

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)"

На правах рукописи



Панёв Александр Сергеевич

**Исследование движения тела по горизонтальной
плоскости под влиянием перемещения
внутренней массы**

01.02.01 – Теоретическая механика

Научный руководитель

доктор физико-математических наук, доцент

Бардин Борис Сабирович

Москва – 2018

Содержание

Введение	4
Глава 1. Исследование динамики корпуса в случае нулевой начальной скорости	11
1.1. Уравнения движения	11
1.2. Движение при отсутствии вязкого трения	16
1.3. Движение корпуса при наличии сухого и вязкого трения	26
Глава 2. Исследование общего характера движения корпуса при наличии сухого трения	35
2.1. О существовании, единственности и непрерывной зависимости решений уравнения движения от начальных условий и параметров задачи	35
2.2. Свойства решений уравнения движения	38
2.3. Анализ движения корпуса в области I	46
2.4. Анализ движения корпуса в области II	53
2.5. Исследование предельного характера движения корпуса в области III	60
Глава 3. Исследование общего характера движения корпуса при учете как сухого, так и вязкого трения	65
3.1. О свойствах решений уравнения движения при учете вязкого трения	65
3.2. Исследование движения корпуса в области I	74
3.3. Исследование движения корпуса в области II	80
3.4. О предельном характере движения в области III	89

Заключение	97
Литература	100

Введение

Актуальность задачи. Последние десятилетия характеризуются бурным развитием робототехнических систем. Одним из актуальных направлений в этой области является разработка и создание мобильных роботов, которые могут использоваться для решения широкого круга задач. В частности, для освоения космического пространства требуется создание автономных мобильных устройств, которые могут работать в ближнем и дальнем космосе. Развитие медицины достигло такого уровня, на котором возможно применение мобильных роботов как в диагностике, так и при лечении. Перспективным представляется использование роботов в агрессивных средах, в ближайшем будущем мобильные роботы также могут иметь решающее значение для изучения и освоения подводного мира. Таким образом, перед робототехникой ставятся новые амбициозные задачи [10], для решения которых необходимо проведение теоретических исследований в данной области: построения адекватных математических моделей роботов, их численный и аналитический анализ, поиск оптимального управления движением мобильных устройств, и др.

Среди большого числа робототехнических устройств, можно выделить класс устройств, движение которых осуществляется без участия внешних движителей (колес, гусениц, ног, и т.д.). Такие устройства имеют значительные преимущества перед мобильными системами других типов. Они просты в конструировании, не требуется создания механизмов для передачи движения от приводов к движителям и могут быть выполнены в форме запаянных капсул. Это делает их устойчивыми к внешним воздействиям, поэтому вибрационные роботы могут оказаться весьма перспективными для работы в агрессивных средах как на твердых поверхностях, так и в жидкостях. В частности, они могут использоваться для исследования космических тел и ремонта труднодоступных для человека участков космических аппаратов. Кроме того, благодаря простоте

конструкции, данный тип мобильных устройств легко поддается масштабированию, в частности, в сторону уменьшения размеров, что делает перспективным их использование в медицине для проведения диагностических обследований внутри тела человека и доставки медикамента точно к пораженному участку. Применение мобильных роботов будет несомненно перспективным для ремонта и профилактики инженерных систем, например инспекции технического состояния тонких труб. Движение робота без внешних движителей может осуществляться благодаря перемещению внутренних элементов под действием сил трения, возникающих при взаимодействии между системой и опорной плоскостью.

К системам, перемещение которых возможно без внешних движителей относятся многозвенные роботы, состоящие из двух и более элементов. Работы [6, 43, 49, 52, 69, 71–73, 94, 97, 98] посвящены изучению динамики и поиску оптимального управления данных систем. В частности, в статье [98] изучается прямолинейное движение системы двух тел, связанных пружиной на шероховатой горизонтальной плоскости. В работе [73] получены оптимальные законы управления, которые максимизируют среднюю скорость основного тела. В статье [6] рассматривается периодическое прямолинейное движение по горизонтальной шероховатой плоскости системы двух тел, управляемых изменением силы взаимодействия между ними, получены условия, необходимые и достаточные для возможности безреверсного движения системы, при котором ни одно из тел не меняет направления своего движения.

Частным случаем многозвенных механических систем являются системы, в которых одно или несколько тел не взаимодействуют с внешней средой, то есть являются внутренними по отношению к основному телу (корпусу). Строгое теоретическое исследование задач динамики и оптимального управления движением механических систем, состоящих из корпуса (несущего тела) и внутренних подвижных масс, было начато в работах [53] и [54]. Статья [1] посвящена исследованию движения неоднородного цилиндра перемещающегося по шероховатой

плоскости за счет перемещения внутренней массы. В работе [33] рассматривается динамика сфероробота, проводящегося в движение расположенной внутри платформой с омниколесами. Исследовались также движения несущего тела при наличии вязкого трения [46] и по наклонной плоскости [47, 48]. В работе [20, 60] представлена математическая модель плавающего робота, перемещающегося по криволинейной траектории в жидкой среде за счет движения двух внутренних масс и внешней силы вязкого сопротивления. В серии трудов [16–19, 84, 92] на основе совместного численного решения уравнений Навье–Стокса и уравнений движения проведено исследование характеристик движения твердого тела с переменным распределением внутренних масс в вязкой жидкости. В статье [41] также представлены численные исследования выявившие определяющее влияние вязких сил и моментов на траекторию движения тела. Работа [34] посвящена исследованию движения твердого тела и находящейся внутри тела материальной точки в безграничном объеме идеальной жидкости, совершающей безвихревое движение и покоящейся на бесконечности.

В [32, 44, 45, 55, 76, 87, 88, 96] представлены результаты исследования двумерного движения. В частности, исследованы вращательные движения корпуса относительно центра масс в результате поворота горизонтального диска внутри устройства, или движения двух точечных масс в противофазе. Во втором случае численно определены оптимальные параметры закона управления массами, доставляющие средней угловой скорости корпуса максимум в установившемся режиме поворота. Кроме того изучены способы перемещения несущего тела из исходного положения в заданное. В работах [2, 35, 42], рассматривается движение корпуса с отрывом от горизонтальной поверхности, в частности, в [2] представлен анализ безударных прыжков тела, несущего две подвижные массы, по горизонтальной плоскости, а в [35] получены уравнения, описывающие движение системы в фазе полета. Работа [42] посвящена рассмотрению вопросов составления алгоритма решения дифференциальных уравнений, описывающих

динамику движения мобильной двухмассовой механической системы, движущейся с отрывом от опорной поверхности.

Ряд работ посвящён анализу динамики и построению оптимального управления двухмассовой системой, состоящей из твёрдого тела и материальной точки, перемещающейся внутри тела по некоторой траектории. В [5] исследовалась динамика несущего тела в предположении, что внутренняя масса перемещается внутри него в вертикальной плоскости прямолинейно, а координаты её относительного движения меняются по гармоническому закону. В [79] исследовались режимы движения несущего тела, при которых оно совершает остановки, покоится в течении конечного интервала времени, а затем продолжает скольжение по горизонтальной плоскости, проведен анализ бифуркации указанных режимов. Построению оптимального управления движением корпуса при прямолинейном относительном движении внутренней массы посвящены работы [7, 8, 11–13, 29, 74, 75]. В частности, в [9, 13, 29] получены оптимальные периодические движения внутренних тел, при которых периодическое по скорости движение корпуса робота относительно среды происходит с максимальной средней скоростью для широкого класса законов сопротивления среды движению корпуса. В [9, 13], в частности, рассмотрены три типа законов сопротивления движению корпуса робота в среде: кусочно-линейное трение, квадратичное трение и сухое кулоново трение. В работах [12, 75] определены оптимальные параметры относительного движения, при которых достигается максимальная средняя скорость движения тела в случае наличия сухого трения между корпусом и поверхностью и с учетом ограничений, наложенных на смещение, скорость и ускорение относительного движения подвижной массы. Исследование системы, состоящего из корпуса и внутреннего тела, которое может перемещаться относительно корпуса вдоль прямолинейной направляющей и соединено с корпусом пружиной было проведено в [7, 11]. В серии статей [77, 78] рассматривается прямолинейное движение вибрационно-механической системы, состоящей из

двух идентичных модулей, соединенных упругим элементом. Каждый модуль состоит из основного тела и внутренней массы, которая может перемещаться внутри основного корпуса. Исследуется стационарное движение системы в целом. Работа [30] посвящена задаче об оптимальном по быстродействию торможении вращений свободного твердого тела, содержащего вязкоупругий элемент, моделируемый подвижной точечной массой.

Задачи оптимального управления движением корпуса в случае кругового относительного движения внутренней массы при некоторых ограничениях, наложенных на ее ускорение, рассматривались в [23–26, 56, 81]. В [57] построены траектории относительного движения внутренней массы, обеспечивающие оптимальное управление корпусом.

Работы [4, 14, 15, 36, 70] посвящены качению и скольжению твердых тел за счет перемещения внутренних элементов по шероховатой поверхности. В частности, в [14, 36] исследуется динамика шара Чаплыгина и вопросы поиска оптимального управления внутренними элементами системы. В [4, 15, 70] рассматривается движение саней Чаплыгина, движущихся за счет перемещения внутренних масс.

Прикладным задачам динамики, математического моделирования движения, а также вопросам конструирования мобильных роботов, способных передвигаться по поверхности благодаря перемещению внутренних масс посвящено много работ [21, 22, 27, 28, 58, 61–65, 89–91, 93, 95]. В работе [59], в частности, разработана математическая модель движения вибрационного робота по вертикальной металлической поверхности за счет переменного прижатия корпуса к поверхности с помощью электромагнита и вращения встроенных дебалансных масс. Труды [80, 82, 83, 85, 86] посвящены капсульным роботам - классу мобильных систем с вибрационным возбуждением, которые представляют собой систему твердых тел, взаимодействующих в общем случае между собой и с внешней средой и совершающих колебательные движения друг относительно

друга.

В данной диссертационной работе рассматривается движение механической системы, состоящей из твердого тела (корпуса) и материальной точки, движущейся внутри него по окружности, центр которой совпадает с центром масс тела, причем угловая скорость радиуса-вектора точки, задающего ее относительное движение, постоянна. Предполагается, что тело находится на плоской горизонтальной поверхности, сила трения между корпусом и поверхностью описывается комбинированной моделью сухого кулонова и вязкого трения.

Целью данной диссертационной работы является полное качественное исследование динамики описанной выше механической системы при всех допустимых значениях параметров и начальных условий.

В первой главе описана математическая модель рассматриваемой механической системы и получены уравнения движения. Рассмотрен случай движения корпуса с нулевой начальной скоростью. Установлено, что в зависимости от значений параметров задачи корпус может либо совершать периодическое возвратно-поступательное движение, либо двигаться с периодически меняющейся скоростью, либо его движение будет асимптотически приближаться к движению с периодически меняющейся скоростью. На плоскости параметров задачи определены области, для которых характерны качественно различные режимы движения, аналитически получены выражения, определяющие границы этих областей. Результаты, полученные в главе 1 опубликованы в [3, 37, 38, 67]

Во второй главе проведено качественное исследование движения корпуса с произвольной начальной скоростью в случае, когда между корпусом и поверхностью действует сила сухого кулонова трения, а сила вязкого трения отсутствует. На основе подробного анализа поведения интегральных кривых уравнения движения установлено, что при любой начальной скорости корпус выходит на некоторый периодический режим. В зависимости от значений параметров выход на периодический режим движения возможен либо в течение конечного

промежутка времени, либо он имеет асимптотический характер. Результаты, полученные в главе 2 опубликованы в [39, 66, 68]

В третьей главе рассмотрен случай движения с произвольной начальной скоростью в случае, когда между корпусом и поверхность действует как сила сухого кулонова трения, так и сила вязкого трения. Показано, что в этом случае как и при отсутствии вязкого трения движение имеет предельный характер, т.е. всегда корпус переходит в периодический режим движения. Характер выхода на периодический режим движения зависит от параметров задачи и может иметь либо асимптотический характер, либо осуществляться за конечный интервал времени. Для всех качественно различных типов движения корпуса построены, соответствующие им плоскости интегральных кривых. Результаты, полученные в главе 3 опубликованы в [40]

Основные результаты данной диссертационной работы докладывались на научных семинарах, российских и международных конференциях, а также были опубликованы в научных журналах, рекомендованных ВАК [3, 40, 66–68]

Глава 1

Исследование динамики корпуса в случае нулевой начальной скорости

1.1. Уравнения движения

Рассмотрим механическую систему, состоящую из корпуса – твердого тела массой M , находящегося на горизонтальной шероховатой плоскости, и внутренней массы – материальной точки массой m , движущейся внутри тела по окружности радиуса R , центр которой совпадает с центром масс корпуса. Во все время движения внутренняя масса с внешней средой не взаимодействует, а угловая скорость ω радиуса-вектора, задающего положение внутренней массы относительно корпуса, постоянна.

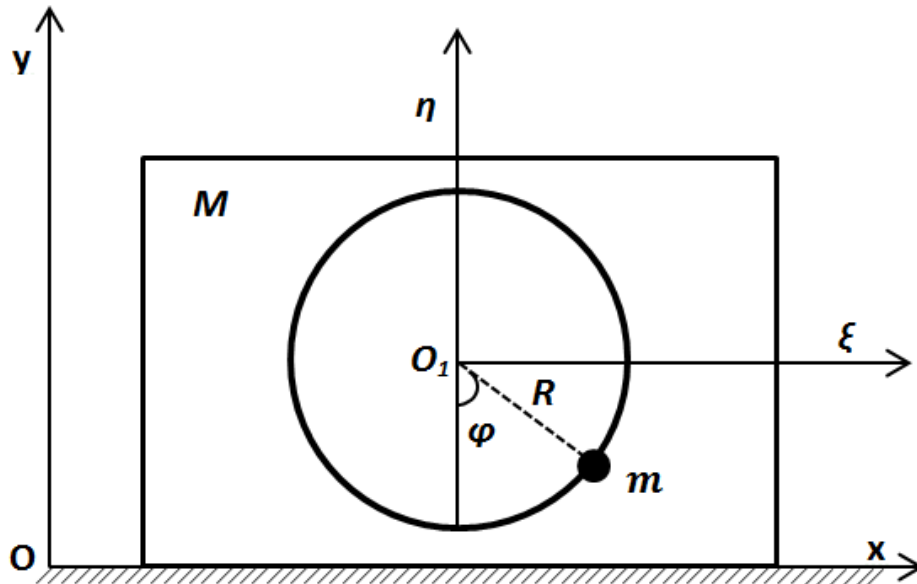


Рис. 1. Механическая система

Движение системы будем рассматривать в вертикальной плоскости, в ко-

торой введем абсолютную систему координат Oxy ; x, y – координаты центра масс O_1 корпуса в этой системе. С корпусом жестко свяжем подвижную систему координат $O_1\xi\eta$ (Рис. 1). Между корпусом и плоскостью опоры действуют силы сухого (кулонова) и вязкого трения; k – коэффициент сухого трения, ν – коэффициент вязкого трения. Положение внутренней массы в системе $O_1\xi\eta$ задается углом ϕ , а ее координаты изменяются по закону

$$\xi = R \sin(\omega t + \phi_0), \quad \eta = -R \cos(\omega t + \phi_0), \quad (1.1)$$

где ϕ_0 – значение угла ϕ при $t = 0$. Мы предполагаем, что параметры системы выбраны так, что в момент начала движения и после него корпус движется поступательно без отрыва от горизонтальной плоскости. Тогда положение корпуса полностью задается координатами его центра масс, а уравнения движения запишутся следующим образом

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + m(\ddot{x} + \ddot{\xi}) &= F_c - \dot{x}\nu, \\ M\ddot{y} + m(\ddot{y} + \ddot{\eta}) &= -(M + m)g + N. \end{aligned} \quad (1.2)$$

При этом координаты ξ, η внутренней массы в подвижной системе задаются формулами (1.1). Модель сухого трения можно записать так [31]

$$F_c = \begin{cases} -kN \operatorname{sign} \dot{x}, & \text{если } \dot{x} \neq 0, \\ m\ddot{\xi}, & \text{если } \dot{x} = 0 \text{ и } |m\ddot{\xi}| \leq kN, \\ kN \operatorname{sign}(m\ddot{\xi}), & \text{если } \dot{x} = 0 \text{ и } |m\ddot{\xi}| > kN. \end{cases} \quad (1.3)$$

Будем считать, что в момент времени $t = 0$ корпус находится в покое, а внутренняя масса занимает свое нижнее положение на вертикальной оси $O_1\eta$, т.е. в (1.1) далее полагаем $\phi_0 = 0$, тогда подставляя (1.1) в (1.2) имеем

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + m(\ddot{x} - R\omega^2 \sin \omega t) &= F_c - \dot{x}\nu, \\ M\ddot{y} + m(\ddot{y} + R\omega^2 \cos \omega t) &= -(M + m)g + N. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Введем безразмерные координаты x' , y' и время t'

$$x = \frac{Rmx'}{M+m}, \quad y = \frac{Rmy'}{M+m}, \quad t = \frac{t'}{\omega}. \quad (1.5)$$

Отметим, что новое время t' играет роль угловой координаты, определяющей положение внутренней массы на окружности.

Сохраняя для новых (безразмерных) координат и времени прежние обозначения и учитывая (1.1), перепишем уравнения (1.4) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} - \sin t &= f_c - \alpha \dot{x}, \\ \ddot{y} + \cos t &= -\mu + n, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где безразмерные параметры μ и α введены по формулам

$$\mu = \frac{(M+m)g}{Rm\omega^2}, \quad \alpha = \frac{\nu}{(M+m)\omega}. \quad (1.7)$$

Через f_c и n обозначены величины

$$f_c = \frac{F_c}{Rm\omega^2}, \quad n = \frac{N}{Rm\omega^2}. \quad (1.8)$$

Далее, будем рассматривать поступательное движение корпуса по горизонтальной плоскости. Предположим, что выполняются два условия:

1. Корпус может начать движение из состояния покоя.
2. Корпус будет двигаться без отрыва от горизонтальной плоскости.

Тогда положив $u = \dot{x}$, приходим к следующему уравнению, описывающему движение корпуса по горизонтальной плоскости без отрыва

$$\dot{u} = \sin t + f_c - \alpha u. \quad (1.9)$$

Указанные выше условия накладывают ограничения на параметры задачи. Действительно, первое условие будет выполнено, если существует такой момент времени, что горизонтальная составляющая силы инерции, приложенная

к внутренней массе, равна по абсолютной величине предельному значению силы сухого трения, т.е. если уравнение

$$\sin t = \pm k(\mu + \cos t) \quad (1.10)$$

имеет решения. Нетрудно показать, что последнее возможно лишь при выполнении неравенства

$$k^2 < \frac{1}{\mu^2 - 1}. \quad (1.11)$$

Для выполнения второго условия необходимо, чтобы во время движения вертикальная составляющая силы инерции, приложенная к внутренней массе, по абсолютной величине не превосходила силы тяжести, приложенной в центре масс системы. Для этого нужно потребовать, чтобы уравнение

$$\mu + \cos t = 0 \quad (1.12)$$

не имело решений, т.е. положить $\mu > 1$.

Найдем корни уравнения (1.10) на интервале $t \in (0, 2\pi)$, для этого применим формулы двойного угла и преобразуем (1.10) к следующему эквивалентному виду

$$k(\mu - 1)\operatorname{tg}^2\left(\frac{t}{2}\right) - 2\operatorname{tg}\left(\frac{t}{2}\right) + k(\mu + 1) = 0. \quad (1.13)$$

Полученное уравнение (1.13) имеет следующие корни

$$\begin{aligned} t_1 &= 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1 - \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)}\right), \\ t_2 &= 2\operatorname{arctg}\left(\frac{1 + \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)}\right), \\ t_3 &= 2\pi - t_2, \quad t_4 = 2\pi - t_1. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Моменты времени t_i ($i = 1, 2, 3, 4$) являются граничными точками интервалов (t_2, t_3) и (t_4, t_1) , на которых ускорение тела противоположно направлению

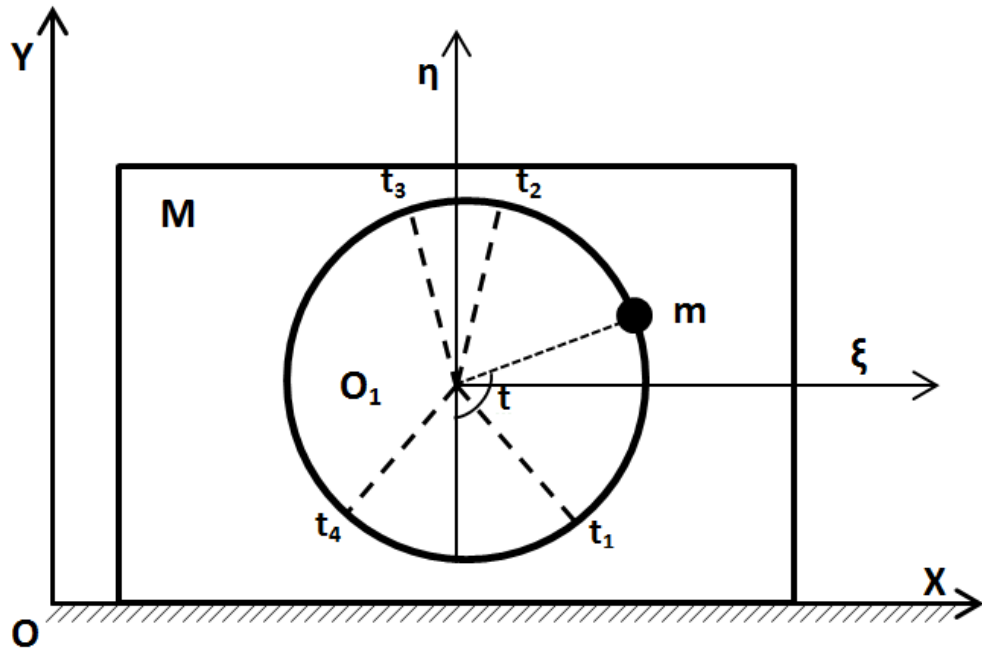


Рис. 2. Зоны замедления

скорости или равно нулю. При прохождении первого из указанных интервалов внутренняя масса находится в верхней части траектории движения, при прохождении второго – в нижней части. Указанные интервалы назовем соответственно верхней и нижней зонами замедления (Рис. 2). Зоны замедления играют важную роль для анализа характера движения корпуса. В частности, если корпус остановится в момент прохождения внутренней массой зоны замедления, то он будет оставаться в покое до тех пор, пока она не покинет зону замедления. Такое явление называют залипанием корпуса.

Далее в качестве начального момента времени примем момент $t = t_1$. Как будет показано ниже, для исследования общего характера движения рассматриваемой механической системы существенную роль играют результаты анализа движения корпуса при нулевой начальной скорости. Поэтому в следующем параграфе мы отдельно остановимся на исследовании этого важного частного случая.

1.2. Движение при отсутствии вязкого трения

В данном параграфе будем полагать, что в начальный момент времени корпус находится в состоянии покоя, т.е. $u(t_1) = 0$, а вязкое трение в системе отсутствует $\alpha = 0$. Тогда уравнение (1.9) примет вид

$$\dot{u} = \sin t + f_c. \quad (1.15)$$

В частности, движение в положительном направлении будет описываться уравнением

$$\dot{u} = \sin t - k(\mu + \cos t), \quad (1.16)$$

а в отрицательном

$$\dot{u} = \sin t + k(\mu + \cos t). \quad (1.17)$$

В зависимости от значений параметров задачи движение корпуса может иметь качественно различный характер. Далее мы подробно рассмотрим каждый из возможных режимов движения.

1.2.1. Движение с залипанием в верхней и в нижней зонах замедления

Пусть первая остановка корпуса происходит в некоторый момент времени $t_1 + \Delta t_*^I$. Поскольку на интервале времени $(t_1, t_1 + \Delta t_*^I)$ скорость корпуса не меняет знака и является положительной, то движение корпуса на данном интервале будет описываться уравнением (1.16). Если корпус не остановится при прохождении верхней зоны замедления, то его скорость сохранит положительное значение, т.е. будет выполняться неравенство $u(t_3) > 0$. Интегрируя уравнение (1.16) с начальным условием $u(t_1) = 0$ последнее неравенство можно

записать в виде

$$\int_{t_1}^{t_3} [\sin t - k(\mu + \cos t)] dt > 0. \quad (1.18)$$

Если же на интервале (t_2, t_3) произойдет остановка корпуса, то будет выполняться неравенство противоположное неравенству (1.18). Это неравенство является необходимым и достаточным условием залипания в верхней зоне замедления и имеет следующий явный вид

$$-(\cos t_3 - \cos t_1) - k\mu(t_3 - t_1) - k(\sin t_3 - \sin t_1) \leq 0. \quad (1.19)$$

Учитывая, что $t_3 = 2\pi - t_2$, неравенство (1.19) можно переписать так

$$\cos t_1 - \cos t_2 + k\mu(t_1 + t_2 - 2\pi) + k(\sin t_1 + \sin t_2) \leq 0. \quad (1.20)$$

В предельной ситуации, когда неравенство (1.20) обращается в равенство, параметры задачи k и μ , таковы, что $u(t_3) = 0$. В этом случае корпус остановится в момент времени t_3 , когда внутренняя масса проходит левую границу верхней зоны замедления. Равенство (1.20) можно переписать в более удобной форме не содержащей t_1 и t_2 . Для этого введем обозначения

$$a_1 = \operatorname{tg}^2 \frac{t_1}{2}; \quad a_2 = \operatorname{tg}^2 \frac{t_2}{2}. \quad (1.21)$$

И, используя формулы

$$\cos t_i = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{t_i}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t_i}{2}}, \quad \sin t_i = \frac{2\operatorname{tg}^2 \frac{t_i}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{t_i}{2}}, \quad (i = 1, 2) \quad (1.22)$$

ВЫЧИСЛИМ

$$\begin{aligned} \cos t_1 - \cos t_2 &= \frac{2(a_2^2 - a_1^2)}{(1 - a_1 a_2)^2 + (a_1 + a_2)^2}, \\ \sin t_1 + \sin t_2 &= \frac{2(a_1 + a_2)(1 + a_1 a_2)}{(1 - a_1 a_2)^2 + (a_1 + a_2)^2}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Величины a_1 и a_2 являются корнями уравнения (1.13), поэтому по теореме Виета имеем

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 &= \frac{2}{k(\mu - 1)}, \\ a_1 a_2 &= \frac{\mu + 1}{\mu - 1}. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Кроме того из (1.24) нетрудно получить

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= \frac{2\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)}, \\ 1 + a_1 a_2 &= \frac{2\mu}{\mu - 1}, \quad 1 - a_1 a_2 = \frac{-2}{\mu - 1}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Подставив теперь (1.24) и (1.25) в (1.23), имеем

$$\begin{aligned} \cos t_1 - \cos t_2 &= \frac{2\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k^2 + 1}, \\ \sin t_1 + \sin t_2 &= \frac{2\mu k}{k^2 + 1}. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Поскольку $a_1 > 0$ и $a_2 > 0$, то имеет место тождество

$$\operatorname{arctg} a_1 + \operatorname{arctg} a_2 = \operatorname{arcctg} \frac{1 - a_1 a_2}{a_1 + a_2}. \quad (1.27)$$

Используя (1.27), нетрудно показать, что

$$t_1 + t_2 = 2\pi - 2\operatorname{arcctg} k. \quad (1.28)$$

Подставив (1.26) и (1.28) в (1.20) имеем следующее неравенство

$$-\operatorname{arcctg} k + \frac{\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)} + \mu k^2}{\mu k(k^2 + 1)} \leq 0. \quad (1.29)$$

Неравенство (1.29), вместе с неравенством $\mu > 1$ и неравенством (1.11), определяет в плоскости k, μ область I (Рис. 3). Если параметры задачи k и μ лежат в этой области, то имеет место остановка и залипание корпуса при прохождении внутренней массой верхней зоны замедления.

