

УДК 517.9:521+523.3:629.7

**Численный метод поиска оптимальных дат попадания в лунную точку либрации L1, с учетом влияния нецентральности гравитационного поля Земли и возмущающего ускорения Солнца**

**Окишев Ю.А.**

*Энгельсский технологический институт - филиал Саратовского государственного технического университета имени Ю.А. Гагарина,*

*пл. Свободы, 17, Энгельс, 413100, Россия*

*e-mail: [y.okishev@gmail.com](mailto:y.okishev@gmail.com)*

**Аннотация**

Рассматривается баллистический перелет космического аппарата (КА) с низкой околоземной орбиты с двумя включениями химического ракетного двигателя (ХРД) в точку либрации L1 системы "Земля - Луна". Приведен алгоритм поиска оптимальной траектории двухимпульсного перелета в заданную дату попадания в точку либрации с учетом возмущающего ускорения Земли, Луны, Солнца, а также с учетом влияния нецентральности гравитационного поля Земли. Описано решение краевой и оптимизационной задач поиска оптимальной траектории. Численные решения получены методом Рунге-Кутты для системы дифференциальных уравнений движения КА в экваториальной геоцентрической системе координат, а также найдена оптимальная дата попадания в точку либрации. Проведено сравнение результатов решения с ранее полученными данными. Приведены оптимальные значения импульсов скорости, даты старта, положение

базовой орбиты, координаты точки старта для попадания в точку либрации L1 системы "Земля - Луна" в оптимальную дату.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, баллистический анализ, метод Рунге-Кутты, точка либрации, L1, Земля – Луна.

В данной статье рассматривается двухимпульсный баллистический перелет космического аппарата (КА) с помощью химического ракетного двигателя (ХРД) с низкой околоземной орбиты в точку либрации L1 системы "Земля - Луна". Предлагается найти оптимальную траекторию с учетом влияния нецентральности гравитационного поля Земли, вызванной второй зональной гармоникой, и возмущающего ускорения Солнца.

В качестве критерия оптимальности предлагается рассматривать значение суммарного импульса скорости. Задача проектно-баллистического анализа сводится к поиску минимального суммарного импульса скорости  $\Delta V_{\Sigma}$  и, как следствие, по формуле Циолковского (1), минимального потребного топлива для перелета. Такой подход является общепризнанным [1] для проведения баллистического анализа.

$$m_{\tau} = m_0 \left[ 1 - \exp \left( - \frac{\Delta V_{\Sigma}}{I_y} \right) \right], \quad (1)$$

где  $m_{\tau}$  - масса топлива КА,  $m_0$  - начальная масса КА,  $I_y$  - удельный импульс тяги, который задается двигательной установкой КА

Будем рассматривать схему перелета с двумя включениями ХРД между некомпланарными орбитами, где первый импульс скорости  $\Delta V_1$  (2) реализует

переход КА на перелетный эллипс, лежащий в плоскости базовой орбиты. Второй импульс скорости  $\Delta V_2$  (3) происходит в апогее перелетного эллипса и реализует поворот плоскости орбиты на требуемый угол  $\Delta i$ , а также переход на орбиту точки либрации L1 (рис 1). Для предварительного анализа используется методическая идея импульсной аппроксимации активных участков полета. Исходя из физических свойств коллинеарной точки либрации L1, очевидно, что точка L1 принадлежит радиус-вектору и плоскости орбиты Луны.

$$\overrightarrow{\Delta V_1} = \overrightarrow{V_{KA_0}} - \overrightarrow{V_0}, \quad (2)$$

где  $\overrightarrow{V_{KA_0}}$  - вектор скорости КА на опорной орбите необходимый для перехода на перелетный эллипс,  $\overrightarrow{V_0}$  - вектор скорости КА на круговой опорной орбите

$$\overrightarrow{\Delta V_2} = \overrightarrow{V_{L1}} - \overrightarrow{V_{KA_{L1}}} \quad (3)$$

Для вычисления абсолютных значений воспользуемся теоремой косинусов:

$$\Delta V_2 = \sqrt{V_{L1}^2 + V_{KA_{L1}}^2 - 2 \cdot V_{L1} \cdot V_{KA_{L1}} \cdot \cos \Delta i}, \quad (4)$$

где  $\overrightarrow{V_{L1}}$  - вектор скорости точки либрации L1,  $\overrightarrow{V_{KA_{L1}}}$  - вектор скорости КА в точке либрации L1,  $\Delta i$  - разница между наклонениями орбит.

Значение суммарного импульса скорости вычисляется по формуле:

$$\Delta V_{\Sigma} = \Delta V_1 + \Delta V_2. \quad (5)$$

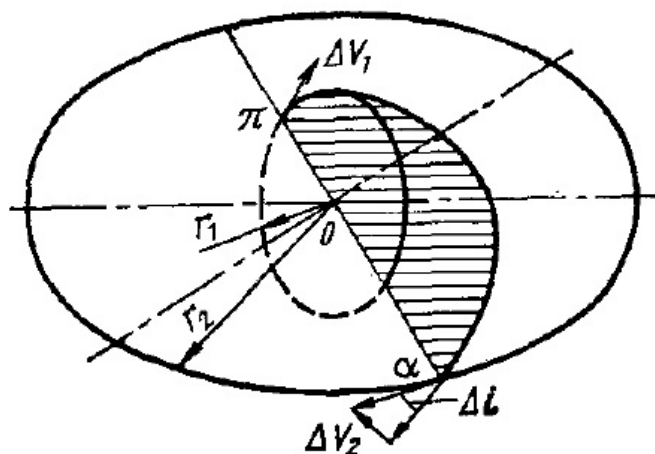


Рис.1 Схема двухимпульсного перелета.

Баллистический анализ проходит в геоцентрической экваториальной декартовой системе координат.

Наклонение низкой околоземной (базовой) орбиты примем за  $51,6^\circ$  (старт с космодрома "Байконур")

Для определения значений радиус-векторов и векторов скорости Луны и Солнца в произвольный момент времени, а также их проекции на оси x, y и z воспользуемся планетарием DE-403 производства JPL (Jet Propulsion Laboratory).

Из-за прецессии орбиты Луны ее наклонение к плоскости экватора Земли меняется с периодичностью 18,6 лет. Необходимо выбрать эпоху, когда наклонение орбиты Луны максимально, чтобы значение разности наклонений базовой и Лунной орбиты  $\Delta i$  было минимальным, и, как следствие по (4), минимальное значение второго импульса скорости.

