{gathered} \tag{19}$$

приходим к краевой задаче для определения функционала $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$ в пространстве изображений композиции использованных интегральных преобразований:

$$\frac{d^2W}{dy^2}+2i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)\frac{dW}{dy}-$$
$$-\left(\mu_{11}p^2+2\mu_{13}pr+\mu_{33}r^2+s\right)W=0,\ 0<y<h;$$
$$\left[\frac{dW}{dy}+i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)W\right]\Bigg|_{y=0}=\mathrm{Bi}^{(0)}W\Big|_{y=0}-A\left(p,r,s\right); \tag{20}$$
$$\left[\frac{dW}{dy}+i\left(\mu_{12}p+\mu_{23}r\right)W\right]\Bigg|_{y=h}=-\mathrm{Bi}^{(h)}W\Big|_{y=h}.$$

Специфика краевой задачи (20) связана с наличием комплекса $i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)$ как в обыкновенном линейном дифференциальном уравнении, так и в краевых условиях. Поэтому ее решение естественно искать в следующем виде:

$$W(p,y,r,s)=B(p,y,r,s)\exp[-i(\mu_{12}p+\mu_{23}r)y], \tag{21}$$

где, согласно (20) и (21), изображение $B(p,y,r,s)$ должно удовлетворять упрощенному аналогу исходной краевой задачи (20):

$$\frac{d^2B}{dy^2}-\left[\delta(\rho,r)+s\right]B=0,\ 0<y<h;$$
$$\left[\frac{dB}{dy}-\mathrm{Bi}^{(0)}B\right]\Bigg|_{y=0}=-A(p,r,s); \tag{22}$$
$$\left[\frac{dB}{dy}+\mathrm{Bi}^{(h)}B\right]\Bigg|_{y=h}=0,$$

а положительная определенность квадратичной формы

$$\delta(p,r)= \\ =\left(\mu_{11}-\mu_{12}^2\right)p^2+2\left(\mu_{13}-\mu_{12}\mu_{23}\right)pr+\left(\mu_{33}-\mu_{23}^2\right)r^2 \tag{23}$$

при переходе к исходным обозначениям проверяется непосредственно с использованием критерия Сильвестра [24] и свойств тензора теплопроводности второго ранга [4]

С использованием стандартных методов [22] находим решение краевой задачи (22), (23) и представляем его в следующем виде:

$$B(p,y,r,s)=\sum_{k=0}^{\infty}A(p,r,s)\left\{\psi_{1k}(p,y,r,s)+\psi_{2k}(p,y,r,s)\right\};$$
$$\psi_{1k}(p,y,r,s)\triangleq\frac{\left[\psi(p,r,s)-\mathrm{Bi}^{(0)}\right]^k\left[\psi(p,r,s)-\mathrm{Bi}^{(h)}\right]^{k+1}}{\left[\psi(p,r,s)+\mathrm{Bi}^{(0)}\right]^{k+1}\left[\psi(p,r,s)+\mathrm{Bi}^{(h)}\right]^{k+1}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\left[(2k+2)h-y\right]\psi(p,r,s)\right\}, \tag{24}$$
$$\psi_{2k}(p,y,r,s)\triangleq\frac{\left[\psi(p,r,s)-\mathrm{Bi}^{(0)}\right]^k\left[\psi(p,r,s)-\mathrm{Bi}^{(h)}\right]^{k}}{\left[\psi(p,r,s)+\mathrm{Bi}^{(0)}\right]^{k+1}\left[\psi(p,r,s)+\mathrm{Bi}^{(h)}\right]^{k}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\left[2kh-y\right]\psi(p,r,s)\right\};$$
$$\psi(p,r,s)\triangleq\sqrt{s+\delta(p,r)}.$$

Таким образом, согласно (9), (21), (23) и (24), процедура определения аддитивной составляющей $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$ искомого температурного поля $\theta(x,y,z,\mathrm{Fo})$ в пространстве изображений композиции использованных интегральных преобразований (9) и (18) завершена.