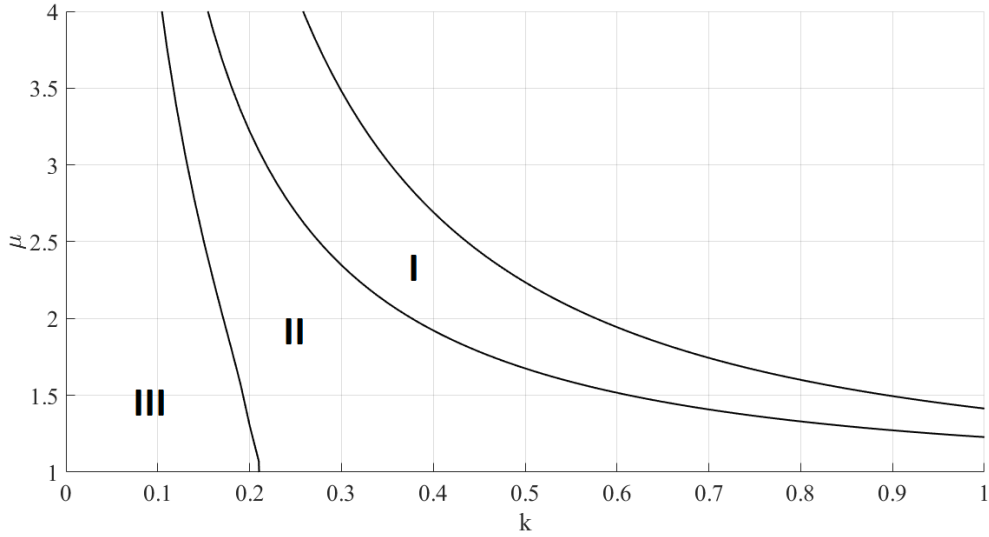


Рис. 3. Области возможных режимов движения

Исследуем характер движения корпуса в области I. В момент времени t_1 корпус начинает движение и, перемещаясь в положительном направлении оси Ox , остановится в некоторый момент времени $t_1 + \Delta t_*^I$. Движение корпуса на интервале времени от t_1 до $t_1 + \Delta t_*^I$ описывается уравнением (1.16). На интервале времени от $t_1 + \Delta t_*^I$ до t_3 корпус будет находиться в покое, а затем начнет движение в противоположном (отрицательном) направлении. С момента времени t_3 до следующей остановки движение корпуса описывается уравнением (1.17). Покажем, что для значений параметров из области I движение корпуса в положительном и отрицательном направлениях происходит в течении равных промежутков времени. Более того, перемещения корпуса в положительном и отрицательном направлениях равны по абсолютной величине. Действительно, заметим сначала, что имеет место тождество

$$\cos t_1 + k \sin t_1 = -(\cos t_2 + k \sin t_2) = \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}, \quad (1.30)$$

которое можно доказать на основании формул (1.22)-(1.26). Используя тождество (1.30), нетрудно показать, что для произвольного τ выполняется равенство

$$\sin(t_1 + \tau) - k(\mu + \cos(t_1 + \tau)) = -\sin(t_3 + \tau) - k(\mu + \cos(t_3 + \tau)). \quad (1.31)$$

Учитывая равенство (1.31) и сравнивая уравнения (1.16) и (1.17), приходим к равенству

$$\dot{u}(t_1 + \tau) = -\dot{u}(t_3 + \tau). \quad (1.32)$$

Отметим, что равенство (1.32) выполняется только в том случае, если величины $u(t_1 + \tau)$ и $u(t_3 + \tau)$ имеют противоположные знаки или одновременно обращаются в ноль. При движении с остановкой в верхней зоне замедления это имеет место при $\tau \in [0, t_3 - t_1]$. Интегрируя по τ левую и правую часть равенства (1.32) с начальными условиями $u(t_1) = u(t_3) = 0$, имеем

$$u(t_1 + \tau) = -u(t_3 + \tau). \quad (1.33)$$

В частности, из равенства (1.33) следует, что $u(t_3 + \Delta t_*^I) = -u(t_1 + \Delta t_*^I) = 0$. Это означает, что при $t = t_3 + \Delta t_*^I$ корпус остановится, т.е. как в положительном, так и в отрицательном направлении корпус движется в течение одного и того же периода времени Δt_*^I . Величина Δt_*^I определяется из уравнения $u(t_1 + \Delta t_*^I) = 0$, которое имеет следующий явный вид

$$(\cos t_1 + k \sin t_1)(1 - \cos \Delta t_*^I) + k\mu(\sin \Delta t_*^I - \Delta t_*^I) = 0. \quad (1.34)$$

С учетом (1.30) последнее уравнение можно переписать так

$$\frac{\Delta t_*^I - \sin \Delta t_*^I}{1 - \cos \Delta t_*^I} = \frac{\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k\mu}. \quad (1.35)$$

В момент остановки корпуса внутренняя масса будет находиться в нижней зоне замедления, поэтому на интервале времени от $t_3 + \Delta t_*^I$ до $t_1 + 2\pi$ корпус будет находиться в покое. Поскольку $u = \dot{x}$, то интегрируя обе части равенства (1.33) по τ на интервале времени от 0 до Δt_*^I имеем

$$x(t_1 + \Delta t_*^I) - x(t_1) = -x(t_3 + \Delta t_*^I) + x(t_3). \quad (1.36)$$

Последнее равенство означает, что перемещения корпуса в положительном и отрицательном направлениях равны по абсолютной величине. Таким образом, для значений параметров из области I корпус совершает 2π -периодическое возвратно-поступательное движение.

1.2.2. Движение с залипанием только в нижней зоне замедления

Выше было показано, что если корпус остановится при прохождении внутренней массой верхней зоны замедления, то он также остановится и при прохождении ею нижней зоны замедления. Пусть теперь условие (1.29) не выполнено, т.е. имеет место неравенство

$$-\text{arcctg}k + \frac{\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)} + \mu k^2}{\mu k(k^2 + 1)} > 0. \quad (1.37)$$

В этом случае корпус остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II}$, т.е. уже после того как внутренняя масса пройдет верхнюю зону замедления. При этом будет выполняться неравенство $t_3 + \Delta t_*^{II} < t_4$, которое означает, что остановка корпуса произойдет еще до попадания внутренней массы в нижнюю зону замедления. Это нетрудно доказать от противного. Действительно, пусть $t_3 + \Delta t_*^{II} > t_4$, тогда $u(t_4) > 0$. С другой стороны, интегрируя уравнение (1.16) на интервале (t_1, t_4) и учитывая, что $\mu > 1$, имеем

$$u(t_4) = \int_{t_1}^{t_4} [\sin t - k(\mu + \cos t)] dt = -k \int_{t_1}^{t_4} (\mu + \cos t) dt < 0. \quad (1.38)$$

Таким образом, если корпус не остановится при прохождении внутренней массой верхней зоны замедления, то остановка обязательно произойдет на интервале времени (t_3, t_4) . Величина Δt_*^{II} определяется из уравнения

$$\cos t_1 - \cos(t_3 + \Delta t_*^{II}) - k\mu(t_3 + \Delta t_*^{II} - t_1) - k(\sin(t_3 + \Delta t_*^{II}) - \sin t_1) = 0. \quad (1.39)$$

При $t = t_3 + \Delta t_*^{II}$ корпус остановится, а затем, изменив направление движения, начнет перемещаться в отрицательном направлении до новой остановки. Выясним, при каких условиях на параметры задачи k и μ эта остановка произойдет на интервале прохождения внутренней массой нижней зоны замедления. От момента времени $t_3 + \Delta t_*^{II}$ до новой остановки корпус будет двигаться с отрицательной скоростью, величина которой определяется в результате решения уравнения (1.17) с начальным условием $u(t_3 + \Delta t_*^{II}) = 0$, т.е.

$$u(t) = \int_{t_3 + \Delta t_*^{II}}^t [\sin t + k(\mu + \cos t)] dt. \quad (1.40)$$

В момент времени t_4 величина $u(t)$ достигнет своего минимального значения, а затем будет монотонно возрастать. Следовательно, для того чтобы выражение (1.40) обратилось в ноль на интервале $(t_4, t_1 + 2\pi)$, необходимо и достаточно, чтобы при $t_1 + 2\pi$ это выражение было неотрицательным, т.е. было выполнено неравенство

$$\int_{t_3 + \Delta t_*^{II}}^{t_1 + 2\pi} [\sin t + k(\mu + \cos t)] dt \geq 0. \quad (1.41)$$

При выполнении неравенства (1.41) корпус остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_{**}^{II}$ на интервале $(t_4, t_1 + 2\pi)$ при прохождении внутренней массой нижней зоны замедления и будет оставаться в покое до момента времени $t_1 + 2\pi$, после чего снова начнет движение в положительном направлении. Учитывая (1.39), неравенство (1.41) можно переписать в следующей эквивалентной форме

$$\cos t_1 + \cos \left[t_1 + \frac{\sin t_1 + \sqrt{1 - (\cos t_1 - \pi k \mu)^2}}{\mu} \right] \leq \pi k \mu, \quad (1.42)$$

где величина t_1 определяется по формуле (1.14).

Неравенства (1.37) и (1.42) определяют в плоскости k, μ область II (Рис. 3). Если параметры k и μ принадлежат этой области, то, в момент времени

t_1 корпус начнет движение в положительном направлении, пройдет без остановки верхнюю зону замедления и остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II} \in [t_3, t_4]$. Затем корпус изменит направление движения и будет перемещаться до новой остановки, которая произойдет в некоторый момент времени $(t_3 + \Delta t_{**}^{II})$ на интервале $[t_4, t_1 + 2\pi]$, когда внутренняя масса будет находиться в нижней зоне замедления. После остановки корпус будет оставаться в покое до момента времени $t_1 + 2\pi$. В момент времени $t_1 + 2\pi$ корпус вновь начнет перемещаться в положительном направлении и все описанные выше этапы движения повторятся. Это означает, что при значениях параметров из области II корпус будет совершать движение с 2π -периодически меняющейся скоростью.

Покажем теперь, что за один период корпус совершает перемещение в положительном направлении. Заметим сначала, что, как и при движении с остановкой в верхней зоне замедления, в рассматриваемом случае имеет место равенство (1.32), которое выполняется, если величины $u(t_1 + \tau)$ и $u(t_3 + \tau)$ имеют противоположные знаки или одновременно обращаются в ноль. Нетрудно заметить, что для выполнения указанного условия необходимо положить $\tau > \Delta t_*^{II}$. Интегрируя по τ левую и правую часть равенства (1.32) и учитывая, что $u(t_3 + \Delta t_*^{II}) = 0$, имеем

$$u(t_1 + \tau) = -u(t_3 + \tau) + u(t_1 + \Delta t_*^{II}) \quad (1.43)$$

Из (1.43), в частности, следует, что $u(t_1 + \Delta t_{**}^{II}) = u(t_1 + \Delta t_*^{II}) > 0$. Это означает, что $t_1 + \Delta t_{**}^{II} < t_3 + \Delta t_*^{II}$. Таким образом, $\Delta t_{**}^{II} - \Delta t_*^{II} < \Delta t_{**}^{II} < t_3 + \Delta t_*^{II} - t_1$, т.е. время движения корпуса в положительном направлении превосходит время движения корпуса в отрицательном направлении. Вычислим теперь перемещение корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$. Учитывая, что на интервале времени

$[t_3 + \Delta t_{**}^{II}, t_1 + 2\pi]$ корпус находится в покое, имеем

$$x(t_1 + 2\pi) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_3 + \Delta t_{**}^{II}} u(t) dt \quad (1.44)$$

Используя равенство (1.43), выражение (1.44) можно переписать в виде

$$x(t_1 + 2\pi) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_1 + \Delta t_*^{II}} u(t) dt + \int_{t_1 + \Delta t_{**}^{II}}^{t_3 + \Delta t_{**}^{II}} u(t) dt + u(t_1 + \Delta t_*^{II})(\Delta t_{**}^{II} - \Delta t_*^{II}) \quad (1.45)$$

Поскольку величина $u(t)$ на интервалах времени $[t_1, t_1 + \Delta t_*^{II}]$ и $[t_1 + \Delta t_{**}^{II}, t_3 + \Delta t_{**}^{II}]$ принимает только положительные значения (корпус движется в положительном направлении), то правая часть выражения (1.45) положительна.

Таким образом, в области II залипание корпуса происходит только при прохождении материальной точкой нижней зоны замедления, при этом скорость корпуса меняется 2π -периодически и за каждый период перемещение корпуса будет положительным.

Отметим, что при движении в положительном направлении скорость корпуса принимает наибольшее значение при $t = t_2$. Вычисления показали, что

$$u(t_2) = 2\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)} - 2k\mu \operatorname{arccctg}\left(\frac{\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k\mu}\right). \quad (1.46)$$

При движении в отрицательном направлении модуль скорости корпуса будет наибольшим при $t = t_4$. Можно показать, что

$$u(t_4) = 2 \cos(t_1 + \Delta t_*^{II}) - 2\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)} + 2k\mu(\pi - t_1). \quad (1.47)$$

1.2.3. Движение без залипания

Если неравенство (1.42) выполняется с противоположным знаком, т.е. выполняется условие

$$\cos t_1 + \cos \left[t_1 + \frac{\sin t_1 + \sqrt{1 - (\cos t_1 - \pi k\mu)^2}}{\mu} \right] > \pi k\mu \quad (1.48)$$

то тело не остановится ни в нижней, ни в верхней зонах замедления, поэтому в этом случае корпус будет двигаться без залипания. В плоскости параметров k и μ неравенство (1.48) определяет область III (см. Рис. 3). Для значений параметров из области III движение не будет периодическим. В следующей главе будет строго аналитически доказано, что это движение носит предельный характер асимптотически приближаясь к некоторому режиму движения без интервалов залипания с периодически меняющейся скоростью.

В рассматриваемом случае корпус за период времени равный 2π дважды меняет направление движения на противоположное. Изменение направления движения с положительного на отрицательное происходит в моменты времени $2\pi n + t_*^{(n)}$, а с отрицательного на положительное – в моменты времени $2\pi n + t_{**}^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При заданных k и μ величины $t_*^{(n)}$ и $t_{**}^{(n)}$ могут быть определены численно путем последовательного решения систем уравнений.

$$\begin{aligned} \cos t_*^{(n)} - \cos t_{**}^{(n)} + k\mu(t_*^{(n)} - t_{**}^{(n)}) + k(\sin t_*^{(n)} - \sin t_{**}^{(n)}) &= 0, \\ \cos t_{**}^{(n)} - \cos t_*^{(n+1)} + k\mu(t_*^{(n+1)} - t_{**}^{(n)}) + k(\sin t_*^{(n+1)} - \sin t_{**}^{(n)}) &= 0, \end{aligned} \quad (1.49)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

При этом следует положить $t_*^{(0)} = t_1$, где величина t_1 определяется по формуле (1.14). В предельном периодическом режиме движения скорость корпуса изменяется 2π -периодически таким образом, что на интервалах времени $[2\pi n + t_*, 2\pi n + t_{**}]$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) корпус движется в положительном направлении, а на интервалах времени $[2\pi n + t_{**}, 2\pi n + t_*]$ – в отрицательном, при этом за один период перемещение корпуса будет положительным. Выражения для вычисления t_* и t_{**} приведены в главе 2 (см. формулы (2.25)).

1.3. Движение корпуса при наличии сухого и вязкого трения

Теперь рассмотрим случай, когда между корпусом и поверхностью действуют как сила сухого, так и сила вязкого трения $\alpha \neq 0$. При движении в положительном направлении уравнение движения (1.9) примет вид

$$\dot{u} + \alpha u = \sin t - k(\mu + \cos t), \quad (1.50)$$

а в отрицательном

$$\dot{u} + \alpha u = \sin t + k(\mu + \cos t). \quad (1.51)$$

Как и в случае отсутствия в системе вязкого трения, полагая, что в начальный момент времени скорость корпуса была равна нулю будем классифицировать типы движения в зависимости от поведения корпуса в зонах замедления. Далее для указания моментов остановок корпуса будем использовать те же обозначения, что и в параграфе 1.2.

1.3.1. Движение с залипанием в верхней и нижней зонах замедления

Найдем условие остановки корпуса в верхней зоне замедления. Пусть эта остановка происходит в некоторый момент времени $t_1 + \Delta t_*^I \in (t_2, t_3)$. Поскольку функция $u(t)$, полученная как решение уравнения (1.50), убывает на всем интервале $(t_2, t_3]$, то для того, чтобы она обращалась в ноль на указанном интервале, ее значение на его правой границе $t = t_3$ должно быть либо отрицательным, либо обращаться в ноль, т.е. для остановки корпуса на интервале $(t_2, t_3]$ необходимо выполнение неравенства

$$e^{-\alpha t_3} \int_{t_1}^{t_3} e^{\alpha t} [\sin t - k(\mu + \cos t)] dt \leq 0. \quad (1.52)$$

Введем функции G_1 и G_2

$$\begin{aligned} G_1(t) &= -\alpha^2 f_1(t) + \alpha f_1'(t) + k\mu, \\ G_2(t) &= -\alpha^2 f_2(t) + \alpha f_2'(t) - k\mu, \end{aligned} \quad (1.53)$$

где $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \sin t - k(\mu + \cos t), \\ f_2(t) &= \sin t + k(\mu + \cos t). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Тогда неравенство (1.52) можно переписать в виде

$$-G_1(t_3) + e^{\alpha(t_1-t_3)}G_2(t_1) \leq 0. \quad (1.55)$$

Напомним, что t_1 и t_3 выражаются через k и μ по формулам (1.14), поэтому левая часть неравенства (1.55) представляет собой функцию параметров k , μ и α . Таким образом, если параметры задачи k , μ и α удовлетворяют неравенствам (1.55) и (1.11), то корпус будет совершать движение с остановкой в верхней зоне замедления.

Итак, в момент времени t_1 корпус начинает движение и, перемещаясь в положительном направлении оси Ox , останавливается в некоторый момент времени $t_1 + \Delta t_*^I$. Далее на промежутке $(t_1 + \Delta t_*^I, t_3)$ корпус будет находиться в состоянии покоя, а затем начнет движение в противоположном (отрицательном) направлении. С момента времени t_3 до следующей остановки движение корпуса описывается уравнением (1.51). Покажем, что, как и в случае отсутствия вязкого трения между корпусом и поверхностью, так и в рассматриваемой случае будет справедливо следующее утверждение: если корпус остановится в верхней зоне замедления, то далее при движении в отрицательном направлении он также остановится и в нижней зоне замедления, причем перемещение корпуса за период будет нулевым. Интегрируя уравнение (1.50) с начальным условием $u(t_1) = 0$, имеем

$$u(t_1 + \tau) = -G_1(t_1 + \tau) + e^{-\alpha\tau}G_1(t_1). \quad (1.56)$$

Аналогично, интегрируя уравнение (1.51) с нулевым начальным условием $u(t_3) = 0$, получаем

$$u(t_3 + \tau) = -G_2(t_3 + \tau) + e^{-\alpha\tau}G_2(t_3). \quad (1.57)$$

Используя тождество (1.30) и явные выражения (1.56), (1.57), можно показать, что

$$u(t_1 + \tau) = -u(t_3 + \tau). \quad (1.58)$$

В частности, имеет место равенство

$$u(t_1 + \Delta t_*^I) = -u(t_3 + \Delta t_*^I) = 0. \quad (1.59)$$

Последнее означает, что корпус совершит остановки в верхней и нижней зонах замедления в моменты времени $t = t_1 + \Delta t_*^I$ и $t = t_3 + \Delta t_*^I$, т.е. как в положительном так и в отрицательном направлении корпус будет двигаться в течение одного и того же периода времени Δt_*^I . Величина Δt_*^I определяется из уравнения $u(t_1 + \Delta t_*^I) = 0$, которое имеет следующий явный вид

$$u(t_1 + \Delta t_*^I) = -G_1(t_1 + \Delta t_*^I) + e^{-\alpha\Delta t_*^I}G_1(t_1) = 0. \quad (1.60)$$

Поскольку $u = \dot{x}$, то, интегрируя обе части равенства (1.58) по τ на интервале времени от 0 до Δt_*^I , имеем

$$x(t_1 + \Delta t_*^I) - x(t_1) = -x(t_3 + \Delta t_*^I) + x(t_3). \quad (1.61)$$

Равенство (1.61) означает, что перемещения корпуса в положительном и отрицательном направлениях равны по абсолютной величине, т.е. корпус совершает 2π -периодическое возвратно-поступательное движение.

Таким образом, неравенства (1.11) и (1.55) определяют в пространстве параметров k , μ и α область, в которой корпус совершает периодическое возвратно-поступательное движение с залипаниями в верхней и нижней зонах замедления. При таком движении перемещение корпуса за время полного оборота

внутренней массы по окружности будет равно нулю. Указанную область, как и в случае отсутствия вязкого трения, будем называть областью I.

1.3.2. Движение с залипанием только в нижней зоне замедления

В предыдущем параграфе было показано, что если корпус остановится в верхней зоне замедления, то он обязательно остановится и в нижней зоне замедления. Пусть теперь условие (1.55) не выполнено, т.е. имеет место неравенство

$$-G_1(t_3) + e^{\alpha(t_1-t_3)}G_2(t_1) > 0. \quad (1.62)$$

В этом случае корпус остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II} \in (t_3, t_4)$, т.е. после того как внутренняя масса пройдет верхнюю зону замедления и до её попадания в нижнюю зону замедления. Это нетрудно доказать от противного. Действительно, пусть $t_3 + \Delta t_*^{II} > t_4$, тогда $u(t_4) > 0$. С другой стороны, интегрируя уравнение (1.50) на интервале (t_1, t_4) с нулевым начальным условием, имеем

$$u(t_4) = e^{-\alpha t_4} \int_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} [\sin t - k(\mu + \cos t)] dt. \quad (1.63)$$

или

$$u(t_4) = e^{-\alpha t_4} \left[\int_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} [-k(\mu + \cos t)] dt + \int_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} \sin t dt \right]. \quad (1.64)$$

Очевидно, что первое слагаемое в квадратных скобках правой части (1.64) будет отрицательным. Учитывая, что $t_4 = 2\pi - t_1$, второе слагаемое можно представить в следующем виде

$$\int_{t_1}^{t_4} e^{\alpha t} \sin t dt = \int_{t_1}^{\pi} e^{-\alpha t} (e^{2\alpha t} - e^{2\pi\alpha}) \sin t dt \quad (1.65)$$

Подинтегральное выражение в правой части равенства (1.65) на интервале (t_1, π) может принимать только отрицательные значения, поэтому и второе слагаемое в квадратных скобках правой части (1.64) будет отрицательным. Из этого следует, что $u(t_4) < 0$, т.е., если корпус не остановится при прохождении внутренней массой верхней зоны замедления, то остановка обязательно произойдет на интервале времени (t_3, t_4) . Величина Δt_*^{II} определяется из уравнения

$$G_1(t_3 + \Delta t_*^{II}) - e^{\alpha(t_1 - (t_3 + \Delta t_*^{II}))} G_2(t_1) = 0. \quad (1.66)$$

После остановки в момент времени $t = t_3 + \Delta t_*^{II}$ корпус, изменив направление, будет двигаться с отрицательной скоростью до новой остановки. Выясним, каким условиям должны удовлетворять параметры задачи k , μ и α , чтобы эта остановка произошла в нижней зоне замедления. На интервале времени от $t_3 + \Delta t_*^{II}$ до новой остановки скорость корпуса определяется в результате решения уравнения (1.51) с начальным условием $u(t_3 + \Delta t_*^{II}) = 0$. В момент времени t_4 , скорость корпуса принимает отрицательное значение. Заметит теперь, что любое решение уравнения (1.51) является непрерывной и возрастающей функцией на интервале $(t_4, t_1 + 2\pi)$. Если эта функция принимает отрицательное значение на левой границе указанного интервала, то для ее обращения в ноль на данном интервале необходимо и достаточно, чтобы на правой границе интервала (при $t_1 + 2\pi$) она принимала неотрицательное значение, т.е. было выполнено неравенство

$$u(t_1 + 2\pi) = e^{-\alpha(t_1 + 2\pi)} \int_{t_3 + \Delta t_*^{II}}^{t_1 + 2\pi} e^{\alpha t} [\sin t + k(\mu + \cos t)] dt \geq 0. \quad (1.67)$$

Используя введенные выше обозначения, последнее неравенство можно переписать в виде

$$G_2(t_1) - e^{\alpha(t_3 + \Delta t_*^{II} - t_1 - 2\pi)} G_2(t_3 + \Delta t_*^{II}) \leq 0, \quad (1.68)$$

где Δt_*^{II} зависит от параметров задачи и находится из уравнения (1.66). Таким образом, если параметры k , μ и α , удовлетворяют неравенствам (1.62) и (1.68), то в момент времени t_1 корпус начнет движение в положительном направлении, пройдет без остановки верхнюю зону замедления и остановится в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_*^{II} \in (t_3, t_4]$. Затем корпус изменит направление движения и будет перемещаться до новой остановки, которая произойдет в некоторый момент времени $t_3 + \Delta t_{**}^{II} \in (t_4, t_1 + 2\pi]$, когда внутренняя масса будет находиться в нижней зоне замедления. После остановки корпус будет оставаться в состоянии покоя до момента времени $t_1 + 2\pi$. Это означает, что при движении корпуса с остановкой только в нижней зоне замедления, его скорость будет 2π -периодически меняющейся функцией времени. В пространстве параметров k , μ и α неравенства (1.62) и (1.68) задают неограниченную область, которую, как и в случае отсутствия вязкого трения, будем называть областью II.

Покажем теперь, что в области II корпус за один период изменения скорости, т.е. за время полного оборота внутренней массы по окружности, перемещается в положительном направлении. Действительно, из выражения (1.31), следует, что при $\tau > \Delta t_*^{II}$ справедливо равенство

$$\dot{u}(t_1 + \tau) + \alpha u(t_1 + \tau) = -\dot{u}(t_3 + \tau) - \alpha u(t_3 + \tau). \quad (1.69)$$

Введем обозначение

$$g(\tau) = u(t_1 + \tau) + u(t_3 + \tau). \quad (1.70)$$

Тогда равенство (1.69) перепишется в следующей эквивалентной форме

$$\dot{g} = \alpha g. \quad (1.71)$$

Интегрируя уравнение (1.71) при $\tau > \Delta t_*^{II}$ получим

$$g(\tau) = g(\Delta t_*^{II}) e^{\alpha(\tau - \Delta t_*^{II})}. \quad (1.72)$$

Или, учитывая обозначения (1.70),

$$u(t_1 + \tau) + u(t_3 + \tau) = e^{\alpha(\tau - \Delta t_*^{II})} u(t_1 + \Delta t_*^{II}). \quad (1.73)$$

Полагая в (1.73) $\tau = \Delta t_{**}^{II}$ имеем

$$u(t_1 + \Delta t_{**}^{II}) = e^{\alpha(\Delta t_{**}^{II} - \Delta t_*^{II})} u(t_1 + \Delta t_*^{II}) > 0. \quad (1.74)$$

Таким образом, в момент времени $t_1 + \Delta t_*^{II}$ скорость корпуса положительна, т.е. первая остановка корпуса произойдет после указанного момента времени, т.е. будет справедливым неравенство $t_1 + \Delta t_{**}^{II} < t_3 + \Delta t_*^{II}$, которое можно переписать так

$$\Delta t_{**}^{II} < t_3 + \Delta t_*^{II} - t_1. \quad (1.75)$$

Нетрудно заметить, что выражение в правой части неравенства (1.75) задает время движения корпуса в положительном направлении. Поскольку в отрицательном направлении корпус будет двигаться в течение промежутка времени $\Delta t_{**}^{II} - \Delta t_*^{II}$, то из неравенства (1.75) сразу следует, что время движения в положительном направлении превосходит время движения в отрицательном направлении. Вычислим путь, пройденный корпусом за период 2π .

$$x(t_1 + 2\pi) - x(t_1) = x(t_3 + \Delta t_{**}^{II}) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_3 + \Delta t_{**}^{II}} u(t) dt - x(t_1). \quad (1.76)$$

Без ограничения общности можно положить $x(t_1) = 0$. Преобразуем интеграл

в правой части (1.76)

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_3+\Delta t_{**}^{II}} u(t)dt = \\
& = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_*^{II}} u(t)dt + \int_{t_1+\Delta t_*^{II}}^{t_1+\Delta t_{**}^{II}} u(t)dt + \int_{t_1+\Delta t_{**}^{II}}^{t_3+\Delta t_*^{II}} u(t)dt + \int_{t_3+\Delta t_*^{II}}^{t_3+\Delta t_{**}^{II}} u(t)dt = \\
& = \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_*^{II}} u(t)dt + \int_{t_1+\Delta t_{**}^{II}}^{t_3+\Delta t_*^{II}} u(t)dt + \int_{\Delta t_*^{II}}^{\Delta t_{**}^{II}} u(t+t_1)dt + \int_{\Delta t_*^{II}}^{\Delta t_{**}^{II}} u(t+t_3)dt.
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Учитывая (1.73), последнее выражение можно переписать так

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_3+\Delta t_{**}^{II}} u(t)dt &= \int_{t_1}^{t_1+\Delta t_{**}^{II}} u(t)dt + \int_{t_1+\Delta t_{**}^{II}}^{t_3+\Delta t_*^{II}} u(t)dt + \\
& + u(t_1 + \Delta t_*^{II}) \frac{e^{\alpha(\Delta t_{**}^{II} - \Delta t_*^{II})} - 1}{\alpha} > 0
\end{aligned} \tag{1.78}$$

Все слагаемые в правой части (1.78), очевидно, положительны, поэтому в области Π корпус будет совершать периодическое движение с залипанием только в нижней зоне замедления, а перемещение корпуса за период будет положительным.

