На правах рукописи

Азанов Валентин Михайлович

АЛГОРИТМЫ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ С ТЕРМИНАЛЬНЫМ ВЕРОЯТНОСТНЫМ КРИТЕРИЕМ

Специальность 05.13.01
Системный анализ, управление и обработка информации
(авиационная и ракетно-космическая техника)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2018 год

Работа выполнена на кафедре «Теория вероятностей и компьютерное моделирование» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ)

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор **Кан Юрий Сергеевич**
Официальные оппоненты:	**Болотин Юрий Владимирович**, доктор физико-математических наук, доцент, профессор кафедры «Прикладная механика и управление» Федерального государственного бюджетного учреждения высшего образования «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова»
	Кожевников Александр Сергеевич, кандидат физико-математических наук, ведущий инженер филиала Федерального государственного унитарного предприятия «Государственный научно-исследовательский институт авиационных систем «Центр обработки документов»
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное учреждение науки «Институт проблем передачи информации» им. А. А. Харкевича Российской академии наук»

Защита состоится «09» ноября 2018 года в 10 ч. 00 мин. на заседании диссертационного совета Д 212.125.04 Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского авиационного института по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4 или на сайте МАИ по ссылке: https://www.mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=95520.

Автореферат разослан «___» ______________ 2018 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью, просим отправлять по адресу: 125993, Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, 4, Ученый совет МАИ

Ученый секретарь диссертационного совета Д 212.125.04, кандидат физико-математических наук, доцент — Северина Наталья Сергеевна

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Задачи оптимального управления дискретными стохастическими системами с вероятностным критерием составляют предмет изучения специального раздела теории стохастического оптимального управления. Исторически вероятностный критерий в задачах оптимального управления рассматривался такими авторами, как Афанасьев В.Н, Зубов В.И., Кибзун А.И., Колмановский В.Б., Красовский Н.Н., Малышев В.В., Носов В.Р., Охоцимский Д.Е., Рясин В.А., Сиротин А.Н., Ченцов Н.Н., Aybat N., Chen R.C., Dorato P., Fleming W. H., Jasour J., Lagoa C., Luh J.Y.S., Mellaert L.V., Odanaka T., O'Connor G.E., Tang W., Zheng J., Zhang J.

В работах Афанасьева В.Н, Зубова В.И., Колмановского В.Б., Красовского Н.Н., Носова В.Р., Dorato P., Luh J.Y.S, Mellaert L. V., O'Connor G.E. исследовалась постановка с непрерывным временем. Для задачи синтеза оптимального управления с обратной связью Афанасьевым В.Н, Колмановским В.Б., Носовым В.Р. были получены уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, представляющие собой систему уравнений в частных производных. Похожий результат был получен авторами Mellaert L. V., Dorato P.. Применение специальных численных методов для анализа указанного уравнения позволило решить ряд задач модельного характера.

Случай дискретного времени рассматривался Кибзуном А.И., Малышевым В.В., Охоцимским Д.Е., Рясиным В.А., Сиротиным А.Н., Ченцовым Н.Н., Luh J.Y.S., O'Connor G.E., Odanaka T., Chen R.C., Fleming W. H., Lagoa C., Jasour J., Aybat N., Tang W., Zheng J., Zhang J. В общем случае задача поиска оптимального управления с обратной связью рассмотрена в монографии Малышева В.В., Кибзуна А.И, в которой сформулированы достаточные условия оптимальности в форме рекуррентных соотношений динамического программирования. Тем не менее и по сей день не существует эффективных численных алгоритмов реализации этих соотношений, что в большинстве случаев затрудняет использование метода динамического программирования. Несколько другие подходы к решению задач оптимального управления с вероятностным критерием были предложены в работах Кибзуна А.И., Игнатова А.Н. и работах зарубежных специалистов Lagoa C., Jasour J., Aybat N. Отмеченные подходы основываются на сужении класса функций обратной связи по состоянию, причем в работах Кибзуна А.И., Игнатова А.Н. сужением является класс кусочно-постоянных функций, а в работах Lagoa C., Jasour J., Aybat N. – класс полиномиальных функций.

Интерес к исследованию задач оптимального управления с вероятностным критерием связан в основном с активным поиском эффективных алгоритмов управления движущимися объектами, в частности, аэрокосмическими. Например, в монографии Малышева В.В. и Кизуна А.И. рассмотрена задача оптимизации коррекции орбиты геостационарного искусственного спутника Земли с вероятностным критерием. Мотивацией к изучению именно такой постановки послужило вероятностное ограничение, формализующее требование по точности, предъявляемое к системе управления в терминальный момент времени. Более поздняя мотивация к исследованию задач оптимального управления с вероятностным критерием качества связана с математической моделью капиталовложения с учетом риска. В этой модели система управления характеризует изменение капитала во времени, за управление принимаются доли капитала, вкладываемые в безрисковый актив, имеющий детерминированную доходность, и рисковые активы, имеющие случайную доходность с известным распределением. Вероятностный критерий моделирует вероятность достижения капиталом к заданному моменту времени некоторого уровня. Данная модель рассматривалась в работах Кибзуна А.И., Кана Ю.С., Вишнякова Б.В., Игнатова А.Н.

Алгоритм динамического программирования решения задач оптимального управления с вероятностным критерием получил развитие только в моделях оптимального капиталовложения, рассмотренных в работах Кибзуна А.И., Кана Ю.С., Вишнякова Б.В., Игнатова А.Н. в “двухшаговой” постановке, схожих с задачами коррекции тректории движения летательных аппаратов. При этом точных решений задач синтеза оптимального управления не было получено даже в рамках простых моделей коррекции орбиты геостационарного искусственного спутника Земли, предложенных в работах Бобронникова В.Т., Кибзуна А.И., Красильщикова М.Н., Лебедева А.А, Малышева В.В., Нестеренко О.П., Федорова А.В.. Применение алгоритма динамического программирования натолкнулось на трудности вычисления и оптимизации условных математических ожиданий разрывных функций, которые казались непреодолимыми. В работах Кана Ю.С. показано, что эти трудности носят технический характер, и выявлены некоторые качественные особенности функции Беллмана в двухшаговой задаче оптимального капиталовложения. Учет этих особенностей, видимо типичных в задачах оптимального управления с вероятностным функционалом, возможно позволит упростить решение указанных выше нерешенных задач коррекции орбиты искусственного спутника Земли.

Цель диссертационного исследования: развитие метода динамического программирования для задач стохастического оптимального управления дискретными системами с вероятностным критерием и разработка на этой основе новых алгоритмов оптимальной коррекции траектории летательных аппаратов.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1) модифицировать уравнение метода динамического программирования;

2) исследовать свойства функции Беллмана, функции правой части уравнения метода динамического программирования и функции оптимального значения вероятностного критерия;

3) получить аналитическое решение ряда модельных задач оптимального управления линейной дискретной стохастической системой с критерием вероятности;

4) решить задачи однопараметрической и двухпараметрической коррекции траектории движения искусственного спутника Земли;

5) исследовать свойства оптимальных алгоритмов управления летательными аппаратами по вероятностному критерию и провести их сравнение с оптимальными алгоритмами управления по другим критериям качества.

