

МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

На правах рукописи



УДК 531.01;531.36;629.195.2

Сухов Егор Аркадьевич

**Исследование орбитальной устойчивости и
бифуркации периодических движений
симметричного спутника на круговой орбите**

01.02.01 – Теоретическая механика

Научный руководитель

д. ф.-м. н., доц.

Бардин Борис Сабирович

Москва – 2019

Оглавление

Введение	4
Глава 1. Метод численного продолжения семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы	10
1.1. Метод Депри численного продолжения по параметру периодических движений консервативной механической системы	11
1.2. Об алгоритме численного продолжения по параметрам семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы	13
1.3. О методике выбора шага приращений параметров	23
Глава 2. Периодические движения, рождающиеся из регулярных прецессий симметричного спутника	26
2.1. Постановка задачи	26
2.2. Аналитическое построение семейств периодических движений, рождающихся регулярных прецессий спутника в нерезонансном случае	32
2.3. Аналитическое построение семейств долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии в случае резонансов третьего и четвёртого порядков	46
Глава 3. Численное построение семейств периодических движений, рождающихся из регулярных прецессии спутника	56
3.1. О методике численного построения областей существования семейств периодических движений	57
3.2. Семейства короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника	63

3.3. Семейства долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника	68
Глава 4. Об орбитальной устойчивости и бифуркациях периодических движений симметричного спутника	73
4.1. Методика исследования орбитальной устойчивости периодических движений в линейном приближении	74
4.2. Методика построения сечений Пуанкаре	74
4.3. Об орбитальной устойчивости и бифуркации короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника	77
4.4. Об орбитальной устойчивости и бифуркациях долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессий спутника	85
Заключение	97
Приложение А.	99
А.1.	99
Приложение Б.	101
Б.1.	101
Б.2.	102
Список литературы	105

Введение

Актуальность задачи. С началом XXI века существенно возрос интерес к исследованию и практическому освоению космического пространства. Новейшие инструментальные средства, такие, как малогабаритные спутники, космические телескопы и межпланетные станции, расширили возможности исследования Земли, планет и астероидов Солнечной системы, экзопланет и объектов в далёком космосе. Значительно возросла роль ракетно-космической техники в обеспечении обороноспособности государства и решении задач народного хозяйства.

Динамика космических аппаратов является быстро развивающейся предметной областью, в рамках которой решается широкий спектр задач. Данные задачи связаны как с проектированием ракетно-космической техники и развитием методов математического моделирования динамики спутников, так и с развитием теории и методов качественного анализа движения космических аппаратов. Моделирование динамики космических аппаратов, как правило, реализуется на основе численных методов с использованием современной вычислительной техники. В связи с этим актуальным является развитие новых численных алгоритмов, позволяющих оптимизировать вычисления и повысить точность расчётов.

При анализе поведения систем, описывающих динамику космического аппарата или естественного небесного тела, важную роль играет исследование особых частных случаев движения, таких, как стационарные и периодические движения. В динамике спутников выделяют два типа стационарных движений: положения относительного равновесия и регулярные прецессии. Последние возможны в случае динамической симметрии. В случае регулярной прецессии спутник вращается с постоянной угловой скоростью вокруг своей оси динамической симметрии, положение которой остаётся неизменным в орбитальной системе координат. Задача об устойчивости положений относительного равновесия и

регулярных прецессий была подробно исследована в работах [1–7].

Другим важным типом движений спутника являются его периодические движения. Их исследованию посвящено большое количество работ [8–24]. К частным случаям указанных движений относятся плоские маятниковые колебания и вращения спутника относительно его центра масс, которые могут быть получены в явной аналитической форме. Движения такого типа неустойчивы по Ляпунову, однако, большой интерес представляет вопрос об их орбитальной устойчивости. Построению указанных движений и анализу их орбитальной устойчивости посвящено много работ [8–11, 13, 15–24]. В работах [8–11, 13, 15, 18, 22, 23] исследованы плоские движения спутника на эллиптической орбите. Построению и исследованию плоских периодических движений спутника на круговой орбите посвящены работы [17, 19, 20]. Вопрос об орбитальной устойчивости указанных движений подробно исследован в [19, 25–27].

Также представляют интерес периодические движения, рождающиеся из регулярных прецессий спутника и описывающие колебания его оси динамической симметрии в окрестности регулярной прецессии. Вблизи регулярной прецессии указанные периодические движения могут быть получены аналитически в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра – амплитуды колебаний. Аналитическому построению периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника, и исследованию их орбитальной устойчивости посвящены работы [28–32]. В частности, в работах [28, 29, 33] были получены аналитические выражения для периодических движений, рождающиеся из гиперболоидальной прецессии динамически симметричного спутника. В [33, 34] были численно построены области существования и орбитальной устойчивости в линейном приближении короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии.