При переходе из пространства изображений композиции использованных интегральных преобразований (9), (18) воспользуемся равенствами (21) и (19), представлением (24) изображения $B(p,y,r,s)$ в виде суммы равномерно сходящегося функционального ряда [25], теоремами умножения изображений (теоремами о свертках [2]) и аналогом теоремы запаздывания для двухмерного экспоненциального интегрального преобразования Фурье [23]. С учетом сказанного имеем:

$$\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})=\Phi^{-1}\left[L^{-1}\left[W(p,y,r,s)\right]\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\mathrm{Fo}}Q\left(x-\mu_{12}y-x',y,z-\right. \tag{25}$$
$$\left.-\mu_{23}y-z',\mathrm{Fo}-\tau\right)G_k\left(x',y,z',\tau\right)dx'dz'd\tau,$$

где оригинал

$$G_k(x,y,z,\mathrm{Fo})\triangleq\Phi^{-1}\left[L^{-1}\left[\psi_{1k}(p,y,r,s)+\psi_{2k}(p,y,r,s)\right]\right]. \tag{26}$$

При этом, согласно равенствам (26), (24) и теореме смещения для интегрального преобразования Лапласа [2],

$$G_k(x,y,z,\mathrm{Fo})=\Phi^{-1}\left[\exp\left(-\delta(p,r)\mathrm{Fo}\right)\right]g_k(\mathrm{Fo});$$
$$g_k(\mathrm{Fo})\triangleq L^{-1}\left[\frac{\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}{\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}\times\right.$$
$$\times\exp\left\{-\left((2k+2)h-y\right)\sqrt{s}\right\}+ \tag{27}$$
$$\left.+\frac{\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(\sqrt{s}-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k}}{\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}\left(\sqrt{s}+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k}}\exp\left\{-\left(2kh-y\right)\sqrt{s}\right\}\right].$$

Таким образом, для определения функционала $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$ с учетом равенств (25), (27) достаточно идентифицировать оригиналы $g_k(\mathrm{Fo})$ и $\Phi^{-1}[\exp(-\delta(p,r)\mathrm{Fo})]$.

Если ввести в рассмотрение оригинал

$$f_k(\mathrm{Fo})\triangleq L^{-1}\left[\frac{\left(s-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(s-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}{\left(s+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}\left(s+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k+1}}\times\right.$$
$$\times\exp\left\{-\left((2k+2)h-y\right)s\right\}+ \tag{28}$$
$$\left.+\frac{\left(s-\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^k\left(s-\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k}}{\left(s+\mathrm{Bi}^{(0)}\right)^{k+1}\left(s+\mathrm{Bi}^{(h)}\right)^{k}}\exp\left\{-\left(2kh-y\right)s\right\}\right],$$

принципиальная схема идентификации которого использована в предшествующем разделе и представлена равенствами (13)–(17), то с использованием теоремы Эфроса, теоремы о дифференцировании оригинала и теоремы об использовании изображения для вычисления значения оригинала при $\mathrm{Fo}=+0$ [2], с учетом равенств (27), (28) получаем:

$$g_k(\mathrm{Fo})=\frac{1}{2\sqrt{\pi \mathrm{Fo}^3}}\int_0^\infty \tau f_k(\tau)\exp\left(-\frac{\tau^2}{4\mathrm{Fo}}\right)d\tau. \quad (29)$$