Методы исследования. Для решения поставленных задач используются методы теории оптимального управления, стохастического программирования, теории вероятностей, статистического моделирования, математического анализа. Для проведения вычислительных экспериментов используются компьютерные технологии.

Достоверность результатов обеспечивается строгостью математических формулировок и доказательств утверждений, подтверждением полученных теоретических результатов численными экспериментами.

Научная новизна. Полученные в диссертационной работе результаты по оптимальному управлению дискретными стохастическими системами являются новыми. В частности, получены двусторонние оценки для функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия, найдены аналитические решения задач оптимизации однопараметрической и двухпараметрической импульсной коррекции с вероятностным терминальным критерием, доказана асимптотическая оптимальность “рисковой стратегии” управления портфелем ценных бумаг, получено аналитическое решение модельных задач оптимального управления с вероятностными критериями.

Практическая ценность. Результаты исследования могут быть использованы при проектировании систем управления движением летательных аппаратов или другими объектами.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах: международная молодежная научная конференция «Гагаринские чтения» (Москва, 2014), всероссийское совещание по проблемам управления «ВСПУ–2014» (Москва, 2014), всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Теория и практика системного анализа» (Рыбинск 2014), XX международная научная конференция «Системный анализ, управление и навигация» (Евпатория, 2015), всероссийская научная конференция молодых ученых с международным участием «Теория и практика системного анализа» (Тверь 2016), международная конференция «Авиация и космонавтика» (Москва, 2015), 17th Baikal International Triannual School-Seminar «Method of Optimization and Their Applications» (Buryatia, 2017), семинар кафедры теории вероятностей Московского авиационного института под руководством Кибзуна А.И., 7-я Традиционная молодёжная Школа «Управление, информация и оптимизация» (Россия, Зеленоград, 2015 г.), общемосковский постоянный научный семинар «Теория автоматического управления и оптимизации» под руководством Поляка Б.Т. (г. Москва, 2018).

Публикации. Основные результаты по теме диссертации изложены в 12 работах, из которых 5 опубликованы в журналах, рекомендованных ВАК [1–5], в том числе 4 опубликованы в журналах, цитируемых международной базой Web of Science [1, 3–5] и 7 из которых опубликованы в тезисах докладов [6–12].

Личный вклад. Все излагаемые в диссертации результаты получены лично автором, научному руководителю Кану Ю.С. принадлежит ряд постановок исследуемых задач.

Структура и объём диссертации. Диссертация содержит введение, 4 главы, заключение и список используемой литературы. Работа состоит из 142 страниц, включая 12 рисунков, 17 таблиц и список литературы, содержащий 133 наименования.

Содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность исследования, проводимого в рамках работы, приводится обзор существующих результатов по теме исследования, формулируется цель и задачи, решаемые в рамках достижения цели работы, обоснована научная новизна и практическая значимость работы, изложено содержание глав диссертации.

В первой главе приводится постановка задачи оптимального управления дискретной стохастической марковской системой с терминальным вероятностным критерием

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right), \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}, \tag{1.1}$$

где $k \in \{0, ..., N\}$, $N \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ - горизонт управления (терминальный момент времени), $x_k \in \mathbb{R}^n$ – вектор состояния, $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}^m$ – вектор управления, U_k – множество ограничений (множество геометрических ограничений), ξ_k – вектор случайных возмущений со значениями в $\mathbb{R}^s$, $f_k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$ – функция системы (функция перехода). В отношении системы (1.1) вводится ряд предположений: известна полная информация о векторе состояния x_k (данный факт позволяет строить управление в классе функций $u_k = \gamma_k\left(x_k\right)$, где $\gamma_k\left(\cdot\right)$ – некоторая измеримая функция; начальное состояние $x_0 = X$ является в общем случае случайным вектором со значениями в $\mathbb{R}^n$ и известным распределением $\mathbf{P}_X$; функция системы $f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right)$ непрерывна для всех k; вектор управления u_k формируется следующим образом: $u_k = \gamma_k\left(x_k\right)$, где $\gamma_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ - измеримая функция с ограниченными значениями $u_k \in U_k$, причем U_k - компактное множество; управлением называется набор функций $u\left(\cdot\right) = \left(\gamma_0\left(\cdot\right), ..., \gamma_N\left(\cdot\right)\right)$, классом допустимых управлений называется множество $\mathcal{U} = \mathcal{U}_0 \times ... \times \mathcal{U}_N$, где $\mathcal{U}_k$ – множество борелевских функций $\gamma_k\left(\cdot\right)$ с ограниченными на U_k значениями; распределение $\mathbf{P}_k$ случайного вектора ξ_k известно, причем компоненты вектора $\zeta = \left(X, \xi_0, ..., \xi_N\right)$ независимы. В условиях введенных предположений система (1.1) является марковской, т.е. ее поведение в будущем не зависит от прошлого и полностью определяется текущим состоянием системы.

На траекториях системы (1.1) вводится в рассмотрение функционал вероятности

$$P_\varphi\left(u\left(\cdot\right)\right) = \mathbf{P}\left(\Phi\left(x_{N+1}\left(u\left(\cdot\right), \zeta\right)\right) \le \varphi\right), \tag{1.2}$$

где $\mathbf{P}$ - вероятность, $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – ограниченная снизу непрерывная функция, $\varphi \in \mathbb{R}$ – известный скаляр.

Задача стохастического оптимального управления с вероятностным терминальным критерием имеет вид:

$$P_\varphi\left(u\left(\cdot\right)\right) \to \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}. \tag{1.3}$$

Для задачи (1.3) Малышевым В.В. и Кибзуном А.И. были сформулированы достаточные условия оптимальности в форме метода динамического программирования. Для их описания определяется функция Беллмана $\mathsf{B}_k^\varphi : \mathbb{R}^n \to$

$[0,1]$ как точная верхняя грань функционала вероятности при фиксированном текущем состоянии $x_k = x$, т.е.

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \sup_{\gamma_k(\cdot)\in\mathcal{U}_k,\dots,\gamma_N(\cdot)\in\mathcal{U}_N} \mathbf{P}\left(\Phi\left(x_{N+1}\left(x_k, \gamma_k(\cdot), \dots, \gamma_N(\cdot), \xi_k, \dots, \xi_N\right)\right) \le \varphi \middle| x_k = x\right).$$

Малышевым В.В. и Кибзуном А.И. установлено, что если существует стратегия $u^{\varphi}(\cdot) \in \mathcal{U}$, удовлетворяющая следующим рекуррентным соотношениям динамического программирования:

$$u_k^{\varphi} = \arg\max_{u_k\in U_k} \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right)\right) \big| x_k\right],$$

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \max_{u_k\in U_k} \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x_k, u_k, \xi_k\right)\right) \big| x_k = x\right], \quad k = \overline{0, N},$$

$$\mathsf{B}_{N+1}^{\varphi}(x) = \mathbf{I}_{(-\infty,\varphi]}\left(\Phi(x)\right),$$

то она оптимальна в задаче (1.3). Здесь $\mathbf{M}$ – оператор математического ожидания по распределению $\mathbf{P}$, $\mathbf{I}_{\mathcal{A}}(x)$ – индикаторная функция множества $\mathcal{A}$. В более поздней работе Игнатова А.Н. и Кибзуна А.И. были сформулированы достаточные условия существования решения в классе измеримых функций.