Периодические движения также исследовались в связи с задачами ориентации и управления движением космического аппарата [35–46]. В частности,

в [43, 45] исследованы периодические движения спутника-гиростата в гравитационном и магнитном полях [35–42, 44, 46].

Как с общетеоретической точки зрения, так и для приложений важным является вопрос об устойчивости периодического движения. Периодические движения консервативных механических систем, как правило, неустойчивы по Ляпунову. Это связано с тем, что период указанных движений зависит от начальных условий. Большой интерес, однако, представляет вопрос об их орбитальной устойчивости. Исследованию орбитальной устойчивости периодических движений посвящены работы [31, 32, 34, 47–53].

В некоторых случаях эффективным для построения периодических движений является использование аналитических методов. В частности, при наличии в системе малого параметра аналитические методы позволяют строить семейства периодических движений, рождающихся из известных стационарных движений. Аналитическому построению указанных семейств на основе метода малого параметра посвящено большое количество работ [14, 16, 54–59]. Классическим методом аналитического построения периодических движений является метод Ляпунова [54, 60]. Однако, при наличии определённых резонансов данный метод неприменим. Это связано с явлением бифуркации периодических движений. Анализ бифуркаций и построению периодических движений в резонансных случаях посвящены работы [30, 32, 51, 56, 57, 61–65].

В общем случае не представляется возможным построить периодические движения аналитическими методами. Задача их численного построения рассмотрена в работах [34, 66–82]. Численное построение периодических движений сводится к решению краевой задачи, которое требует значительно больших вычислительных затрат, чем решение задачи Коши. В связи с этим, существенный интерес представляют так называемые методы численного продолжения по параметрам, позволяющие свести решение краевой задачи к задаче Коши. Впервые методика численного продолжения по параметру была описана А. Депри и

Ж. Анраром в [67] для лагранжевой системы с двумя степенями свободы. Суть данной методики состоит во введении в окрестности известного периодического движения локальных координат – нормальных и тангенциальных смещений, что позволяет свести решение краевой задачи к задаче Коши. Указанная методика получила развитие в работах [34, 72, 75]. В [34] А. Г. Сокольским и С. А. Хованским была изложена модификация данного метода для лагранжевой системы с двумя степенями свободы и произвольным числом параметров, а в [72] А. Г. Сокольским и С. Р. Каримовым был описан метод численного продолжения по параметрам периодических движений автономной гамильтоновой системы.

Целью данной диссертационной работы является численное и аналитическое построение семейств периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий динамически симметричного спутника и исследование их орбитальной устойчивости, а также анализ бифуркации указанных семейств в трёхмерном пространстве параметров задачи.

В первой главе настоящей диссертационной работы приведена постановка задачи о численном продолжении по параметру семейств периодических движений и предложена модификация метода А. Г. Сокольского и С. Р. Каримова [72]. Данная модификация позволила существенно повысить скорость вычислений, а также точность численных расчётов. Этому удалось добиться благодаря тому, что был найден явный вид матрицы перехода к локальным координатам, а также разработана методика выбора приращений параметров. В данной главе даётся краткое описание программной реализации указанного метода в системе символьных вычислений Maple.

Во второй главе дано описание математической модели движения динамически симметричного спутника относительно его центра масс на круговой орбите и приведена постановка задачи о построении периодических движений, рождающихся из его регулярных прецессий. На основе метода Ляпунова в ана-

литической форме были построены семейства периодических движений, рождающиеся из цилиндрической, конической и гиперболоидальной прецессий динамически симметричного спутника. Используя методы анализа и построения периодических движений в резонансных случаях в аналитической форме были построены семейства долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии в случае резонансов третьего и четвёртого порядков. Полученные аналитические выражения позволяют описать данные семейства периодических движений не при всех допустимых значениях параметра семейства (постоянной интеграла энергии), а лишь вблизи его значения, отвечающего соответствующей регулярной прецессии, то есть в её малой окрестности.

В третьей главе данной диссертационной работы при помощи численного метода, изложенного в Главе 1, для всех допустимых значений параметров в трёхмерном пространстве параметров задачи были численно построены области существования семейств периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника. Решения, построенные аналитически в Главе 2, использовались в качестве опорных. В этой же главе представлены графические иллюстрации указанных движений в виде траекторий точки пересечения оси динамической симметрии спутника и единичной сферы. Также в данной главе даётся описание численного алгоритма обхода областей существования и построения их границ.