Для идентификации оригинала $\Phi^{-1}[\exp(-\delta(p,r)\mathrm{Fo})]$, где положительно определенная квадратичная форма $\delta(p,r)$ представлена равенством (23), воспользуемся теоремой о возможности ее приведения к каноническому виду с использованием невырожденного ортогонального преобразования [24] с матрицей $\Pi=\left[\Pi_{ij}\right]\in M_{2x2}(\mathbb{R})$:

$$\begin{bmatrix}p\\r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Pi_{11} & \Pi_{12}\\ \Pi_{21} & \Pi_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p'\\r'\end{bmatrix}\Rightarrow\delta\left(\Pi_{11}p'+\Pi_{12}r',\ \Pi_{21}p'+\Pi_{22}r'\right)= \\ =\mu_p^2\left(p'\right)^2+\mu_r^2\left(r'\right)^2. \quad (30)$$

В этом случае, согласно (18), (30) и с использованием соответствующих таблиц [26], приходим к следующей цепочке равенств:

$$\Phi^{-1}\left[\exp\left(-\delta(p,r)\mathrm{Fo}\right)\right]= \\ =\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\delta(p,r)\mathrm{Fo}+i[x,z]\begin{bmatrix}p\\r\end{bmatrix}\right\}dpdr= \\ =\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\mu_p^2\mathrm{Fo}\left(p'\right)^2-\right. \\ -\mu_r^2\mathrm{Fo}\left(r'\right)^2+i\left(\Pi_{11}x+\Pi_{21}z\right)p'+ \quad (31) \\ \left.+i\left(\Pi_{12}x+\Pi_{22}z\right)r'\right\}dp'dr'= \\ =\frac{1}{\pi\mu_p\mu_r\mathrm{Fo}}\exp\left[-\frac{\left(\Pi_{11}x+\Pi_{21}z\right)^2}{4\mu_p^2\mathrm{Fo}}-\right. \\ \left.-\frac{\left(\Pi_{12}x+\Pi_{22}z\right)^2}{4\mu_r^2\mathrm{Fo}}\right].$$

Результаты и обсуждение

1. Процесс формирования температурного поля анизотропной разделительной стенки двух различных сред, обладающих различными постоянными температурами, отличными от начальной температуры объекта исследований, одна из поверхностей которого находится под воздействием внешнего теплового потока, а теплообмен в системе «стенка–внешняя среда» реализуется по закону Ньютона [2], представляет собой аддитивную композицию двух независимых процессов, первый из которых определен условиями, представленными выше, в которых разделительная стенка является изотропной и внешний тепловой поток отсутствует, а второй также определяется условиями, представленными выше, но температура разделяемых сред равна начальной температуре объекта исследований.

2. Процесс формирования искомого температурного поля разделительной стенки двух различных сред при локальном тепловом воздействии полностью определен равенствами (5), (16), (17), (25), (27), (29) и (31).

3. Согласно равенствам (25), (27) и (10), (13) оригиналы нулевых и первых приближений аддитивных составляющих $\theta_2(x,y,z,\mathrm{Fo})$ и $\theta_1(y,\mathrm{Fo})$ могут быть определены непосредственно с использованием соответствующих таблиц «изображение–оригинал» [2, 26].

4. Равенства, определяющие процесс формирования искомого температурного поля, значимо упрощаются при конкретизации структуры функционала $Q(x,z,\mathrm{Fo})$, определяющего внешний тепловой поток, воздействующий на объект исследований.

5. Согласно (18), (19), (21) и (25), в левой части последнего равенства подразумевается функционал $\theta_2(x-\mu_{12}y,y,z-\mu_{23}y,\mathrm{Fo})$ наличие которого отражает известный эффект «сноса» температурного поля в анизотропном материале [13, 14, 16].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964. 448 с.
2. **Лыков А. В.** Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. 600 с.
3. **Карташов Э. М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. М.: Высшая школа, 2001. 550 с.
4. **Формалёв В. Ф.** Теплопроводность анизотропных тел. Аналитические методы решения задач. М.: Физматлит, 2014. 312 с.
5. **Формалёв В. Ф.** Тепломассоперенос в анизотропных телах. Обзор // Теплофизика высоких температур. 2001. Т. 39. № 5. С. 810–832.
6. **Формалёв В. Ф., Ревизников Д. Л.** Численные методы. М.: Физматлит, 2004. 400 с.
7. **Формалёв В. Ф.** Теплоперенос в анизотропных твердых телах. Численные методы, тепловые волны, обратные задачи. М.: Физматлит, 2015. 280 с.
8. **Формалёв В. Ф., Колесник С. А.** Математическое моделирование аэрогазодинамического нагрева затупленных анизотропных тел. М.: Изд-во МАИ, 2016. 160 с.