1.3.3. Движение с остановками вне зон замедления

Теперь предположим, что условие (1.68) не выполнено, т.е. справедливо следующее неравенство

$$-G_2(t_1) + e^{\alpha(t_3+\Delta t_*^{II}-t_1-2\pi)}G_2(t_3 + \Delta t_*^{II}) < 0. \tag{1.79}$$

Тогда тело начав движение в момент времени t_1 с положительной скоростью остановится на промежутке (t_3, t_4) и сразу начнет движение в отрицательном направлении до остановки на промежутке $(t_1 + 2\pi, t_2 + 2\pi)$. В этом случае движение корпуса не будет периодическим. В главе 3 будет строго аналитически

доказано, что это движение носит предельный характер асимптотически приближаясь к некоторому режиму движения без интервалов залипания с периодически меняющейся скоростью. В рассматриваемом случае корпус за период времени 2π дважды меняет направление движения на противоположное. Изменение направления движения с положительного на отрицательное происходит в моменты времени $2\pi n + t_*^{(n)}$, а с отрицательного на положительное – в моменты времени $2\pi n + t_{**}^{(n)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$. При заданных k , μ и α величины $t_*^{(n)}$ и $t_{**}^{(n)}$ определяются численно путем последовательного решения уравнений системы.

$$\begin{aligned} G_1(t_*)e^{\alpha t_*} - G_1(t_{**})e^{\alpha t_{**}} &= 0, \\ G_2(t_{**})e^{\alpha t_{**}} - G_2(t_*)e^{\alpha(t_*+2\pi)} &= 0. \end{aligned} \tag{1.80}$$

Таким образом, при выполнении неравенства (1.79) движение корпуса не будет периодическим ни по скорости, ни по координате. В этом случае движение будет асимптотически приближаться к некоторому единственному периодическому режиму движения без остановок в зонах замедления трением, а перемещение корпуса за период будет положительным. Область, заданную в пространстве параметров k , μ и α неравенством (1.79), будем называть областью III.

Глава 2

Исследование общего характера движения корпуса при наличии сухого трения

2.1. О существовании, единственности и непрерывной зависимости решений уравнения движения от начальных условий и параметров задачи

Уравнение (1.15), описывающее движение корпуса, имеет при $u = 0$ разрыв в правой части и не удовлетворяет условию Липшица, поэтому к нему не применимы классические теоремы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Общие выводы о существовании, единственности и непрерывности решения уравнения (1.15) можно получить на основании теории, развитой для систем с разрывной правой частью [50, 51]. Приведем основные результаты указанных работ. Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x), \quad (2.1)$$

правая часть которого удовлетворяет следующему условию.

Условие А. Функция $F(t, x)$ – вещественная измеримая функция, определенная почти всюду в открытой или замкнутой области Q пространства (t, x) ; для любой замкнутой ограниченной области $D \subseteq Q$ существует такая почти всюду конечная функция $A(t)$, что почти всюду в D

$$|F(t, x)| < A(t). \quad (2.2)$$

Приведем общие теоремы о существовании, единственности и непрерывной зависимости решений уравнения движения от начальных условий, которые были доказаны в [50] при следующем условии, наложенном на правую часть (2.1).

Условие В. Будем говорить, что уравнение (2.1) удовлетворяет условию B в открытой или замкнутой области Q пространства (t, x) , если функция $f(t, x)$ определена почти всюду в области Q , измерима, и для любой ограниченной замкнутой области $D \subseteq Q$ существует такая суммируемая функция $B(t)$, что почти всюду в D

$$|F(t, x)| \leq B(t) \quad (2.3)$$

Теорема 1. (О существовании решения) Пусть в области G правая часть уравнения (2.1) измерима и почти всюду удовлетворяет условию B , где функция $B(t)$ суммируема. Тогда при любых начальных условиях $x(t_0) = a$, где $(t_0, a) \in G$, существует решение уравнения (2.1), удовлетворяющее этим начальным условиям и определенное на отрезке $|t_0 - d, t_0 + d|$, где d - таково, что область

$$|t - t_0| \leq d, \quad |x - a| \leq \left| \int_{t_0}^{t_0 \pm d} B(t) dt \right| \quad (2.4)$$

находится целиком внутри G .

Теорема 2. Если уравнение (2.1) удовлетворяет условию B , то предел любой равномерно сходящейся последовательности его решений есть решение того же уравнения.

Определение 1. Для уравнения (2.1) в области G имеет место правосторонняя единственность решения, если для любой точки $(t_0, x_0) \in G$ существует в области G при $t \geq t_0$ не более одного решения, удовлетворяющего начальному условию $x(t_0) = x_0$.

Определение 2. Для уравнения (2.1) в области G имеет место правосторонняя непрерывная зависимость решения от начальных условий, если для любого решения $x(t)$ и любого конечного отрезка $[t_0, t_1], t_1 > t_0$, на котором это решение существует и проходит внутри области G , каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\delta > 0$, что для любого решения $\tilde{x}(t)$ уравнения (2.1) из неравенства

$|\tilde{x}(t_0) - x(t_0)| < \delta$ следует, что это решение при $t_0 \leq t \leq t_1$ существует и удовлетворяет неравенству $|\tilde{x}(t) - x(t)| < \varepsilon$.

Теорема 3. (О единственности решения) *Для уравнения (2.1), удовлетворяющего условию B , имеет место правосторонняя единственность, если для почти всех (t, x) и (t, z) , где $|x - z| < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$, имеем*

$$(x - z)(F(t, x) - F(t, z)) \leq K|x - z|^2, \quad K = \text{const}. \quad (2.5)$$

Теорема 4. (О непрерывной зависимости решения от начальных условий) *Если уравнение (2.1) удовлетворяет условию B и при начальном условии $x(t_0) = a$ имеет на отрезке $[t_0, t_1]$ лишь одно решение $x(t)$, то на этом отрезке это решение непрерывно зависит от начальных условий и от правой части уравнения, т.е. решение изменяется меньше, чем на ε , если к правой части уравнения прибавить такую функцию $g(t, x)$, что $|g(t, x)| \leq \psi(t)$, $\int_{t_0}^{t_1} \psi(t) dt < \delta(\varepsilon)$.*

Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что правые части уравнения движения (1.9) удовлетворяют условиям A и B . Действительно, в качестве функции $B(t)$ можно выбрать, например, функцию

$$B(t) = \alpha M_D + |f_1(t)| + |f_2(t)|, \quad (2.6)$$

где $M_D = \max_{u \in D} |u|$, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ определяются формулами (1.54). Таким образом, правые части уравнения движения (1.9) удовлетворяют теоремам 1 и 2 существования решения. Покажем также, что для уравнения движения (1.9) выполнено условие правосторонней единственности решения. С этой целью проверим условие (2.5). Пусть $|u_1 - u_2| < \varepsilon_0$, где ε_0 - некоторое положительное число. Рассмотрим сначала случай, когда u_1 и u_2 имеют одинаковые знаки, тогда

условие (2.5) для уравнения движения (1.9) запишется в виде

$$(u_1 - u_2)[- \alpha u_1 + \sin t - \text{sign}(u_1)k(\mu + \cos t) + \alpha u_2 - \sin t + \text{sign}(u_2)k(\mu + \cos t)] \leq K|u_1 - u_2|^2 \quad (2.7)$$

или

$$- \alpha(u_1 - u_2)^2 \leq K|u_1 - u_2|^2 \quad (2.8)$$

последнее неравенство, очевидно, выполнено при любом действительном $K > 0$.

Пусть теперь u_1 и u_2 имеют разные знаки, тогда условие (2.5) для уравнения движения (1.9) запишется в виде

$$- \alpha(u_1 - u_2)^2 - 2\text{sign}(u_1)(u_1 - u_2)k(\mu + \cos t) \leq K|u_1 - u_2|^2 \quad (2.9)$$

или еще так

$$- \alpha(u_1 - u_2)^2 - 2|u_1 - u_2|k(\mu + \cos t) \leq K|u_1 - u_2|^2 \quad (2.10)$$

Неравенство (2.10) также выполнено при любом действительном $K > 0$. Таким образом, на основании теоремы 3 правосторонняя единственность решения уравнения (1.9) доказана.

Поскольку уравнение движения (1.9) удовлетворяет условию B , то по теореме 4 имеет место также непрерывная зависимость решений от начальных условий и параметров задачи.

2.2. Свойства решений уравнения движения

Предполагая, что системе вязкое трение отсутствует ($\alpha = 0$) установим некоторые общие свойства решений уравнения (1.15), которые будут использованы ниже при анализе движения корпуса с произвольной начальной скоростью.

Покажем сначала, что если функция $u(t)$ является решением уравнения (1.15), то последовательность ее значений $u(t + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{N}$ обладает свойством монотонности. С этой целью рассмотрим два решения $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ уравнения (1.15). Эти решения являются непрерывными функциями t и при $t \geq t_1$ однозначно определяются своими начальными условиями $u^{(1)}(t_1) = u_0^{(1)}$ и $u^{(2)}(t_1) = u_0^{(2)}$.

Пусть $u_0^{(1)} < u_0^{(2)}$, тогда возможны два случая: либо $u^{(1)}(t) \neq u^{(2)}(t)$ при всех $t \geq t_1$ и из непрерывности функций $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ сразу следует, что $u^{(1)}(t) < u^{(2)}(t)$; либо существует такой момент времени t^* , что $u^{(1)}(t^*) = u^{(2)}(t^*) = 0$ и $u^{(1)}(t) \neq u^{(2)}(t)$ при $t_1 \leq t < t^*$. В последнем случае из непрерывности $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ следует, что $u^{(1)}(t) < u^{(2)}(t)$ при $t_1 \leq t < t^*$, а из единственности решения уравнения (1.15) с начальным условием $u(t^*) = 0$ следует, что при $t \geq t^*$ выполняется тождественное равенство $u^{(1)}(t) \equiv u^{(2)}(t)$. Таким образом, если $u_0^{(1)} < u_0^{(2)}$, то при всех $t \geq t_1$ имеет место неравенство $u^{(1)}(t) \leq u^{(2)}(t)$ и, в частности,

$$u^{(1)}(t_1 + 2\pi) \leq u^{(2)}(t_1 + 2\pi). \quad (2.11)$$

Предположим теперь, что $u^{(1)}(t_1) < u^{(1)}(t_1 + 2\pi)$. В этом случае, выбирая начальное условие, определяющее решение $u^{(2)}(t)$ так, что $u^{(2)}(t_1) = u^{(1)}(t_1 + 2\pi)$, в силу правосторонней единственности решения уравнения (1.15) приходим к тождественному равенству $u^{(2)}(t) \equiv u^{(1)}(t + 2\pi)$, которое выполняется при всех $t > t_1$, что позволяет переписать неравенство (2.11) в виде

$$u^{(1)}(t_1 + 2\pi) \leq u^{(1)}(t_1 + 4\pi). \quad (2.12)$$

Продолжая далее по индукции, имеем

$$u^{(1)}(t_1 + 2\pi n) \leq u^{(1)}(t_1 + 2\pi(n + 1)), \quad n \in \mathbf{N}. \quad (2.13)$$

Таким образом, последовательность значений $u^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ является неубывающей.

Аналогично можно показать, что в случае $u^{(1)}(t_1) > u^{(1)}(t_1 + 2\pi)$, будет выполнено неравенство $u^{(1)}(t_1 + 2\pi n) \geq u^{(1)}(t_1 + 2\pi(n + 1))$, $n \in \mathbf{N}$, т.е. последовательность значений $u^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ будет невозрастающей.

В предельном случае $u^{(1)}(t_1) = u^{(1)}(t_1 + 2\pi)$ начальные условия решений $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$ совпадают, поэтому в силу единственности решения уравнения (1.15) тождественно равны и сами эти решения $u^{(1)}(t) \equiv u^{(2)}(t)$. С другой стороны, как было показано выше $u^{(2)}(t) \equiv u^{(1)}(t + 2\pi)$, поэтому при всех $t > t_1$ справедливо равенство

$$u^{(1)}(t) = u^{(1)}(t + 2\pi), \quad (2.14)$$

которое означает, что $u^{(1)}(t)$ является периодической функцией при $t > t_1$.

Приведенные выше рассуждения остаются в силе если в качестве начального момента времени выбрать не t_1 , а любое произвольное значение $t^* \geq t_1$. Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

Лемма 1. Пусть функция $u(t)$, заданная на промежутке $[t_1; +\infty)$, является решением уравнения (1.15), тогда ее значения $u(t^* + 2\pi n)$, где $n \in \mathbf{N}$, образуют монотонную последовательность при любом $t^* \geq t_1$.

Рассмотрим теперь более подробно предельный случай, когда решение уравнения (1.15) является 2π -периодическим. Как было указано выше, в областях параметров I и II существуют периодические решения, которые определяются нулевыми начальными условиями и описывают движение корпуса с залипанием в зонах замедления. Исследуем вопрос о существовании 2π -периодических решений, описывающих движение корпуса без залипания.

Предположим, что уравнение (1.15) допускает 2π -периодическое решение $u_*(t)$, описывающее движение корпуса без залипания, тогда на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$ функция $u_*(t)$ дважды обращается в ноль и меняет свой знак. Действительно, рассуждая от противного, будем считать, что $u_*(t) \neq 0$ на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$ и для определенности положим $u_*(t) > 0$. Тогда интегри-

руя уравнение (1.16), имеем $u_*(t_1 + 2\pi) = u_*(t_1) + 2\pi k\mu$, что противоречит условию периодичности $u_*(t)$. Поэтому функция $u_*(t)$ обязательно обратиться в ноль и поменяет знак на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$. Кроме того, из непрерывности и 2π -периодичности $u_*(t)$ следует, что на указанном интервале $u_*(t)$ изменит свой знак четное число раз. Заметим теперь, что поскольку функция $u_*(t)$ описывает движение корпуса без залипания, то она может обратиться в ноль лишь на интервалах $[t_1; t_2]$ и $[t_3; t_4]$. Правая часть уравнения (1.15) положительна на интервале $[t_1; t_2]$ и отрицательна на интервале $[t_3; t_4]$, поэтому функция $u_*(t)$ возрастает на интервале $[t_1; t_2]$ и убывает на интервале $[t_3; t_4]$. Это означает, что на каждом из указанных интервалов $u_*(t)$ может обратиться в ноль только один раз. Таким образом, функция $u_*(t)$ ведет себя следующим образом: она обращается в ноль в некоторые моменты времени $t_* \in [t_1; t_2]$ и $t_{**} \in [t_3; t_4]$; на промежутке $(t_*; t_{**})$ она положительна и сначала возрастает до своего максимального значения $u(t_2)$, а затем убывает до нуля; на промежутке $(t_{**}; t_* + 2\pi)$ она отрицательна и сначала убывает до своего минимального значения $u(t_1 + 2\pi)$, а затем возрастает до нуля.

Выясним теперь при каких значениях параметров k и μ , уравнение (1.15) допускает периодическое решение, обладающее описанными выше свойствами. С этой целью, проинтегрируем уравнения (1.16) и (1.17) с начальными условиями $u(t_*) = 0$ и $u(t_{**}) = 0$ на интервалах $[t_*; t_{**}]$ и $[t_{**}; t_* + 2\pi]$ соответственно. В результате приходим к следующей системе уравнений относительно t_* и t_{**} .

$$\begin{aligned} \cos t_* - \cos t_{**} - k\mu(t_{**} - t_*) - k(\sin t_{**} - \sin t_*) &= 0, \\ \cos t_{**} - \cos t_* + k\mu(2\pi + t_* - t_{**}) + k(\sin t_* - \sin t_{**}) &= 0, \end{aligned} \tag{2.15}$$

которую нужно решать с учетом ограничений

$$t_1 \leq t_* < t_2, \quad t_3 \leq t_{**} < t_4. \tag{2.16}$$

Складывая и вычитая уравнения (2.15), а затем применяя известные триго-

нометрические формулы, приходим к следующей эквивалентной системе уравнений

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{t_* - t_{**}}{2} \cos \frac{t_{**} + t_*}{2} &= \mu(t_{**} - t_* - \pi), \\ 2 \sin \frac{t_{**} - t_*}{2} \sin \frac{t_{**} + t_*}{2} &= \pi k \mu \end{aligned} \quad (2.17)$$

Введем обозначения

$$x = t_{**} - t_* - \pi, \quad y = t_{**} + t_*, \quad (2.18)$$

в которых система уравнений (2.17) примет вид

$$\begin{aligned} -2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} &= \mu x, \\ 2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{y}{2} &= \pi k \mu \end{aligned} \quad (2.19)$$

Решения системы (2.19) должны удовлетворять ограничениям

$$\pi - 2t_2 < x < \pi - 2t_1, \quad 2\pi + t_1 - t_2 < y < 2\pi + t_2 - t_1. \quad (2.20)$$

Поскольку $0 < t_1 < t_2 < \pi$, то при выполнении неравенств (2.20) будут иметь место также и неравенства

$$-\pi < x < \pi, \quad \pi < y < 3\pi, \quad (2.21)$$

из которых следует, что $\cos \frac{x}{2} > 0$, $\cos \frac{y}{2} < 0$. Поэтому на решениях, удовлетворяющих ограничениям (2.20), левая часть первого уравнения системы (2.19) положительна, а значит будет положительна и его правая часть. Последнее означает, что ограничениям (2.20) будут удовлетворять только такие решения (x_0, y_0) системы (2.19), для которых $x_0 > 0$.

Возведем обе части уравнений системы (2.19) в квадрат и сложим полученные равенства. После элементарных преобразований имеем следующее уравнение для величины x

$$2(1 + \cos x) = \mu^2 x^2 + \pi^2 k^2 \mu^2. \quad (2.22)$$

Несложный анализ уравнения (2.22) показал, что при $\pi k\mu < 2$ оно имеет ровно два действительных корня, один из которых отрицательный, а другой – положительный. Полагая далее, что неравенство $\pi k\mu < 2$ выполнено и разделив почленно первое уравнение системы (2.19) на ее второе уравнение, получаем уравнение для нахождения величины y

$$\operatorname{ctg}\frac{y}{2} = -\frac{x_0}{\pi k}, \quad (2.23)$$

где x_0 – положительный корень уравнения (2.22).

Уравнение (2.23) имеет единственное решение

$$y_0 = 2\pi - \operatorname{arccctg}\frac{x_0}{\pi k}, \quad (2.24)$$

удовлетворяющее ограничению (2.20)

Подставляя теперь (2.24) в (2.18), имеем следующие выражения для t_* и t_{**}

$$\begin{aligned} t_* &= \frac{\pi}{2} - \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arccctg}\frac{x_0}{\pi k}, \\ t_{**} &= \frac{3\pi}{2} + \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{arccctg}\frac{x_0}{\pi k}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

Таким образом, из всех возможных решений системы (2.15) ограничениям (2.16) может удовлетворить только решение (2.25). Однако, и данное решение удовлетворяет ограничениям (2.16) не при всех значениях параметров k и μ . Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Отметим сначала, что неравенство $t_* < t_2$ на решении (2.25) всегда выполнено, т.к. $t_* < \frac{\pi}{2}$ и $t_2 > \frac{\pi}{2}$. Кроме того, используя выражения (1.14) можно показать, что $t_1 + t_2 = 2\pi - 2\operatorname{arccctg}k$, поэтому $t_1 + t_2 > \pi$. Теперь заметим, что если на решении (2.25) выполнено неравенство $t_1 \leq t_*$, то с учетом $t_1 + t_2 > \pi$ также будут выполнены и неравенства $t_3 < t_{**} < t_4$. Последнее сразу следует из двух следующих цепочек неравенств

$$t_3 < t_1 + \pi \leq t_* + \pi < t_* + \pi + x_0 = t_{**} \quad (2.26)$$

и

$$t_4 = 2\pi - t_1 \geq 2\pi - t_* = \frac{3\pi}{2} + \frac{x_0}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} \frac{x_0}{\pi k} > \frac{3\pi}{2} + \frac{x_0}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{arccctg} \frac{x_0}{\pi k} = t_{**}. \quad (2.27)$$

Таким образом, если выполнено неравенство $t_1 \leq t_*$, то решение (2.25) будет удовлетворять всем ограничениям (2.16) и уравнение (1.15) имеет периодическое решение, описывающее движение корпуса без залипания.

Величины t_1 и t_* , заданные формулами (1.14) и (2.25), являются непрерывными функциями параметров k и μ , поэтому неравенство $t_1 \leq t_*$ задает в плоскости параметров некоторую область, на границе которой выполняется равенство $t_* = t_1$. Полагая в уравнениях (2.15) $t_* = t_1$, а затем исключая из них t_{**} , приходим к следующему равенству

$$\cos t_1 + \cos \left[t_1 + \frac{\sin t_1 + \sqrt{1 - (\cos t_1 - \pi k \mu)^2}}{\mu} \right] = \pi k \mu, \quad (2.28)$$

которое и задает границу указанной области.

С другой стороны, сравнивая (2.28) с (1.37) и (1.49), можно заметить, что уравнение (2.28) задает границу, разделяющую области II и III (см. Рис. 3). В силу непрерывной зависимости t_* от параметров k и μ , неравенство $t_* \geq t_1$ либо выполняется во всех точках области II, либо не выполняется ни в одной точке этой области. То же самое верно и для области III. Поэтому достаточно проверить справедливость неравенства $t_* \geq t_1$ в одной (произвольной) внутренней точке каждой из подобластей II и III. Численная проверка показала, что данное неравенство выполнено в области III и не выполняется в области II, а как следствие, и в области I. Таким образом, доказано следующее утверждение.

Лемма 2. *В области III, заданной неравенствами (1.49), уравнение (1.15) имеет единственное периодическое решение $u_*(t)$, описывающее движение корпуса без залипания. Это решение однозначно определяется начальным условием $u_*(t_*) = 0$, где момент времени t_* вычисляется по формуле (2.25). Вне обла-*

сти III, периодических решений, описывающих движение корпуса без залипания, не существует.

Отметим еще свойства монотонности решений уравнения (1.15) на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$. Несложный анализ показывает, что правая часть уравнения (1.16) положительна на промежутке $(t_1; t_2)$ и отрицательна на промежутке $(t_2; t_1 + 2\pi)$, а правая часть уравнения (1.17) положительна на промежутках $[t_1; t_3)$, $(t_4; t_1 + 2\pi)$ и отрицательна на промежутке $(t_3; t_4)$. Поэтому справедливо следующее, важное для исследования общего характера движения корпуса, утверждение.

Лемма 3. Пусть функция $u(t)$, заданная на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$, является решением уравнения (1.15), тогда значения t_i ($i = 2, 3, 4$) делят интервал $[t_1; t_1 + 2\pi]$ на промежутки монотонности так, что:

1. Функция $u(t)$ возрастает на промежутке $[t_1; t_2]$ и убывает на промежутке $[t_3; t_4]$.
2. Если $u(t_2) > 0$, то функция $u(t)$ либо убывает на всем промежутке $[t_2; t_3]$ до значения $u(t_3) \geq 0$, либо она убывает и обращается в ноль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_2; t_3]$, а затем сохраняет нулевое значение до конца указанного промежутка.
3. Если $u(t_2) < 0$, то функция $u(t)$ либо возрастает на всем промежутке $[t_2; t_3]$ до значения $u(t_3) \leq 0$, либо она возрастает до нулевого значения, которое принимает в некоторой внутренней точке промежутка $[t_2; t_3]$, а затем остается тождественно равной нулю до конца указанного промежутка.
4. Если $u(t_4) > 0$, то функция $u(t)$ либо убывает на всем промежутке $[t_4; t_1 + 2\pi]$ до значения $u(t_1 + \pi) \geq 0$, либо она убывает и обращается в

ноль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_4; t_1 + 2\pi]$, а затем сохраняет нулевое значение до конца указанного промежутка.

5. Если $u(t_4) < 0$, то функция $u(t)$ либо возрастает на всем промежутке $[t_4; t_1 + 2\pi]$ до значения $u(t_1 + \pi) \leq 0$, либо она возрастает до нулевого значения, которое принимает в некоторой внутренней точке промежутка $[t_4; t_1 + 2\pi]$, а затем остается тождественно равной нулю до конца указанного промежутка.

Замечание. Из леммы 3 следует, что решения уравнения (1.15) не меняют своего знака на промежутках $[t_2; t_3]$ и $[t_4; t_1 + 2\pi]$.

2.3. Анализ движения корпуса в области I

Полагая, что $\alpha = 0$, а параметры k и μ принимают значения из области I, исследуем характер движения корпуса при отличной от нуля начальной скорости. Предположим сначала, что в момент времени t_1 тело имеет положительную скорость $u(t_1) > 0$, тогда до момента первой остановки корпуса, движение будет описываться уравнением (1.16), интегрируя которое имеем

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_1) + \int_{t_1}^t [\sin \tau - k(\mu + \cos \tau)] d\tau \\ &= u(t_1) + \cos t_1 - \cos t - k\mu(t - t_1) - k(\sin t - \sin t_1). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Заметим, что функция $u(t)$ на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ имеет две экстремальные точки $t = t_2$ и $t = t_1 + 2\pi$. В точке $t = t_2$ функция $u(t)$ достигает максимума, а в точке $t = t_1 + 2\pi$ минимума. Таким образом, $u(t)$ возрастает на промежутке (t_1, t_2) принимает наибольшее значение $u(t_2)$, затем монотонно убывает на промежутке $(t_2, t_1 + 2\pi)$. Поскольку из (2.29) следует, что

$$u(t_1 + 2\pi) = u(t_1) - 2\pi k\mu, \quad (2.30)$$

то при $u(t_1) > 2\pi k\mu$, на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ скорость корпуса, сохраняя положительное значение, уменьшается на $2\pi k\mu$.