В четвёртой главе рассмотрена задача об орбитальной устойчивости и бифуркации периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий динамически симметричного спутника. Приведена методика численного исследования орбитальной устойчивости периодических движений в линейном приближении и построения сечений Пуанкаре. В трёхмерном пространстве параметров задачи построены области орбитальной неустойчивости семейств короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической, конической и гиперболоидальной прецессии. Изучен вопрос об орбитальной устойчивости в

линейном приближении семейств долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника. Выполнено исследование бифуркации указанных семейств, результаты которого представлены в виде бифуркационных диаграмм. Для верификации и иллюстрации результатов данной главы использован метод сечений Пуанкаре.

Основные результаты данной диссертационной работы докладывались на научных семинарах, российских и международных конференциях, а также были опубликованы в научных журналах, рекомендованных ВАК [83–86].

Глава 1

Метод численного продолжения семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы

Динамические системы, встречающиеся в приложениях, как правило, неинтегрируемы и аналитическое представление их периодических движений возможно лишь в особых частных случаях. Численное же построение периодических движений сводится к решению краевой задачи, которое требует значительно больше вычислительных затрат, чем решение задачи Коши. В связи с этим существенный интерес представляют так называемые методы численного продолжения по параметрам, позволяющие свести решение краевой задачи к задаче Коши и строить периодические решения на базе известного (опорного) периодического движения. В работе [72] был предложен метод численного продолжения по параметру семейств периодических движений автономных гамильтоновых систем. Практическая реализация данного метода позволяет строить периодические движения в задачах классической и небесной механики. Вместе с тем, при наличии в системе нескольких параметров применение указанного метода требует значительных вычислительных затрат. Для решения данной проблемы в настоящей главе диссертационной работы предлагается модификация указанного метода, на основе которой был разработан конструктивный алгоритм, позволяющий эффективно решать задачи численного построения семейств периодических движений автономных гамильтоновых систем. Данный алгоритм был представлен в работах [83, 87].

1.1. Метод Дебри численного продолжения по параметру периодических движений консервативной механической системы

Впервые идея метода численного продолжения периодических решений по параметру была предложена А. Дебри и Ж. Анраром в работе [67] для случая консервативной механической системы с двумя степенями свободы. Следуя данной работе, сформулируем задачу численного продолжения по параметру и кратко изложим суть метода. Рассмотрим консервативную механическую систему

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 2A\dot{y} + W_x, \\ \ddot{y} &= -2A\dot{x} + W_y\end{aligned}\tag{1.1}$$

с двумя степенями свободы и первым интегралом

$$h = 2W - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),\tag{1.2}$$

где A и W - функции координат x и y , h - постоянная энергии. Положим, что известно периодическое решение системы (1.1)

$$x^* = x^*(t, x_0^*, y_0^*, \dot{x}_0^*, \dot{y}_0^*), y^* = y^*(t, x_0^*, y_0^*, \dot{x}_0^*, \dot{y}_0^*),\tag{1.3}$$

с начальными условиями x_0^* , y_0^* , \dot{x}_0^* , \dot{y}_0^* и периодом T^* , которому соответствует фиксированное значение постоянной энергии h^* . Условие периодичности решения (1.3) запишется в виде

$$\begin{aligned}x^*(t + T^*, x_0^*, y_0^*, \dot{x}_0^*, \dot{y}_0^*) &= x(t, x_0^*, y_0^*, \dot{x}_0^*, \dot{y}_0^*), \\ y^*(t + T^*, x_0^*, y_0^*, \dot{x}_0^*, \dot{y}_0^*) &= y(t, x_0^*, y_0^*, \dot{x}_0^*, \dot{y}_0^*),\end{aligned}\tag{1.4}$$

Решение (1.3) будем называть опорным. Допустим, что система (1.1) имеет также периодическое решение

$$\begin{aligned}x &= x(t, x_0^* + \Delta x_0, y_0^* + \Delta y_0, \dot{x}_0^* + \Delta \dot{x}_0, \dot{y}_0^* + \Delta \dot{y}_0), \\ y &= y(t, x_0^* + \Delta x_0, y_0^* + \Delta y_0, \dot{x}_0^* + \Delta \dot{x}_0, \dot{y}_0^* + \Delta \dot{y}_0)\end{aligned}\tag{1.5}$$