За дату рассматриваемой эпохи выбираем 01 января 12 часов дня каждого рассматриваемого года. Найдем наклонение орбиты Луны по формулам:

$$\cos i_{\text{Луны}} = \frac{x_{\text{Луны}} \cdot V_{y\text{Луны}} - y_{\text{Луны}} \cdot V_{x\text{Луны}}}{|\sigma_{\text{Луны}}|} \quad (6)$$

$$\vec{\sigma}_{\text{Луны}} = \vec{r}_{\text{Луны}} \times \vec{V}_{\text{Луны}}. \quad (7)$$

где  $\vec{\sigma}_{\text{Луны}}$  - вектор интеграла площадей орбиты Луны,  $x_{\text{Луны}}$  и  $y_{\text{Луны}}$  – проекции радиус-вектора Луны  $\vec{r}_{\text{Луны}}$  на оси x и y соответственно,  $V_{x\text{Луны}}$  и  $V_{y\text{Луны}}$  – проекции вектора скорости Луны  $\vec{V}_{\text{Луны}}$  на оси x и y соответственно.

Наклонение орбиты Луны рассматривалось в период 2011 – 2030 года и рассчитывалось значение 01 января каждого года.

Таблица 1.

Зависимость наклонения орбиты Луны от рассматриваемой эпохи.

Год	$i_{\text{Луны}}, ^\circ$	Год	$i_{\text{Луны}}, ^\circ$	Год	$i_{\text{Луны}}, ^\circ$
2011	24,227	2018	20,075	2025	28,443
2012	22,513	2019	21,568	2026	28,258
2013	20,881	2020	23,253	2027	27,638
2014	19,526	2021	24,894	2028	26,584
2015	18,633	2022	26,327	2029	25,174
2016	18,396	2023	27,458	2030	23,544
2017	18,959	2024	28,195		

Как видно из Таблицы 1, наклонение орбиты Луны максимально и составляет  $28,443^\circ$  в 2025 году. Примем 2025 год за рассматриваемую эпоху, при этом будем считать, что в выбранную эпоху наклонение орбиты Луны не изменяется.

Дальнейший анализ будем проводить, зафиксировав дату попадания КА в точку либрации L1 системы "Земля-Луна".

Радиус-вектор точки либрации L1  $\vec{R}_{L1}$  системы "Земля - Луна" будем высчитывать через коэффициент  $k_{L1}$ , который был рассчитан А.П. Маркеевым [2], умножая его на радиус-вектор Луны в любой момент времени:

$$\vec{R}_{L1} = \vec{r}_{\text{Луны}} \cdot k_{L1}. \quad (8)$$

В случае системы "Земля - Луна",  $k_{L1} = 0,849$ .

Вектор скорости точки либрации L1  $\vec{V}_{L1}(V_{x_{L1}}, V_{y_{L1}}, V_{z_{L1}})$  найдем из равнобедренного треугольника (рис.2):

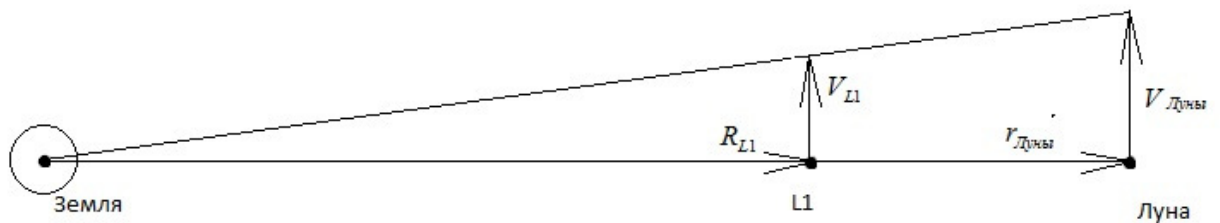


Рис.2. Положение радиус-векторов и векторов скорости Луны и точки либрации L1.

$$\vec{V}_{L1}(V_{x_{L1}}, V_{y_{L1}}, V_{z_{L1}}) = \vec{V}_{\text{Луны}} \cdot \frac{\vec{R}_{L1}}{r_{\text{Луны}}}. \quad (9)$$

Т.к. наклонение базовой орбиты  $i$  известно, найдем такой угол долготы восходящего узла  $\Omega$  перелетной орбиты, чтобы радиус-вектор точки либрации L1, в момент попадания КА в точку либрации, принадлежал бы плоскости базовой орбиты. В этом случае плоскость перелета будет совпадать с плоскостью базовой орбиты. Долготу восходящего узла перелетной орбиты найдем из условия перпендикулярности вектора площадей и радиус-вектора и, следовательно, скалярное произведение орта внешней нормали (10) и радиуса-вектора точки либрации  $\vec{R}_{L1}(x_{L1}, y_{L1}, z_{L1})$  равно нулю (11):

$$\vec{\sigma}^0 = \frac{\vec{\sigma}}{|\vec{\sigma}|} = [\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0] = [\sin i \sin \Omega, -\cos \Omega \sin i, \cos i]. \quad (10)$$

$$(\vec{R}_{L1}, \vec{\sigma}^0) = 0; x_{L1} \cdot \sin i \sin \Omega - y_{L1} \cdot \cos \Omega \sin i + z_{L1} \cdot \cos i = 0. \quad (11)$$

Разделим правую и левую части уравнения (11) на  $\sin i \cdot \sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}$ , получим:

$$\frac{x_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}} \cdot \sin \Omega - \frac{y_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}} \cdot \cos \Omega = -\frac{z_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}} \cdot \operatorname{ctgi}. \quad (12)$$

$$\text{Обозначим } \cos \varphi = \frac{y_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}}, \text{ а } \sin \varphi = \frac{x_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}}.$$

При этом:

$$\varphi = \begin{cases} \arccos\left(\frac{y_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}}\right), & \text{если } x_{L1} > 0 \\ -\arccos\left(\frac{y_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}}\right), & \text{если } x_{L1} < 0. \\ 0, & \text{если } x_{L1} = 0, y_{L1} > 0 \\ \pi, & \text{если } x_{L1} = 0, y_{L1} < 0 \end{cases} \quad (13)$$

то уравнение (12) примет вид

$$\sin \varphi \cdot \sin \Omega - \cos \varphi \cdot \cos \Omega = -\frac{z_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}} \cdot \operatorname{ctgi}. \quad (14)$$