9. **Формалёв В. Ф., Тюкин О. А.** Исследование трехмерной нестационарной теплопроводности в анизотропных телах на основе аналитического решения // Теплофизика высоких температур. 1998. Т. 36. № 2. С. 239–245.
10. **Формалёв В. Ф., Колесник С. А.** Аналитическое решение второй начально-краевой задачи анизотропной теплопроводности // Математическое моделирование. 2001. Т. 13. № 7. С. 21–25.
11. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Температурное поле анизотропной охлаждаемой пластины, находящейся под воздействием внешнего теплового потока // Изв. РАН. Энергетика. 2012. № 6. С. 108–117.
12. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Температурное поле охлаждаемой изотропной пластины с анизотропным покрытием, находящейся под воздействием внешнего теплового потока // Тепловые процессы в технике. 2013. Т. 5. № 2. С. 50–58.
13. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого находится под воздействием внешнего теплового потока // Тепловые процессы в технике. 2015. Т. 7. № 2. С. 73–79.
14. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Температурное поле анизотропного полупространства, подвижная граница которого содержит пленочное покрытие // Изв. РАН. Энергетика. 2015. № 3. С. 39–49.
15. **Формалёв В. Ф., Колесник С. А.** Аналитическое исследование теплопереноса в анизотропной полосе при задании тепловых потоков на границах // Инженерно-физический журнал. 2016. Т. 89. № 4. С. 973–982.
16. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Температурное поле анизотропного полупространства с подвижной границей, обладающей термически тонким покрытием, при его нагреве внешней средой // Тепловые процессы в технике. 2016. Т. 8. № 8. С. 378–384.
17. **Формалёв В. Ф., Колесник С. А., Кузнецова Е. Л., Селин И. А.** Аналитическое исследование теплопереноса в теплозащитных композиционных материалах с анизотропией общего виде при произвольном тепловом потоке // Механика композиционных материалов и конструкций. 2017. Т. 23. № 2. С. 168–182.
18. **Формалёв В. Ф., Колесник С. А., Кузнецова Е. Л.** Нестационарный теплоперенос в пластине с анизотропией общего вида при воздействии импульсных источников теплоты // Теплофизика высоких температур. 2017. Т. 55. № 5. С. 778–783.
19. **Аттетков А. В., Волков И. К.** Квазистационарное температурное поле анизотропной системы с подвижной границей, нагреваемой средой с осциллирующей температурой // Изв. РАН. Энергетика. 2017. № 5. С. 144–155.
20. **Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М.** Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
21. **Пехович А. И., Жидких В. М.** Расчет теплового режима твердых тел. Л.: Энергия, 1968. 304 с.
22. **Эльсгольц Л. Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука, 1969. 424 с.
23. **Снеддон И.** Преобразования Фурье. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 668 с.
24. **Беллман Р.** Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
25. **Будак Б. М., Фомин С. В.** Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1965. 608 с.
26. **Бейтмен Г., Эрдейи А.** Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1969. 344 с.