с начальными условиями

$$x_0 = x_0^* + \Delta x_0, y_0 = y_0^* + \Delta y_0, \dot{x}_0 = \dot{x}_0^* + \Delta \dot{x}_0, \dot{y}_0 = \dot{y}_0^* + \Delta \dot{y}_0, \quad (1.6)$$

и периодом $T = T^* + \Delta T$, которому соответствует фиксированное значение постоянной энергии $h^* + \Delta h$. В силу аналитичности правых частей уравнений (1.1) начальные значения (1.6), отвечающие периодическому движению (1.5), и его период могут быть представлены в виде сходящихся рядов по степеням величины Δh

$$\begin{aligned} x_0 &= x_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} x_{0,k} \Delta h^k, & y_0 &= y_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} y_{0,k} \Delta h^k, \\ \dot{x}_0 &= \dot{x}_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{x}_{0,k} \Delta h^k, & \dot{y}_0 &= \dot{y}_0^* + \sum_{k=1}^{\infty} \dot{y}_{0,k} \Delta h^k, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$T = T^* + \sum_{k=1}^{\infty} T_k \Delta h^k, \quad (1.8)$$

Множество $\Gamma(h)$ периодических решений (1.5), соответствующих условиям (1.7) и (1.8), называется естественным семейством периодических решений [55] и в силу консервативности системы (1.1) при достаточно малых Δh имеет следующий аналитический вид

$$X(t) = x^*(t) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k(t) \Delta h^k, \quad Y(t) = y^*(t) + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(t) \Delta h^k, \quad (1.9)$$

где $x_k(t)$ и $y_k(t)$ - T -периодические функции.

Задача продолжения естественного семейства $\Gamma(h)$ (1.9) из опорного решения (1.3), которому соответствует постоянная энергии h^* , состоит в том, чтобы определить коэффициенты $x_k(t)$, $y_k(t)$ в рядах (1.9) и выражение для периодов (1.8). Данная задача может быть решена аналитически лишь в некоторых простейших случаях. В работе [67] для случая консервативной механической системы с двумя степенями свободы был предложен метод численного продолжения естественных семейств периодических решений по параметру. Суть метода основана на введении в окрестности опорного решения локальной системы

отсчёта, оси которой направлены по нормали и по касательной к траектории опорного решения. Такой выбор системы отсчёта позволяет разделить уравнения для нормальных и касательных координат и свести решение краевой задачи поиска периодического решения (1.5) к задаче Коши. Поиск начальных условий нового периодического решения происходит в два этапа, называемые *шагом предиктора* и *шагом корректора*. На этапе предиктора определяются начальные условия приближённого периодического решения, которые затем уточняются на этапе корректора. Для начала построения семейства периодических решений с помощью данного метода необходимо иметь известное периодическое решение (1.3) системы (1.1), называемое *опорным*.

1.2. Об алгоритме численного продолжения по параметрам семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы

Метод, изложенный А. Депри и Ж. Анраром в работе [67] получил развитие в ряде работ [34, 72, 75]. В работе [34] была предложена модификация данного метода для построения семейств периодических решений лагранжевой системы с двумя степенями свободы и произвольным количеством параметров. Далее, в работе [72] был предложен метод продолжения по параметрам семейств периодических решений автономных гамильтоновых систем с произвольным числом параметров и степеней свободы.

Указанный метод получил дальнейшее развитие в работах [83, 87], где была предложена методика выбора шага приращений параметров, а также для случая системы с двумя степенями свободы и произвольного количества параметров был предложен простой явный вид матрицы перехода к локальным

координатам. Данные модификации указанного метода позволили существенно оптимизировать вычисления и повысить скорость построения периодических решений.

Следуя работам [72, 83, 87], изложим метод численного продолжения по параметрам периодических решений автономной гамильтоновой системы

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad (i = 1, 2) \quad (1.10)$$

с двумя степенями свободы, где функция Гамильтона $H(q_1, q_2, p_1, p_2, \vec{\pi})$ явно не зависит от времени и сохраняет своё значение $H = h$ на решениях системы, то есть является первым интегралом. Через $\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ обозначен вектор параметров.

Допустим, что система (1.10) имеет периодическое решение

$$\begin{aligned} q_i^* &= q_i^*(t, \vec{\pi}^*) = q_i^*(t + T^*, \vec{\pi}^*), \\ p_i^* &= p_i^*(t, \vec{\pi}^*) = p_i^*(t + T^*, \vec{\pi}^*), \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$(i = 1, 2),$$

с начальными условиями

$$q_{i0}^* = q_i^*(0, \vec{\pi}^*), \quad p_{i0}^* = p_i^*(0, \vec{\pi}^*), \quad (1.12)$$

где $T^* = T^*(\vec{\pi}^*)$ - период, а $\vec{\pi}^*$ и h^* - фиксированные значения параметров и постоянной h , соответствующие данному решению.