После тригонометрических преобразований получаем:

$$\cos(\varphi + \Omega) = \frac{z_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}} \cdot \operatorname{ctgi}. \quad (15)$$

$$\Omega = \pm \arccos\left(\frac{z_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}} \cdot \operatorname{ctgi}\right) - \varphi. \quad (16)$$

Как известно, наклонение орбиты и долгота восходящего узла определяют положение плоскости орбиты в пространстве. С учетом выражения (16), существует

возможность построить две плоскости перелетной орбиты для попадания в точку либрации в заданную дату с соответствующими долготами восходящего узла (17).

$$\begin{aligned}\Omega_1 &= +\arccos\left(\frac{z_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}} \cdot ctgi\right) - \varphi \\ \Omega_2 &= -\arccos\left(\frac{z_{L1}}{\sqrt{x_{L1}^2 + y_{L1}^2}} \cdot ctgi\right) - \varphi\end{aligned}\quad (17)$$

Определим аргумент широты точки старта для каждого угла долготы восходящего узла.

Радиус-вектор точки старта  $\vec{R}_0(x_0, y_0, z_0)$  найдем из условия антиколлинеарности радиус-вектору точки либрации L1  $\vec{R}_{L1}(x_{L1}, y_{L1}, z_{L1})$ .

$$\vec{R}_0(x_0, y_0, z_0) = \frac{-\vec{R}_{L1}(x_{L1}, y_{L1}, z_{L1}) \cdot (R_E + H_0)}{|\vec{R}_{L1}(x_{L1}, y_{L1}, z_{L1})|}, \quad (18)$$

где,  $R_E = 6371 \text{ км}$  - экваториальный радиус Земли,  $H_0$  - высота базовой орбиты.

Запишем выражения для аргумента широты точки старта:

$$\begin{aligned}u_1 &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{x_0 \cdot \cos \Omega_1 + y_0 \cdot \sin \Omega_1}{R_E + H_0}\right), & \text{если } z_0 > 0 \\ -\arccos\left(\frac{x_0 \cdot \cos \Omega_1 + y_0 \cdot \sin \Omega_1}{R_E + H_0}\right), & \text{если } z_0 \leq 0 \end{cases} \\ u_2 &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{x_0 \cdot \cos \Omega_2 + y_0 \cdot \sin \Omega_2}{R_E + H_0}\right), & \text{если } z_0 > 0 \\ -\arccos\left(\frac{x_0 \cdot \cos \Omega_2 + y_0 \cdot \sin \Omega_2}{R_E + H_0}\right), & \text{если } z_0 \leq 0 \end{cases}\end{aligned}\quad (19)$$

В дальнейшем, первое решение  $(\Omega_1, u_1)$  будем называть траекторией перелета из нисходящего узла орбиты, а решение  $(\Omega_2, u_2)$  назовем траекторией перелета из восходящего узла орбиты. Для простоты и компактности записи дальнейших



выражений, долготу восходящего узла и аргумент широты будем записывать, как  $\Omega$  и  $u$  соответственно, принимая во внимание, что существует два решения.

Найденные долготы восходящего узла орбиты, аргумент широты точки старта и начальный радиус-вектор будем использовать в начальном приближении. В дальнейшем, нам придется варьировать  $\Omega$  и  $u$ , находя начальный радиус-вектор, для попадания в лунную точку либрации L1.

Запишем матрицу перехода от перицентральной к экваториальной системе координат:

$$B = \begin{pmatrix} \cos \omega \cdot \cos \Omega - \sin \omega \cdot \cos i \cdot \sin \Omega & -\sin \omega \cdot \cos \Omega - \cos \omega \cdot \cos i \cdot \sin \Omega & \sin i \cdot \sin \Omega \\ \cos \omega \cdot \sin \Omega + \sin \omega \cdot \cos i \cdot \cos \Omega & -\sin \omega \cdot \sin \Omega + \cos \omega \cdot \cos i \cdot \cos \Omega & -\sin i \cdot \cos \Omega \\ \sin \omega \cdot \sin i & \cos \omega \cdot \sin i & \cos i \end{pmatrix}, \quad (20)$$

где  $\omega$  - аргумент перицентра орбиты.

Положение КА в точке старта является перицентром перелетной орбиты, следовательно, в матрице (20)  $\omega = u$ .

Используя матрицу (20), можем выразить радиус-вектор точки старта КА как функцию углов  $\Omega, i, u$ :

$$\vec{R}_0 = (R_E + H_0) \cdot B(\Omega, i, u)^1, \quad (21)$$

где  $B(\Omega, i, u)^1$  - первый столбец матрицы (20).

Определим круговую скорость на базовой орбите:

$$V_{кр} = \sqrt{\frac{\mu_E}{R_E + H_0}}, \quad (22)$$

где  $\mu_E = 398600 \frac{км^3}{с^2}$  - гравитационный параметр Земли.

Выразим вектор скорости КА на базовой орбите в точке схода с нее как функцию углов  $i, \Omega, u$  :

$$\vec{V}_0 = V_{кр} \cdot B(\Omega, i, u)^2, \quad (23)$$

где  $B(\Omega, i, u)^2$  - второй столбец матрицы (20).

Найдем вектор начальной скорости  $\vec{V}_{KA_0}$  на гомановской перелетной орбите в точку либрации:

$$V_{\pi 12} = \sqrt{\frac{2 \cdot \mu_E}{R_E + H_0} - \frac{2 \cdot \mu_E}{R_E + H_0 + |\vec{R}_{L1}|}}. \quad (24)$$

В экваториальной системе координат:

$$\vec{V}_{KA1} = B(\Omega, i, u) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ V_{\pi 12} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

При этом,

$$\vec{V}_{KA1} = \vec{V}_0 + \Delta \vec{V}_1, \quad (26)$$

где  $\Delta \vec{V}_1(dV_r, dV_n, dV_b)$  - первый импульс скорости.  $dV_r, dV_n, dV_b$  - радиальная, трансверсальная и нормальная компоненты вектора импульса скорости соответственно.