С целью модификации соотношений метода динамического программирования вводятся в рассмотрения поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана:

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = 1\right\}, \quad \mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = 0\right\}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Для множества, дополняющего поверхности уровня 1 и 0 до $\mathbb{R}^n$ введено обозначение

$$\mathcal{B}_k^{\varphi} = \mathbb{R}^n \setminus \left\{\mathcal{I}_k^{\varphi} \cup \mathcal{O}_k^{\varphi}\right\}.$$

Из определения множеств $\mathcal{I}_k^{\varphi}$, $\mathcal{B}_k^{\varphi}$, $\mathcal{O}_k^{\varphi}$ следует, что

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} \cup \mathcal{B}_k^{\varphi} \cup \mathcal{O}_k^{\varphi} = \mathbb{R}^n, \quad \begin{cases} \mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = 1, & x \in \mathcal{I}_k^{\varphi}, \\ \mathsf{B}_k^{\varphi}(x) \in (0,1), & x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}, \\ \mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = 0, & x \in \mathcal{O}_k^{\varphi}. \end{cases}$$

Лемма 1.1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. Множества $\mathcal{I}_k^{\varphi}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени $k = \overline{0, N}$:

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists u_k \in U_k : \quad \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right) = 1\right\},$$

$$\mathcal{I}_{N+1}^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \Phi(x) \le \varphi\right\}.$$

2. Множества $\mathcal{O}_k^{\varphi}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям в обратном времени $k = \overline{0, N}$:

$$\mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall u_k \in U_k : \quad \mathbf{P}_k\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right) = 1\right\},$$

$$\mathcal{O}_{N+1}^{\varphi}=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\quad \Phi\left(x\right)>\varphi\right\}.$$

3. Уравнение Беллмана допускает одно из двух представлений

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right)=\max_{u_k\in U_k}\Big\{&\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right)\times\\&\times\left(1-\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\Big|f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}\right]\right)+\\&+\left(1-\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right)\right)\times\\&\times\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\Big|f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}\right]\Big\},\end{aligned}\tag{1.4}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{B}_k^{\varphi}\left(x\right)=\max_{u_k\in U_k}\Big\{&\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right)+\\&+\left(1-\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right)\right)\times\\&\times\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\Big|f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\left\{\mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}\cup\mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right\}\right]\Big\}.\end{aligned}\tag{1.5}$$

Следствие 1.1. *Справедливы утверждения:*

1. Для $x_k\in\mathcal{I}_k$ оптимальным управлением на шаге k является любой элемент из множества $U_k^{\mathcal{I}}\left(x_k\right)$

$$U_k^{\mathcal{I}}\left(x_k\right)=\left\{u\in U_k:\quad \mathbf{P}\left(f_k\left(x_k,u,\xi_k\right)\in\mathcal{I}_{k+1}\right)=1\right\}.$$

2. Для $x_k\in\mathcal{O}_k$ оптимальным управлением на шаге k является любой элемент из множества U_k.

3. $\forall x\in\mathcal{B}_k^{\varphi}$, $u_k\in U_k$ справедлива двусторонняя оценка

$$\begin{cases}\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right]\geq\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right),\\ \mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right]\leq 1-\mathbf{P}_k\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right)\end{cases}\tag{1.6}$$

и оценка снизу

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\right]\geq\\&\qquad\geq\mathbf{M}_k\left[\mathsf{B}_{k+1}^{\varphi}\left(f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\right)\Big|f_k\left(x,u_k,\xi_k\right)\in\left\{\mathcal{B}_{k+1}^{\varphi}\cup\mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right\}\right].\end{aligned}\tag{1.7}$$

4. Для $k=N$ выполнено

$$u_N^{\varphi}=\arg\max_{u_N\in U_N}\mathbf{P}_N\left(f_N\left(x_N,u_N,\xi_N\right)\in\mathcal{I}_{N+1}^{\varphi}\right),$$

$$\mathsf{B}_N^{\varphi}\left(x\right)=\max_{u_N\in U_N}\mathbf{P}_N\left(f_N\left(x,u_N,\xi_N\right)\in\mathcal{I}_{N+1}^{\varphi}\right).$$

Теорема 1.1. *Функция Беллмана удовлетворяет двустороннему неравенству*

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) \le \mathsf{B}_k^{\varphi}(x) \le \overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x), \tag{1.8}$$

где

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k \in U_k} \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right),$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{u_k \in U_k} \left\{1 - \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right)\right\},$$

причем для $k = N$ выполнено $\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x)$.

Из теоремы 1.1 формулируется следствие о двусторонней оценке для функции оптимального значения вероятностного критерия

$$F(\varphi) = \sup_{u(\cdot) \in \mathcal{U}} P_{\varphi}(u(\cdot)) = \mathbf{M}_X\left[\mathsf{B}_0^{\varphi}(X)\right].$$

Для этого определяются функции $\underline{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to [0,1]$ и $\overline{F} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to [0,1]$

$$\underline{F}(\varphi, x) = \underline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(x) = \sup_{u_0 \in U_0} \mathbf{P}\left(f_0(x, u_0, \xi_0) \in \mathcal{I}_1^{\varphi}\right),$$

$$\overline{F}(\varphi, x) = \overline{\mathsf{B}}_0^{\varphi}(x) = \sup_{u_0 \in U_0} \left\{1 - \mathbf{P}\left(f_0(x, u_0, \xi_0) \in \mathcal{O}_1^{\varphi}\right)\right\}.$$

Следствие 1.2. *Справедливы утверждения:*

1. Пусть $X \in \mathbb{R}^n$ - детерминированный вектор. Тогда для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\underline{F}(\varphi, X) \le F(\varphi) \le \overline{F}(\varphi, X).$$

2. Пусть X - случайный вектор с распределением $\mathbf{P}_X$. Тогда для любого $\varphi \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\mathbf{M}_X\left[\underline{F}(\varphi, X)\right] \le F(\varphi) \le \mathbf{M}_X\left[\overline{F}(\varphi, X)\right].$$

Во второй главе рассматриваются модельные задачи оптимального управления стохастическими дискретными системами с вероятностным критерием. Первая задача является дискретным аналогом задачи управления движением материальной точки, рассмотренной в монографии Афанасьева В.Н, Колмановского В.Б., Носова В.Р. Система управления имеет вид

$$\begin{cases} x_{k+1}^1 = x_k^1 + x_k^2 h, \\ x_{k+1}^2 = x_k^2 + x_k^3 h, \\ \ldots \\ x_{k+1}^{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i x_k^i + u_k h + \xi_k, \\ x_0^1 = X^1, \ldots, x_0^{n-1} = X^{n-1}, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}, \tag{2.1}$$

где $\left(x_k^1, \ldots, x_k^{n-1}\right) \in \mathbb{R}^{n-1}$ – вектор состояния системы, $\left(x_0^1, \ldots, x_0^{n-1}\right)$ – детерминированный вектор, $u_k \in \mathbb{R}$ – скалярное управление, ξ_k – непрерывная случайная величина, плотность распределения которой $f_{\xi_k}(t)$ является четной функцией, $(\xi_0, ..., \xi_N)$ – независимы, $a_1, ..., a_{n-1}, h$ - детерминированные скалярные параметры. Для системы (2.1) ставится задача оптимального управления с вероятностным критерием

$$\mathbf{P}\left(\min_{k\in\{0,...,N\}} \left|x^1_{k+1}\right| \le \varphi\right),$$