Рассмотрим теперь случай отрицательной начальной скорости, т.е. будем считать, что $u(t_1) < 0$. Тогда интегрируя уравнение (1.17), имеем

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_1) + \int_{t_1}^t [\sin \tau + k(\mu + \cos \tau)] d\tau \\ &= u(t_1) + \cos t_1 - \cos t + k\mu(t - t_1) + k(\sin t - \sin t_1). \end{aligned} \quad (2.31)$$

В этом случае функция $u(t)$ возрастает на промежутках (t_1, t_3) , $(t_4, t_1 + 2\pi)$ и убывает на промежутке (t_3, t_4) . Таким образом, на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ она имеет две экстремальные точки: точку максимума $t = t_3$ и точку минимума $t = t_4$. Свое наибольшее значение $u(t)$ может принять либо в точке максимума $t = t_3$, либо на границе рассматриваемого интервала в точке $t = t_1 + 2\pi$. Покажем, что $u(t_1 + 2\pi)$ является максимальным значением функции $u(t)$ на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$. Действительно, в подобласти I существует периодическое движение корпуса с залипанием как в верхней, так и в нижней зонах замедления, которое описывается решением $u_0(t)$ уравнения (1.15) с начальным условием $u_0(t_1) = 0$. На этом решении выполняется равенство $u_0(t_3) = u_0(\tilde{t}) = 0$, где \tilde{t} – момент остановки корпуса в нижней зоне замедления, т.е. $\tilde{t} \in (t_4, t_1 + 2\pi)$. Учитывая теперь, что на промежутке $[t_3, \tilde{t}]$ функция $u_0(t)$ является решением уравнения (1.17) с начальным условием $u(t_3) = 0$, равенство $u_0(\tilde{t}) = 0$ можно переписать в виде

$$\int_{t_3}^{\tilde{t}} [\sin \tau + k(\mu + \cos \tau)] d\tau = 0. \quad (2.32)$$

Интегрируя теперь уравнение (1.17) на промежутке $[t_3, t_1 + 2\pi]$ с некоторым отличным нуля начальным условием ($u(t_3) \neq 0$) и учитывая равенство (2.32),

имеем

$$\begin{aligned}
 u(t_1 + 2\pi) &= u(t_3) + \int_{t_3}^{t_1+2\pi} [\sin \tau + k(\mu + \cos \tau)] d\tau \\
 &= u(t_3) + \int_{\tilde{t}}^{t_1+2\pi} [\sin \tau + k(\mu + \cos \tau)] d\tau.
 \end{aligned} \tag{2.33}$$

Поскольку $\sin \tau + k(\mu + \cos \tau) > 0$ при $\tau \in (t_4, t_1 + 2\pi)$, то интеграл в правой части последнего равенства положителен, поэтому будет выполнено неравенство $u(t_1 + 2\pi) > u(t_3)$, которое, очевидно, и означает, что $u(t_1 + 2\pi)$ является максимальным значением функции $u(t)$ на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$.

С другой стороны, если на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ скорость корпуса отрицательна, то, как следует из (2.31), $u(t_1 + 2\pi) = u(t_1) + 2\pi k\mu$. Поэтому при $u(t_1) < -2\pi k\mu$ на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ скорость корпуса, сохраняя отрицательное значение, возрастет на величину $2\pi k\mu$.

Таким образом, начав движение в момент времени $t = t_1$ со скоростью $|u(t_1)| > 2\pi k\mu$ и двигаясь без остановки, корпус момент времени $t_1 + 2\pi n$ будет иметь скорость, удовлетворяющую неравенству $|u(t_1 + 2\pi n)| < 2\pi k\mu$, где $n = \left\lceil \frac{|u(t_1)|}{2\pi k\mu} \right\rceil$, а квадратными скобками обозначена операция взятия целой части числа. Поэтому, без ограничения общности, далее будем предполагать, что $|u(t_1)| < 2\pi k\mu$.

Для получения выводов о движении корпуса в области I исследуем поведение интегральных кривых уравнения (1.9) на интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$. Важную роль здесь играют интегральные кривые, которым соответствует движение корпуса с остановкой на одной из границ верхней или нижней зоны замедления. Они разделяют пространство решений (t, u) уравнения (1.9) на области, в которых интегральные кривые, а значит и соответствующие им движения корпуса, имеют качественно различный вид.

Обозначим через $u^{(2)}(t)$ решение, которое описывает движение корпуса с

остановкой в момент времени $t = t_2$. Сразу заметим, что, как следует из леммы 3, $u^{(2)}(t)$ возрастает на промежутке $[t_1, t_2]$, поэтому остановка в момент времени $t = t_2$ возможна лишь при движении корпуса в отрицательном направлении. Следовательно, внутри промежутка $(t_1, t_2]$ функция $u^{(2)}(t)$ принимает только отрицательные значения и обращается в ноль на его границе. На промежутке $(t_2, t_3]$ функция $u^{(2)}(t)$ тождественно обращается в ноль. Поэтому $u^{(2)}(t_3) = u_0(t_3) = 0$ и, следовательно, при всех $t > t_3$ выполняется тождественное равенство $u^{(2)}(t) \equiv u_0(t)$.

Интегрируя уравнение (1.17) на промежутке $(t_1, t_2]$ и учитывая формулы (1.14), можно показать, что решение $u^{(2)}(t)$ удовлетворяет следующему начальному условию

$$u^{(2)}(t_1) = -2 \cdot \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)} + 2k\mu \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k\mu}\right). \quad (2.34)$$

Обозначим через $u_+^{(3)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t)$ – решения уравнения (1.15), описывающие движение корпуса, при котором он, двигаясь в положительном и отрицательном направлениях соответственно, совершит остановку в момент времени t_3 . Начальные условия этих решений должны удовлетворять очевидным неравенствам $u_+^{(3)}(t_1) > u_0(t_1) = 0$ и $u_-^{(3)}(t_1) < u^{(2)}(t_1)$, поэтому на основании леммы 3 функция $u_+^{(3)}(t)$ возрастает на промежутке $(t_1, t_2]$ и убывает на промежутке $(t_2, t_3]$ обращаясь в ноль на его правой границе, а функция $u_-^{(3)}(t)$ возрастает на всем промежутке $(t_1, t_3]$ и принимает нулевое значение на его правой границе. При всех $t > t_3$ выполняются тождественные равенства $u_+^{(3)}(t) \equiv u_0(t)$ и $u_-^{(3)}(t) \equiv u_0(t)$. Можно показать, что решения $u_+^{(3)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t)$ определяются начальными условиями

$$u_+^{(3)}(t_1) = 2k\mu \operatorname{arctg} k - 2 \cdot \frac{\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)} + k^2\mu}{k^2 + 1}, \quad (2.35)$$

$$u_-^{(3)}(t_1) = -\frac{2\sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)} + 2\mu k^2}{k^2 + 1} - 2k\mu \operatorname{arctg}(k). \quad (2.36)$$

Пусть теперь $u_-(t)$ и $u_+(t)$ – решения уравнения (1.15) с начальными условиями, удовлетворяющими неравенствам $u_-^{(3)}(t_1) < u_-(t_1) < u^{(2)}(t_1)$ и $u^{(2)}(t_1) < u_+(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$ соответственно. Тогда по лемме 3 функция $u_-(t)$ возрастает на промежутке $(t_1, t_2]$ и принимает на его правой границе отрицательное значение $u_-(t_2) < u^{(2)}(t_2) = 0$, на промежутке $(t_2, t_3]$ она также возрастает, обращается в ноль в некоторой внутренней точке этого промежутка и сохраняет нулевое значение до его правой границы. Аналогично, по лемме 3 функция $u_+(t)$ возрастает на промежутке $(t_1, t_2]$ и принимает на его правой границе положительное значение $u_+(t_2) > u^{(2)}(t_2) = 0$, на промежутке $(t_2, t_3]$ она убывает, обращается в ноль в некоторой внутренней точке этого промежутка, а затем сохраняет нулевое значение до его правой границы. Поскольку $u_-(t_3) = u_+(t_3) = u_0(t_3) = 0$, то при всех $t > t_3$ выполняются тождественные равенства $u_-(t) \equiv u_0(t)$ и $u_+(t) \equiv u_0(t)$.

В пространстве решений уравнения (1.15) интегральные кривые $u_-(t)$ лежат в области ограниченной кривыми $u^{(2)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t)$, а интегральные кривые $u_+(t)$ лежат в области ограниченной кривыми $u^{(2)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$. При $t \geq t_3$ эти области вырождаются в кривую $u_0(t)$. Таким образом, если в момент времени $t = t_1$ скорость корпуса находится в диапазоне значений от $u_-^{(3)}(t_1)$ до $u_+^{(3)}(t_1)$, то корпус останавливается в верхней зоне замедления $[t_2, t_3]$ и остается в покое до момента времени $t = t_3$, а затем начинает совершать периодическое движение, которое описывается решением $u_0(t)$, т.е. при $t > t_3$ корпус движется возвратно поступательно с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.

Рассуждая аналогично можно показать следующее. Решения с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству $-2\pi k\mu < u(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$, сначала возрастают на промежутке $(t_1, t_3]$, потом убывают на промежутке $(t_3, t_4]$, а затем снова возрастают на промежутке $(t_4, t_1 + 2\pi]$, обращаются в ноль в некоторой его внутренней точке и сохраняют нулевое значение до его правой границы. Решения с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству

$u_+^{(3)}(t_1) < u(t_1) < u_+^{(4)}(t_1)$, где

$$u_+^{(4)}(t_1) = 4k\mu \operatorname{arccctg} \left(\frac{1 - \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}}{k(\mu - 1)} \right) - \frac{2k^2(\mu - 1) \left(1 - \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)} \right)}{k^2 - k^2\mu + 1 - \sqrt{1 - k^2(\mu^2 - 1)}} \quad (2.37)$$

возрастают на промежутке $(t_1, t_2]$, потом убывают на промежутке $(t_2, t_4]$, а затем снова возрастают на промежутке $(t_4, t_1 + 2\pi]$, обращаются в ноль в некоторой его внутренней точке и сохраняют нулевое значение до его правой границы. Решения же с начальными условиями, удовлетворяющими неравенству $u_+^{(4)}(t_1) \leq u(t_1) < 2\pi k\mu$ возрастают на промежутке $(t_1, t_2]$, потом убывают и обращаются в ноль в некоторой внутренней точке промежутка $(t_4, t_1 + 2\pi]$, а затем сохраняют нулевое значение до его правой границы.

Таким образом, если в начальный момент выполнено неравенство $-2\pi k\mu \leq u(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$ или неравенство $u_+^{(3)}(t_1) < u(t_1) \leq 2\pi k\mu$, то корпус остановится в нижней зоне замедления и будет оставаться в покое до ее правой границы, а затем начнет совершать периодические возвратно поступательные движения с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.

На Рис. 1а представлено пространство решений уравнения (1.15), построенное на основе проведенного выше анализа и позволяющее получить полную качественную картину движения корпуса для значений параметров из подобласти I. Жирными линиями изображены интегральные кривые, разделяющие пространство решений на области, для которых движение корпуса имеет качественно различный характер. В частности, интегральные кривые $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$, заданные начальными условиями $u_-^{(1)}(t_1) = -2\pi k\mu$ и $u_+^{(1)}(t_1) = 2\pi k\mu$, ограничивают область, соответствующую движению корпуса, при котором он на интервале времени $[t_1; t_1 + 2\pi]$ свершит остановку в зоне замедления и выйдет на периодический режим. На Рис. 1б в увеличенном масштабе показана часть Рис. 1а, ограниченная горизонтальными пунктирными прямыми линиями.

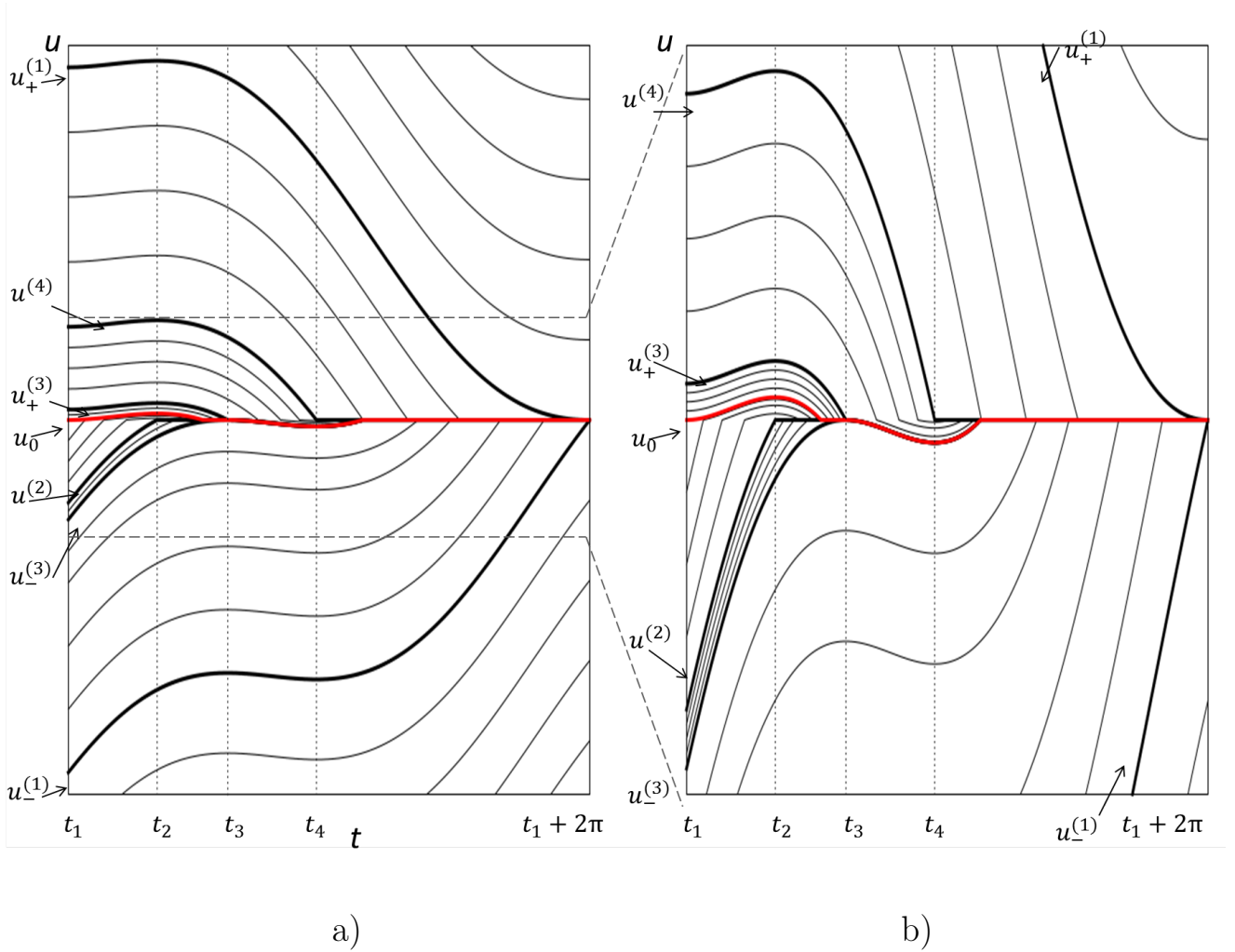


Рис. 1. Пространство решений уравнения (1.15) в подобласти I ($k = 0.7, \mu = 1.5$).

Суммируя результаты данного параграфа, можно сделать следующий вывод. Если параметры задачи принимают значения из подобласти I, то при любой начальной скорости корпус за конечный промежуток времени перейдет в периодический режим, т.е. будет двигаться возвратно поступательно с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.

2.4. Анализ движения корпуса в области II

Пусть теперь $\alpha = 0$, а параметры k и μ принимают значения из области II. В этом случае анализ движения корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ можно выполнить также, как это было сделано в предыдущем параграфе для значений параметров из области I. Не останавливаясь на деталях этого анализа, опишем его основные результаты. Прежде всего отметим, что в области II, в отличие от области I, решение уравнения (1.17) на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ может принимать свое наибольшее значение как при $t = t_1 + 2\pi$, так и при $t = t_3$. Характер движения корпуса на этом интервале будет зависеть от того какой из этих случаев реализуется. Если выполняется неравенство $u_-^{(1)}(t_1) > -2\pi k\mu$, где величина $u_-^{(1)}(t_1)$ вычисляется по формуле (3.25), то имеет место первый случай, т.е. решение уравнение (1.17) на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ принимает свое наибольшее значение при $t = t_1 + 2\pi$. В этом случае качественный характер движения корпуса будет мало отличаться от его движения и для значений параметров из области I. В частности, если начальная скорость такова, что $|u(t_1)| > 2\pi k\mu$, то на всем интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановки, а его скорость на указанном интервале уменьшится по модулю на $2\pi k\mu$. Если же $|u(t_1)| \leq 2\pi k\mu$, то на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус совершит остановку в зоне замедления и будет оставаться в покое до конца этого интервала, после чего он начнет двигаться 2π -периодически, останавливаясь и залипая только в нижней зоне замедления.

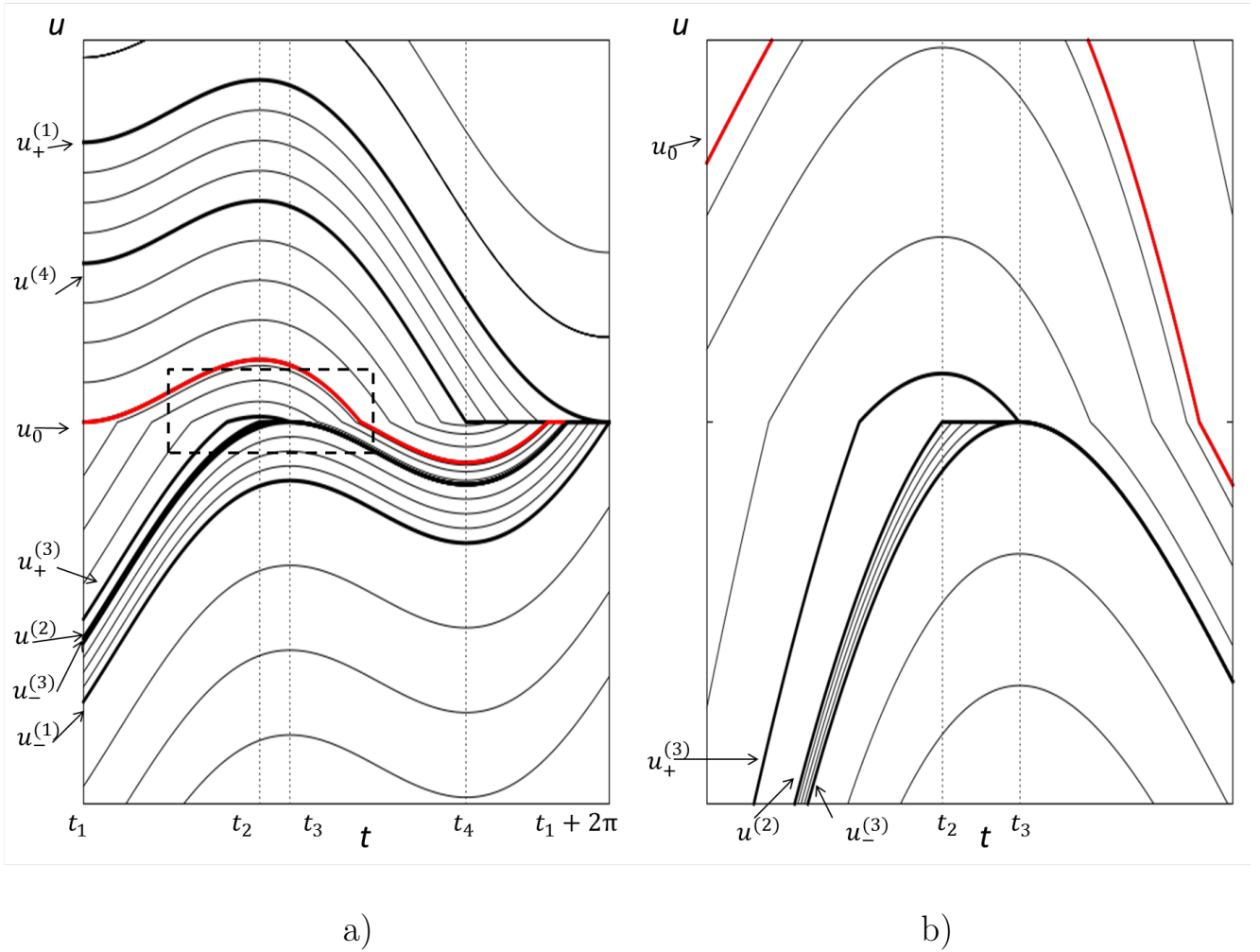


Рис. 2. Пространство решений уравнения (1.9) в подобласти IIa ($k = 0.35, \mu = 1.5$).

Область II разделяется кривой $u_-^{(3)}(t_1) = -2\pi k\mu$ на две подобласти IIa и IIb (см. Рис. 3). Неравенство $u_-^{(3)}(t_1) > -2\pi k\mu$ выполняется в подобласти IIa. На Рис. 2a представлено пространство решений уравнения (1.9), которое дает полную характеристику движения корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ в описанном выше случае. На Рис. 2b в увеличенном масштабе показан прямоугольный участок Рис. 2a, ограниченный пунктирными линиями.

В подобласти IIb выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) < -2\pi k\mu$. В этом случае решение уравнения (1.17) принимает на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ свое наибольшее значение при $t = t_3$. Из этого следует, что $u_-^{(3)}(t_1)(t_1 + 2\pi) = u_-^{(3)}(t_1) + 2\pi k\mu < 0$, т.е. на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ решение $u_-^{(3)}(t)$ описывает движение корпуса в отри-

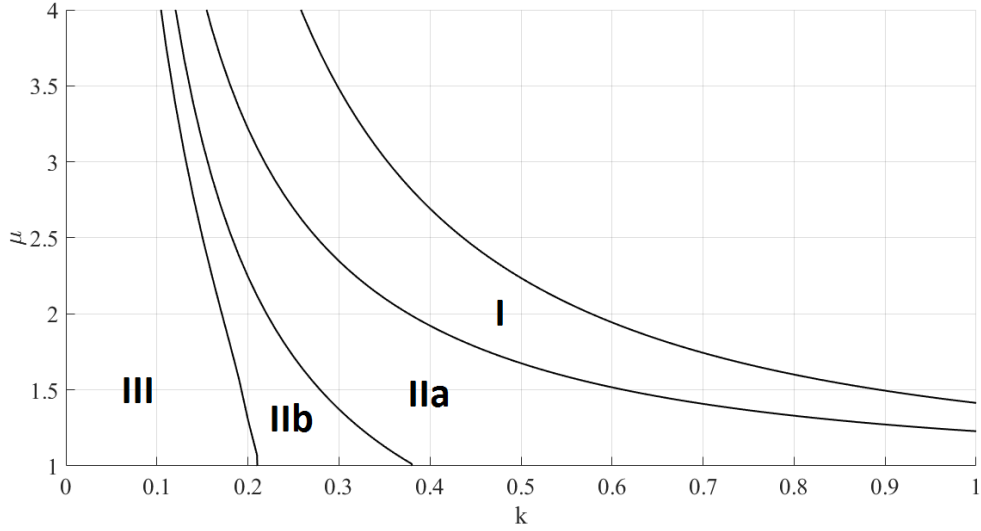


Рис. 3. Подобласти IIa и IIb.

цательном направлении с остановкой в момент времени $t = t_3$ и без остановки в нижней зоне замедления. Поэтому при начальной скорости $u(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$ корпус на всем интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$, будет двигаться в отрицательном направлении, без остановок и за время движения его скорость по модулю уменьшится на $2\pi k\mu$. В пространстве решений, представленном на Рис. 4, такому движению соответствуют интегральные кривые, расположенные ниже кривой $u_-^{(3)}(t)$.

При $u(t_1) > 2\pi k\mu$ корпус на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в положительном направлении без остановок, а его скорость уменьшится на $2\pi k\mu$. Этому движению соответствует область пространства решений, расположенная выше интегральной кривой $u_+^{(1)}(t)$ (см. Рис. 4), которая задается начальным условием $u_+^{(1)}(t_1) = 2\pi k\mu$.

Предположим теперь, что в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) \leq 2\pi k\mu$. Для описания характера движения корпуса в этом случае важную роль играет интегральная кривая $u_-^{(1)}(t)$. На интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ ей соответствует движение корпуса с тремя остановками: в моменты времени $t_*^{(1)}$ и $t_{**}^{(1)}$ на промежутках $[t_1, t_2]$ и $[t_3, t_4]$ соответственно, а также в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ на правой границе нижней зоны замедления. После каждой

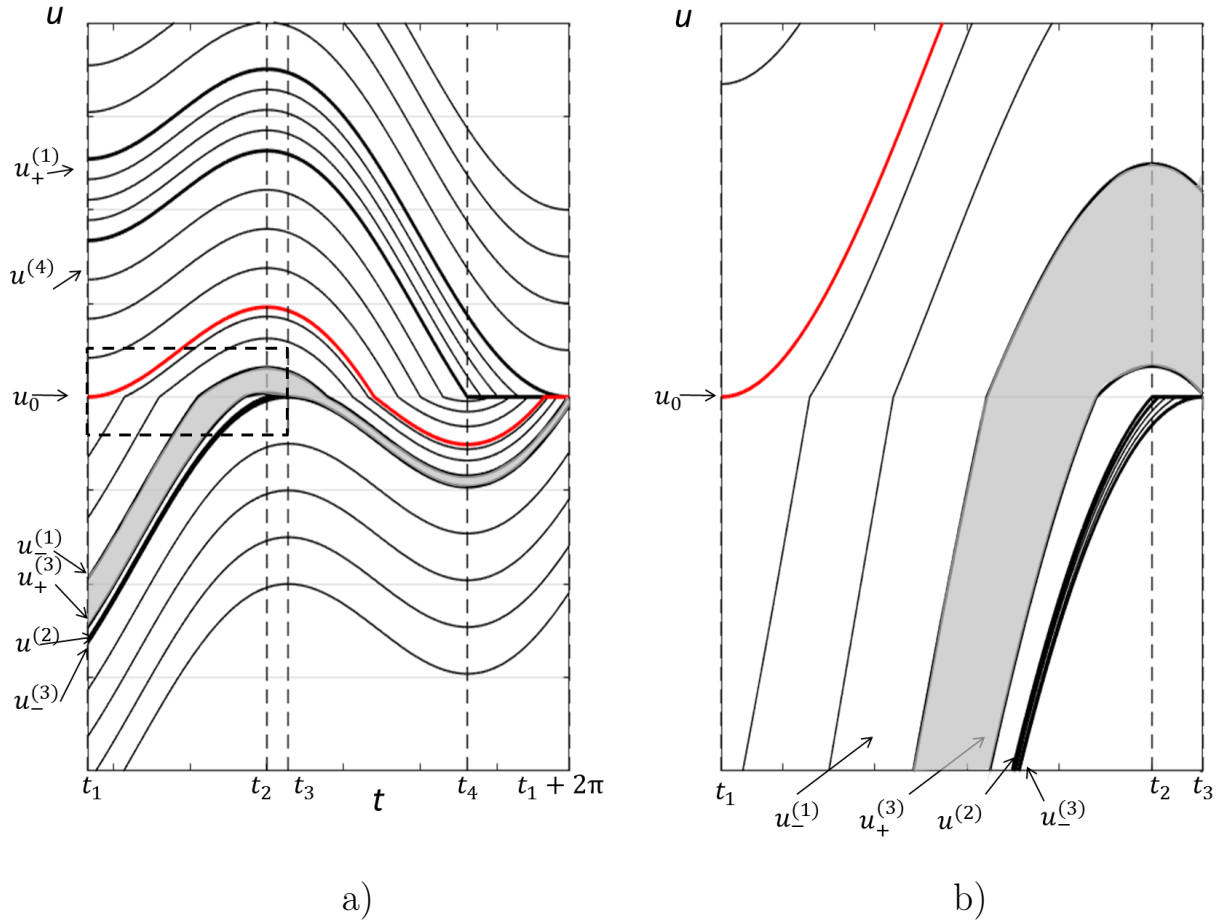


Рис. 4. Пространство решений уравнения (1.9) в подобласти IIb ($k = 0.22, \mu = 1.5$).

остановки корпус начинает движение в противоположном направлении. Можно показать, что при значениях параметров из подобласти IIb такая интегральная кривая существует и единственна, она задается начальным условием

$$u_-^{(1)}(t_1) = \cos t_*^{(1)} - \cos t_1 - k\mu(t_*^{(1)} - t_1) - k(\sin t_*^{(1)} - \sin t_1), \quad (2.38)$$

где величина $t_*^{(1)}$ определяется в результате решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \cos t_*^{(1)} - \cos t_{**}^{(1)} - k \left[\mu(t_{**}^{(1)} - t_*^{(1)}) + \sin t_{**}^{(1)} - \sin t_*^{(1)} \right] &= 0, \\ \cos t_{**}^{(1)} - \cos t_1 + k \left[\mu(t_1 + 2\pi - t_{**}^{(1)}) + \sin t_1 - \sin t_{**}^{(1)} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (2.39)$$

относительно $t_*^{(1)}$ и $t_{**}^{(1)}$.

Отметим, что при $t > t_1 + 2\pi$ интегральная кривая $u_-^{(1)}(t)$ описывает периодическое движение с залипанием в нижней зоне замедления, т.е. $u_-^{(1)}(t) \equiv u_0(t)$,

где как и ранее через $u_0(t)$ обозначено периодическое решение уравнения (1.15), заданное начальным условием $u_0(t_1) = 0$.