Вектор скорости КА в начальной точке перелетной орбиты в экваториальных осях – функция долготы восходящего узла орбиты старта, аргумента широты точки старта на базовой орбите и компонент импульса скорости КА в орбитальных осях точки старта базовой орбиты.

$$\vec{V}_{КА1} = B(\Omega, i, u) \cdot \begin{pmatrix} dV_r \\ V_0 + dV_n \\ dV_b \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Если используется только трансверсальный импульс скорости, то (27) имеет более простое выражение:

$$\vec{V}_{КА1} = B(\Omega, i, u)^2 \cdot (V_0 + dV_n). \quad (28)$$

Найдем время перелета в первом приближении:

$$t_n = \pi \cdot \sqrt{\frac{(R_E + H_0 + |\vec{R}_{L1}|)^3}{2 \cdot \mu_E}}. \quad (29)$$

Запишем систему уравнений движения КА на перелетной орбите, с учетом гравитационного влияния Земли, Луны, Солнца, а также с учетом второй зональной гармоники.

$$\begin{cases} \frac{d\vec{R}_{КА}}{dt} = \vec{V}_{КА}; \\ \frac{d\vec{V}_{КА}}{dt} = -\frac{\mu_E \vec{R}_{КА}}{R_{КА}^3} - \frac{\mu_{Луны} \cdot \vec{r}_{Луны}(t)}{r_{Луны}^3(t)} - \frac{\mu_{Луны} \cdot (\vec{R}_{КА} - \vec{r}_{Луны}(t))}{(|\vec{R}_{КА} - \vec{r}_{Луны}(t)|)^3} - \frac{\mu_C \cdot \vec{r}_C(t)}{r_C^3(t)} - \frac{\mu_C \cdot (\vec{R}_{КА} - \vec{r}_C(t))}{(|\vec{R}_{КА} - \vec{r}_C(t)|)^3} + \vec{\Phi}_E, \end{cases} \quad (30)$$

где  $\vec{R}_{КА}(x_{КА}, y_{КА}, z_{КА})$  - радиус-вектор КА,  $\vec{V}_{КА}(Vx_{КА}, Vy_{КА}, Vz_{КА})$  - вектор скорости КА,  $\mu_{Луны} = 4902,72 \frac{км^3}{с^2}$  - гравитационный параметр Луны,  $\mu_C = 1,3271244 \cdot 10^{11} \frac{км^3}{с^2}$  - гравитационный параметр Солнца,  $\vec{r}_C(x_C, y_C, z_C)$  - радиус-вектор Солнца и его параметры, который определяется из планетария DE-403,  $\vec{\Phi}_E$  - возмущающее ускорение, вызванное второй зональной гармоники. Стоит отметить, что радиусы-

векторы Луны и Солнца в экваториальной геоцентрической системе координат являются функцией времени.

Запишем систему (30) в проекциях на оси  $x, y, z$  экваториальной геоцентрической системе координат:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_{KA}}{dt} = Vx_{KA}; \\ \frac{dy_{KA}}{dt} = Vy_{KA}; \\ \frac{dz_{KA}}{dt} = Vz_{KA}; \\ \frac{dVx_{KA}}{dt} = -\frac{\mu_E x_{KA}}{R_{KA}^3} - \frac{\mu_{Луны} x_{Луны}(t)}{r_{Луны}^3(t)} - \frac{\mu_{Луны} (x_{KA} - x_{Луны}(t))}{(|\vec{R}_{KA} - \vec{r}_{Луны}(t)|)^3} - \frac{\mu_C x_C(t)}{r_C^3(t)} - \frac{\mu_C (x_{KA} - x_C(t))}{(|\vec{R}_{KA} - \vec{r}_C(t)|)^3} + \\ + \frac{3 \cdot \mu_E \cdot J_2 \cdot R_E^2 \cdot x_{KA}}{2 \cdot R_{KA}^5} \cdot \left( \frac{5 \cdot z_{KA}^2}{R_{KA}^2} - 1 \right); \\ \frac{dVy_{KA}}{dt} = -\frac{\mu_E y_{KA}}{R_{KA}^3} - \frac{\mu_{Луны} y_{Луны}(t)}{r_{Луны}^3(t)} - \frac{\mu_{Луны} (y_{KA} - y_{Луны}(t))}{(|\vec{R}_{KA} - \vec{r}_{Луны}(t)|)^3} - \frac{\mu_C y_C(t)}{r_C^3(t)} - \frac{\mu_C (y_{KA} - y_C(t))}{(|\vec{R}_{KA} - \vec{r}_C(t)|)^3} + \\ + \frac{3 \cdot \mu_E \cdot J_2 \cdot R_E^2 \cdot y_{KA}}{2 \cdot R_{KA}^5} \cdot \left( \frac{5 \cdot z_{KA}^2}{R_{KA}^2} - 1 \right); \\ \frac{dVz_{KA}}{dt} = -\frac{\mu_E z_{KA}}{R_{KA}^3} - \frac{\mu_{Луны} z_{Луны}(t)}{r_{Луны}^3(t)} - \frac{\mu_{Луны} (z_{KA} - z_{Луны}(t))}{(|\vec{R}_{KA} - \vec{r}_{Луны}(t)|)^3} - \frac{\mu_C z_C(t)}{r_C^3(t)} - \frac{\mu_C (z_{KA} - z_C(t))}{(|\vec{R}_{KA} - \vec{r}_C(t)|)^3} + \\ + \frac{3 \cdot \mu_E \cdot J_2 \cdot R_E^2 \cdot z_{KA}}{2 \cdot R_{KA}^5} \cdot \left( \frac{5 \cdot z_{KA}^2}{R_{KA}^2} - 3 \right). \end{array} \right. , (31)$$

где  $J_2 = 0,0010826348$  – коэффициент 2-ой зональной гармоники геопотенциала Земли.

Обозначим  $\delta = \frac{3 \cdot J_2 \cdot R_E^2}{2}$ .

Систему уравнения (31) целесообразно "обезразмерить". За единицу расстояния примем радиус начальной орбиты, за единицу скорости – круговую скорость относительно Земли, соответствующую радиусу начальной орбиты.

$$UnitR = R_E + H_0; \quad UnitV = \sqrt{\frac{\mu_E}{UnitR}}; \quad UnitT = \frac{UnitR}{UnitV};$$

$$\mu_{CB} = \frac{\mu_C}{\mu_E}; \quad \mu_{ЛуныБ} = \frac{\mu_{Луны}}{\mu_E}; \quad \delta_B = \frac{\delta}{UnitR^2}$$
(32)

где  $UnitT$  - безразмерная величина времени,  $\mu_{CB}$  - безразмерная величина гравитационного потенциала Солнца,  $\mu_{ЛуныБ}$  - безразмерная величина гравитационного потенциала Луны.