которая с помощью расширения вектора состояния путем введения новой координаты $x^n_k = \min_{j\in\{1,...,k\}} \left|x^1_{j-1}\right|$, динамика которой описывается разностным соотношением

$$\begin{cases} x^n_{k+1} = \min\left\{x^n_k,\ \left|x^1_k\right|\right\}, \\ x^n_0 = \left|x^1_0\right|, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}, \tag{2.2}$$

сводится к эквивалентной (в смысле равенства оптимальных значений критериев) задаче с терминальным вероятностным критерием вида (1.3)

$$\mathbf{P}\left(\min\left\{\left|x^1_{N+1}\right|,\ x^n_{N+1}\right\} \le \varphi\right) \to \max_{u(\cdot)}.$$

Расширенная система управления записывается в векторном виде

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + e_n \min\left\{e_n^{\mathsf{T}} x_k,\ |e_1^{\mathsf{T}} x_k|\right\} + B\left(u_k + \xi_k\right), \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & h & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & h & ... & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & h & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-2} & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и вектор $e_i \in \mathbb{R}^n$ такой, что i-ая координата равна единице, а все остальные - нулю.

С использованием результатов первой главы находятся в явном виде поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана

$$\mathcal{I}^\varphi_k = \begin{cases} \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \min\limits_{i=\overline{1,N+1-k}} \left\{e_n^{\mathsf{T}} x,\ \left|e_1^{\mathsf{T}} A^i x\right|\right\} \le \varphi\right\}, & k > K, \\ \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \min\limits_{i=\overline{1,n-2}} \left\{e_n^{\mathsf{T}} x,\ \left|e_1^{\mathsf{T}} A^i x\right|\right\} \le \varphi\right\}, & k \le K \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\mathcal{O}^\varphi_k = \begin{cases} \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \min\limits_{i=\overline{1,N+1-k}} \left\{e_n^{\mathsf{T}} x,\ \left|e_1^{\mathsf{T}} A^i x\right|\right\} > \varphi\right\}, & k > K, \\ \varnothing, & \end{cases} \tag{2.4}$$

где $K = N + 2 - n$, нижняя и верхняя границы функции Беллмана и решения соответствующих задач стохастического программирования в левой и правой частях неравенства (1.8). Показано, что нижняя граница функции Беллмана совпадает с самой функцией Беллмана с точностью до констант, и что решение задач стохастического программирования в левых частях неравенств (1.8) совпадает с оптимальным управлением

$$u_k^{\varphi} = \underline{u}_k^{\varphi} = \begin{cases} \text{любое из } \mathbb{R}, & k \in \{K+1, ..., N\}, \\ -\left(e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B\right)^{-1} e_1^{\mathsf{T}} A^{n-1} x_k, & k \in \{0, ..., K\}, \end{cases} \tag{2.5}$$

а функция Беллмана равна

$$\mathsf{B}_k^{\varphi}(x) = \begin{cases} \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}(x), & k \in \{K+1, ..., N\}, \\ \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}(x) + p_k(\varphi)\left(1 - \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^{\varphi}}(x)\right), & k \in \{0, ..., K\}, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $p_k(\varphi) \in (0,1)$ удовлетворяет рекуррентному уравнению в обратном времени

$$\begin{cases} p_k(\varphi) = p_{k+1}(\varphi) + \mathbf{P}\left(\left|e_1^{\mathsf{T}} A^{n-2} B \xi_k\right| \le \varphi\right)(1 - p_{k+1}(\varphi)), \\ p_K(\varphi) = 0, \end{cases} \quad k \in \{0, ..., K-1\}.$$

В следующем примере рассматривается модельная задача оптимизации управления портфелем ценных бумаг с вероятностным критерием. Модель системы задана в виде

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k \left(1 + u_k^1 b + \sum\limits_{i=2}^{m} u_k^i \xi_k^i\right), \\ x_0 = X, \end{cases} \quad k = \overline{0, N}, \tag{2.7}$$

где $n = 1$ - размерность вектора состояния, m - размерность вектора управления, $s = m - 1$ - размерность вектора случайных возмущений, $m \ge 2$, X, $b \in \mathbb{R}$ - детерминированные скаляры, $X > 0$, $b > -1$, $\xi_k = \left(\xi_k^2, ..., \xi_k^m\right)^{\mathsf{T}}$ - случайный вектор с независимыми компонентами. Предполагается независимость компонент вектора $(\xi_0, ..., \xi_N)$. Носитель распределения случайного вектора ξ_k имеет вид

$$\Xi = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^{m-1} : \quad \underline{b}^i \le \zeta^i \le \overline{b}^i, \quad i = \overline{2, m}\right\},$$

где $\overline{b}^i > \underline{b}^i \ge -1$, $i = \overline{1, m}$, $k = \overline{0, N}$. Множество U_k имеет следующий вид:

$$U_k = U = \left\{u \in \mathbb{R}^m : \quad \sum_{i=1}^{m} u^i = 1, \quad u^i \ge 0, \quad i = \overline{1, m}\right\}, \quad k = \overline{0, N}.$$

Рассматривается задача

$$\mathbf{P}(-x_{N+1} \le \varphi) \to \max_{u(\cdot) \in \mathcal{U}}. \tag{2.8}$$

Если за X принять размер стартового капитала, за x_k – размер капитала на начало k-го года, за u_k^1 – долю x_k капитала, вкладываемого в безрисковый инструмент (например, в надежный банк), имеющий доходность b, u_k^i – доли капитала x_k, вкладываемые в рисковые активы, характеризующиеся случайными доходностями ξ_k^i, $i = \overline{2, m}$, то задача (2.8) заключается в максимизации вероятности достижения размера капитала уровня $-\varphi$ в заданный момент времени $N+1$ путем инвестиций в некоторые активы. Найдены поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана:

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left[\varphi_k^{\mathcal{I}}, \infty\right), \quad \mathcal{B}_k^{\varphi} = \left(\varphi_k^{\mathcal{O}}, \varphi_k^{\mathcal{I}}\right), \quad \mathcal{O}_k^{\varphi} = \left(-\infty, \varphi_k^{\mathcal{O}}\right],$$

где $\varphi_k^{\mathcal{I}}$, $\varphi_k^{\mathcal{O}}$ имеют вид

$$\varphi_k^{\mathcal{I}} = \frac{-\varphi}{\left(1+\max\left\{b,\ \max\limits_{j=\overline{2,m}} \underline{b}^j\right\}\right)^{N+1-k}},\ \varphi_k^{\mathcal{O}} = \frac{-\varphi}{\left(1+\max\left\{b,\ \max_{j=\overline{2,m}} \overline{b}^j\right\}\right)^{N+1-k}}.$$

Для нижней $\underline{F}$ и верхней $\overline{F}$ границ функции оптимального значения вероятностного критерия получено следующее равенство

$$\lim_{N\to\infty} \underline{F}(\varphi, N, X) = \lim_{N\to\infty} \overline{F}(\varphi, N, X), \quad \forall\varphi < 0,\ X > 0.$$

Утверждение 2.1. *Пусть для некоторого допустимого управления $\tilde{u}(\cdot) = (\tilde{\gamma}_0(\cdot), ..., \tilde{\gamma}_N(\cdot)) \in \mathcal{U}$ и для любого $N \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ выполнено неравенство*

$$\underline{F}(\varphi, N, X) \leq P_\varphi(\tilde{u}(\cdot)).$$

Тогда допустимое управление $\tilde{u}(\cdot)$ является асимптотически оптимальным в задаче (2.8) при $N \to \infty$.