На основе анализа поведения интегральных кривых (см. Рис. 4) приходим к следующим выводам.

1. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) < 2\pi k\mu$, то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi$, после чего начнет двигаться 2π -периодически с залипанием только в нижней зоне замедления. На Рис. 4а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$, при $t > t_1 + 2\pi$ она вырождается в кривую $u_0(t)$.
2. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$, то корпус остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнет движение в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$. На Рис. 4а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, при $t > t_3$ эти интегральные кривые совпадают ($u_+^{(3)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.
3. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановок зонах замедления и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На Рис. 4а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, она выделена серым цветом.

Докажем теперь, что для значений параметров из подобласти Пв независимо от величины начальной скорости корпус через конечное время выйдет на

периодический режим движения, соответствующий интегральной кривой $u_0(t)$. Для этого достаточно показать, что если $u_-^{(3)} \leq u(t_1) < u_-^{(1)}$, то через конечный промежуток времени корпус остановится в нижней зоне замедления.

Покажем сначала, что для значений параметров из подобласти IIb всегда существует такое натуральное число N , что $u_+^{(3)}(t) \equiv u_0(t)$ при $t > t_1 + 2\pi N$. В области II интегральной кривой $u_+^{(3)}(t)$ соответствует движение корпуса, при котором он, двигаясь в момент времени $t = t_1$ в отрицательном направлении, совершит остановку на промежутке (t_1, t_2) в некоторый момент времени $t = t_*^{(3)}$. Интегральная кривая $u_+^{(3)}(t)$ в области II (в отличие от области I) задается начальным условием

$$u_+^{(3)}(t_1) = \cos t_*^{(3)} - \cos t_1 - k\mu(t_*^{(3)} - t_1) - k(\sin t_*^{(3)} - \sin t_1), \quad (2.40)$$

где величина $t_*^{(3)}$ определяется в результате решения уравнения

$$\cos t_3 - \cos t_*^{(3)} + k \left[\mu(t_3 - t_*^{(3)}) + \sin t_3 - \sin t_*^{(3)} \right] = 0. \quad (2.41)$$

Непосредственным интегрированием уравнения (1.9) получаем

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) = \cos t_3 - \cos t_1 + k\mu(t_1 + 2\pi - t_3) + k(\sin t_1 - \sin t_3). \quad (2.42)$$

Теперь, учитывая (2.40), (2.41) и (2.42) вычислим разность

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) - u_+^{(3)}(t_1) = 2k\mu(\pi + t_*^{(3)} - t_3) + 2k(\sin t_*^{(3)} - \sin t_3). \quad (2.43)$$

В силу очевидной цепочки неравенств $\pi + t_*^{(3)} > \pi + t_1 > t_3$ первое слагаемое в правой части (2.43) положительно. Второе слагаемое в правой части (2.43) также положительно, т.к. $\pi < t_3 < 2\pi$ и $0 < t_*^{(3)} < \pi$. Таким образом, разность (2.43) положительна и, следовательно, выполняется неравенство $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) > u_+^{(3)}(t_1)$.

На основании леммы 1 значения $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{N}$ образуют монотонную последовательность, а в силу последнего неравенства эта последователь-

ность является неубывающей. Рассуждая от противного, покажем, что эта последовательность является ограниченной, а именно $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) \leq 0$. Пусть $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n_*) > 0$, где n_* – некоторое натуральное число. Тогда, учитывая, что полученные выше выводы о движении корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ будут также верны на интервале $[t_1 + 2\pi n_*, t_1 + 2\pi(n_* + 1)]$, приходим к следующему заключению: либо $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi(n_* + 1)) = 0$, либо $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi(n_* + 1)) = u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n_*) - 2\pi k\mu$. В обоих случаях $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi(n_* + 1)) < u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n_*)$, что противоречит свойству монотонности.

В силу монотонности и ограниченности последовательность $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ имеет предел. Покажем, что этот предел равен нулю. Действительно, если это не так, то существует предельный режим движения корпуса с 2π -периодически изменяющейся скоростью, при котором корпус не останавливается ни в нижней, ни в верхней зоне замедления, т.е. движется без залипания. Последнее противоречит лемме 4, на основании которой указанного режима движения корпуса в области II не существует, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) = 0$. Более того, начиная с некоторого $n = N_*$, все члены последовательности $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ обращаются в ноль, так как в противном случае существует предельный 2π -периодический режим движения с остановкой корпуса на правой границе нижней зоны замедления, что невозможно в силу существования периодического режима движения с остановкой внутри нижней зоны замедления. Следовательно, существует такое натуральное число N_* , что $u_+^{(3)}(t) \equiv u_0(t)$ при $t > t_1 + 2\pi N_*$.

Напомним теперь, что если начальная скорость удовлетворяет неравенству $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$, то при $t > t_3$ корпус будет двигаться со скоростью $u_+^{(3)}(t)$. Это означает, что в этом случае при $t > t_1 + 2\pi N$ корпус выйдет на режим движения с 2π -периодически меняющейся скоростью $u_0(t)$.

Если же начальная скорость корпуса лежит в интервале значений $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, то, как следует из результатов анализа, проведенного в параграфе 3.1, при $t > t_1$ будет выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t) \leq u(t) \leq u_-^{(1)}(t)$.

Поэтому $u(t) \equiv u_0(t)$ при $t > t_1 + 2\pi N$, где N – некоторое натуральное число ($1 \leq N \leq N_*$). Следовательно, и в этом случае корпус за конечный промежуток времени выйдет на режим движения с 2π -периодически меняющейся скоростью $u_0(t)$.

На основании результатов данного параграфа, приходим к следующему выводу. *Если параметры задачи принимают значения из области II, то при любой начальной скорости корпус за конечный промежуток времени перейдет в 2π -периодический режим, т.е. будет двигаться с 2π -периодически меняющейся скоростью, залипая только в нижней зоне замедления и перемещаясь за период в положительном направлении.*

2.5. Исследование предельного характера движения корпуса в области III

Характер движения корпуса для значений параметров из области III при отсутствии вязкого трения ($\alpha = 0$) можно исследовать также как это было сделано для областей I и II. В частности, при начальной скорости $u(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$ (где величина $u_-^{(3)}(t_1)$ вычисляется по формуле (3.25)) корпус на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$, будет двигаться в отрицательном направлении и за время движения его скорость по модулю уменьшится на $2\pi k\mu$, а при $u(t_1) > 2\pi k\mu$ корпус на указанном интервале будет двигаться в положительном направлении и его скорость уменьшится на $2\pi k\mu$. Если же начальная скорость корпуса лежит в диапазоне $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) \leq 2\pi k\mu$, то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ он будет совершать остановки меняя направление движения на противоположное или залипая в зонах замедления. Рассмотрим этот случай более подробно.

Пространство решений уравнения (1.15), построенное для значений параметров из области III, представлено на Рис. 5. Как и в области II определяющую роль здесь играют интегральные кривые $u_-^{(1)}(t)$, $u_+^{(3)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t)$, которые

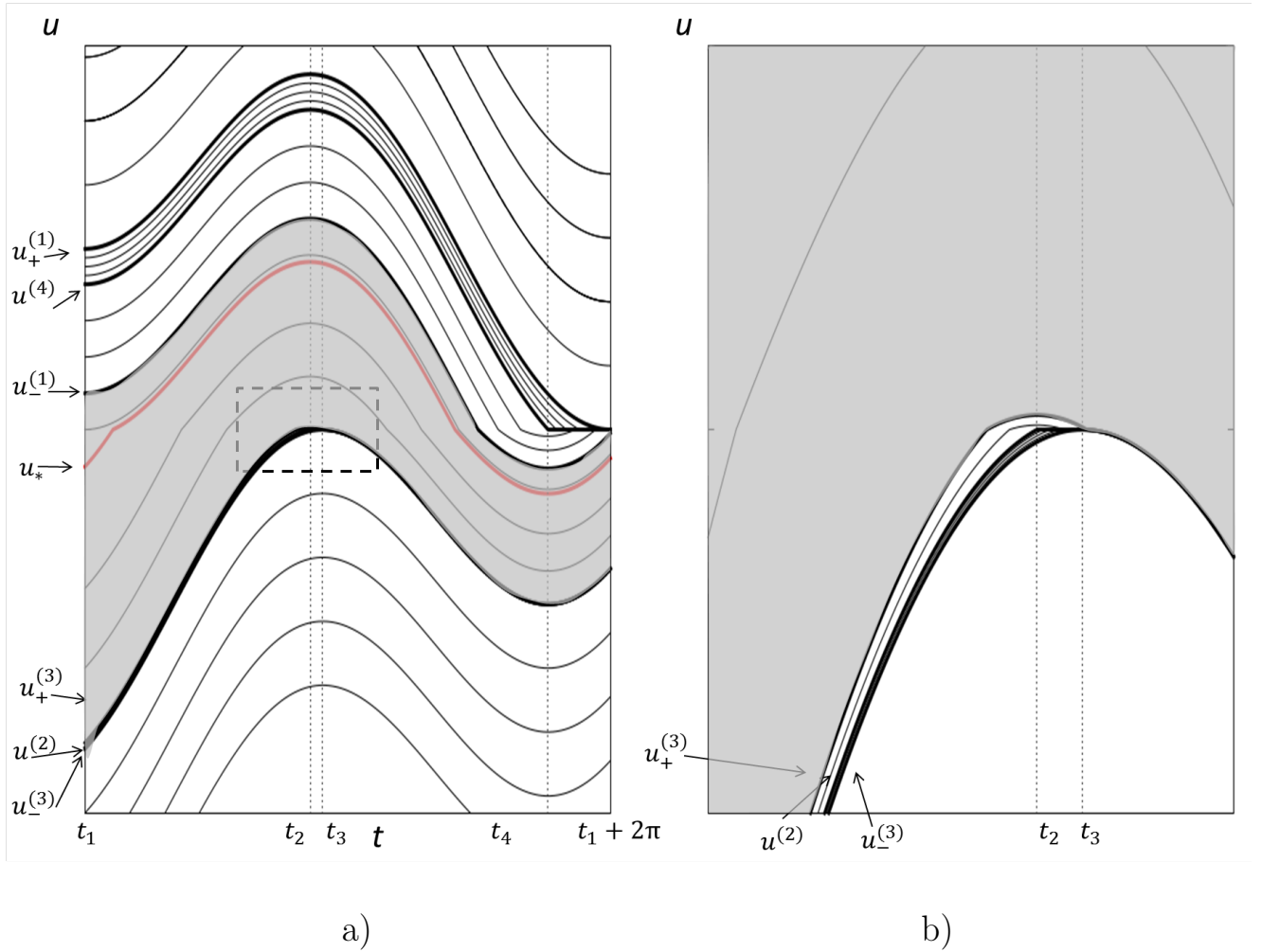


Рис. 5. Пространство решений уравнения (1.9) в подобласти III ($k = 0.15, \mu = 1.5$).

на Рис. 5а выделены жирными линиями. Заметим только, что в отличие от области II в области III интегральной кривой $u_-^{(1)}(t)$ соответствует движение корпуса с двумя остановками: в момент времени $t_*^{(1)}$ на промежутке $[t_3, t_4]$ и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ на правой границе нижней зоны замедления. В области III эта интегральная кривая задается начальным условием

$$u_-^{(1)}(t_1) = \cos t_*^{(1)} - \cos t_1 + k\mu(t_*^{(1)} - t_1) + k(\sin t_*^{(1)} - \sin t_1), \quad (2.44)$$

где $t_*^{(1)}$ – корень уравнения

$$\cos t_*^{(1)} - \cos t_1 + k \left[\mu(t_1 + 2\pi - t_*^{(1)}) + \sin t_1 - \sin t_*^{(1)} \right] = 0, \quad (2.45)$$

принадлежащий промежутку $[t_3, t_4]$. Начальное условие, определяющее инте-

гравльную кривую $u_+^{(3)}(t)$ вычисляется, как и в области II, по формулам (2.40) и (2.41)

Напомним еще, что основании леммы 4 для значений параметров из области III уравнение (1.15) допускает 2π -периодическое решение $u_*(t)$, оно задается начальным условием

$$u_*(t_1) = \cos t_* - \cos t_1 - k\mu(t_* - t_1) - k(\sin t_* - \sin t_1), \quad (2.46)$$

где t_* вычисляется по формуле (2.25). На Рис. 5 интегральная кривая $u_*(t)$ выделена жирной линией.

На основе анализа поведения интегральных кривых уравнения (1.15) можно сделать следующие утверждения о движении корпуса на интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$.

1. Если в начальный момент выполнено неравенство $u(t_1) \geq 2\pi k\mu$, то корпус на всем интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в положительном направлении, а его скорость на указанном интервале времени уменьшится на $2\pi k\mu$. При выполнении неравенства $u(t_1) \leq u_-^{(3)}(t_1)$ корпус на всем интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в отрицательном направлении, а его скорость на указанном интервале времени уменьшится по модулю на $2\pi k\mu$.
2. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) < 2\pi k\mu$, то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi$. На Рис. 5а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$, при $t \geq t_1 + 2\pi$ эти интегральные кривые совпадают ($u_-^{(1)}(t) \equiv u_+^{(1)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

3. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$, то корпус остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнет движение в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$. На Рис. 5а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, при $t \geq t_3$ эти интегральные кривые совпадают ($u_+^{(3)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.
4. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановки в нижней зоне замедления и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На Рис. 5а такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, она выделена серым цветом. В этой области лежит и интегральная кривая $u_*(t)$, которой соответствует движение корпуса с 2π -периодически меняющейся скоростью без остановок в зонах замедления.

Сформулированные выше утверждения позволяют сделать важные выводы о движении корпуса на бесконечном интервале времени. В частности, если в начальный момент времени $u(t_1) \geq u_-^{(1)}(t_1)$, то при некотором натуральном n , либо будет выполнено неравенство $u_-^{(1)}(t_1) \leq u(t_1 + 2\pi n) \leq 2\pi k\mu$ и при $t \geq t_1 + 2\pi(n+1)$ движение корпуса будет описываться решением $u_-^{(1)}(t)$, либо будет выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t) < u(t_1 + 2\pi n) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$. Последний случай будет рассмотрен ниже. Если же $u(t_1) \leq u_-^{(3)}(t_1)$, то при некотором некотором натуральном m , либо будет выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1 + 2\pi m) \leq u_+^{(3)}(t_1)$ и при $t \geq t_1 + 2\pi(m+1)$ движение корпуса будет описываться решением $u_+^{(3)}(t)$, либо будет выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t) < u(t_1 + 2\pi n) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$.

Докажем теперь, что для значений параметров из подобласти III независимо от величины начальной скорости движение корпуса асимптотически при-

ближается к периодическому режиму движения, соответствующему интегральной кривой $u_*(t)$. Учитывая сказанное выше, достаточно показать, что если $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) \leq u_-^{(1)}(t_1)$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_1 + 2\pi n) = u_*(t_1)$.

Заметим сначала, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) = u_*(t_1)$. Действительно, как было показано в параграфе 3.3, имеет место неравенство $u_+^{(3)}(t_1) < u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi)$. Поэтому, на основании леммы 1, значения $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{N}$ образуют монотонно возрастающую последовательность. Эта последовательность, очевидно, ограничена сверху величиной $u_*(t_1)$, поэтому она имеет некоторый предел, который обозначим \tilde{u} . Тогда решение уравнения (1.15) заданное начальным условием $u(t_1) = \tilde{u}$ будет 2π -периодическим. С другой стороны, по лемме 4 уравнение (1.15) в области III имеет единственное 2π -периодическое решение $u_*(t)$, поэтому $\tilde{u} = u_*(t_1)$.

Рассуждая аналогично, нетрудно показать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n) = u_*(t_1)$. Действительно, в области III на решении $u_0(t)$ (с начальным условием $u_0(t_1) = 0$) выполнено неравенство $u_0(t_1 + 2\pi) < 0$. Поэтому, учитывая, что $u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi) = 0$, имеем $u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi) > u_0(t_1 + 2\pi)$. Следовательно $u_-^{(1)}(t_1) > u_0(t_1) = 0$, а значит $u_-^{(1)}(t_1) > u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi)$. Поэтому, на основании леммы 1, значения $u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{N}$ образуют монотонно убывающую последовательность. Эта последовательность ограничена снизу и имеет предел равный $u_*(t_1)$.

Пусть теперь $u(t)$ – решение уравнения (1.15), для которого в начальный момент времени $t = t_1$ выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t_1) < u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, тогда при любом натуральном n будет выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) < u(t_1 + 2\pi n) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ и, следовательно $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t_1 + 2\pi n) = u_*(t_1)$.

Таким образом, в области III все решения уравнения (1.15) асимптотически приближаются к 2π -периодическому решению $u_*(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Глава 3

Исследование общего характера движения корпуса при учете как сухого, так и вязкого трения

3.1. О свойствах решений уравнения движения при учете вязкого трения

Многие общие свойства решений уравнения движения корпуса, доказанные в параграфе 2.2 для случая, когда вязкое трение отсутствует, имеют место и при наличии вязкого трения. В частности, решения уравнения (1.9), описывающего движение корпуса с учетом сил сухого и вязкого трения удовлетворяют лемме 1 (см. параграф. 2.2). Доказательство этого факта здесь не приводится, т.к. оно практически дословно совпадает с доказательством леммы 1, приведенном в параграфе 2.2. Вопрос же о периодических режимах движения корпуса при наличии в системе вязкого трения требует более детального анализа, поэтому остановимся на этом подробнее.

Как было показано в параграфе 1.3, при наличии вязкого трения возможно периодическое возвратно поступательное движение корпуса, а также движение корпуса с периодически меняющейся скоростью. В первом случае корпус за один период обращения внутренней массы по окружности совершает две остановки, после которых в течении конечных интервалов времени остается в состоянии покоя (залипает). После каждого такого интервала залипания, корпус меняет направление движения на противоположное. Указанный режим движения задается решением уравнения (1.9) с нулевым начальным условием и существует только при значениях параметров из области I, заданной нера-

венствами (1.11) и (1.55). Во втором случае корпус за один период обращения внутренней массы по окружности также совершает две остановки, но залипание имеет место только один раз. Такой режим движения также задается решением уравнения (1.9) с нулевым начальным условием, но существует при значениях параметров из области II, заданной неравенствами (1.62) и (1.68).

Исследуем теперь вопрос о существовании 2π -периодических движений корпуса без залипания. Предположим, что уравнение (1.9) допускает 2π -периодическое решение $u_*(t)$, описывающее движение корпуса без залипания, тогда на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$ функция $u_*(t)$ дважды обращается в ноль и меняет свой знак. Действительно, рассуждая от противного, будем считать, что $u_*(t) \neq 0$ на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$ и для определенности положим $u_*(t) > 0$. Тогда из уравнения (1.50) имеем

$$u_*(t_1 + 2\pi) = e^{-\alpha(t_1+2\pi)} \int_{t_1}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} \cdot (\sin t - k(\mu + \cos t)) dt + e^{-2\pi\alpha} \cdot u_*(t_1) \quad (3.1)$$

Учитывая, что функция $\sin t - k(\mu + \cos t)$ принимает положительные значения при $t \in (t_1, t_2)$ и отрицательные при $t \in (t_2, t_1 + 2\pi)$ оценим интеграл в правой части (3.1).

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} \cdot (\sin t - k(\mu + \cos t)) dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} e^{\alpha t} (\sin t - k(\mu + \cos t)) dt + \int_{t_2}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} (\sin t - k(\mu + \cos t)) dt < \\ & < \int_{t_1}^{t_2} e^{\alpha t_2} (\sin t - k(\mu + \cos t)) dt + \int_{t_2}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t_2} (\sin t - k(\mu + \cos t)) dt = \\ & = e^{\alpha t_2} \int_{t_1}^{t_1+2\pi} (\sin t - k(\mu + \cos t)) dt = -2\pi k \mu e^{\alpha t_2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\int_{t_1}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} \cdot (\sin t - k(\mu + \cos t)) dt < -2\pi k\mu e^{\alpha t_2} \quad (3.3)$$

Из (3.1) и (3.3), учитывая, что $e^{-2\pi\alpha} < 1$, приходим к неравенству

$$u_*(t_1 + 2\pi) < u_*(t_1) - 2\pi k\mu e^{\alpha(t_2-t_1)}. \quad (3.4)$$

Последнее противоречит условию 2π -периодичности $u_*(t)$. Поэтому функция $u_*(t)$ обязательно обратиться в ноль и поменяет знак на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$. Кроме того, из непрерывности и 2π -периодичности $u_*(t)$ следует, что на указанном интервале $u_*(t)$ изменит свой знак четное число раз.

Поскольку функция $u_*(t)$ описывает движение корпуса без залипания, то она может обратиться в ноль лишь на интервалах $[t_1; t_2]$ и $[t_3; t_4]$. Покажем, что на каждом из этих интервалов она может обратиться в ноль только один раз.

Пусть в момент времени $t_0 \in [t_1, t_2]$ корпус двигался в положительном направлении, тогда на интервале от $t = t_0$ до первой остановки его скорость определяется в результате решения уравнения (1.50) и имеет следующий явный вид

$$u(t) = e^{-\alpha t} \int_{t_0}^t e^{\alpha t} \cdot (\sin t - k(\mu + \cos t)) dt + e^{-\alpha(t-t_0)} \cdot u(t_0) \quad (3.5)$$

Поскольку по предположению $u(t_0) > 0$, то выражение (3.5) положительно на всем интервале $[t_1, t_2]$, т.е. двигаясь в момент времени t_0 с положительной скоростью, корпус на интервале $[t_1, t_2]$ сохранит направление своего движения, а его скорость не обратиться в ноль.

Предположим теперь, что в момент времени $t_0 \in [t_1, t_2]$ корпус двигался в отрицательном направлении. В этом случае на интервале времени от $t = t_0$ до первой остановки его скорость находится из уравнения (1.51). Правая часть это-

го уравнения на интервале положительна $[t_1, t_2]$, поэтому его решения являются возрастающими функциями времени и при подходящем выборе начального условия $u(t_0) < 0$ обращаются в ноль на указанном интервале.

Из сказанного выше следует, в частности, что периодическое решение $u_*(t)$ уравнения (1.9) может обратиться в ноль на интервале $[t_1, t_2]$ только один раз, причем будет выполнено условие $u_*(t_1) < 0$. Аналогично можно показать, что и на интервале $[t_3, t_4]$ периодическое решение $u_*(t)$ уравнения (1.9) также может обратиться в ноль только один раз и в этом случае выполняется условие $u_*(t_3) > 0$.

Моменты времени $t_* \in [t_1, t_2]$ и $t_{**} \in [t_3, t_4]$, при которых периодическое решение $u_*(t)$ обращается в ноль находятся из условий

$$\begin{aligned} \int_{t_*}^{t_{**}} e^{\alpha t} f_1(t) dt &= 0, \\ \int_{t_{**}}^{t_*+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Условия (3.6) можно переписать явно в виде системы из двух следующих уравнений относительно t_* и t_{**}

$$\begin{aligned} G_1(t_*)e^{\alpha t_*} - G_1(t_{**})e^{\alpha t_{**}} &= 0, \\ G_2(t_{**})e^{\alpha t_{**}} - G_2(t_*)e^{\alpha(t_*+2\pi)} &= 0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, $G_1(t)$, $G_2(t)$ определяются формулами (1.53), (1.54). Система уравнений (3.7) имеет решение не при всех допустимых значениях параметров k, μ, α . Найдем необходимое условие существования решения системы (3.7), а именно, покажем от противного, что система (3.7) может иметь решение только для значений параметров из области III.

Пусть при значениях параметров k, μ, α из области I система уравнений (3.7) имеет решение, тогда величины t_* и t_{**} однозначно определяют периодическое движение корпуса без залипания в зонах замедления. Наряду с этим

периодическим движением рассмотрим движение корпуса с нулевой начальной скоростью $u(t_1) = 0$. Ранее в параграфе 1.3 было показано, что в этом случае корпус начав движение в положительном направлении, останавливается либо в верхней зоне замедления, либо на интервале (t_3, t_4) . Момент \tilde{t} остановки корпуса определится из условия

$$\int_{t_1}^{\tilde{t}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0 \quad (3.8)$$

Функция $f_1(t)$ положительна на интервале (t_1, t_2) и отрицательна на интервале $(t_2, t_1 + 2\pi)$, поэтому функция

$$F_1(t) = \int_{t_1}^t e^{\alpha \tau} f_1(\tau) d\tau$$

возрастает на интервале (t_1, t_2) и убывает на интервале $(t_2, t_1 + 2\pi)$. Аналогично функция

$$F_1^*(t) = \int_{t_*}^t e^{\alpha \tau} f_1(\tau) d\tau$$

возрастает на интервале (t_*, t_2) и убывает на интервале $(t_2, t_1 + 2\pi)$.

Принимая во внимание равенство

$$F_1(t) = F_1^*(t) + \int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha \tau} f_1(\tau) d\tau,$$

и учитывая, что, в силу (3.8), $F_1(\tilde{t}) = 0$, приходим к неравенству

$$F_1^*(\tilde{t}) = - \int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha \tau} f_1(\tau) d\tau < 0,$$

из которого следует, что на интервале (t_2, \tilde{t}) функция $F_1^*(t)$ непрерывна монотонна и принимает значения противоположных знаков на границах этого интервала. Следовательно, она обращается в ноль в единственной точке данного

интервала. С другой стороны, в силу (3.6), выполняется равенство $F_1^*(t_{**}) = 0$, поэтому $t_{**} \in (t_2, \tilde{t})$. Таким образом, $t_2 < t_{**} < \tilde{t} < t_3$, т.е. корпус, начав движение в момент времени $t = t_*$ остановится в верхней зоне замедления. Последнее противоречит предположению о существовании периодического режима движения без залипания. Из данного противоречия следует, что в области I система (3.7) не имеет решений и периодического режима движения корпуса без залипаний не существует.

Предположим теперь, что система уравнений (3.7) имеет решение для значений параметров задачи из области II. Напомним, что в этой области существует периодический режим движения с залипанием в нижней зоне замедления, т.е. корпус, начав движение с нулевой начальной скоростью, остановится в некоторый момент времени \tilde{t} на интервале $[t_3, t_4]$. Ранее было показано (см. (1.67)), что в этой области

$$\int_{\tilde{t}}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt \geq 0. \quad (3.9)$$

Знак равенства в (3.9) имеет место на границе, разделяющей области II и III. Учитывая неравенства $t_{**} < \tilde{t} < t_1 + 2\pi$, второе уравнение системы (3.6) можно переписать в виде

$$\int_{t_{**}}^{\tilde{t}} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{\tilde{t}}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{t_1+2\pi}^{t_*+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt = 0 \quad (3.10)$$

или в виде

$$\int_{\tilde{t}}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt = - \int_{t_{**}}^{\tilde{t}} e^{\alpha t} f_2(t) dt - \int_{t_1+2\pi}^{t_*+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt. \quad (3.11)$$

Оценим теперь знак правой части (3.11). С этой целью перепишем условие (3.8)

В ВИДЕ

$$\int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_1(t) dt + \int_{t_*}^{t_{**}} e^{\alpha t} f_1(t) dt + \int_{t_{**}}^{\tilde{t}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \quad (3.12)$$

С учетом первого из уравнений (3.6), последнее равенство принимает вид

$$\int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_1(t) dt + \int_{t_{**}}^{\tilde{t}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \quad (3.13)$$

Заметим, теперь, что при любом t выполняется неравенство $f_2(t) > f_1(t)$, поэтому

$$\int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{t_{**}}^{\tilde{t}} e^{\alpha t} f_2(t) dt > \int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_1(t) dt + \int_{t_{**}}^{\tilde{t}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \quad (3.14)$$

Учитывая теперь очевидное неравенство

$$\int_{t_1+2\pi}^{t_*+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt > \int_{t_1}^{t_*} e^{\alpha t} f_2(t) dt, \quad (3.15)$$

имеем

$$\int_{t_1+2\pi}^{t_*+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{t_{**}}^{\tilde{t}} e^{\alpha t} f_2(t) dt > 0. \quad (3.16)$$

В силу (3.15) и (3.16) приходим к следующему неравенству

$$\int_{\tilde{t}}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt < 0. \quad (3.17)$$

Таким образом, для существования решения системы (3.6) необходимо выполнение неравенства (3.17), что невозможно в силу (3.9). Следовательно, в области II система (3.6) действительных решений не имеет и периодического режима движения без залипания не существует. На основании проведенного исследования можно сформулировать следующее утверждение.