Дадим величинам $\vec{\pi}^*$ и h^* малые приращения $\Delta\vec{\pi}$ и Δh и поставим задачу определения начальных условий и периода

$$\begin{aligned} q_{i0} &= q_i(0, \vec{\pi}), \quad p_{i0} = p_i(0, \vec{\pi}), \\ T &= T(\vec{\pi}), \end{aligned} \quad (1.13)$$

нового периодического решения

$$\begin{aligned} q_i &= q_i(t, \vec{\pi}) = q_i(t + T, \vec{\pi}), \\ p_i &= p_i(t, \vec{\pi}) = p_i(t + T, \vec{\pi}), \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$(i = 1, 2),$$

отвечающего значениям параметров

$$\vec{\pi} = \vec{\pi}^* + \Delta\vec{\pi}, \quad h = h^* + \Delta h. \quad (1.15)$$

Условие периодичности решения (1.14) запишется в виде

$$\begin{aligned} q_i(0, \vec{\pi}) &= q_i(T, \vec{\pi}), \\ p_i(0, \vec{\pi}) &= p_i(T, \vec{\pi}). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Кроме того, потребуем, чтобы решение (1.14) удовлетворяло условиям принадлежности семейству периодических решений

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi}^*} q_i(0, \vec{\pi}) &= q_i^*(0, \vec{\pi}^*), \\ \lim_{\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi}^*} p_i(0, \vec{\pi}) &= p_i^*(0, \vec{\pi}^*), \\ \lim_{\vec{\pi} \rightarrow \vec{\pi}^*} T(\vec{\pi}) &= T(\vec{\pi}^*). \end{aligned}$$

В окрестности опорного периодического решения (1.11) введём локальные координаты

$$\xi_i = q_i - q_i^*, \quad \eta_i = p_i - p_i^*, \quad (i = 1, 2). \quad (1.17)$$

Движение вблизи периодического решения приближённо описывается линейной неавтономной гамильтоновой системой, гамильтониан которой представляет собой сумму линейной и квадратичной частей разложения исходного гамильтониана в ряд по степеням переменных ξ_i, η_i ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} H^\zeta &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2} \Big|_* \xi_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial q_2^2} \Big|_* \xi_2^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} \Big|_* \eta_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2} \Big|_* \eta_2^2 + \\ &+ \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} \Big|_* \xi_1 \eta_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} \Big|_* \xi_1 \xi_2 + \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} \Big|_* \xi_1 \eta_2 + \\ &+ \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_1} \Big|_* \xi_2 \eta_1 + \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_2} \Big|_* \xi_2 \eta_2 + \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} \Big|_* \eta_1 \eta_2 + \\ &+ \sum_{j=1}^k \Delta\pi_j \left(\xi_1 \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial \pi_j} \Big|_* + \xi_2 \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial \pi_j} \Big|_* + \eta_1 \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \pi_j} \Big|_* + \eta_2 \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial \pi_j} \Big|_* \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Индекс «*» при частных производных в (1.18) означает, что они вычислены на опорном решении. Каноническая система уравнений с гамильтонианом (1.18) не автономна, однако допускает следующий интеграл [72]

$$\left. \frac{\partial H}{\partial q_1} \right|_* \xi_1 + \left. \frac{\partial H}{\partial q_2} \right|_* \xi_2 + \left. \frac{\partial H}{\partial p_1} \right|_* \eta_1 + \left. \frac{\partial H}{\partial p_2} \right|_* \eta_2 + \sum_{j=1}^k \left. \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \right|_* \Delta \pi_j = \Delta h. \quad (1.19)$$

Согласно работам [67, 72] для определения поправок

$$\xi_{i0} = q_{i0} - q_{i0}^*, \quad \eta_{i0} = p_{i0} - p_{i0}^*, \quad (i = 1, 2) \quad \tau = T - T^*, \quad (1.20)$$

к начальным условиям исходного периодического решения (1.11) необходимо ввести локальную систему координат, оси которой направлены по нормали и по касательной к траектории опорного решения. Для перехода к данной системе координат используем следующее унивалентное каноническое преобразование

$$(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2) = S\vec{w}, \quad (1.21)$$