Для случая $m = 2$, $\underline{b}^2 = -1$, $\overline{b}^2 = a$ найдено субоптимальное управление

$$\underline{u}_k^\varphi = \begin{cases} (1,\ 0)^{\mathrm{T}}, & x_k \geq -\varphi(1+b)^{k-N-1}, \\ (0,\ 1)^{\mathrm{T}}, & x_k < -\varphi(1+b)^{k-N-1}, \end{cases} \tag{2.9}$$

которое является оптимальным при $x_k \in \mathcal{I}_k^\varphi \cup \mathcal{O}_k^\varphi$, $k = \overline{0,N}$ и при $k = N$.

Нижняя граница функции Беллмана:

$$\underline{\mathsf{B}}_k^\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[-\varphi(1+b)^{k-N-1}, +\infty\right), \\ 1 - F_\xi\left(\frac{-\varphi}{x(1+b)^{N-k}} - 1\right), & x \in \left(-\varphi(1+a)^{k-N-1}, -\varphi(1+b)^{k-N-1}\right), \\ 0, & x \in \left(-\infty, -\varphi(1+a)^{k-N-1}\right]. \end{cases}$$

С помощью нижней оценки функции оптимального значения вероятностного критерия $\underline{F}(\varphi, N, X) = \underline{\mathsf{B}}_0^\varphi(X)$ доказано, что функционал вероятности $P_\varphi(\underline{u}^\varphi(\cdot))$ в задаче (2.8) при субоптимальном управлении (2.9) представим в следующем виде

$$P_\varphi(\underline{u}^\varphi(\cdot)) = \underline{F}(\varphi, N, X) + \\ + \sum_{k=1}^{N} \mathbf{P}\left(\underline{x}_k < \varphi_k^{\mathcal{I}}\right) \mathbf{P}\left(\underline{x}_k(1+\xi_k) \geq \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} \middle| \underline{x}_k < \varphi_k^{\mathcal{I}}\right), \tag{2.10}$$

где

$$\begin{cases} \underline{x}_{k+1} = \begin{cases} \underline{x}_k(1+b), & \underline{x}_k \geq -\varphi(1+b)^{k-N-1}, \\ \underline{x}_k(1+\xi_k), & \underline{x}_k < -\varphi(1+b)^{k-N-1}, \end{cases} & k = \overline{0,N}. \\ \underline{x}_0 = X, \end{cases} \tag{2.11}$$

Для любого $N \in \{0\} \cap \mathbb{N}$ выполнено неравенство
$$\underline{F}(\varphi, N, X) \le P_\varphi\left(\underline{u}^\varphi(\cdot)\right). \tag{2.12}$$

Субоптимальное управление $\underline{u}^\varphi(\cdot) \in \mathcal{U}$, определяющееся соотношением (2.9) является асимптотически оптимальным.

Третья глава диссертационной работы посвящена задаче оптимального управления линейной дискретной стохастической системой с мультипликативным к управлению случайным возмущением и с критерием в форме вероятности попадания абсолютного значения линейной комбинации вектора состояния в заданную окрестность нуля в терминальный момент времени. Система управления имеет вид
$$\begin{cases} x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k (1 + \xi_k) + D_k, \\ x_0 = X, \end{cases} \qquad k = \overline{0, N}. \tag{3.1}$$

Функционал вероятности и задача оптимального управления вида (1.3) записываются соответственно
$$P_\varphi(u(\cdot)) = \mathbf{P}\left(\left|l^T x_{N+1}\right| \le \varphi\right), \quad P_\varphi(u(\cdot)) \to \max_{u(\cdot)\in\mathcal{U}}. \tag{3.2}$$

Здесь $x_k \in \mathbb{R}^n$ - вектор состояния, X - случайный вектор со значениями в $\mathbb{R}^n$ и известным распределением $\mathbf{P}_X$, $u_k \in U_k \subset \mathbb{R}$ - скалярное управление, $U_k \subset \mathbb{R}$ - множество геометрических ограничений (далее рассматриваются случаи отсутствия ограничений $U_k = \mathbb{R}$ и симметричных ограничений $U_k = [-q, q]$), ξ_k - случайная величина с известным распределением $\mathbf{P}_k$, причем $X, \xi_0, ..., \xi_N$ – независимы, $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B_k \in \mathbb{R}^n$, $D_k \in \mathbb{R}^n$ - известные матрицы, причем $\exists K \in \{0, ..., N\}$:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=k}^{N} l^T \prod\limits_{j=i}^{N} A_j B_i = 0, & k \in \{K+1, ..., N\}, \\ \sum\limits_{i=k}^{N} l^T \prod\limits_{j=i}^{N} A_j B_i \ne 0, & k \in \{0, ..., K\}, \end{cases}$$

$l \in \mathbb{R}^n$ - детерминированный вектор, $\varphi > 0$ - скалярный параметр.

Для решения задачи (3.2) применяются результаты первой главы. Для удобства введены вектор $a_k \in \mathbb{R}^n$ и величины $b_k \in \mathbb{R}$, $d_k \in \mathbb{R}$
$$a_k^T = l^T \prod_{i=k}^{N} A_i, \quad b_k = \sum_{i=k}^{N} l^T \prod_{j=i}^{N} A_j B_i, \quad d_k = \sum_{i=k}^{N} l^T \prod_{j=i}^{N} A_j D_i.$$

Поверхности уровня 1 и 0 для $k > K$ имеют вид
$$\mathcal{I}_k^\varphi = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \exists u_k : \mathbf{P}\left(\left|a_k^T x + d_k\right| \le \varphi\right) = 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| \le \varphi\right\},$$
$$\mathcal{O}_k^\varphi = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \forall u_k : \mathbf{P}\left(\left|a_k^T x + d_k\right| > \varphi\right) = 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| > \varphi\right\},$$
откуда видно, что функция Беллмана является индикаторной функцией множества $\mathcal{I}_k^\varphi$,
$$\mathsf{B}_k^\varphi(x) = \mathbf{I}_{\mathcal{I}_k^\varphi}(x), \quad k \in \{K+1, ..., N\},$$

и для таких k оптимальным является любое допустимое управление.