Лемма 4. *Для значений параметров вне подобласти III периодических решений уравнения (1.9), описывающих движение корпуса без залипания, не существует.*

Отметим, что в области III неравенство (3.17) выполняется. Численный анализ системы уравнений (3.6) показал, что в области III она имеет действительное решение. Аналитически этот факт будет установлен ниже в параграфе 3.4. Здесь же покажем единственность указанного решения.

Пусть система (3.6) имеет два различных решения, т.е. существуют две пары $t_*^{(1)}, t_{**}^{(1)}$ и $t_*^{(2)}, t_{**}^{(2)}$, удовлетворяющие равенствам

$$\int_{t_*^{(1)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0, \quad \int_{t_{**}^{(1)}}^{t_*^{(1)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt = 0, \quad (3.18)$$

и

$$\int_{t_*^{(2)}}^{t_{**}^{(2)}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0, \quad \int_{t_{**}^{(2)}}^{t_*^{(2)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt = 0, \quad (3.19)$$

Далее для определенности положим $t_*^{(2)} > t_*^{(1)}$. Тогда, очевидно, будет выполнено неравенство $t_{**}^{(1)} > t_{**}^{(2)}$, а из условий (3.18) и (3.19) имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_*^{(1)}}^{t_{**}^{(2)}} e^{\alpha t} f_1(t) dt + \int_{t_{**}^{(2)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} f_1(t) dt &= 0, \\ \int_{t_{**}^{(2)}}^{t_*^{(1)}} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{t_*^{(1)}+2\pi}^{t_*^{(2)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Вычитая первое равенство из второго, получаем

$$\int_{t_{**}^{(2)}}^{t_*^{(1)}} e^{\alpha t} [f_2(t) - f_1(t)] dt + \int_{t_*^{(1)}+2\pi}^{t_*^{(2)}+2\pi} e^{\alpha t} f_2(t) dt - \int_{t_*^{(1)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} f_1(t) dt = 0. \quad (3.21)$$

После несложных преобразований последнее равенство можно представить в виде

$$2 \int_{t_{**}^{(2)}}^{t_{**}^{(1)}} e^{\alpha t} k(\mu + \cos t) dt + (e^{2\pi\alpha} - 1) \int_{t_*^{(1)}}^{t_*^{(2)}} e^{\alpha t} f_2(t) dt + \int_{t_*^{(1)}}^{t_*^{(2)}} e^{\alpha t} [f_2(t) - f_1(t)] dt = 0. \quad (3.22)$$

Все слагаемые выражения (3.22) всегда неотрицательны. Причем, обратиться в ноль они могут только при $t_*^{(1)} = t_*^{(2)}$ и $t_{**}^{(1)} = t_{**}^{(2)}$, что и доказывает единственность решения системы уравнений (3.6)

Таким образом, имеет место следующее утверждение

Лемма 5. *Уравнение (1.9) может иметь периодическое решение, описывающее движение корпуса без залипания, только при значениях параметров из области III. Если такое решение существует, то оно единственно.*

Отметим, еще свойства монотонности решений уравнения (1.9). При наличии в системе вязкого трения имеет место следующая

Лемма 6. *Пусть функция $u(t)$, заданная на интервале $[t_1; t_1 + 2\pi]$, является решением уравнения (1.9), тогда:*

1. *Если $u(t_1) < 0$, то функция $u(t)$ либо возрастает на всем промежутке $[t_1; t_2]$ до значения $u(t_2) \leq 0$, либо она возрастает и обращается в ноль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_1; t_2]$, а затем принимает только положительные значения до конца указанного промежутка.*
2. *Если $u(t_2) > 0$, то функция $u(t)$ либо убывает на всем промежутке $[t_2; t_3]$ до значения $u(t_3) \geq 0$, либо она убывает и обращается в ноль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_2; t_3]$, а затем сохраняет нулевое значение до конца указанного промежутка.*

3. Если $u(t_2) < 0$, то функция $u(t)$ либо возрастает на всем промежутке $[t_2; t_3]$ до значения $u(t_3) \leq 0$, либо она возрастает до нулевого значения, которое принимает в некоторой внутренней точке промежутка $[t_2; t_3]$, а затем остается тождественно равной нулю до конца указанного промежутка.
4. Если $u(t_3) > 0$, то функция $u(t)$ либо убывает на всем промежутке $[t_3; t_4]$ до значения $u(t_4) \geq 0$, либо она убывает и обращается в ноль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_3; t_4]$, а затем принимает только отрицательные значения до конца указанного промежутка.
5. Если $u(t_4) > 0$, то функция $u(t)$ либо убывает на всем промежутке $[t_4; t_1 + 2\pi]$ до значения $u(t_1 + 2\pi) \geq 0$, либо она убывает и обращается в ноль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_4; t_1 + 2\pi]$, а затем сохраняет нулевое значение до конца указанного промежутка.
6. Если $u(t_4) < 0$, то функция $u(t)$ либо возрастает на всем промежутке $[t_4; t_1 + 2\pi]$ до значения $u(t_1 + 2\pi) \leq 0$, либо она возрастает до нулевого значения, которое принимает в некоторой внутренней точке промежутка $[t_4; t_1 + 2\pi]$, а затем остается тождественно равной нулю до конца указанного промежутка.

3.2. Исследование движения корпуса в области I

Исследуем характер движения корпуса при отличной от нуля начальной скорости, полагая, что параметры задачи k , μ и α принимают значения из области I. Далее будем использовать те же обозначения, что и в главе 2. В частности, обозначим через $u_0(t)$ решение уравнения (1.9) с начальным условием $u_0(t_1) = 0$, которому соответствует периодическое движение корпуса с залипанием как в верхней, так и в нижней зонах замедления.

Для получения качественных выводов о движении корпуса при ненулевой начальной скорости исследуем поведение интегральных кривых уравнения (1.9) на интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$. Определяющую роль здесь играют интегральные кривые, которым соответствует движение корпуса с остановкой на одной из границ верхней или нижней зоны замедления. В пространстве решений (t, u) уравнения (1.9) эти кривые являются границами областей, в которых решения имеют качественно различный характер.

Исследуем решение $u^{(2)}(t)$, которое описывает движение корпуса с остановкой в момент времени $t = t_2$. В параграфе 3.1 было показано, что двигаясь в некоторый момент времени $t_0 \in [t_1, t_2]$ с положительной скоростью корпус на интервале $[t_1, t_2]$ сохранит направление своего движения. Это означает, что остановка на интервале $[t_1, t_2]$ возможна только при движении корпуса в отрицательном направлении. Таким образом, внутри промежутка $(t_1, t_2]$ функция $u^{(2)}(t)$ принимает только отрицательные значения и обращается в ноль на его границе. На промежутке $(t_2, t_3]$ функция $u^{(2)}(t)$ тождественно обращается в ноль, поэтому $u^{(2)}(t_3) = u_0(t_3) = 0$. Поскольку для уравнения (1.9) имеет место правосторонняя единственность решений, то при всех $t > t_3$ выполняется тождественное равенство $u^{(2)}(t) \equiv u_0(t)$.

Учитывая, что $u^{(2)}(t_2) = 0$ нетрудно найти начальное условие, определяющее решение $u^{(2)}(t)$

$$u^{(2)}(t_1) = e^{at_2}[e^{at_2}(G_2(t_2)) - e^{at_1}G_2(t_1)]. \quad (3.23)$$

Используя свойство монотонности решений на интервале $[t_2, t_3]$ (см. Лемму 6), можно показать, что остановка корпуса в момент времени t_3 возможна как при движении в положительном направлении, так и при движении в отрицательном направлении. В первом случае движение описывается решением

$u_+^{(3)}(t)$ уравнения (1.9) с начальным условием

$$u_+^{(3)}(t_1) = e^{\alpha t_3} [e^{\alpha t_3} (G_1(t_3)) - e^{\alpha t_1} G_1(t_1)], \quad (3.24)$$

а во втором случае – решением $u_-^{(3)}(t)$ с начальным условием

$$u_-^{(3)}(t_1) = e^{\alpha t_3} [e^{\alpha t_3} (G_2(t_3)) - e^{\alpha t_1} G_2(t_1)]. \quad (3.25)$$

В силу правосторонней единственности решений уравнения (1.9), на интервале $[t_1, t_3)$ выполняются очевидные неравенства $u_+^{(3)}(t) > u_0(t)$ и $u_-^{(3)}(t) < u_2(t)$, поэтому функция $u_+^{(3)}(t_1)$ положительна на всем указанном интервале, а функция $u_-^{(3)}(t_1)$ – отрицательна. При всех $t > t_3$ имеют место тождественные равенства $u_+^{(3)}(t) \equiv u_0(t)$ и $u_-^{(3)}(t) \equiv u_0(t)$.

Обозначим через $u_3^-(t)$ и $u_3^+(t)$ решения уравнения (1.9), заданные начальными условиями, удовлетворяющими неравенствам $u_-^{(3)}(t_1) < u_3^-(t_1) < u^{(2)}(t_1)$ и $u^{(2)}(t_1) < u_3^+(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$ соответственно. Поскольку $u_3^-(t_1) < 0$, то, как было показано в параграфе 3.1 решение $u_3^-(t)$ возрастает на промежутке $(t_1, t_2]$, и принимает на его правой границе отрицательное значение, по лемме 6 это решение также возрастает и на промежутке $(t_2, t_3]$, обращается в ноль в некоторой его внутренней точке и сохраняет нулевое значение до его правой границы. Начальное значение решения $u_3^+(t)$ может быть как положительным так и отрицательным. Если $u_3^+(t_1) > 0$, то, как было показано в параграфе 3.1 решение $u_3^+(t)$ положительно всем на промежутке $(t_1, t_2]$. Если же $u_3^+(t_1) < 0$, то решение $u_3^+(t)$ возрастает и обращается в ноль в некоторой внутренней точке промежутка $[t_1, t_2]$, а затем до конца этого промежутка принимает только положительные значения. По лемме 6 решение $u_3^+(t)$ убывает на промежутке $(t_2, t_3]$, обращается в ноль в некоторой его внутренней точке и сохраняет нулевое значение до его правой границы. В силу правосторонней единственности решений уравнения (1.9), при всех $t > t_3$ выполняются тождественные равенства $u_3^-(t) \equiv u_0(t)$ и $u_3^+(t) \equiv u_0(t)$.

В пространстве решений уравнения (1.9) интегральные кривые $u_-(t)$ лежат в области ограниченной кривыми $u^{(2)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t)$, а интегральные кривые $u_+(t)$ лежат в области ограниченной кривыми $u^{(2)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$. При $t \geq t_3$ эти области вырождаются в кривую $u_0(t)$. Таким образом, если в момент времени $t = t_1$ скорость корпуса находится в диапазоне значений от $u_-^{(3)}(t_1)$ до $u_+^{(3)}(t_1)$, то, как и при отсутствии вязкого трения, корпус останавливается в верхней зоне замедления $[t_2, t_3]$ и остается в покое до момента времени $t = t_3$, а затем начинает совершать периодическое движение, которое описывается решением $u_0(t)$, т.е. при $t > t_3$ корпус движется возвратно поступательно с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.

Решение $u^{(4)}(t)$ уравнения (1.9) описывает движение корпуса с остановкой в момент времени t_4 . Покажем, что $u^{(4)}(t) > 0$ при $t < t_4$, т.е. остановка корпуса в момент времени $t = t_4$ возможна лишь при движении корпуса в положительном направлении. Действительно, рассуждая от противного предположим сначала, что при некотором $t^* < t_3$ выполняется $u^{(4)}(t^*) < 0$. Тогда, если $u_-^{(3)}(t^*) < u^{(4)}(t^*) < 0$, то, как показано выше, при всех $t > t_3$ выполняется тождественное равенство $u^{(4)}(t) \equiv u_0(t)$ и, в частности, $u^{(4)}(t_4) \equiv u_0(t_4) < 0$. Если же $u^{(4)}(t^*) < u_-^{(3)}(t^*)$, то при всех $t > t^*$ выполняется неравенство $u^{(4)}(t) \leq u_-^{(3)}(t)$, а значит $u^{(4)}(t_4) \leq u_-^{(3)}(t_4) = u_0(t_4) < 0$. В обоих случаях приходим к противоречию с условием $u^{(4)}(t_4) = 0$. Пусть теперь $t_3 < t^* < t_4$ и $u^{(4)}(t^*) < 0$, тогда, интегрируя уравнение (1.51) на интервале от t^* до t_4 с начальным условием $u(t^*) = u^{(4)}(t^*) < 0$, имеем

$$u^{(4)}(t_4) = -e^{\alpha t_4} \int_{t^*}^{t_4} e^{\alpha t} f_2(t) dt + e^{-\alpha(t_4 - t^*)} u^{(4)}(t^*). \quad (3.26)$$

Правая часть выражения (3.26) отрицательна, следовательно и в этом случае приходим к противоречию с условием $u^{(4)}(t_4) = 0$.

Таким образом, функция $u^{(4)}(t) > 0$ на интервале t_1, t_4 и, поэтому, является

решением уравнения (1.50) на указанном интервале. Несложные вычисления показывают, что это решение задается следующим начальным условием

$$u^{(4)}(t_1) = e^{\alpha t_4} [e^{\alpha t_4} (G_1(t_4)) - e^{\alpha t_1} G_1(t_1)]. \quad (3.27)$$

Обозначим через $u_4^+(t)$ решения уравнения (1.9) с начальными значениями из диапазона от $u_+^{(3)}(t_1)$ до $u^{(4)}(t_1)$. На интервале $[t_1, t_3]$ для этих решений выполнено неравенство $u_4^+(t) > u_+^{(3)}(t)$ и, в частности, $u_4^+(t_3) > 0$. Поэтому по Лемме 6 решение $u_4^+(t)$ сначала убывает на интервале $[t_3, t_4]$, обращается в ноль в некоторой внутренней точке и сохраняет отрицательное значение до конца этого интервала, т.е. $u_4^+(t_4) < 0$. Следовательно, снова применяя по Лемме 6, приходим к заключению, что решения $u_4^+(t)$ возрастают при $t > t_4$ и, в силу неравенства $u_4^+(t) > u_+^{(3)}(t)$ с учетом непрерывности и правосторонней единственности, обращаются в ноль в некоторой внутренней точке интервала $(t_4, t_1 + 2\pi)$, а затем остаются тождественно равными нулю до момента времени $t_1 + 2\pi$. Таким образом, при $t > t_1 + 2\pi$ справедливо тождественное равенство $u_4^+(t) \equiv u_0(t)$.

Из сказанного выше следует что, если в момент времени t_1 скорость корпуса имела значение из диапазона от $u_+^{(3)}(t_1)$ до $u^{(4)}(t_1)$, то двигаясь в положительном направлении корпус остановится на интервале (t_3, t_4) и сразу начнет движение в отрицательном направлении до остановки в нижней зоне замедления, после чего он будет оставаться в покое до момента времени $t_1 + 2\pi$, т.е. выйдет на периодический режим движения.

Рассмотрим теперь решения $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ уравнения (1.9), описывающие движение корпуса, при котором он, двигаясь положительном и отрицательном направлениях соответственно, совершит остановку в момент времени $t_1 + 2\pi$. Как было показано ранее, решения $u_+^{(4)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t)$ не меняют знака на промежутке $(t_1, t_1 + 2\pi]$, поэтому в силу очевидных неравенств $u_+^{(4)}(t_1) < u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t) > u_-^{(1)}(t)$, решения $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ также не меняют знака на промежутке

$(t_1, t_1 + 2\pi]$. Таким образом, на всем интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ функции $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ являются решениями уравнений (1.50) и (1.51) соответственно. Можно показать, что $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ определяются начальными условиями

$$u_+^{(1)}(t_1) = e^{\alpha(t_1+2\pi)}[e^{\alpha(t_1+2\pi)}(G_1(t_1 + 2\pi)) - e^{\alpha t_1}G_1(t_1)], \quad (3.28)$$

$$u_-^{(1)}(t_1) = e^{\alpha(t_1+2\pi)}[e^{\alpha(t_1+2\pi)}(G_2(t_1 + 2\pi)) - e^{\alpha t_1}G_2(t_1)]. \quad (3.29)$$

Поскольку обе функции $u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ обращаются в ноль в момент времени $t = t_1 + 2\pi$, то $u_+^{(1)}(t_1 + 2\pi) = u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi) = u_0(t_1 + 2\pi) = 0$ и, следовательно, при всех $t > t_1 + 2\pi$ выполняются тождественные равенства $u_+^{(1)}(t) \equiv u_0(t)$ и $u_-^{(1)}(t) \equiv u_0(t)$.

Обозначим через $u_1^+(t)$ и $u_1^-(t)$ решения с начальными условиями, удовлетворяющими $u^{(4)}(t_1) < u_1^+(t_1) < u_+^{(1)}(t_1)$ и $u_-^{(1)}(t_1) < u_1^-(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$. В силу правосторонней единственности решения уравнения (1.9) будут справедливы следующие неравенства $u^{(4)}(t) \leq u_1^+(t) \leq u_+^{(1)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t) \leq u_1^-(t) \leq u_-^{(3)}(t)$. Учитывая теперь, что при $t > t_1 + 2\pi$ выполняются равенства $u^{(4)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t) \equiv u_+^{(1)}(t) \equiv u_-^{(1)}(t) \equiv u_0(t)$, приходим к тождественным равенствам $u_1^+(t) \equiv u_1^-(t) \equiv u_0(t)$, которые также будут справедливы при $t > t_1 + 2\pi$.

Таким образом, если начальная скорость корпуса лежит в диапазоне от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_-^{(3)}(t_1)$ или от $u^{(4)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$, то корпус двигаясь в отрицательном или положительном направлениях соответственно, остановится в нижней зоне замедления и будет оставаться в покое до ее правой границы, а затем начнет совершать периодические возвратно поступательные движения с залипанием в верхней и нижней зонах замедления.

Объединяя результаты, проведенного исследования можно утверждать, что, если начальная скорость принадлежит диапазону от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$, то в течение промежутка времени $(t_1, t_1 + 2\pi)$ корпус выйдет вышеуказанный периодический режим движения.

Остается рассмотреть случай движения корпуса, когда его начальная скорость лежит вне диапазона $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$. Пусть $u(t_1) > u_+^{(1)}(t_1)$, тогда в силу правосторонней единственности решения уравнения (1.9) функция $u(t)$ будет сохранять положительный знак на промежутке $(t_1, t_1 + 2\pi)$. Как следует из неравенства (3.4), в этом случае скорость корпуса за один оборот точки уменьшится по модулю на величину, превосходящую константу $2\pi k\mu e^{\alpha(t_2-t_1)}$. Можно показать, что аналогичное утверждение справедливо и для случая движения без остановок в отрицательном направлении.

Таким образом, если в начальный момент $t = t_1$ скорость корпуса меньше $u_-^{(1)}(t_1)$ или больше $u_+^{(1)}(t_1)$, то через конечное число оборотов точки по окружности значение скорости попадет в диапазон от $u_-^{(1)}(t_1)$ до $u_+^{(1)}(t_1)$. Следовательно, в течение конечного промежутка времени движение корпуса выйдет на периодический режим, который описывается решением $u_0(t)$.

На Рис. 1 представлено пространство решений уравнения (1.9), построенное на основе проведенного выше анализа и позволяющее получить полную качественную картину движения корпуса для значений параметров из области I.

Суммируя результаты данного параграфа, можно сделать следующий вывод. *Если параметры задачи принимают значения из области I, то при любой начальной скорости корпус за конечный промежуток времени перейдет в периодический режим, т.е. будет двигаться возвратно поступательно с замедлением в верхней и нижней зонах замедления.*

3.3. Исследование движения корпуса в области II

Движение корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ для значений параметров из области II можно исследовать тем же методом, что и в предыдущем параграфе. Как и при отсутствии вязкого трения, здесь возможны два качественно различ-

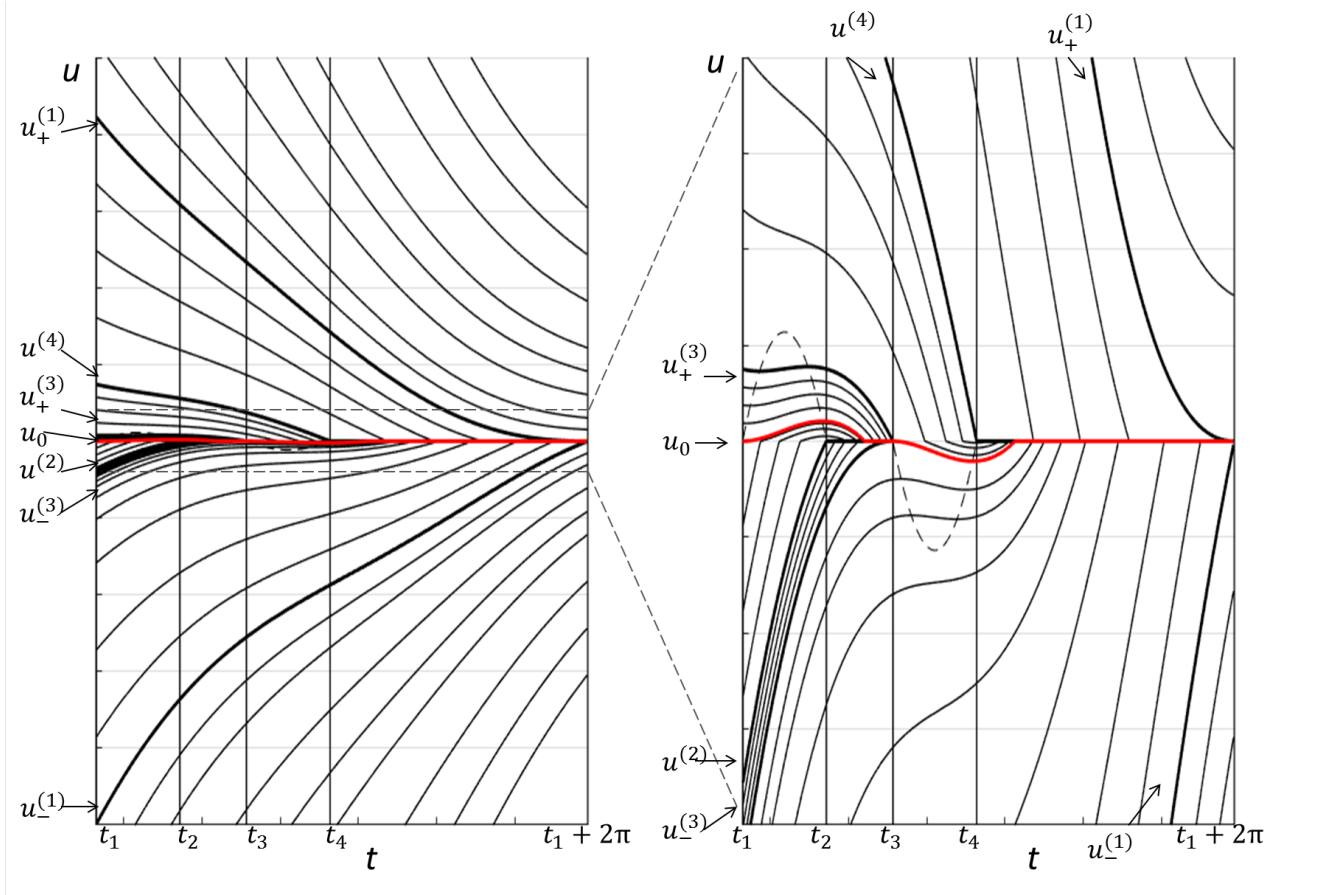


Рис. 1. Пространство решений уравнения (1.9) в подобласти I ($k = 0.7, \mu = 1.5, \alpha = 0.3$).

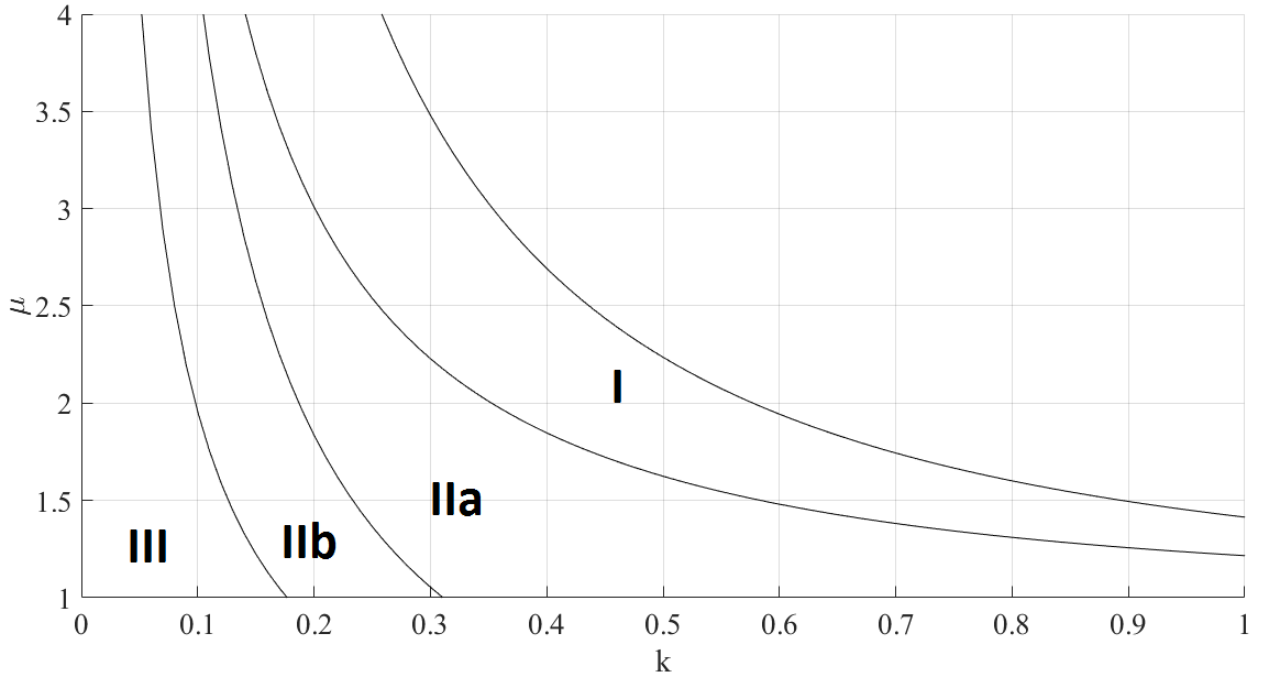


Рис. 2. Области возможных режимов движения.

ных случая: $u_-^{(3)}(t_1) > u_-^{(1)}(t_1)$ и $u_-^{(3)}(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$. Уравнение $u_-^{(3)}(t_1) = u_-^{(1)}(t_1)$ разделяет область II на две подобласти *IIa* и *IIb*. При $\alpha = 0.25$ они изображены на Рис. 2.

Если выполняется неравенство $u_-^{(3)}(t_1) > u_-^{(1)}(t_1)$, где величины $u_-^{(3)}(t_1)$, $u_-^{(1)}(t_1)$ вычисляются по формулам (3.25), (3.29), то как и для значений параметров из области I, при начальной скорости $u(t_1) \notin [u_-^{(1)}(t_1), u_+^{(1)}(t_1)]$, корпус на всем интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться без остановки, а его скорость на указанном интервале уменьшится по модулю на константу, значение которой превосходит величину $2\pi k \mu e^{\alpha(t_2 - t_1)}$. Если же $u(t_1) \in [u_-^{(1)}(t_1), u_+^{(1)}(t_1)]$, то на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус совершит остановку в нижней зоне замедления и будет оставаться в покое до конца этого интервала, после чего начнет двигаться 2π -периодически, останавливаясь и залипая только в нижней зоне замедления.

На Рис.3 представлено пространство решений уравнения (1.9), которое дает полную характеристику движения корпуса на интервале $[t_1, t_1 + 2\pi]$ в описанном выше случае.