Temperature field of anisotropic separation wall of two different media under local thermal effect

A. V. Attetkov, I. K. Volkov

Bauman Moscow State Technical University (National Research University), Moscow
e-mail: fn2@bmstu.ru

Mathematical model of the temperature field forming in an anisotropic separation wall of two different media exposed to local thermal effects is proposed. It is shown that the temperature field of the studied object is the sum of the two additive components. The first additive component is being determined from the solution of the problem of determining the temperature field of the isotropic wall under conditions of convective heat exchange with two different media in the absence of an external thermal effect on the studied object. Analytical solution of the non-stationary heat conduction problem under consideration was obtained by applying the Laplace integral transformation. The second independent additive component of the temperature field formed due to the impact of non-stationary thermal flow on the anisotropic wall, when its initial temperature concurs with the temperatures of the external separation media, was identified. Solution of the corresponding problem of non-stationary thermal conductivity was found employing two-dimensional exponential Fourier transform and Laplace integral transform in analytical closed form. The obtained results confirm the previously observed “drift” effect of the temperature field in an anisotropic material with anisotropy properties of the general form.

Keywords: anisotropic separation wall, local thermal effect, temperature field, integral transformations.

REFERENCES

1. **Karslou G., Eger D.** *Teploprovodnost' tvyordyh tel* [Thermal conductivity of solids]. M.: Nauka, 1964. 488 p. In Russ.
2. **Lykov A.V.** *Teoriya teploprovodnosti* [Theory of heat conductivity]. Moscow: Vysshaya shkola, 1967. 600 p. In Russ.
3. **Kartashov E.M**. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tvyordyh tel* [Analytical methods in the theory of the thermal conductivity of solids]. M.: Vysshaya shkola, 2001. 552 p. In Russ.
4. **Formalev V.F.** Teploprovodnost' anizotropnyh tel. Analiticheskie metody resheniya zadach [Thermal conductivity of anisotropic bodies. Analytical methods for solving problems]. M.: Fizmatlit, 2014. 312 p.
5. **Formalev V.F.** Heat and mass transfer in anisotropic bodies. *High Temperature,* 2001, vol. 39, iss. 5, pp. 753–774.
6. **Formalev V.F., Reviznikov D.L.** *Chislennye metody* [Numerical methods] Moscow: Fizmatlit, 2004. 400 p. In Russ.
7. **Formalev V.F.** *Teploperenos v anizotropnyh tvyordyh telah. Chislennye metody, teplovye volny, obratnye zadachi* [Heat transfer in anisotropic solids. Numerical methods, heat waves, inverse problems]. M.: Fizmatlit, 2015. 280 p.
8. **Formalev V.F., Kolesnik S.A.** *Matematicheskoe modelirovanie aehrogazodinamicheskogo nagreva zatuplyonnyh anizotropnyh tel* [Mathematical modeling of aerogasdynamic heating of blunted anisotropic bodies]. M.: Izd-vo MAI, 2016. 160 p.
9. **Formalev V.F., Tyukin O.A.** Investigation of three-dimensional unsteady heat conduction in anisotropic bodies based on an analytical solution. *High Temperature*, 1998, vol. 36, no. 2, pp. 222–229.
10. **Formalev V.F., Kolesnik S.A.** Analiticheskoe reshenie vtoroj nachal'no-kraevoj zadachi anizotropnoj teploprovodnosti [Analytic solution of second initial boundary problem of anisotropic heat conduction]. *Matematicheskoe modelirovanie – Mathematical modeling*, 2001, vol. 13, no. 7, pp. 21–25. In Russ.
11. **AttetkovA.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole anizotropnoj okhlazhdaemoj plastiny, nakhodyashhejsya pod vozdejstviem vneshnego teplovogo potoka [Temperature field of anisotropic cooled plate under the influence of external heat flow]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2012, no. 6, pp. 108–117. In Russ.