где $\vec{w} = (n_u, m_u, n_v, m_v)^T$, S - симплектическая ортогональная матрица. Будем называть координаты n_u, n_v нормальными смещениями, а m_u и m_v - тангенциальным и энергетическим смещениями. В данных координатах гамильтониан (1.18) примет вид

$$\begin{aligned} H^w = & \frac{1}{2} \vec{w}^T \mathbf{H}^w \vec{w} + \\ & + \frac{1}{V} \sum_{j=1}^k \Delta \pi_j \left[\left(m_u \frac{\partial H}{\partial p_1} + m_v \frac{\partial H}{\partial q_1} - n_u \frac{\partial H}{\partial q_2} - n_v \frac{\partial H}{\partial p_2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial \pi_j} + \right. \\ & + \left(n_u \frac{\partial H}{\partial q_1} + n_v \frac{\partial H}{\partial p_1} + m_u \frac{\partial H}{\partial p_2} + m_v \frac{\partial H}{\partial q_2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial \pi_j} + \\ & + \left(n_u \frac{\partial H}{\partial p_2} - n_v \frac{\partial H}{\partial q_2} - m_u \frac{\partial H}{\partial q_1} + m_v \frac{\partial H}{\partial p_1} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \pi_j} + \\ & \left. + \left(n_v \frac{\partial H}{\partial q_1} - n_u \frac{\partial H}{\partial p_1} - m_u \frac{\partial H}{\partial q_2} + m_v \frac{\partial H}{\partial p_2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \pi_j} \right] \Big|_*. \end{aligned} \quad (1.22)$$

где $V = \sqrt{\dot{q}_1^{*2} + \dot{q}_2^{*2} + \dot{p}_1^{*2} + \dot{p}_2^{*2}}$. Структура матрицы \mathbf{H}^W определяется следующим образом [72]

$$\mathbf{H}^W = S^T \mathbf{H} S + S^T I \dot{S} = \begin{pmatrix} h_{11}^* & 0 & h_{13}^* & h_{14}^* \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\dot{V}}{V} \\ h_{13}^* & 0 & h_{33}^* & h_{34}^* \\ h_{14}^* & \frac{\dot{V}}{V} & h_{34}^* & h_{44}^* \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.23)$$

где \mathbf{H} - матрица Гесса функции Гамильтона системы (1.10). Первый интеграл (1.19) примет вид

$$V m_v + \sum_{j=1}^k \left. \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \right|_* \Delta \pi_j = \Delta h. \quad (1.24)$$

Здесь, как и ранее, индекс «*» означает, что зависящие от времени коэффициенты h_{11} , h_{13} , h_{14} , h_{33} , h_{34} , h_{44} вычисляются на опорном решении. Формулы для вычисления указанных коэффициентов приведены в Приложении А.1.

В работе [87] был предложен следующий явный вид матрицы S :

$$S = (\vec{R}, \vec{s}, -I\vec{R}, -I\vec{s}) = \frac{1}{V} \begin{pmatrix} \dot{p}_2^* & \dot{q}_1^* & -\dot{q}_2^* & -\dot{p}_1^* \\ -\dot{p}_1^* & \dot{q}_2^* & \dot{q}_1^* & -\dot{p}_2^* \\ \dot{q}_2^* & \dot{p}_1^* & \dot{p}_2^* & \dot{q}_1^* \\ -\dot{q}_1^* & \dot{p}_2^* & -\dot{p}_1^* & \dot{q}_2^* \end{pmatrix}, \quad (1.25)$$

Выбор матрицы S указанным способом позволяет существенно упростить вычисление коэффициентов в уравнениях предиктора и корректора по сравнению со схемой, предложенной в [72], и повысить скорость численного построения периодических движений. Подставив (1.25) в (1.22) и исключив переменную m_v с помощью первого интеграла (1.24), получим следующую систему уравнений, в которой канонические уравнения для нормальных смещений не зависят от тангенциального и энергетического смещений.

$$\begin{aligned} \dot{n}_u &= \frac{\partial H^n}{\partial n_v}, & \dot{n}_v &= -\frac{\partial H^n}{\partial n_u}, \\ \dot{m}_u &= \frac{\dot{V}}{V} m_u + h_{14}^* n_u + h_{34}^* n_v + \sum_{j=1}^k h_2^j \Delta \pi_j + h_2^{k+1} \Delta h, \\ m_v &= \frac{1}{V} \left(\Delta h - \sum_{j=1}^k \Delta \pi_j \left. \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \right|_* \right), \end{aligned} \quad (1.26)$$