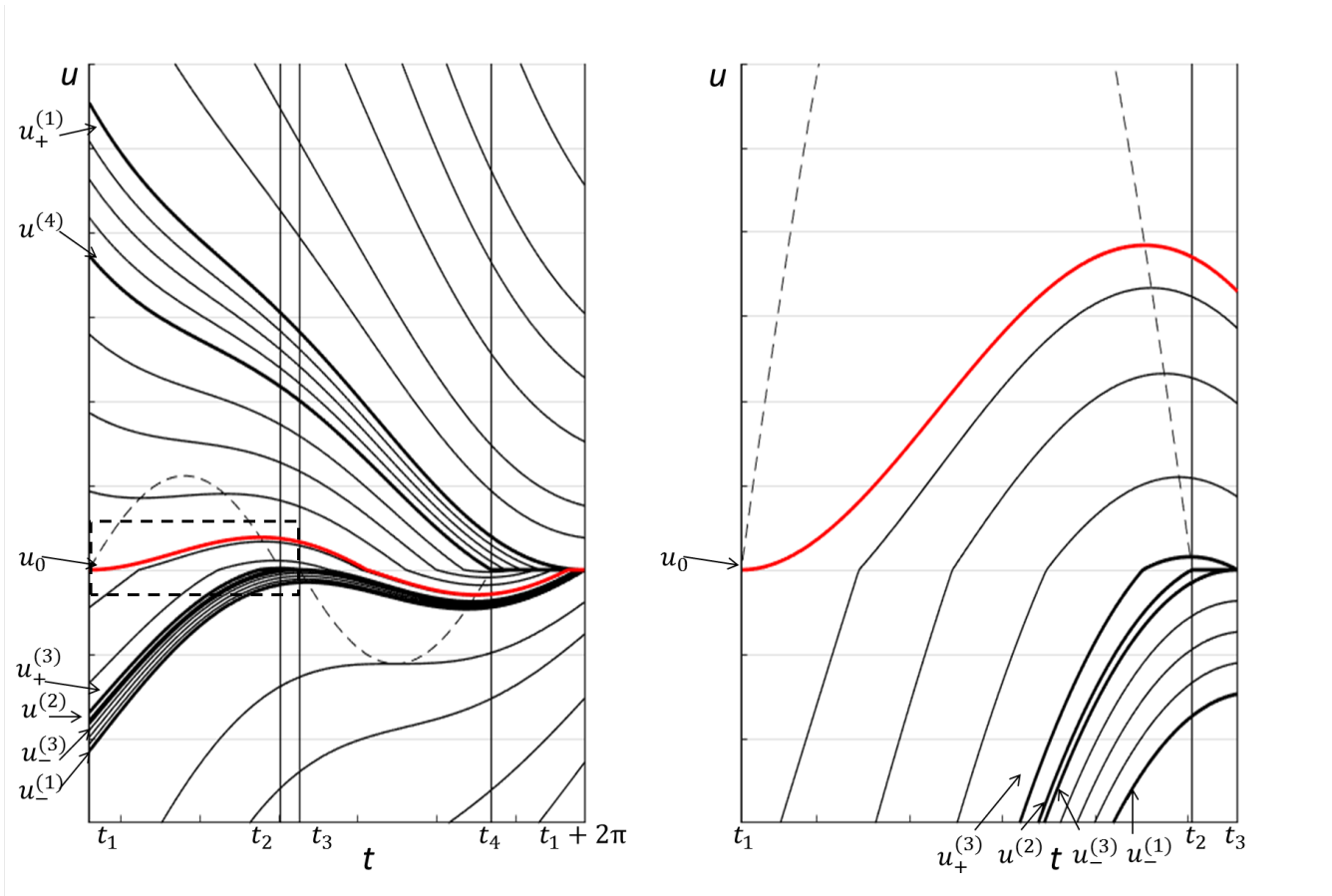


Рис. 3. Пространство решений уравнения (1.9) в подобласти IIa ($k = 0.35, \mu = 1.5, \alpha = 0.3$).

Если выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, т.е. значения параметров принадлежат подобласти IIb, то решение $u_-^{(3)}(t)$ описывает движение корпуса в отрицательном направлении с остановкой в момент времени $t = t_3$ и без остановки в нижней зоне замедления. Поэтому при начальной скорости $u(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$ корпус на всем интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$, будет двигаться в отрицательном направлении, без остановок и за время движения его скорость по модулю уменьшится на константу, значение которой превосходит величину $2\pi k\mu e^{\alpha(t_2-t_1)}$. В пространстве решений уравнения (1.9), представленном на Рис. 4, такому движению соответствуют интегральные кривые, расположенные ниже кривой $u_-^{(3)}(t)$.

При $u(t_1) > u_+^{(1)}(t_1)$ корпус на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в положительном направлении, также без остановок, а его скорость уменьшится на константу, значение которой превосходит величину $2\pi k\mu e^{\alpha(t_2-t_1)}$. Этому

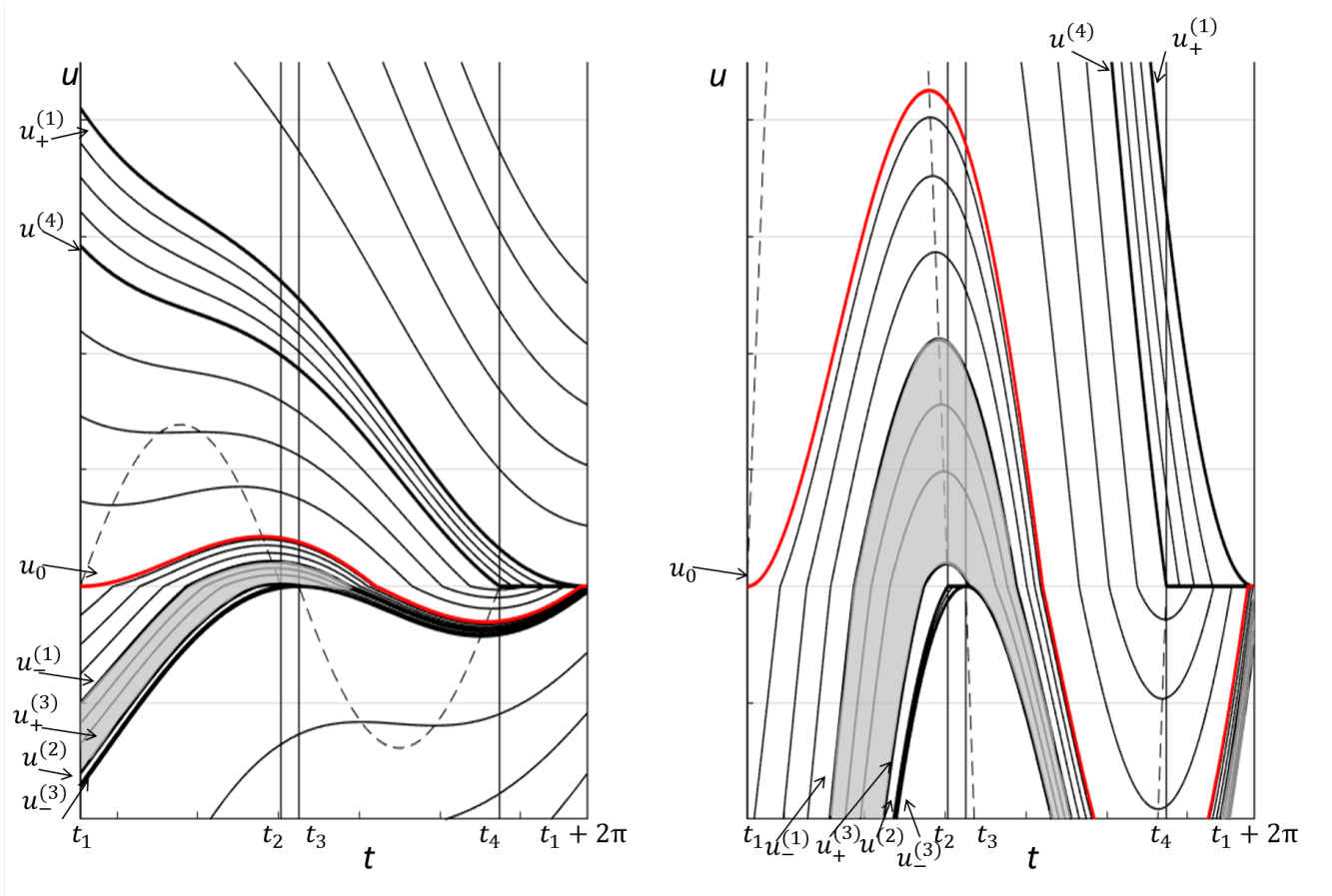


Рис. 4. Пространство решений уравнения (1.9) в подобласти IIb ($k = 0.225, \mu = 1.5, \alpha = 0.25$).

движению соответствует область пространства решений, расположенная выше интегральной кривой $u_+^{(1)}(t)$ (см. Рис. 4).

Предположим теперь, что в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) \leq u_+^{(1)}(t_1)$. Этому неравенству, в частности, удовлетворяет решение $u_-^{(1)}(t)$, которое на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ описывает движение корпуса с тремя остановками: в моменты времени $t_*^{(1)}$ и $t_{**}^{(1)}$ на промежутках $[t_1, t_2]$ и $[t_3, t_4]$ соответственно, а также в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ на правой границе нижней зоны замедления. После каждой остановки корпус начинает движение в противоположном направлении. Можно показать, что при значениях параметров из подобласти IIb решение $u_-^{(1)}(t)$ задается начальным условием

$$u_-^{(1)}(t_1) = e^{\alpha t_*^{(1)}} [e^{\alpha t_*^{(1)}} (G_1(t_*^{(1)}) - e^{\alpha t_1} G_1(t_1))], \quad (3.30)$$

где величина $t_*^{(1)}$ определяется в результате решения системы уравнений

$$\begin{aligned} e^{\alpha t_{**}^{(1)}} [e^{\alpha t_{**}^{(1)}} (G_1(t_{**}^{(1)}) - e^{\alpha t_*^{(1)}} G_1(t_*^{(1)}))] &= 0, \\ e^{\alpha(t_*^{(1)}+2\pi)} [e^{\alpha(t_*^{(1)}+2\pi)} (G_2(t_*^{(1)} + 2\pi) - e^{\alpha t_{**}^{(1)}} G_2(t_{**}^{(1)}))] &= 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

относительно $t_*^{(1)}$ и $t_{**}^{(1)}$.

Отметим, что при $t > t_1 + 2\pi$ интегральная кривая $u_-^{(1)}(t)$ описывает периодическое движение с залипанием в нижней зоне замедления, т.е. $u_-^{(1)}(t) \equiv u_0(t)$, где как и ранее через $u_0(t)$ обозначено периодическое решение уравнения (1.9), заданное начальным условием $u_0(t_1) = 0$.

На основе анализа поведения интегральных кривых (см. Рис. 4) можно сделать вывод, что наличие вязкого трения не изменяет качественного характера движения корпуса. Влияние вязкого трения на динамику системы выражается в том, что выход на периодический режим движения происходит за меньшее время, чем при его отсутствии.

Как и в случае отсутствия вязкого трения, имеют место следующие утверждения.

1. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) < u_+^{(1)}(t_1)$, то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi$, после чего начнет двигаться 2π -периодически с залипанием только в нижней зоне замедления. На Рис. 4 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$, при $t > t_1 + 2\pi$ она вырождается в кривую $u_0(t)$.
2. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u^{(2)}(t_1)$, то корпус остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнет движение в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$. На Рис. 4 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$

и $u^{(2)}(t)$, при $t > t_3$ эти интегральные кривые совпадают ($u^{(2)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.

3. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановки в нижней зоне замедления и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На Рис. 4 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, она выделена серым цветом.

Докажем теперь, что для значений параметров из подобласти IIb независимо от величины начальной скорости, корпус за конечное время выйдет на периодический режим движения, соответствующий интегральной кривой $u_0(t)$. Для этого достаточно показать, что если $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, то через конечный промежуток времени корпус остановится в нижней зоне замедления.

Рассмотрим функцию, зависящую от k , μ и α

$$\Delta(k, \mu, \alpha) = u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) - u_+^{(3)}(t_1) = \int_{t_3}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} (\sin t + k(\mu + \cos t)) dt - u_+^{(3)}(t_1). \quad (3.32)$$

На границе, разделяющей область II на подобласти IIa и IIb, выполнено равенство $u_-^{(3)}(t_1) = u_-^{(1)}(t_1)$. Нетрудно показать, что данное равенство можно записать в следующей эквивалентной форме $u_-^{(3)}(t_1 + 2\pi) = 0$. Интегрируя уравнение (1.51) на интервале $[t_3, t_1 + 2\pi]$ с нулевым начальным условием, последнее же равенство можно представить в виде

$$\int_{t_3}^{t_1+2\pi} e^{\alpha t} (\sin t + k(\mu + \cos t)) dt = 0 \quad (3.33)$$

и записать явно

$$e^{\alpha t_3} [\alpha^2 f_2(t_3) - \alpha f_2(t_3) + k\mu] + e^{\alpha(t_1+2\pi)} [\alpha^2 f_2(t_1) + \alpha f_2(t_1) + k\mu] = 0 \quad (3.34)$$

С другой стороны, если выполнено условие (3.33), то корпус, начав движение с отрицательной скоростью $u_+^{(3)}(t_1)$ в момент времени t_1 , совершит остановку в некоторый момент времени t_* и сразу же начнет движение в положительном направлении до остановки в момент времени t_3 , после которой вновь продолжит движение в отрицательном направлении и остановится в момент времени $t_1 + 2\pi$, т.е. из условия (3.33) следует, что $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) = 0$. Следовательно, если параметры k , μ и α лежат на границе, разделяющей подобласти IIa и IIb, то

$$\Delta(k, \mu, \alpha) = -u_+^{(3)}(t_1) > 0, \quad (3.35)$$

т.е. функция $\Delta(k, \mu, \alpha)$ принимает только положительные значения. Покажем, что в самой подобласти IIb она не может принимать отрицательные значения. Действительно, $\Delta(k, \mu, \alpha)$ непрерывно зависит от своих аргументов k , μ и α , поэтому, если она в подобласти IIb при некоторых значениях \tilde{k} , $\tilde{\mu}$, $\tilde{\alpha}$ примет отрицательное значение, то в подобласти IIb должен существовать такой набор значений k_0 , μ_0 , α_0 при котором функция $\Delta(k, \mu, \alpha)$ обращается в ноль. Это означает, что в данном случае будет выполнено условие

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) = u_+^{(3)}(t_1) \quad (3.36)$$

Условие (3.37) задает периодический режим движения без залипаний, но как было показано ранее, в области II такого режима движения не существует. Данное противоречие доказывает положительность функции $\Delta(k, \mu, \alpha)$ во всей подобласти IIb и, как следствие, выполнение неравенства

$$u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) > u_+^{(3)}(t_1) \quad (3.37)$$

На основании леммы 1 значения $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$, $n \in \mathbf{N}$ образуют монотонную последовательность, а в силу последнего неравенства эта последовательность является неубывающей. Рассуждая от противного, покажем, что эта последовательность является ограниченной, а именно $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) \leq 0$.

Пусть $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n_*) > 0$, где n_* – некоторое натуральное число. Тогда на основании выводов, полученных выше, либо $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi(n_* + 1)) = 0$, либо $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi(n_* + 1)) < u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n_*) - 2\pi k\mu e^{\alpha(t_2 - t_1)}$. В обоих случаях $u_-^{(3)}(t_1 + 2\pi(n_* + 1)) < u_-^{(3)}(t_1 + 2\pi n_*)$, что противоречит свойству монотонности.

В силу монотонности и ограниченности последовательность $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ имеет предел. Покажем, что этот предел равен нулю. Действительно, если это не так, то существует предельный режим движения корпуса с 2π -периодически изменяющейся скоростью, при котором корпус не останавливается ни в нижней, ни в верхней зоне замедления, т.е. движется без залипания. Последнее противоречит лемме 4, на основании которой указанного режима движения корпуса в области II не существует, поэтому $\lim_{n \rightarrow \infty} u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n) = 0$. Более того, начиная с некоторого $n = N$, все члены последовательности $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ обращаются в ноль, так как в противном случае существует предельный 2π -периодический режим движения с остановкой корпуса на правой границе нижней зоны замедления, что невозможно в силу существования периодического режима движения с остановкой внутри нижней зоны замедления. Следовательно, $u_+^{(3)}(t) \equiv u_0(t)$ при $t > t_1 + 2\pi N$.

Напомним теперь, что, если начальная скорость удовлетворяет неравенству $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$, то при $t > t_3$ корпус будет двигаться со скоростью $u_+^{(3)}(t)$. Это означает, что в этом случае при $t > t_1 + 2\pi N$ корпус выйдет на режим движения с 2π -периодически меняющейся скоростью $u_0(t)$.

Если же начальная скорость корпуса лежит в интервале значений $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, то как следует из результатов анализа, проведенного в параграфе 3.1, при $t > t_1$ будет выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t) \leq u(t) \leq u_-^{(1)}(t)$. Поэтому $u(t) \equiv u_0(t)$ при $t > t_1 + 2\pi N_*$, где N_* – некоторое натуральное число ($1 \leq N_* \leq N$). Следовательно, и в этом случае корпус за конечный промежуток времени выйдет на режим движения с 2π -периодически меняющейся скоростью $u_0(t)$.

На основании результатов данного параграфа, приходим к следующему выводу. Если параметры задачи принимают значения из области II, то при любой начальной скорости корпус за конечный промежуток времени перейдет в 2π -периодический режим, т.е. будет двигаться с 2π -периодически меняющейся скоростью, залипая только в нижней зоне замедления и перемещаясь за период в положительном направлении.

3.4. О предельном характере движения в области III

Характер движения корпуса для значений параметров из области III можно исследовать также как это было сделано для областей I и II. В частности, при начальной скорости $u(t_1) < u_-^{(3)}(t_1)$ корпус на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$, будет двигаться в отрицательном направлении и за время движения его скорость по модулю уменьшится на константу, значение которой превосходит величину $2\pi k\mu e^{\alpha(t_2-t_1)}$, а при $u(t_1) > u_+^{(1)}(t_1)$ корпус на указанном интервале будет двигаться в положительном направлении и его скорость уменьшится на константу, значение которой превосходит величину $2\pi k\mu e^{\alpha(t_2-t_1)}$. Если же начальная скорость корпуса лежит в диапазоне $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) \leq u_+^{(1)}(t_1)$, то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ он будет совершать остановки, меняя направление движения на противоположное или залипая в зонах замедления. Рассмотрим этот случай более подробно.

На Рис. 5 изображено пространство решений уравнения (1.9), построенное для значений параметров из области III. Как и в области II определяющую роль здесь играют интегральные кривые $u_-^{(1)}(t)$, $u_+^{(3)}(t)$, $u_-^{(3)}(t)$. На Рис. 5 они выделены жирными линиями. Заметим только, что в отличие от области II в области III интегральной кривой $u_-^{(1)}(t)$ соответствует движение корпуса с двумя остановками: в момент времени $t_*^{(1)}$ на промежутке $[t_3, t_4]$ и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ на правой границе нижней зоны замедления. В области III

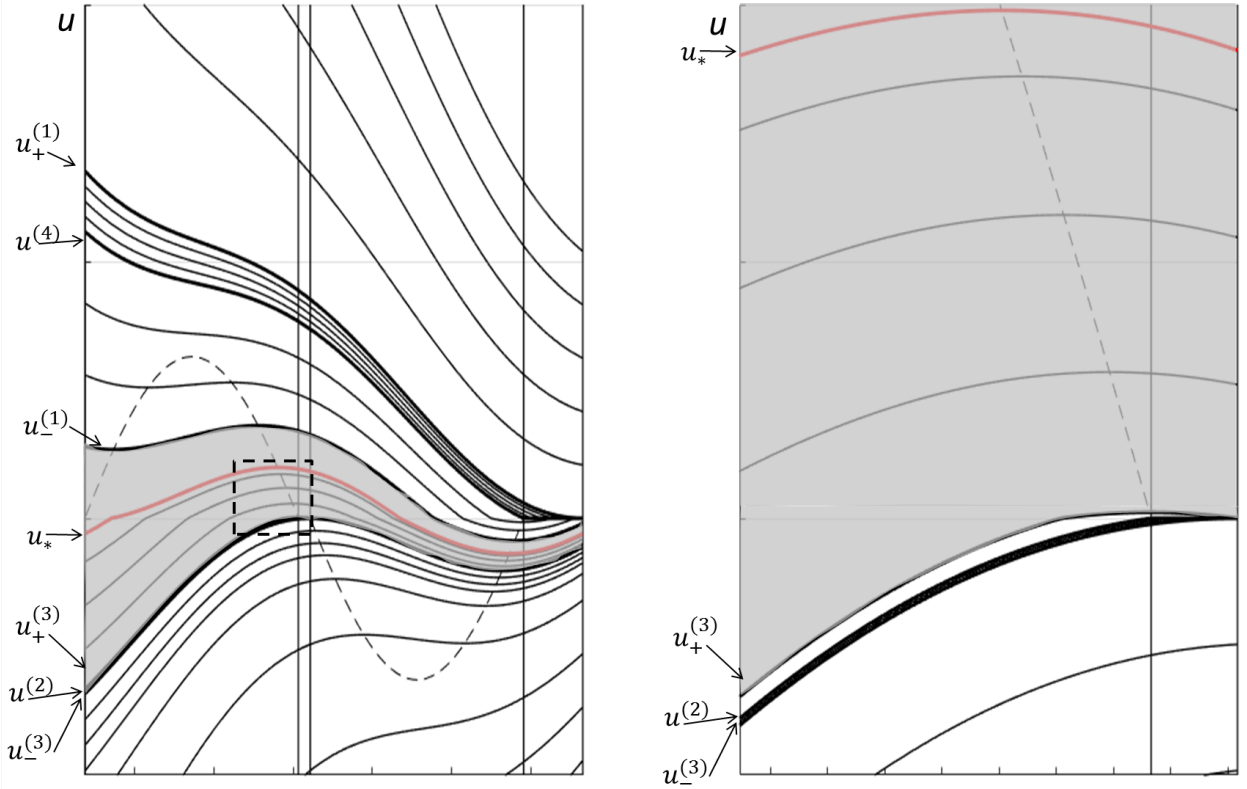


Рис. 5. Пространство решений уравнения (1.9) в подобласти III ($k = 0.15, \mu = 1.5, \alpha = 0.25$).

эта интегральная кривая задается начальным условием.

$$u_-^{(1)}(t_1) = e^{\alpha t_*^{(1)}} [e^{\alpha t_*^{(1)}} G_1(t_*^{(1)}) - e^{\alpha t_1} G_1(t_1)], \quad (3.38)$$

где $t_*^{(1)}$ - корень уравнения

$$e^{\alpha(t_1+2\pi)} [e^{\alpha(t_1+2\pi)} G_2(t_1 + 2\pi) - e^{\alpha t_*^{(1)}} G_2(t_*^{(1)})] = 0, \quad (3.39)$$

принадлежащий промежутку $[t_3, t_4]$. Начальные условия, определяющие интегральные кривые $u_+^{(3)}(t)$ и $u_-^{(3)}(t)$ вычисляются, как и в области II, по формулам (3.24) и (3.25) соответственно.

На основе анализа поведения интегральных кривых (1.9) можно сделать следующие выводы о движении корпуса на интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$.

1. Если в начальный момент выполнено неравенство $u(t_1) \geq u_+^{(1)}(t_1)$, то корпус на всем интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в положительном направлении, а его скорость на указанном интервале времени уменьшится на константу, значение которой превосходит величину $2\pi k\mu e^{\alpha(t_2-t_1)}$. При выполнении неравенства $u(t_1) \leq u_-^{(3)}(t_1)$ корпус на всем интервале времени $(t_1, t_1 + 2\pi]$ будет двигаться в отрицательном направлении, а его скорость на указанном интервале времени уменьшится по модулю на константу, значение которой превосходит величину $2\pi k\mu e^{\alpha(t_2-t_1)}$.
2. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(1)}(t_1) < u(t_1) < u_+^{(1)}(t_1)$, то корпус не остановится в верхней зоне замедления, но совершит остановку в нижней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_1 + 2\pi$. На Рис. 5 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(1)}(t)$, при $t \geq t_1 + 2\pi$ эти интегральные кривые совпадают ($u_-^{(1)}(t) \equiv u_+^{(1)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.
3. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_-^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_+^{(3)}(t_1)$, то корпус остановится в верхней зоне замедления и будет находиться в покое до момента времени $t = t_3$, затем он начнет движение в отрицательном направлении со скоростью $u_-^{(3)}(t)$. На Рис. 5 такому движению соответствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(3)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, при $t \geq t_3$ эти интегральные кривые совпадают ($u_+^{(3)}(t) \equiv u_-^{(3)}(t)$) и данная область вырождается в одну интегральную кривую.
4. Если в начальный момент выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t_1) \leq u(t_1) < u_-^{(1)}(t_1)$, то на интервале $(t_1, t_1 + 2\pi]$ корпус будет двигаться без остановки в нижней зоне замедления и в момент времени $t = t_1 + 2\pi$ он будет иметь ненулевую (отрицательную) скорость. На Рис. 5 такому движению соот-

ветствует область, ограниченная интегральными кривыми $u_-^{(1)}(t)$ и $u_+^{(3)}(t)$, она выделена серым цветом.

Сформулированные выше утверждения позволяют сделать важные выводы о движении корпуса на бесконечном интервале времени. В частности, если в начальный момент времени $u(t_1) \geq u_-^{(1)}(t_1)$, то при некотором натуральном n , либо будет выполнено равенство $u(t_1 + 2\pi n) = u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$, т.е. при $t \geq t_1 + 2\pi n$ движение корпуса будет описываться решением $u_-^{(1)}(t)$, либо будет выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t) < u(t_1 + 2\pi n) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$. Последний случай будет рассмотрен ниже.

Аналогично, если $u(t_1) \leq u_+^{(3)}(t_1)$, то при некотором целом неотрицательном m , либо будет выполнено равенство $u(t_3 + 2\pi m) = u_-^{(1)}(t_3 + 2\pi m)$, т.е. при $t \geq t_3 + 2\pi m$ движение корпуса будет описываться решением $u_+^{(3)}(t)$, либо будет выполнено неравенство $u_+^{(3)}(t) < u(t_1 + 2\pi n) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$.