Дату старта определим как разность между датой попадания в точку либрации L1  $T_k$  и временем перелета в сутках:

$$t_{0\delta} = \frac{T_k}{UnitT} - \frac{t_n}{UnitT}.$$
(33)

Запишем значения радиус-векторов КА, Солнца и Луны и их компоненты в безразмерных величинах в экваториальной геоцентрической системе координат. При этом радиус-векторы Солнца и Луны является функцией безразмерного времени  $t_\delta$ :

$$x_{КАБ} = \frac{x_{КА}}{UnitR}; \quad y_{КАБ} = \frac{y_{КА}}{UnitR}; \quad z_{КАБ} = \frac{z_{КА}}{UnitR}; \quad R_{КАБ} = \sqrt{x_{КАБ}^2 + y_{КАБ}^2 + z_{КАБ}^2}$$

$$x_{CB}(t_\delta) = \frac{x_C(t_{0\delta} + t_\delta)}{UnitR}; \quad x_{ЛуныБ}(t_\delta) = \frac{x_{Луны}(t_{0\delta} + t_\delta)}{UnitR};$$

$$y_{CB}(t_\delta) = \frac{y_C(t_{0\delta} + t_\delta)}{UnitR}; \quad y_{ЛуныБ}(t_\delta) = \frac{y_{Луны}(t_{0\delta} + t_\delta)}{UnitR};$$

$$z_{CB}(t_\delta) = \frac{z_C(t_{0\delta} + t_\delta)}{UnitR}; \quad z_{ЛуныБ}(t_\delta) = \frac{z_{Луны}(t_{0\delta} + t_\delta)}{UnitR};$$

$$r_{CB}(t_\delta) = \sqrt{x_{CB}^2(t_\delta) + y_{CB}^2(t_\delta) + z_{CB}^2(t_\delta)}; \quad r_{ЛуныБ}(t_\delta) = \sqrt{x_{ЛуныБ}^2(t_\delta) + y_{ЛуныБ}^2(t_\delta) + z_{ЛуныБ}^2(t_\delta)};$$
(34)

Запишем модуль разность векторов КА и Луны  $\left| \overrightarrow{R_{КА}} - \overrightarrow{r_{Луны}}(t) \right|$ , а также разность векторов КА и Солнца  $\left| \overrightarrow{R_{КА}} - \overrightarrow{r_C}(t) \right|$  в безразмерных величинах:

$$\begin{aligned} \left| \overrightarrow{R_{КАБ}} - \overrightarrow{r_{ЛуныБ}}(t_\delta) \right| &= \sqrt{(x_{КАБ} - x_{ЛуныБ}(t_\delta))^2 + (y_{КАБ} - y_{ЛуныБ}(t_\delta))^2 + (z_{КАБ} - z_{ЛуныБ}(t_\delta))^2}; \\ \left| \overrightarrow{R_{КАБ}} - \overrightarrow{r_{СБ}}(t_\delta) \right| &= \sqrt{(x_{КАБ} - x_{СБ}(t_\delta))^2 + (y_{КАБ} - y_{СБ}(t_\delta))^2 + (z_{КАБ} - z_{СБ}(t_\delta))^2}. \end{aligned} \quad (35)$$

Запишем систему уравнений (31) в безразмерном виде:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_{КАБ}}{dt_\delta} &= Vx_{КАБ}; \\ \frac{dy_{КАБ}}{dt_\delta} &= Vy_{КАБ}; \\ \frac{dz_{КАБ}}{dt_\delta} &= Vz_{КАБ}; \\ \frac{dVx_{КАБ}}{dt_\delta} &= \frac{x_{КАБ}}{R_{КАБ}^3} - \frac{\mu_{ЛуныБ} x_{ЛуныБ}(t_\delta)}{r_{ЛуныБ}^3(t_\delta)} - \frac{\mu_{ЛуныБ} (x_{КАБ} - x_{ЛуныБ}(t_\delta))}{\left| \overrightarrow{R_{КАБ}} - \overrightarrow{r_{ЛуныБ}}(t_\delta) \right|^3} - \frac{\mu_{СБ} x_{СБ}(t_\delta)}{r_{СБ}^3(t_\delta)} - \frac{\mu_{СБ} (x_{КАБ} - x_{СБ}(t_\delta))}{\left| \overrightarrow{R_{КАБ}} - \overrightarrow{r_{СБ}}(t_\delta) \right|^3} + \\ &+ \frac{\delta_B x_{КАБ}}{R_{КАБ}^5} \cdot \left( \frac{5 \cdot z_{КАБ}^2}{R_{КАБ}^2} - 1 \right); \\ \frac{dVy_{КАБ}}{dt_\delta} &= \frac{y_{КАБ}}{R_{КАБ}^3} - \frac{\mu_{ЛуныБ} y_{ЛуныБ}(t_\delta)}{r_{ЛуныБ}^3(t_\delta)} - \frac{\mu_{ЛуныБ} (y_{КАБ} - y_{ЛуныБ}(t_\delta))}{\left| \overrightarrow{R_{КАБ}} - \overrightarrow{r_{ЛуныБ}}(t_\delta) \right|^3} - \frac{\mu_{СБ} y_{СБ}(t_\delta)}{r_{СБ}^3(t_\delta)} - \frac{\mu_{СБ} (y_{КАБ} - y_{СБ}(t_\delta))}{\left| \overrightarrow{R_{КАБ}} - \overrightarrow{r_{СБ}}(t_\delta) \right|^3} + \\ &+ \frac{\delta_B y_{КАБ}}{R_{КАБ}^5} \cdot \left( \frac{5 \cdot z_{КАБ}^2}{R_{КАБ}^2} - 1 \right); \\ \frac{dVz_{КАБ}}{dt_\delta} &= \frac{z_{КАБ}}{R_{КАБ}^3} - \frac{\mu_{ЛуныБ} z_{ЛуныБ}(t_\delta)}{r_{ЛуныБ}^3(t_\delta)} - \frac{\mu_{ЛуныБ} (z_{КАБ} - z_{ЛуныБ}(t_\delta))}{\left| \overrightarrow{R_{КАБ}} - \overrightarrow{r_{ЛуныБ}}(t_\delta) \right|^3} - \frac{\mu_{СБ} z_{СБ}(t_\delta)}{r_{СБ}^3(t_\delta)} - \frac{\mu_{СБ} (z_{КАБ} - z_{СБ}(t_\delta))}{\left| \overrightarrow{R_{КАБ}} - \overrightarrow{r_{СБ}}(t_\delta) \right|^3} + \\ &+ \frac{\delta_B z_{КАБ}}{R_{КАБ}^5} \cdot \left( \frac{5 \cdot z_{КАБ}^2}{R_{КАБ}^2} - 3 \right). \end{aligned} \right. \quad (36)$$

Систему уравнений (36) будем решать методом Рунге-Кутты на интервале времени  $t_\delta \in [t_{0\delta}; \frac{T_K}{Unit}]$ . Запишем начальные значения положения и скорости КА в безразмерном виде. Начальные значения положения определим из уравнения (21).