Гамильтониан системы уравнений для нормальных смещений имеет вид

$$H^n = \frac{1}{2}(h_{11}^* n_u^2 + h_{33}^* n_v^2 + 2n_u n_v h_{13}^*) + \\ + n_u \left(\sum_{j=1}^k h_{11}^j \Delta \pi_j + h_{11}^{k+1} \Delta h \right) + n_v \left(\sum_{j=1}^k h_{12}^j \Delta \pi_j + h_{12}^{k+1} \Delta h \right), \quad (1.27)$$

где

$$h_{11}^j = \frac{1}{V} \left(-h_{14} \frac{\partial H}{\partial \pi_j} + \dot{p}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial \pi_j} - \dot{p}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial \pi_j} + \right. \\ \left. + \dot{q}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \pi_j} - \dot{q}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial \pi_j} \right) \Big|_*, \quad j = (1 \dots k), \\ h_{12}^j = \frac{1}{V} \left(-h_{34} \frac{\partial H}{\partial \pi_j} - \dot{q}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial \pi_j} + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial \pi_j} + \right. \\ \left. + \dot{p}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial \pi_j} - \dot{p}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial \pi_j} \right) \Big|_*, \quad j = (1 \dots k), \\ h_{11}^{k+1} = -h_{14}^*, \\ h_{12}^{k+1} = -h_{34}^*, \\ h_2^j = \frac{1}{V} \left(-h_{44} \frac{\partial H}{\partial \pi_j} - \dot{p}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial \pi_j} - \dot{p}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial \pi_j} + \right. \\ \left. + \dot{q}_1 \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial \pi_j} + \dot{q}_2 \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial \pi_j} \right) \Big|_*, \quad j = (1 \dots k), \\ h_2^{k+1} = h_{44}^*,$$

Из условия периодичности (1.16) искомого решения (1.14) следует [72], что смещения n_u , n_v , m_u , m_v должны быть T^* -периодическими функциями времени, отвечающими краевым условиям

$$n_u(0) = n_u(T^*), \quad n_v(0) = n_v(T^*), \\ m_v(0) = m_v(T^*), \quad m_u(0) = m_u(T^*) + V(0)\tau. \quad (1.28)$$

Поскольку смещение вдоль орбиты не изменяет её, то для тангенциального смещения m_u можно положить $m_u(0) = 0$. Тогда последнее из равенств (1.28) можно переписать в виде $m_u(T^*) + V(0)\tau = 0$ и использовать его далее для нахождения поправки τ .

Для определения величин поправок (1.20) будем искать начальные условия

$$n_u(0), n_v(0), m_v(0) \quad (1.29)$$

периодического решения системы (1.26), удовлетворяющего соотношениям (1.28). С этой целью представим смещения n_u , n_v , m_u , и поправку τ в виде линейных комбинаций приращений параметров

$$n_u = \sum_{j=1}^k n_u^j \Delta\pi_j + n_u^{k+1} \Delta h, \quad n_v = \sum_{j=1}^k n_v^j \Delta\pi_j + n_v^{k+1} \Delta h, \quad (1.30)$$

$$m_u = \sum_{j=1}^k m_u^j \Delta\pi_j + m_u^{k+1} \Delta h,$$

$$\tau = \sum_{j=1}^k \tau^j \Delta\pi_j + \tau^{k+1} \Delta h. \quad (1.31)$$

Далее подставим (1.30) в (1.26) и, учитывая независимость приращений параметров $\Delta\pi_j$ ($j = 1..k$), Δh , получим систему $2(k+1)$ дифференциальных уравнений для величин n_u^j , n_v^j , m_u^j . Для выполнения условий (1.28) начальные условия $n_u^j(0)$, $n_v^j(0)$ периодического решения указанной системы должны отвечать соотношениям

$$\begin{aligned} n_u^j(0) &= n_u^j(T^*), \\ n_v^j(0) &= n_v^j(T^*), \end{aligned}$$