Таким образом, чтобы получить выводы о предельном характере движения корпуса необходимо исследовать поведение решений уравнения (1.9), заданных условиями из интервала $u_+^{(3)}(t) < u(t_1 + 2\pi n) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ на неограниченном интервале времени. Исследуем сначала свойства монотонности решений $u_+^{(3)}(t)$. В частности, покажем, что выполняется неравенство

$$u_+^{(3)}(t_1) < u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi). \quad (3.40)$$

Решение $u_+^{(3)}(t)$ описывает движение при котором корпус в некоторый момент времени $t_*^{(3)} > t_1$ начинает движение в положительном направлении и движется до остановки в момент времени t_3 . Затем сразу начинает движение в противоположном направлении. Покажем, что следующая остановка корпуса произойдет в некоторый момент времени $t_{**}^{(3)} < t_*^{(3)} + 2\pi$. Поскольку на интервале времени $(t_*^{(3)}, t_3)$ функция $u_+^{(3)}(t)$ определяется в результате решения уравнения (1.50) с

нулевым начальным условием, то условие остановки при $t = t_3$ имеет вид

$$\int_{t_*^{(3)}}^{t_3} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau = 0. \quad (3.41)$$

Скорость движения корпуса в отрицательном направлении при $t > t_3$ определяется в результате решения уравнения (1.51) с нулевыми начальными условиями и имеет вид

$$u_+^{(3)}(t) = e^{-\alpha t} \int_{t_3}^t e^{\alpha\tau} f_2(\tau) d\tau. \quad (3.42)$$

Покажем, что интеграл в правой части (3.42), вычисленный при $t = t_*^{(3)} + 2\pi$ больше нуля. С этой целью воспользуемся тождеством (1.31), которое перепишем в виде

$$f_1(t + \tau) = -f_2(t_3 + \tau). \quad (3.43)$$

Используя соотношение (3.43), нетрудно показать, что имеет место следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} \int_{t_3}^{t_*^{(3)}+2\pi} e^{\alpha\tau} f_2(\tau) d\tau &= \int_0^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3} e^{\alpha(\tau+t_3)} f_2(t_3 + \tau) d\tau = \\ &= -e^{\alpha t_3} \int_0^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3} e^{\alpha\tau} f_1(t_1 + \tau) d\tau = -e^{\alpha(t_3-t_1)} \int_{t_1}^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Нетрудно показать, что имеют место неравенства

$$2\pi + t_*^{(3)} + t_1 - t_3 > \pi + t_*^{(3)} > t_3. \quad (3.45)$$

Поэтому интеграл в выражении (3.44) можно представить в виде

$$\int_{t_1}^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_*^{(3)}}^{t_3} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_3}^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau, \quad (3.46)$$

а учитывая (3.41) его можно переписать так

$$\int_{t_1}^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_3}^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau. \quad (3.47)$$

Поскольку имеют место неравенства

$$t_3 < t_1 + \pi < t_*^{(3)} + \pi < t_*^{(3)} + 2\pi - t_3 + t_1, \quad (3.48)$$

то второе слагаемое можно представить в виде

$$\int_{t_3}^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau = \int_{t_3}^{t_1+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_1+\pi}^{t_*^{(3)}+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_*^{(3)}+\pi}^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau. \quad (3.49)$$

Учитывая теперь, что $\int_{t_1+\pi}^{t_*^{(3)}+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau = \int_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha(\pi+\tau)} f_1(\pi+\tau) d\tau$ и подставляя (3.49) в (3.47) имеем

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau &= \int_{t_3}^{t_1+\pi} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \int_{t_*^{(3)}+\pi}^{t_*^{(3)}+2\pi-t_3+t_1} e^{\alpha\tau} f_1(\tau) d\tau + \\ &+ \int_{t_1}^{t_*^{(3)}} e^{\alpha\tau} [(e^{\alpha\pi} - 1)f_1(\tau + \pi) + (f_1(\tau + \pi) + f_1(\tau))] d\tau. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Заметим теперь, что функция $f_1(t)$ на интервалах $[t_3, t_1 + \pi]$ и $[t_*^{(3)} + \pi, t_*^{(3)} + 2\pi - t_3 + t_1]$ отрицательна, поэтому первые два слагаемых в (3.50) меньше нуля.

Принимая во внимание, что $f_1(\tau + \pi)$ принимает только отрицательные значения при $\tau \in (t_1, t_*^{(3)})$ и учитывая, что $f_1(\tau + \pi) + f_1(\tau) = -2k\mu$, приходим к выводу, что третье слагаемое в (3.50) также отрицательно. Следовательно, интеграл в левой части (3.50) строго меньше нуля. Последнее и означает, что интеграл в правой части (3.42), вычисленный при $t = t_*^{(3)} + 2\pi$ больше нуля.

Из этого следует, что решение $u_+^{(3)}(t)$ уравнения (1.9) обращается в ноль внутри интервала $(t_3, t_*^{(3)} + 2\pi)$, т.е. $t_{**}^{(3)} < t_*^{(3)} + 2\pi$.

Из условий $u_+^{(3)}(t_{**}^{(3)}) = 0$ и $u_+^{(3)}(t_*^{(3)}) = 0$ интегрируя уравнение (1.9) на интервалах $[t_1 + 2\pi, t_{**}^{(3)}]$ и $[t_1, t_*^{(3)}]$ и выполнив несложные алгебраические преобразования получаем

$$\begin{aligned} u_+^{(3)}(t_1) &= -e^{-\alpha(t_1+2\pi)} \int_{t_1+2\pi}^{t_*^{(3)}+2\pi} e^{\alpha\tau} f_2(\tau) d\tau, \\ u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi) &= -e^{-\alpha(t_1+2\pi)} \int_{t_1+2\pi}^{t_{**}^{(3)}} e^{\alpha\tau} f_2(\tau) d\tau. \end{aligned} \tag{3.51}$$

Сравнивая последние два выражения, приходим к справедливости неравенства $u_+^{(3)}(t_1) < u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi)$. Поэтому на основании Леммы 1 значения $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ образуют монотонно возрастающую последовательность. С другой стороны, в области III значения $u_+^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ образуют монотонно убывающую последовательность. Последнее доказывается аналогично тому, как это было сделано в параграфе 3.4.

Поскольку $u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n) > u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ то последовательность значений $u_+^{(3)}(t_1 + 2\pi n)$ ограничена сверху, а последовательность $u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$ ограничена снизу. Следовательно каждая из указанных последовательностей должна иметь предел. Т.е. решение $u_+^{(3)}(t)$ асимптотически приближается к некоторому периодическому режиму, тот же вывод можно сделать и о решении $u_-^{(1)}(t)$. В силу единственности периодического режима движения, указанные последовательности имеют один и тот же предел, соответствующий периодическому движению корпуса без залипаний в верхней и нижней зонах замедления.

Поскольку решение $u_+^{(3)}(t)$ и $u_-^{(1)}(t)$ в пространстве решений ограничивают область интегральных кривых, заданных начальным условием из интервала $u_+^{(3)}(t_1) < u(t_1 + 2\pi) < u_-^{(1)}(t_1 + 2\pi n)$, то все интегральные кривые из этой

области асимптотически приближаются к интегральной кривой, отвечающей периодическому режиму движения.

На основании результатов данного параграфа, приходим к следующему выводу. *В подобласти III существует периодический режим движения без остановок в зонах замедления трением, и при произвольной начальной скорости движение корпуса будет асимптотически приближаться к этому периодическому режиму*

Заключение

В заключении сформулируем основные результаты диссертационной работы.

1. Выполнено исследование периодических движений корпуса. Установлено, что при любых допустимых значениях параметров задачи всегда существует единственный режим движения с периодически меняющейся скоростью. Периодом является время полного оборота внутренней массы по окружности. Показано, что в зависимости от значений параметров возможны три следующих качественно различных типа такого периодического движения.

- I. Корпус дважды за период останавливается, покоится на плоскости в течение конечного интервала времени (залипает), а затем начинает движение в противоположном направлении. Залипание корпуса имеет место при прохождении внутренней массой зон замедления. Перемещение корпуса за один период равно нулю, т.е. периодически меняется как скорость, так и координата центра масс корпуса.
- II. Корпус дважды за период меняет направление своего движения, но залипание происходит один раз, когда внутренняя масса находится в нижней зоне замедления. При таком движении корпус совершает не нулевое перемещение за один период.
- III. Корпус двигается без интервалов залипания, дважды за период останавливаясь и изменяя направление своего движения. Остановки корпуса происходят в моменты времени, когда внутренняя масса находится вне зон замедления. Перемещение корпуса за один период отлично от нуля.

Показано, что пространство параметров задачи разделяется на три области (I, II, III), в каждой из которых реализуется один из указанных выше пери-

одических режимов движения. Уравнения для границ этих областей получены в явной аналитической форме.

2. Проведено полное качественное исследование динамики корпуса при отсутствии сил вязкого трения. Сформулированы и доказаны утверждения о свойствах монотонности решений уравнения движения. На этой основе выполнен полный качественный анализ поведения интегральных кривых данного уравнения. В пространстве решений указаны области с различным характером поведения интегральных кривых. Начальные условия для интегральных кривых, разделяющих пространство решений на указанные области, получены в явной аналитической форме. Проведенный анализ позволил получить строгие выводы о движении корпуса на произвольном интервале времени. В частности, показано, что периодическое движение является предельным режимом движения, т.е. при любой начальной скорости корпус перейдет в режим движения с периодически меняющейся скоростью. Установлено, что динамика системы существенно зависит от того какой из указанных выше типов периодического движения реализуется. В области I, где реализуется периодическое движение с залипанием как в верхней, так и в нижней зонах замедления, выход на периодический режим имеет место на конечном интервале времени. За конечный интервал времени корпус выйдет на предельный периодический режим и в области II, где имеет место периодическое движение с залипанием лишь в нижней зоне замедления. При приближении параметров задачи к границе области III временной интервал выхода на периодический режим неограниченно возрастает. В области III движение корпуса при любых начальных скоростях имеет предельный характер, приближаясь к движению с периодически меняющейся скоростью без интервалов залипания.

3. Проведено полное качественно исследование динамики корпуса для случая, когда между корпусом и поверхностью действуют как силы сухого, так и силы вязкого трения. Для каждой их областей I, II, III был проведен детальный

анализ поведения интегральных кривых уравнения движения и на его основе строго показано, что многие утверждения о характере движения корпуса, полученные при наличии в системе только сил сухого трения, справедливы и в общем случае, когда на корпус действуют и силы сухого, и силы вязкого трения. В частности, при любой начальной скорости корпус либо за конечное время выйдет на периодический режим движения с интервалами залипания, либо его движение будет асимптотически приближаться к периодическому режиму без интервалов залипаний. Показано, что наличие вязкого трения сокращает время перехода в диапазон скоростей, при которых корпус начинает совершать реверсивное движение, в некоторые моменты времени останавливаясь и изменяя направление скорости на противоположное.

Литература

1. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Кумакшев С.А., Нестеров С.В. Управление движением неоднородного цилиндра с подвижными внутренними массами по горизонтальной плоскости // *Прикладная математика и механика*. 2006. Т. 70, № 6. С. 942–958.
2. Бардин Б.С. О безударных прыжках тела, несущего подвижные массы // В сборнике трудов XVIII Международного Симпозиума "Динамика виброударных сильно нелинейных систем"(DYVIS-2015). 2015. С. 42–49.
3. Бардин Б.С., Панёв А.С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности. // *Труды МАИ*. 2015. Т. 84.
4. Бизяев И.А. Сани чаплыгина с движущейся точечной массой // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2017. Т. 27, № 4. С. 583–589.
5. Бильченко Г.Г. Влияние подвижного груза на движение носителя // В сборнике: Аналитическая механика, устойчивость и управление. Труды XI Международной Четаевской конференции. 2017. С. 37–44.
6. Болотник Н. Н., Губко П. А., Фигурин Т. Ю. О возможности безреверсного периодического прямолинейного движения системы двух тел на шероховатой плоскости // *Прикладная математика и механика*. 2018. Т. 82, № 2. С. 138–148.
7. Болотник Н. Н., Нунупаров А. М., Чащухин В. Г. Капсульный вибрационный робот с электромагнитным приводом и возвратной

- пружиной: динамика и управление движением // *Изв. РАН. ТуСУ*. 2016. Т. 6. С. 146–160.
8. *Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю.* Оптимальное управление локомотивными системами с подвижными внутренними телами // *Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского*. 2011. № 4-2. С. 67–68.
 9. *Болотник Н. Н., Фигурина Т. Ю., Черноусько Ф. Л.* Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // *Прикладная математика и механика*. 2012. Т. 76, № 1. С. 3–22.
 10. *Болотник Н.Н., Градецкий В.Г., Жуков А.А., Козлов Д.В., Смирнов И.П., Чащухин В.Г.* Мобильный микроробот космического назначения: концепция и перспективы использования // *Космические исследования*. 2018.
 11. *Болотник Н.Н., Нунупаров А. М., Чащухин В. Г.* Капсульный вибрационный робот с электромагнитным приводом и возвратной пружиной: динамика и управление движением // *Изв. РАН. ТуСУ*. 2016. 6. С. 146–160.
 12. *Болотник Н.Н., Фигурина Т.Ю., Черноусько Ф.Л.* Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // *Прикладная математика и механика*. 2012. Т. 71, 1. С. 3–22.
 13. *Болотник Н.Н., Черноусько Ф.Л.* Мобильные роботы управляемые движением внутренних тел // *Тр. ИММ УрО РАН*. 2010. Т. 16, № 5. С. 213–222.
 14. *Борисов А.В., Килин А.А., Мамаев И.С.* Как управлять шаром чаплыгина при помощи ротора // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 2. С. 289–307.

15. Борисов А.В., Мамаев И.С. Качение неоднородного шара по сфере без скольжения и верчения // *Нелинейная динамика*. 2006. Т. 2, № 4. С. 445–452.
16. Ветчанин Е. В., Караваев Ю. Л., Калинин А. А., Клековкин А. В., Пивоварова Е. Н. Модель безвинтового подводного робота // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2015. Т. 25, № 4. С. 544–553.
17. Ветчанин Е. В., Мамаев И. С., Тененев В. А. Движение тела с переменной геометрией масс в вязкой жидкости // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 4. С. 815–836.
18. Ветчанин Е.В., А.А. Килин. Свободное и управляемое движение в жидкости тела с подвижной внутренней массой при наличии циркуляции вокруг тела // *Доклады РАН*. 2016. Т. 466, № 3. С. 293–297.
19. Ветчанин Е.В., Килин А.А., Мамаев И.С., Тененев В.А. Управление движением винтовых и эллипсоидальных тел с помощью внутренних роторов // Доклады XII Всероссийской конференции молодых ученых / Ed. by Техно-Декор. Саратов: 2017.
20. Волкова Л. Ю., Яцун С. Ф. Управление движением трехмассового робота, перемещающегося в жидкой среде // *Нелинейная динамика*. 2011. Т. 7, № 4. С. 845–857.
21. Волкова Л.Ю., Яцун С.Ф. Моделирование плоского управляемого движения трехмассовой вибрационной системы // *Изв. РАН. ТуСУ*. 2012. 6. С. 122–141.
22. Волкова Л.Ю., Яцун С.Ф. Изучение закономерностей движения прыгающе-

- го робота при различных положениях точки закрепления ноги // *Нелинейная динамика*. 2013. Т. 9, 2. С. 327–342.
23. *Голицына М.В.* Оптимальный выбор ускорения маятника в задачах управления вибрационным роботом // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2018. Т. 19, № 1. С. 31–39.
24. *Голицына М.В.* Периодический режим движения вибрационного робота при ограничении по управлению // *Прикладная математика и механика*. 2018. Т. 82, 1. С. 3–15.
25. *Голицына М.В., Самсонов В.А.* Оценка области допустимых параметров системы управления вибрационным роботом // *Изв. РАН. ТуСУ*. 2018. 2. С. 85–101.
26. *Градецкий В.Г., Князьков В.В., Семенов Е.А., Суханов А.Н.* Движение мобильного робота по горизонтальным, наклонным вертикальным поверхностям при наличии возмущений и подвижных препятствий // *Мехатроника, автоматизация, управление*. 2015. Т. 16, № 3. С. 166–173.
27. *Градецкий В.Г., Фомин Л.Ф., Чащухин В.Г., Князьков М.М.* Механика миниатюрных роботов 2010.
28. *Гранкин А.Н., Яцун С.Ф.* Исследование виброударных режимов движения мобильного микроробота с электромагнитным приводом // *Изв. РАН. ТуСУ*. 2009. № 1. С. 163–171.
29. *Егоров А. Г., Захарова О. С.* Оптимальное по энергетическим затратам движение виброробота в среде с сопротивлением // *Прикладная математика и механика*. 2010. Т. 74, № 4. С. 620–632.
30. *Зинкевич Я.С., Козаченко Т.А., Рачинская А.Л., Лещенко Д.Д.,*

- Оптимальное торможение вращений симметричного гиростата с подвижной массой в среде с сопротивлением // *Механика твердого тела*. 2010. Т. 40. <http://dspace.nbuv.gov.ua/bitstream/handle/123456789/28052/14-Zinkevich.pdf?sequence=1>.
31. *Иванов А.П.* Основы теории систем с трением. Ижевский институт компьютерных исследований, 2011 - 304с.
32. *Иванов А.П., Сахаров А.В.* Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // *Нелинейная динамика*. 2012. Т. 8, № 4 (Мобильные роботы). С. 763–772.
33. *Караваев Ю.Л., Килин А.А.* Динамика сфероробота с внутренней омниколесной платформой // *Нелинейная динамика*. 2015. Т. 11, № 1. С. 187–204.
34. *Козлов В. В., Онищенко Д. А.* О движении в идеальной жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную сосредоточенную массу // *Прикладная математика и механика*. 2003. Т. 67, № 4. С. 620.
35. *Лупехина И.В., Сапронов К.А., Яцун С.Ф.* Исследование управляемого движения мобильной вибрационной системы, двигающейся с отрывом от поверхности // *Изв. РАН. ТуСУ*. 2011. Т. 2. С. 158–169.
36. *Москвин А.Ю.* Шар чаплыгина с гиростатом: особые решения // *Нелинейная динамика*. 2009. Т. 5, № 3. С. 345–356.
37. *Панёв А.С.* Исследование периодических режимов движения тела, несущего подвижную точечную массу // *V всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники*. Москва. 12-15 мая 2015г. С. 153-158. Тезисы 2015.

38. *Панёв А.С.* О движении по горизонтальной плоскости тела с внутренней подвижной массой // Международная конференция по математической теории и механике. Суздаль. 3-7 июля 2015г. С. 33-35. Тезисы 2015.
39. *Панёв А.С.* Исследование возможных режимов движения тела, несущего подвижную массу, при произвольной начальной скорости // Международная конференция по математической теории и механике. Суздаль. 7-11 июля 2017г. С. 28-29. Тезисы 2017.
40. *Панёв А.С.* О движении твердого тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности в вязкой среде. // *Труды МАИ.* 2018. Т. 98.
41. *Рамоданов С. М., Тененев В. А.* Движение тела с переменной геометрией масс в безграничной вязкой жидкости // *Нелинейная динамика.* 2011. Т. 7, № 3. С. 635–647.
42. *Рукавицын А. Н., Лупехина И. В.* Разработка алгоритма компьютерного моделирования движения мобильного минибота, перемещающегося с отрывом от опорной поверхности // *Известия Самарского научного центра российской академии наук.* 2011. Т. 13, № 4-4. С. 1013–1017.
43. *Сапронов К.А., Черепанов А.А., Яцун С.Ф.* Исследование движения мобильной двухмассовой вибрационной системы // *Изв. РАН. ТуСУ.* 2010. № 1. С. 147–155.
44. *Сахаров А. В.* Поворот тела без внешних движителей при помощи ротора // *Труды МФТИ.* 2014. Т. 6, № 2. С. 80–91.
45. *Сахаров А. В.* Поворот тела с двумя подвижными внутренними массами на шероховатой плоскости // *Прикладная математика и механика.* 2015. Т. 79, № 2. С. 196–209.

46. *Соболев Н.А., Сорокин К.С.* . Экспериментальное исследование модели виброробота с вращающимися массами // *Изв. РАН. ТуСУ.* 2007. 5. С. 161–170.
47. *Сорокин К.С.* . Перемещение механизма по наклонной шероховатой плоскости за счет движения внутренних осциллирующих масс // *Изв. РАН. ТуСУ.* 2009. 6. С. 150–158.
48. *Фигурина Т.Ю.* Оптимальное управление движением системы двух тел по прямой // *Изв. РАН. ТуСУ.* 2007. 2. С. 65–71.
49. *Фигурина Т.Ю.* Оптимальное управление системой материальных точек на прямой с сухим трением // *Изв. РАН. ТуСУ.* 2015. № 5. С. 3–9.
50. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // *Мат. сборник.* 1960. Т. 51, 1. С. 99–128.
51. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985. 312 с.
52. *Черноузько Ф. Л., Болотник Н. Н., Градецкий В. Г.* Динамика и управление локомоциями мобильных роботов // XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики / Ed. by К. П. федеральный университет (Казань). Казань: 2015.
53. *Черноузько Ф.Л.* О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // *Докл. РАН.* 2005. Т. 405, № 1. С. 56–60.
54. *Черноузько Ф.Л.* Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // *Прикладная математика и механика.* 2006. Т. 70, 6. С. 915–941.

55. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // *Доклады РАН*. 2016. Т. 470, 4. С. 406–410.
56. Черноусько Ф.Л. Плоское движение тела под влиянием подвижных внутренних масс // XI Международная Четаевская конференция / Ed. by К. государственный технический университет им. А.Н. Туполева (Казань). Казань: 2017.
57. Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление движением двухмассовой системы // *Доклады РАН*. 2018. Т. 480, 5. С. 528–532.
58. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Мобильные роботы: проблемы управления и оптимизации движений // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. 2014. С. 67–78.
59. Яцун С. Ф., Локтионова О. Г., Черепанов А. А., Рублев С. Б. Виброробот для вертикального движения по металлической шероховатой поверхности // *Известия Самарского научного центра российской академии наук*. 2010. Т. 12, № 4-3. С. 651–655.
60. Яцун С. Ф., Шевякин В. Н., Волкова Л. Ю., Серебровский В. В. Динамика управляемого движения трехмассового робота по плоской поверхности // *Известия Самарского научного центра российской академии наук*. 2011. Т. 13, № 4-4. С. 1134–1138.
61. Яцун С.Ф., Безмен П.А., Сапронов К.А., Рублев С.Б. Динамика мобильного вибрационного робота с внутренней подвижной массой // *Известия Курского государственного технического университета*. 2010. Т. 31, 2. С. 21–31.
62. Яцун С.Ф., Волкова Л.Ю. Моделирование динамических режимов вибра-

- ционного робота, перемещающегося по поверхности с вязким сопротивлением // *Спецтехника и связь*. 2012. 3. С. 25–29.
63. Яцун С.Ф., Лупехина И.В., Сапронов К.А. Моделирование движения прыгающего вибрационного микроробота // *Известия Курского государственного технического университета*. 2009. Т. 27, 2. С. 25–31.
64. Яцун С.Ф., Мищенко В.Я., Сафаров Д.И. Исследование движения двухмассового вибрационного робота // *Известия вузов. Машиностроение*. 2006. 5. С. 32–42.
65. Яцун С.Ф., Разинькова А.В., Гранкин А.Н. Исследование движения виброробота с электромагнитным приводом // *Известия вузов. Машиностроение*. 2007. 5. С. 53–64.
66. Bardin B. S., Panev A. S. On dynamics of a rigid body moving on a horizontal plane by means of motion of an internal particle // *VP Vibroengineering PROCEDIA*. 2016. V. 8. P. 135–141.
67. Bardin B. S., Panev A. S. On the motion of a rigid body with an internal moving point mass on a horizontal plane // *AIP Conference Proceedings*. V. 1959. 2018. <https://doi.org/10.1063/1.5034582>.
68. Bardin B.S., Panev A.S. On motion of a body with moving internal mass on a rough horizontal surface // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* 2018. V. 14, no. 4.
69. Behn C., Schale F., Zeidis I., Zimmermann K., Bolotnik N. Dynamics and motion control of a chain of particles on a rough surface // *Mechanical systems and signal processing*. 2017. V. 89. P. 3–13.
70. Bizyaev I.A., Borisov A.V., Kuznetsov S.P. Chaplygin sleigh with periodically oscillating internal mass // *EPL*. 2017. V. 119, no. 6.

71. *Bolotnik N., Pivovarov M., Zeidis I., Zimmermann K.* The motion of a two-body limbless locomotor along a straight line in a resistive medium // *ZAMM*. 2016. V. 96, no. 4. P. 429–452.
72. *Bolotnik N.N., Zeidis I.M., Zimmermann K., Yatsun S.F.* Dynamics of controlled motion of vibration-driven systems // *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2006. V. 45, no. 5. P. 831–870.
73. *Chernousko F. L., Bolotnik N. N., Figurina T. Y.* Optimal control of vibrationally excited locomotion systems // *Regular Chaotic Dynamic*. 2013. V. 18, no. 1-2. P. 85–99.
74. *Chernousko F.L.* Controlled motions of multibody systems along plane // *Solid Mechanics and its Applications*. 2005. V. 122. P. 397–406.
75. *Fang H. B. and Xu J.* Dynamic analysis and optimization of a three-phase control mode of a mobile system with an internal mass // *Journal of Vibration and Control*. 2011. V. 17, no. 1. P. 19–26.
76. *Fang H. B. and Xu J.* Dynamics of a mobile system with an internal acceleration-controlled mass in a resistive medium // *Journal of Sound and Vibration*. 2011. V. 330, no. 16. P. 4002–4018.
77. *Fang H. B. and Xu J.* Controlled motion of a two-module vibration-driven system induced by internal acceleration-controlled masses // *Archive of Applied Mechanics*. 2012. V. 82, no. 4. P. 461–477.
78. *Fang H. B. and Xu J.* Dynamics of a three-module vibration-driven system with non-symmetric coulomb's dry friction // *Multibody System Dynamics*. 2012. V. 27, no. 4. P. 455–485.
79. *Fang H. B. and Xu J.* Stick-slip effect in a vibration-driven system with dry

- friction: Sliding bifurcations and optimization // *Journal of Applied Mechanics*. 2014. V. 81.
80. *Farahani A.A., Suratgar A.A., Talebi H.A.* Optimal controller design of legless piezo capsbot movement // *Intern. J. Advanced Robotic Systems*. 2013. V. 10. P. 1–7.
81. *Golitsyna M.V., Samsonov V.A.* Estimating the domain of admissible parameters of a control system of a vibratory robot // *Journal of computer and systems sciences international*. 2018. V. 57, no. 2. P. 255–272.
82. *Huda M.N., Yu H., Wane S.O.* . Self-contained capsbot propulsion mechanism // *Intern. J. Automation and Computing*. 2011. V. 8, no. 3. P. 348–356.
83. *Huda, M.N., Yu, HN. & Wane, S.O.* Self-contained capsbot propulsion mechanism // *International Journal of Automation and Computing*. 2011. V. 8, no. 348.
84. *Kilin A.A., Ramodanov S.M., Tenenev V.A.* The motion of a rigid body controlled by means of two moving internal masses in an ideal fluid // *Nonlin. Dyn. Mob. Robot*. 2014. V. 2, no. 1. P. 115–130.
85. *Li H.Y., Furuta K., Chernousko F.L.* Motion generation of the capsbot using internal force and static friction // Proc. 45th IEEE Conf. on Decision and Control. San Diego, USA: 2006. P. 6575–6580.
86. *Liu Y., Yu H., Yang T.C.* Analysis and control of a capsbot // Proc. 17th IFAC World Congress. Seoul, Korea: 2008. P. 756–761.
87. *Sakharov A. V.* Rotation of a body with two movable internal masses on a rough plane // *J. Appl. Math. Mech*. 2015. V. 79, no. 2. P. 132–141.

88. *Sakharov A. V.* Rotation of the body with movable internal masses around the center of mass on a rough plane // *Regular Chaotic Dynamic*. 2015. V. 20, no. 4. P. 428–440.
89. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Dynamics, design and simulation of a novel microrobotic platform employing vibration microactuators // *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control. Transactions of the ASME*. 2006. V. 128, no. 1. P. 122–133.
90. *Vartholomeos P., Papadopoulos E.* Analysis and experiments on the force capabilities of centripetal-force-actuated microrobotic platforms // *IEEE Transactions on Robotics*. 2008. V. 24. P. 588–599.
91. *Vartholomeos P., Papadopoulos E., Vlachos K.* Analysis and motion control of a centrifugal-force microrobotic platform // *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*. 2013. V. 10. P. 545–553.
92. *Vetchanin E. V., Mamaev I. S., Tenenev V. A.* The self-propulsion of a body with moving internal masses in a viscous fluid // *Regular Chaotic Dynamic*. 2013. V. 18, no. 1-2. P. 100–117.
93. *Vlachos K., Papadimitriou D., Papadopoulos E.* Vibration-driven microrobot positioning methodologies for nonholonomic constraint compensation // *Engineering*. 2015. V. 1. P. 66–72.
94. *Wagner G., Lauga E.* Crawling csallop: Friction-based locomotion with one-degree of freedom // *Theor. Biol.* 2013. V. 324. P. 42–51.
95. *Wang, Q. M., Zhang, W. M., Ju, J.C.* Kinematics and dynamics analysis of a micro-robotic platform driven by inertial-force propulsion // *Engineering Decisions for Industrial Development*. V. 733 of *Applied Mechanics and Materials*. Trans Tech Publications, 2015. P. 531–534.

96. Xiong Z., Jian X. Locomotion analysis of a vibration-driven system with three acceleration controlled internal masses // *Advances in Mechanical Engineering*. 2015. V. 7. P. 1–12.
97. Zimmermann K., Zeidis I., Behn C. Mechanics of terrestrial locomotion with a focus on nonpedal motion systems // *Heidelberg: Springer*. 2010.
98. Zimmermann K., Zeidis I., Bolotnik N., Pivovarov M. Dynamics of a two-module vibration-driven system moving along a rough horizontal plane // *Multibody System Dynamics*. 2009. V. 22, no. 2. P. 199–219.