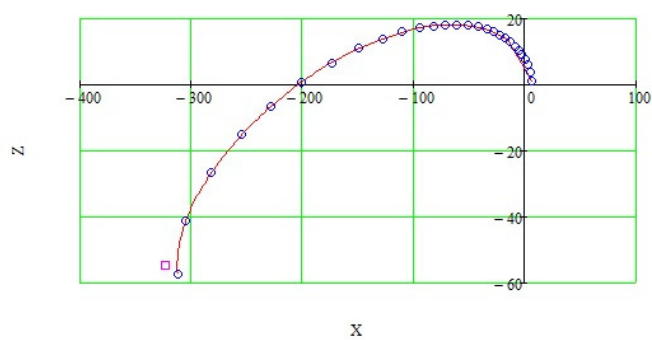
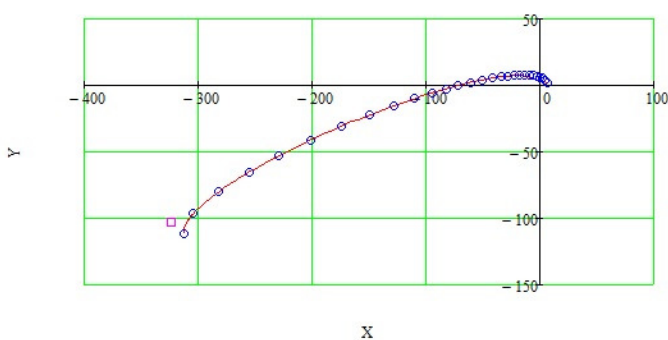
При этом компоненты  $x$ ,  $y$  и  $z$  начального положения соответствуют первой, второй и третьей строке матрицы (21), соответственно:

$$X_{0КАБ} = \frac{R_{0_1}}{UnitR}; \quad X_{0КАБ} = \frac{R_{0_2}}{UnitR}; \quad Z_{0КАБ} = \frac{R_{0_3}}{UnitR}. \quad (37)$$

Начальные значения скорости определим из уравнения (27) при условии, что  $dV_r, dV_n, dV_b$  равны нулю. При этом проекции скорости на оси  $x$ ,  $y$  и  $z$  соответствуют первой, второй и третьей строке матрицы (27) соответственно:

$$Vx_{0КАБ} = \frac{V_{КА1_1}}{UnitV}; \quad Vy_{0КАБ} = \frac{V_{КА1_2}}{UnitV}; \quad Vz_{0КАБ} = \frac{V_{КА1_3}}{UnitV}. \quad (38)$$

Решая систему уравнений (36) методом Рунге-Кутты в численном виде в произвольный момент времени попадания в точку либрации, мы можем построить траекторию движения КА (рис.3). Очевидно, что используя начальные данные из условия гомановского перелета в поле притяжения одного гравитирующего тела, попасть в заданную точку не представляется возможным, а, следовательно, транспортная задача не решена.



а) Проекция КА и точки L1 в плоскости X-Y      б) Проекция КА и точки L1 в плоскости X-Z

Рис.3 Проекция траектории КА и точки L1 системы "Земля - Луна" в плоскости X-Y (а) и плоскости X-Z (б). Точками и линией отображена траектория КА, квадратом – точка L1.

Для того чтобы обеспечить попадание КА в точку либрации L1 системы "Земля - Луна" и, соответственно, решить транспортную задачу необходимо решить краевую задачу. Определяем такие значения долготы восходящего узла, аргумента широты и первого трансверсального импульса скорости, которые обеспечивают попадание КА в точку либрации L1 в заданную дату попадания. При этом, поиск необходимых значений происходит в рамках решения системы уравнений (36).

По итогам решения краевой задачи мы можем определить компоненты скорости КА в точке либрации  $\vec{V}_{KAL1}(V_{x_{KAL1}}, V_{y_{KAL1}}, V_{z_{KAL1}})$ . Найдем второй импульс скорости исходя из разности векторов скорости точки L1  $\vec{V}_{L1}(V_{x_{L1}}, V_{y_{L1}}, V_{z_{L1}})$  и скорости точки КА в точке либрации:

$$\begin{aligned} \vec{\Delta V}_2 &= \vec{V}_{L1} - \vec{V}_{KAL1}; \\ |\vec{\Delta V}_2| &= \sqrt{(V_{x_{L1}} - V_{x_{KAL1}})^2 + (V_{y_{L1}} - V_{y_{KAL1}})^2 + (V_{z_{L1}} - V_{z_{KAL1}})^2}. \end{aligned} \quad (39)$$

Решим оптимизационную задачу, целью которой является поиск оптимальной даты старта, и как следствие, оптимальных значений долготы восходящего узла, аргумента широты и первого трансверсального импульса скорости для нахождения минимального суммарного импульса скорости КА, необходимого для решения транспортной задачи. Для этого, варьируем время перелета в окрестности найденного  $t_n$  из условия гомановского перелета. Для каждого нового значения времени перелета решаем методом Рунге-Кутты систему уравнений (36) и краевую



задачу. Таким образом, получаем несколько решений для попаданий в заданную дату в точку либрации L1 со своими значениями долготы восходящего узла, аргумента широты и первого импульса скорости. Находим такое время перелета, для которого суммарный импульс скорости минимален. На рис. 4 приведено решение оптимизационной задачи для одной из дат попадания в точку либрации и способов перелета - зависимость суммарного импульса скорости от времени перелета.