12. **AttetkovA.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole okhlazhdaemoj izotropnoj plastiny s anizotropnym pokrytiem, nakhodyashhejsya pod vozdejstviem vneshnego teplovogo potoka [Temperature field of a cooled isotropic plate with anisotropic covering under influence of external heat flow]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2013, vol. 5, no. 2, pp. 50–58. In Russ.
13. **Attetkov A.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole anizotropnogo poluprostranstva, podvizhnaya granitsa kotorogo nakhoditsya pod vozdejstviem vneshnego teplovogo potoka [Temperature field of an anisotropic half-space with movable boundary being under influence of external heat flux]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 73–79. In Russ.
14. **AttetkovA.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole anizotropnogo poluprostranstva, podvizhnaya granitsa kotorogo soderzhit plenochnoe pokrytie [Temperature field of anisotropic half-space, the moving boundary of which contains a film coating]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2015, no. 3, pp. 39–49. In Russ.
15. **Formalev V.F., Kolesnik S.A.** Analytical investigation of heat transfer in an anisotropic band with heat fluxes assigned at the boundaries. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2016, vol. 89, no. 4, pp. 975–984.
16. **AttetkovA.V., Volkov I.K.** Temperaturnoe pole anizotropnogo poluprostranstva s podvizhnoj granitsej, obladayushhej termicheskitonkim pokrytiem, pri ego nagreve vneshnej sredoj [Temperature field of the anisotropic half-space with the moving boundary, which has a thermally thin coating, heated by convection]. *Teplovye protsessy v tekhnike – Thermal processes in engineering*, 2016, vol. 8, no. 8, pp. 378–384. In Russ.
17. **Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetcova E.L., Selin I.A.** Analiticheskoe issledovanie teploperenosa v teplozashhitnykh kompozitsionnykh materialakh s anizotropiej obshhego vide pri proizvol'nom teplovom potoke [Heat transfer analytical investigation in heat protective composites with general type anisotropy under arbitrary heat loading]. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktsij – Mechanics of composite materials and structures*, 2017, vol. 23, no. 2, pp. 168–182. In Russ.
18. **Formalev V.F., Kolesnik S.A., Kuznetsova E.L.** Time-dependent heat transfer in a plate with anisotropy of general form under the action of pulsed heat sources. *High Temperature*, 2017, vol. 55, no. 5, pp. 761–766.
19. **AttetkovA.V., Volkov I.K.** Kvazistatsionarnoe temperaturnoe pole anizotropnoj sistemy s podvizhnoj granitsej, nagrevaemoj sredoj s ostsilliruyushhej temperaturoj [Quasistationary temperature field of the anisotropic system with a moving boundary of the heated environment with temperature oscillating]. *Izv. RAN. Energetika – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Power Engineering*, 2017, no.5, pp. 144–155. In Russ.
20. **Koshlyakov N.S., Gliner E.B., Smirnov M.M.** *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoj fiziki* [Partial differential equations of mathematical physics]. Moscow: Vysshaya shkola, 1970. 712 p. In Russ.
21. **Pekhovich A.I., Zhidkih V.M.** *Raschyot teplovogo rezhima tvyordyh tel* [Calculation of the thermal regime of solids]. L.: Energiya, 1968. 304 p. In Russ.
22. **El'sgol'c L.E.** *Differencial'nye uravneniya i variacionnoe ischislenie* [Differential equations and calculus of variations]. Moscow: Nauka, 1969. 424 p. In Russ.
23. **Sneddon I.** *Preobrazovaniya Fur'e* [Fourier transforms]. M.: Izd-vo inostr. lit., 1955. 668 p. In Russ.
24. **Bellman R**. *Vvedenie v teoriyu matric* [Introduction to the theory of matrices]. M.: Nauka, 1969. 368 p. In Russ.
25. **Budak B.M., Fomin S.V.** *Kratnye integraly i ryady* [Multiple integrals and series]. Moscow: Nauka, 1965. 608 p. In Russ.
26. **Bejtmen G., Erdeji A.** *Tablicy integral'nyh preobrazovanij. Preobrazovaniya Fur'e, Laplasa, Mellina* [Tables of integral transformations. Fourier, Laplace, Mellin transformations]. M.: Nauka, 1969. 334 p. In Russ.