Во втором разделе третьей главы рассмотрен случай гауссовского распределения мультипликативной случайной ошибки $\xi_k \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$, $k = \overline{0, N}$. С помощью леммы 1.1 найдены поверхности уровня 1 и 0 в явном виде

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \quad \left|a_k^T x + d_k\right| \leq \varphi\right\}, \quad \mathcal{O}_k^{\varphi} = \varnothing, \quad k = \overline{0, K}.$$

Двусторонние границы для функции Беллмана:

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{|u_k| \leq q} \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{I}_{k+1}^{\varphi}\right) = \\ = \max_{|u_k| \leq q} \mathbf{P}\left(\left|a_k^T x + b_k u_k\left(1 + \xi_k\right) + d_k\right| \leq \varphi\right), \quad (3.3)$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \sup_{|u_k| \leq q} \left\{1 - \mathbf{P}\left(f_k\left(x, u_k, \xi_k\right) \in \mathcal{O}_{k+1}^{\varphi}\right)\right\} = 1. \quad (3.4)$$

Утверждение 3.2. *Нижняя оценка функции Беллмана определяется выражением*

$$\underline{\mathsf{B}}_k(x) = \begin{cases} 1, & \left|a_k^T x + d_k\right| \leq \varphi, \\ \Phi_0\left(\frac{\varphi + \left|a_k^T x + d_k\right|}{\sigma b_k \left|\underline{u}_k^{\varphi}\right|} - \frac{1}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{-\varphi + \left|a_k^T x + d_k\right|}{\sigma b_k \left|\underline{u}_k^{\varphi}\right|} - \frac{1}{\sigma}\right), & \left|a_k^T x + d_k\right| > \varphi, \end{cases}$$

решение $\underline{u}_k^{\varphi}$ задачи стохастического программирования (3.3) имеет вид

$$\underline{u}_k^{\varphi} = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right) \min\left\{q, \ \left|\tilde{\gamma}_k\left(a_k^T x_k + d_k\right)\right|\right\},$$

где функции $\tilde{\gamma}_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k = \overline{0, K}$ имеют вид

$$\tilde{\gamma}_k(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq \varphi, \\ -2x\left(b_k\left(1 + \sqrt{1 + 2\sigma^2 \ln\left(\frac{|x| + \varphi}{|x| - \varphi}\right)}\right)\right)^{-1}, & |x| > \varphi. \end{cases}$$

Управление $\underline{u}^{\varphi}(\cdot) = \left(\underline{\gamma}_0(\cdot), ..., \underline{\gamma}_N(\cdot)\right)^T$, образованное функциями $\underline{u}_k^{\varphi} = \underline{\gamma}_k(x_k)$ называется далее субоптимальным, поскольку оно является оптимальным при $k \in \{K, ..., N\}$, является оптимальным при $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$ для всех $k \in \{0, ..., N\}$ и максимизирует нижнюю оценку функции правой части уравнения МДП при $x_k \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$, $k \in \{K, ..., N\}$.

С помощью метода Монте-Карло получены численные оценки значений вероятностного и среднеквадратического критериев при найденном субоптимальном управлении и при среднеквадратическом управлении. По результатам сравнения полученных оценок оказалось, что найденное субоптимальное управление лучше среднеквадратического по вероятностному и не сильно хуже по среднеквадратическому критериям.

В третьем разделе третьей главы рассмотрен случай равномерного распределения мультипликативной случайной ошибки $\xi_k \sim \mathcal{R}\left[-\varepsilon_k, \varepsilon_k\right]$, $k = \overline{0, N}$ и неограниченного управления $U_k = \mathbb{R}$, $k = \overline{0, N}$. С помощью результатов первой главы находятся в явном виде поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана.

Утверждение 3.3. *$\forall k = \overline{0, K}$ множества $\mathcal{I}_k^\varphi$, $\mathcal{B}_k^\varphi$, $\mathcal{O}_k^\varphi$ определяются в соответствии с выражениями*

$$\mathcal{I}_k^\varphi = \mathcal{D}_k \cup \Delta_k, \quad \mathcal{B}_k^\varphi = \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{I}_k^\varphi, \quad \mathcal{O}_k^\varphi = \varnothing,$$

где

$$\mathcal{D}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \left|a_k^T x + d_k\right| \le \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right\}, \quad \Delta_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} < \left|a_k^T x + d_k\right| \le \varphi_k^{\mathcal{I}}\right\},$$

оптимальным для $x_k \in \mathcal{I}_k^\varphi$ является любое управление из множества

$$U_k^{\mathcal{I}}(x_k) = \left\{u_k \in U_k : \quad \mathsf{sign}\,(u_k) = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right), \right.$$
$$\left. \max\left\{0, \frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1-\varepsilon_k)}\right\} \le |u_k| \le \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{|b_k|\,(1+\varepsilon_k)}\right\},$$

где

$$\varphi_k^{\mathcal{I}} = \varphi \prod_{i=k}^{N} \varepsilon^{-i}.$$

Выражения для нижней и верхней оценок функции Беллмана при $x \in \mathcal{B}_k^\varphi$ и $k < K$ имеют вид

$$\underline{\mathsf{B}}_k^\varphi(x) = \sup_{u_k} \mathbf{P}\left(f_k(x, u_k, \xi_k) \in \mathcal{I}_{k+1}^\varphi\right) =$$
$$= \max_{u_k} \mathbf{P}\left(\left|a_k^T x + b_k u_k (1+\xi_k) + d_k\right| \le \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right), \quad (3.5)$$
$$\overline{\mathsf{B}}_k^\varphi(x) = 1.$$

Утверждение 3.4. *Пусть $\xi_k \sim \mathcal{R}[-\varepsilon_k, \varepsilon_k]$, тогда нижняя оценка функции Беллмана при $x \in \mathcal{B}_k^\varphi$ имеет вид*

$$\underline{\mathsf{B}}_k^\varphi(x) = \frac{\varphi_k^{\mathcal{I}}}{\varphi_k^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|} \frac{1+\varepsilon_k}{\varepsilon_k}, \quad (3.6)$$

а решение $\underline{u}_k^\varphi$ задачи стохастического программирования (3.5) определяется выражением

$$\underline{u}_k^\varphi = -\mathtt{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{b_k\,(1+\varepsilon_k)}. \quad (3.7)$$

С помощью дополнительных утверждений доказано, что управление $\underline{u}^\varphi(\cdot)$, образованное функциями (3.7) является оптимальным при $x_k \in \mathcal{B}_k^\varphi$, $k = \overline{0, K}$. Таким образом, оптимальное управление при $k = \overline{K+1, N}$ является любым элементом из множества $\mathbb{R}$, а при $k = \overline{0, K}$ определяется выражением

$$u_k^{\varphi} = \begin{cases} \text{любое элемент из } U_k^{\mathcal{I}}\left(x_k\right), & \left|a_k^T x_k + d_k\right| \le \varphi_k^{\mathcal{I}}, \\ -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right) \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{b_k(1+\varepsilon_k)}, & \left|a_k^T x_k + d_k\right| > \varphi_k^{\mathcal{I}}. \end{cases} \tag{3.8}$$

Проведены численные эксперименты сравнения найденного оптимального управления со среднеквадратическим. В частности, показано, что путем специального подбора управления на множестве $U_k^{\mathcal{I}}\left(x_k\right)$ при $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$ замкнутая система становится “нечувствительной” к аддитивным к управлению случайным помехам, имеющим гауссовское распределение. При этом оказалось, что управление (3.8), не являющееся оптимальным при наличии в системе аддитивных к управлению случайных помех, обеспечивает более высокую оценку значений вероятностного критерия чем среднеквадратическое управление, найденное с учетом указанных помех.