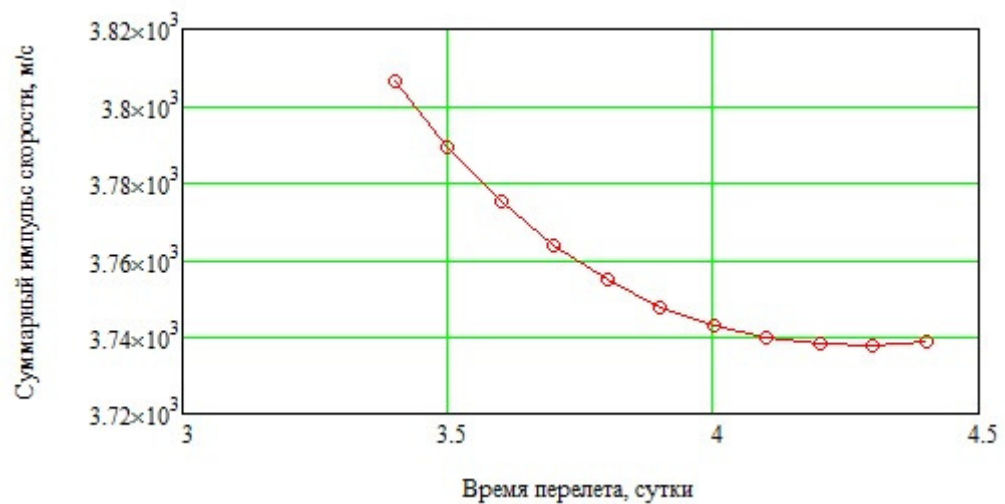


Рис.4 Зависимость суммарного импульса скорости от времени перелета.

В итоге, применяя описанный алгоритм для каждой даты попадания в точку либрации L1 системы "Земля-Луна" в выбранную эпоху, для обоих решений – перелета из окрестности восходящего и нисходящего узла орбиты, можно определить значение минимального суммарного импульса скорости, значения минимального первого и второго импульса скорости, оптимального времени перелета и координаты точки старта (долгота восходящего узла орбиты и аргумент широты) на базовой орбите КА.

Для определения оптимального значения суммарного импульса скорости большое значение имеет выбор даты попадания в точку либрации и схема перелета

(из окрестности восходящего или нисходящего узла орбиты). Ранее [3] были получены результаты решения без учета влияния второй зональной гармоники Земли и возмущающего ускорения Солнца. Стоит отметить, что перелет из окрестности восходящего узла орбиты ( $\Omega_2, u_2$ ) является более предпочтительным, с точки зрения энергетики перелета.

Приведем ранее полученные результаты математического моделирования перелета в точку либрации L1 в таблице 2. Результатами решения будем считать: значения второго импульса скорости, оптимального времени перелета, долготы восходящего узла базовой орбиты, аргумента широты точки старта, суммарного импульса скорости и модуль радиус-вектора Луны в зависимости от даты попадания в точку либрации L1 системы "Земля-Луна" для старта из окрестности восходящего узла орбиты.

Таблица 2.

Результаты математического моделирования перелета в лунную точку либрации L1 без учета второй зональной гармоники Земли и возмущающего ускорения Солнца при старте из окрестности восходящего узла орбиты.

Дата попадания с начала эпохи, дни	$\Delta V_2, \text{ м/с}$	$T_{opt}, \text{ дней}$	$\Omega, ^\circ$	$u, ^\circ$	$\Delta V_\Sigma, \text{ м/с}$	$\left  \overrightarrow{R}_{\text{Луны}} \right , 10^8 \text{ м}$
90	873,741	3,527	-129,531	-23,199	3958	3,596
92	802,393	3,523	-89,992	-34,544	3889	3,670
94	726,620	3,643	-56,42	-36,751	3817	3,776

96	679,608	3,81	-32,793	-29,919	3773	3,882
98	655,950	3,973	-16,509	-17,831	3751	3,967
100	644,094	4,11	-3,72	-3,705	3740	4,025
101	640,510	4,167	2,231	3,5	3737	4,043
102	638,228	4,213	8,25	10,563	3735	4,056
102.5	637,669	4,233	11,366	13,985	3735	4,06
103	637,607	4,25	14,6	17,305	3735	4,062
103.5	638,159	4,263	17,988	20,498	3735	4,063
104	639,467	4,277	21,57	23,523	3737	4,062
106	655,593	4,297	38,756	33,316	3753	4,039
108	697,085	4,26	62,599	37,308	3793	3,983
110	769,007	4,153	-266,269+360	33,423	3863	3,892
112	870,575	3,957	-230,792+360	22,170	3961	3,777
114	894,654	3,803	-194,74+360	5,29	3971	3,662
116	868,553	3,693	-158,396+360	-11,709	3977	3,585
118	791,648	3,497	-118,296+360	-27,129	3952	3,578
120	732,629	3,483	-78,794+360	-36,203	3903	3,644

Как видно, минимальное значение суммарного импульса скорости достигается, когда Луна находится районе своего апоцентра.

Рассмотрим изменение положения Солнца в течение года (рис.5).



Рис.5 Расстояние до Солнца в зависимости от даты с начала рассматриваемой эпохи.

Предлагается провести баллистический анализ в окрестностях максимальных (рис.6) и минимальных значений (рис.7) расстояния до Солнца. При этом проанализируем расстояние до Луны в рассматриваемых датах.



Рис.6а. Расстояние до Солнца в окрестности минимального значения в зависимости от даты с начала рассматриваемой эпохи.



Рис. 6б. Расстояние до Луны в зависимости от даты с начала рассматриваемой эпохи в окрестности минимального значения расстояния до Солнца.

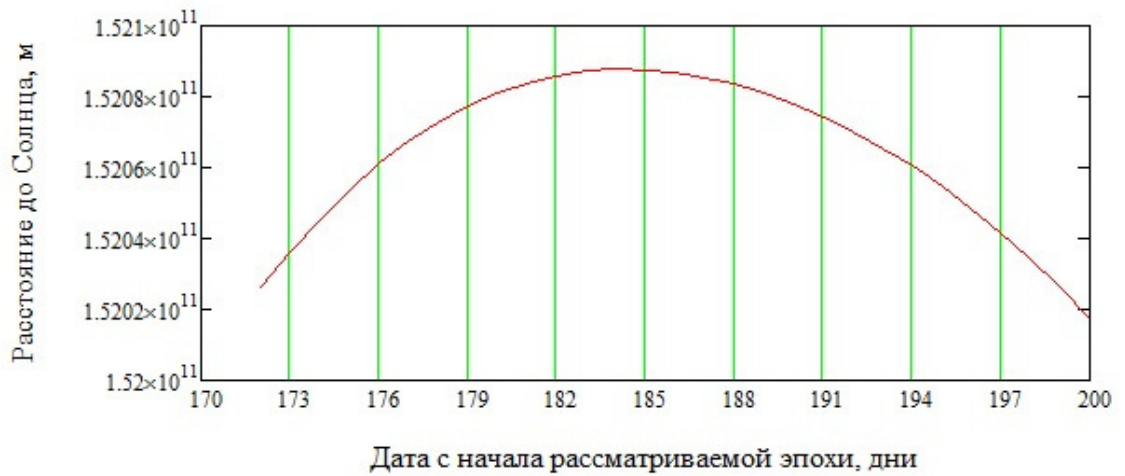


Рис.7а. Расстояние до Солнца в окрестности максимального значения в зависимости от даты с начала рассматриваемой эпохи.