В четвертом разделе третьей главы рассмотрен случай равномерного распределения мультипликативного случайного возмущения $\xi_k \sim \mathcal{R}\left[-\varepsilon_k, \varepsilon_k\right]$, $k = \overline{0, N}$ и ограниченного управления $U_k = [-q, q]$, $k = \overline{0, N}$.

Утверждение 3.5. *$\forall k = \overline{0, K}$ множества $\mathcal{I}_k^{\varphi}$, $\mathcal{B}_k^{\varphi}$, $\mathcal{O}_k^{\varphi}$ определяются в соответствии с выражениями*

$$\mathcal{I}_k^{\varphi} = \mathcal{D}_k \cup \Delta_k,$$

$$\mathcal{B}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \varphi_k^{\mathcal{I}} < \left|a_k^T x + d_k\right| < \varphi_k^{\mathcal{O}}\right\}, \quad \mathcal{O}_k^{\varphi} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \left|a_k^T x + d_k\right| \ge \varphi_k^{\mathcal{O}}\right\},$$

где

$$\mathcal{D}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \left|a_k^T x + d_k\right| \le \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right\}, \quad \Delta_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ \varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} < \left|a_k^T x + d_k\right| \le \varphi_k^{\mathcal{I}}\right\},$$

оптимальным для $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$ является любой элемент из множества

$$U_k^{\mathcal{I}}\left(x_k\right) = \Bigg\{ u_k \in U_k : \quad \mathsf{sign}\left(u_k\right) = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right),$$
$$\max\left\{0, \frac{-\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{\left|b_k\right|\left(1 - \varepsilon_k\right)}\right\} \le \left|u_k\right| \le \min\left\{q, \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{\left|b_k\right|\left(1 + \varepsilon_k\right)}\right\} \Bigg\},$$

где скалярные коэффициенты $\varphi_k^{\mathcal{I}} > 0$, $\varphi_k^{\mathcal{O}} > 0$ вычисляются в соответствии с системами рекуррентных соотношений в обратном времени

$$\begin{cases} \varphi_k^{\mathcal{I}} = \min\left\{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + q\left|b_k\right|\left(1 - \varepsilon_k\right), \quad \varepsilon_k^{-1}\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\right\}, \\ \varphi_{K+1}^{\mathcal{I}} = \varphi, \end{cases} \qquad k = \overline{0, K}, \tag{3.9}$$

$$\begin{cases} \varphi_k^{\mathcal{O}} = \varphi_{k+1}^{\mathcal{O}} + q\left|b_k\right|\left(1 + \varepsilon_k\right), \\ \varphi_{K+1}^{\mathcal{O}} = \varphi, \end{cases} \qquad k = \overline{0, K}. \tag{3.10}$$

Найдены двусторонние оценки функции Беллмана в области $x \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ при $k \in \{0, ..., K\}$:

$$\underline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \min\left\{ \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}}{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x + d_k\right|} \frac{1+\varepsilon_k}{\varepsilon_k}, \quad \frac{1}{2\varepsilon_k}\left(1 + \varepsilon_k + \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} - \left|a_k^T x + d_k\right|}{q\left|b_k\right|}\right)\right\},$$

$$\overline{\mathsf{B}}_k^{\varphi}(x) = \min\left\{ \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}}}{\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}} + \left|a_k^T x + d_k\right|} \frac{1+\varepsilon_k}{\varepsilon_k}, \quad \frac{1}{2\varepsilon_k}\left(1 + \varepsilon_k + \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{O}} - \left|a_k^T x + d_k\right|}{q\left|b_k\right|}\right)\right\}.$$

Субоптимальное управление при $x_k \in \mathcal{B}_k^{\varphi}$ имеет вид

$$\underline{u}_k^{\varphi} = -\mathsf{sign}\left(\frac{a_k^T x_k + d_k}{b_k}\right)\min\left\{q, \quad \frac{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}} + \left|a_k^T x_k + d_k\right|}{\left|b_k\right|(1+\varepsilon_k)}\right\}.$$

Доказано, что если выполнена система неравенств

$$\max_{k=\overline{0,K}}\left\{\varphi_{k+1}^{\mathcal{I}}\varepsilon_k^{-1} - \varphi_k^{\mathcal{I}} - q\left|b_k\right|(1-\varepsilon_k)\right\} \leq 0, \qquad (3.11)$$

то оптимальным в задаче с ограничениями при $x_k \in \mathcal{I}_k^{\varphi}$, $k = \overline{0,K}$ является неограниченное управление (3.8).

В четвертой главе рассмотрена математическая модель оптимизации двухпараметрической импульсной коррекции траектории движения искусственного спутника Земли по вероятностному критерию. Данная задача рассматривалась Малышевым В.В. и Кибзуном А.И в так называемой “одноимпульсной” постановке ($N = 0$). В среднеквадратической и минимаксной постановках данная задача рассматривалась Лебедевым А.А., Бобронниковым В.Т., Красильщиковым М.Н., Старковым А.В., Федоровым А.В. и др.

В первом разделе приведена постановка задачи. Система управления, описывающая динамику средней долготы и периода обращения (скорости дрейфа) с учетом случайных ошибок реализации управляющего ускорения и без учета детерминированных возмущений, связанных с внешними силами, и случайных ошибок измерения параметров движения, задана в виде

$$\begin{cases} x_{k+1}^1 = x_k^1 + \Delta t_k x_k^2, \\ x_{k+1}^2 = x_k^2 + \Delta t_k u_k (1+\xi_k), \qquad k = \overline{0,N}. \\ x_0^1 = X^1,\ x_0^2 = X^2. \end{cases}$$

Задача синтеза оптимального управления системой с вероятностным критерием имеет вид

$$P_{\varphi}(u(\cdot)) \to \max_{u(\cdot)}, \quad \mathbf{P}\left(\max\left\{\left|x_{N+1}^1\right|,\ \left|x_{N+1}^1 + \Delta t_{N+1} x_{N+1}^2\right|\right\} \leq \varphi\right). \qquad (4.1)$$

В данной математической модели полагается, что N – число исполняемых корректирующих импульсов тяги КДУ, k – момент приложения k-го корректирующего импульса, x_k^1 – отклонение долготы восходящего узла от требуемого значения (в градусах), x_k^2 – скорость дрейфа ИСЗ (в градусах/звездные сутки), $X = \left(x_0^1, x_0^2\right)^T$ – начальное отклонение спутника относительно расчетных значений, u_k – величина k-го корректирующего импульса тяги (в градусах/(звездные сутки)^2), ξ_k – ошибка исполнения k-го корректирующего импульса во время пассивного участка полёта между k-ым и $k+1$-ым приложением корректирующего импульса, Δt_k – длительность k-го пассивного участка полета, $\Delta t_{N+1} > 0$ – требуемое время пребывания долготы восходящего узла с учетом остаточной скорости дрейфа после проведения последней коррекции, $\varphi > 0$ – заданный показатель точности.

Во втором разделе четвертой главы в предположении, что мультипликативное возмущение имеет гауссовский закон распределения $\xi_k \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$ и на управление не наложено геометрических ограничений $U_k = \mathbb{R}$ с использованием утверждений первой и третьей глав найдены в явном виде поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана, двусторонние оценки функции Беллмана и субоптимальное решение задачи (4.1), имеющее вид

$$\underline{u}_k^{\varphi} = \begin{cases} 0, & \|\Theta_k x_k\|_\infty \le \varphi, \\ -2\psi_k\left(x_k\right)\left(1 + \sqrt{1 + 2\sigma^2 \ln\left(\frac{|\psi_k(x_k)| + \varphi_k(x_k)}{|\psi_k(x_k)| - \varphi_k(x_k)}\right)}\right)^{-1}, & \|\Theta_k x_k\|_\infty > \varphi, \end{cases}$$

где

$$\Theta_k = \begin{pmatrix} 1 & \sum\limits_{i=k}^{N} \Delta t_i \\ 1 & \sum\limits_{i=k}^{N} \Delta t_i + \Delta t_{N+1} \end{pmatrix}, \quad \theta_k = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta t_N \Delta t_{N+1} \end{pmatrix}, & k = N, \\ \begin{pmatrix} \Delta t_k \sum\limits_{i=k+1}^{N} \Delta t_i \\ \Delta t_k \left(\sum\limits_{i=k+1}^{N} \Delta t_i + \Delta t_{N+1}\right) \end{pmatrix}, & k < N, \end{cases}$$

$$\varphi_k\left(x_k\right) = \frac{1}{2}\left(\min_{i=1,2} \frac{\varphi - e_i^T \Theta_k x_k}{e_i^T \theta_k} - \max_{i=1,2} \frac{-\varphi - e_i^T \Theta_k x_k}{e_i^T \theta_k}\right),$$
$$\psi_k\left(x_k\right) = \frac{1}{2}\left(\min_{i=1,2} \frac{\varphi - e_i^T \Theta_k x_k}{e_i^T \theta_k} + \max_{i=1,2} \frac{-\varphi - e_i^T \Theta_k x_k}{e_i^T \theta_k}\right).$$

С помощью двусторонней оценки функции оптимального значения вероятностного критерия найдена численная оценка точности получаемого решения для случая “двухимпульсной” коррекции ($N = 1$). Проведено численное сравнение найденной стратегии со среднеквадратической.

В третьем разделе исследован случай равномерного распределения случайной ошибки исполнения корректирующего воздействия $\xi_k \sim \mathcal{R}\left[-\varepsilon, \varepsilon\right]$. С помощью результатов первой и третьей глав найдены в явном виде поверхности уровня 1 и 0 функции Беллмана, двусторонние оценки для нее и для функции оптимального значения вероятностного критерия и субоптимальное управление. Доказана оптимальность найденной стратегии в задаче “двухимпульсной” коррекции для случая, когда начальное состояние принадлежит некоторому заданному множеству.

Основные результаты работы, выносимые на защиту

1. Предложено модифицированное уравнение Беллмана и выражения для оптимального управления для состояний, принадлежащих поверхностям уровня 1 и 0 функции Беллмана [4, 5, 12].

2. Найдены выражения для двусторонних оценок функции Беллмана и функции оптимального значения вероятностного критерия [5, 12].

3. Получены аналитические выражения для приближенного определения оптимальных управлений [4, 12].

4. Найдено решение задач оптимизации импульсной коррекции с вероятностным критерием для однопараметрической и двухпараметрической постановок [2–4, 7, 9–11]

5. Найдено решение семейства задач оптимального управления линейной дискретной стохастической системой с вероятностным критерием и нефиксированным, но ограниченным сверху моментом окончания [1, 6, 8].

6. Получено обоснование асимптотической оптимальности рисковой стратегии в задаче оптимального управления портфелем ценных бумаг по вероятностному критерию [5, 12].

Результаты диссертационной работы соответствуют пунктам 1 и 4 паспорта специальности 05.13.01.

Публикации в изданиях, входящих в перечень ВАК

1. *Азанов В.М.* Оптимальное управление линейной дискретной системой по критерию вероятности // Автоматика и Телемеханика. 2014. №10. С. 39–51. WoS, Scopus.
2. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оптимизация коррекции околокруговой орбиты искусственного спутника Земли по вероятностному критерию // Тр. ИСА РАН. 2015. №2. С. 18–26.
3. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Однопараметрическая задача оптимальной коррекции траектории летательного аппарата по критерию вероятности // Изв. РАН Теория и Системы Управления. 2016. №2. С. 115–128. WoS, Scopus.
4. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Синтез оптимальных стратегий в задачах управления дискретными системами по вероятностному критерию // Автоматика и Телемеханика, 2017, № 6, 57–83. WoS, Scopus.
5. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества // Автоматика и Телемеханика, 2018, № 2, С. 3–18. WoS, Scopus.

Публикации по теме диссертации в других изданиях

6. *Азанов В.М.* Оптимальное управление линейной дискретной стохастической системой по вероятностному и квантильному критериям // Сборник тезисов докладов международной молодежной научной конференци “XL Гагаринские чтения” 7–11 апреля 2014 г., Москва. – М.: МАТИ, 2014. Т.5. С. 46.

7. *Азанов В.М.* Оптимизация коррекции околокруговой орбиты исз по вероятностному критерию // Сборник тезисов докладов всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием “ТПСА-2014” (“Теория и практика системного анализа”) 21–23 мая 2014 г., Рыбинск. – Рыбинск: РГАТУ, 2014. Т. I. С. 5–11.
8. *Азанов В.М.* Оптимальное управление линейной дискретной системой по вероятностным критериям // Сборник трудов конференции “ВСПУ-2014” (“XII Всероссийское совещание по проблемам управления”) 16–19 июня 2014 г., Москва. – М: ИПУ РАН. С. 820–826.
9. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оптимальная коррекция одного параметра траектории движения летательного аппарата по вероятностному критерию // Сборник тезисов докладов XX международной научной конференции “Системный анализ, управление и навигация”, 28 июня–5 июля 2015 г., Евпатория. – М.: МАИ, 2015. С. 140–141.
10. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Задача оптимальной импульсной коррекции одного параметра траектории движения летательного аппарата по критерию вероятности // Сборник тезисов докладов 14-й международной конференции «Авиация и космонавтика», 16–20 ноября 2015 г., Москва. – М.: МАИ, 2015. С. 380–381.
11. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оптимальное управление билинейной дискретной стохастической системой по вероятностному интегральному критерию // Сборник тезисов докладов IV всероссийской научной конференции молодых ученых с международным участием «Информатика, управление и системный анализ», 08–11 июня 2016 г., Тверь. – Тверь: Тверской государственный технический университет, 2016, Т. I. С. 5–14.
12. *Azanov V.M., Kan Yu.S.* Optimal control for discrete-time stochastic systems w.r.t. the probabilistic performance index // Abstracts of the 17th Baikal international school-seminar “Methods of Optimization and Their Applications”. Ircutsk: ESI SB RAS, 2017. P. 136.

Программы для ЭВМ

13. *Азанов В.М., Кан Ю.С.* Оценка значения вероятностного критерия в задаче оптимальной однопараметрической импульсной коррекции дискретной стохастической системы методом Монте-Карло // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2016619986 от 1 сентября 2016 г.