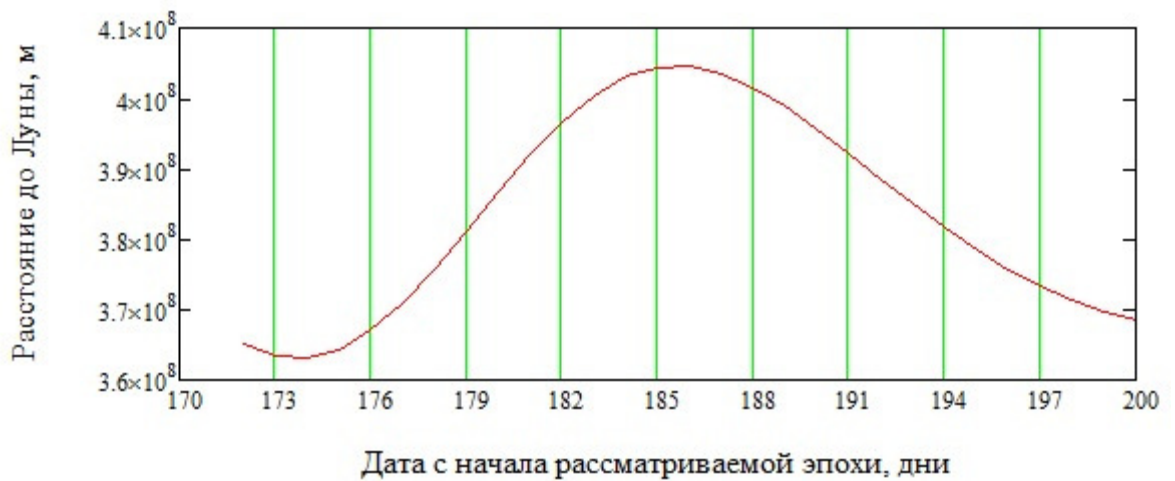


Рис. 76. Расстояние до Луны в зависимости от даты с начала рассматриваемой эпохи в окрестности максимального значения расстояния до Солнца.

Найдем значения суммарного импульса скорости, значения первого и второго импульса скорости, время перелета, долготу восходящего узла базовой орбиты, аргумент широты точки старта на базовой орбите при перелете из окрестности восходящего узла орбиты с учетом влияния второй зональной гармоники и возмущающего ускорения Солнца на интервале дат [-10;8] и [180; 188] дней с начала рассматриваемой эпохи. Значения приведем в таблице 3.

Таблица 3.

Результаты математического моделирования перелета в лунную точку либрации L1 с учетом влияния второй зональной гармоники и возмущающего ускорения Солнца.

Дата попадания с начала эпохи, дни	$\Delta V_2$ , м/с	$\Delta V_1$ , м/с	$T_{opt}$ , дней	$\Omega$ , °	$u$ , °	$\Delta V_{\Sigma}$ , м/с
-10	645,193	3098	4,013	-7,786	9,364	3744

-8	629,909	3099	4,187	4,226	4,652	3729
-7	627,781	3099	4,25	10,267	11,472	3727
-6	630,24	3099	4,29	16,725	18,004	3729
-4	651,927	3097	4,287	32,339	29,416	3749
-2	698,825	3095	4,183	54,444	36,239	3793
0	770,142	3092	4,02	-274,902	35,16	3863
2	851,413	3943	3,857	-238,881	25,681	3943
4	933,67	3090	3,7	-202,076	10,258	4023
6	858,368	3088	3,84	-163,303	-6,986	3946
8	847,128	3089	3,743	-132,064	-22,091	3936
180	675,082	3095	3,763	-16,545	-16,323	3770
182	649,038	3098	3,953	-3,352	-1,648	3747
184	634,01	3099	4,137	8,897	12,466	3733
185	631,685	3099	4,21	15,416	18,938	3731
186	634,053	3099	4,267	22,619	24,811	3733
188	657,853	3097	4,3	40,633	33,843	3755

Проведя анализ баллистического перелета, максимально приближенного к реальным условиям, можем сделать вывод, что оптимальной датой попадания КА в точку либрации L1 систем "Земля - Луна" при старте с низкой околоземной орбиты высотой 300 км является 24 декабря 2024 года в 12:00. Наклонение и долгота восходящего узла базовой орбиты равны  $i = 51,6^\circ$  и  $\Omega = 10,267^\circ$ . Суммарный импульс

скорости равен  $\Delta V_{\Sigma} = 3727 \text{ м/с}$ , первый и второй импульс скорости равны  $\Delta V_1 = 3099 \text{ м/с}$  и  $\Delta V_2 = 627,781 \text{ м/с}$  соответственно. Координаты точки старта на базовой орбите в экваториальной геоцентрической системе координат:  $X_{КА0} = 6286154,3 \text{ м}$ ,  $Y_{КА0} = 1976130,821 \text{ м}$ ,  $Z_{КА0} = 1039795,634 \text{ м}$ . Дата старта КА с базовой орбиты при которой реализуется оптимальный перелет в точку либрации – 6:00 20 декабря 2024г.

За счет выбора даты, который учитывает положение Солнца, возможно снизить значение суммарного импульса скорости на, примерно, 8 м/с.



## Библиографический список

1. Константинов М.С. Механика космического полета: учеб. для втузов / М. С. Константинов, Е. Ф. Каменков, Б. П. Перельгин, В. К. Безвербый, В. П. Мишин; под. ред. В. П. Мишина. М.: Машиностроение, 1989. 407 с.
2. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука", М., 1978, 312 с.
3. Окишев Ю.А. Основные подходы к численному моделированию частной задачи трех тел для баллистического анализа перелета космического аппарата с низкой околоземной орбиты в точку L1 системы «Земля-Луна» / Ю.А. Окишев, Ю.В. Клинаев// Вестник Саратовского государственного технического университета. 2013. №1(69). С. 56-61.