В работе [72] было показано, что данные начальные условия могут быть получены в результате совместного численного интегрирования системы (1.10) и следующей системы линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{n}_{u1} &= h_{11}^* n_{u1} + h_{33}^* n_{u2}, \\ \dot{n}_{u2} &= -h_{11}^* n_{u1} - h_{13}^* n_{u2}, \\ \dot{n}_{v1} &= h_{11}^* n_{v1} + h_{33}^* n_{v2}, \\ \dot{n}_{v2} &= -h_{11}^* n_{v1} - h_{13}^* n_{v2}, \end{aligned} \quad (1.32)$$

$$\begin{aligned}
\dot{n}_{up}^j &= h_{13}^* n_{up}^j + h_{33}^* n_{vp}^j + h_{12}^j, \\
\dot{n}_{vp}^j &= -h_{13}^* n_{up}^j - h_{33}^* n_{vp}^j - h_{11}^j, \\
j &= (1 \dots k + 1),
\end{aligned} \tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}
\dot{m}_{u1} &= \frac{\dot{V}}{V} m_{u1} + h_{14}^* n_{u1} + h_{34}^* n_{u2}, \\
\dot{m}_{u2} &= \frac{\dot{V}}{V} m_{u2} + h_{14}^* n_{v1} + h_{34}^* n_{v2},
\end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\dot{m}_{up}^j = \frac{\dot{V}}{V} m_{up}^j + h_{14}^* n_{up}^j + h_{34}^* n_{vp}^j + h_{12}^j, \quad j = (1 \dots k + 1). \tag{1.35}$$

на интервале $[0, T^*]$ с начальными условиями (1.11) и $n_{u1} = 1$, $n_{u2} = 0$, $n_{v1} = 0$, $n_{v2} = 1$, $m_{u1} = 0$, $m_{u2} = 0$, $n_{up}^j = 0$, $n_{vp}^j = 0$, $m_{up}^j = 0$. Далее, если выполнено условие

$$\det [N(T^*) - E] \neq 0, \tag{1.36}$$

где $N(t)$ - фундаментальная матрица системы (1.32), то искомые начальные условия вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
n_u^j(0) &= \frac{n_{up}^j(T^*) - n_{v2}(T^*)n_{up}^j(T^*) + n_{u2}(T^*)n_{vp}^j(T^*)}{n_{u1}(T^*)n_{v2}(T^*) - n_{u2}(T^*)n_{v1}(T^*) - n_{u1}(T^*) - n_{v2}(T^*) + 1}, \\
n_v^j(0) &= \frac{n_{vp}^j(T^*) - n_{u1}(T^*)n_{vp}^j(T^*) + n_{v1}(T^*)n_{up}^j(T^*)}{n_{u1}(T^*)n_{v2}(T^*) - n_{u2}(T^*)n_{v1}(T^*) - n_{u1}(T^*) - n_{v2}(T^*) + 1}, \\
\tau^j &= -\frac{1}{V(0)} (m_{u1}n_u^j(0) + m_{u2}n_v^j(0) + m_{up}^j(T^*)),
\end{aligned} \tag{1.37}$$

$$m_u^j(0) = 0,$$

$$j = (1 \dots k + 1),$$

$$m_v(0) = \frac{1}{V(0)} \left(dh - \sum_{j=1}^k \pi_j \frac{\partial H}{\partial \pi_j}(0) \Big|_* \right).$$

Подставив (1.37) в (1.30), получим начальные условия (1.29) для нормальных, тангенциального и энергетического смещений, а также поправку τ к периоду T^* опорного решения.

Если условие (1.36) не выполнено, то начальные условия $n_u^j(0)$, $n_v^j(0)$ для нормальных смещений не могут быть вычислены и численное продолжение решения (1.11) невозможно с помощью рассматриваемого метода. Такую ситуацию будем называть *завершением* семейства периодических решений.

При переходе к исходным переменным величины (1.29) и τ дают приближённые значения начальных условий (1.13) и периода T искомого периодического решения (1.14), которые далее будем обозначать

$$\tilde{q}_{10}, \tilde{q}_{20}, \tilde{p}_{10}, \tilde{p}_{20}, \tilde{T}. \quad (1.38)$$

Этим значениям соответствует также приближённое, а не точное значение параметра h , определяемое формулой

$$\tilde{h} = H(\tilde{q}_1(0), \tilde{q}_2(0), \tilde{p}_1(0), \tilde{p}_2(0), \vec{\pi}).$$

Данный этап, на котором определяются начальные условия (1.38), называется шагом предиктора.

Величины (1.38) могут быть уточнены на втором этапе алгоритма, который называют шагом корректора. Для этого, полагая $\Delta\vec{\pi} = \vec{0}$, перепишем уравнения (1.26) в виде

$$\begin{aligned} \dot{n}_{up} &= h_{13}n_{up} + h_{33}n_{vp} + \frac{1}{V}h_{14}\Delta\tilde{h}, \\ \dot{n}_{vp} &= -h_{13}n_{up} - h_{33}n_{vp} + \frac{1}{V}h_{34}\Delta\tilde{h}, \\ \dot{m}_{up} &= \frac{\dot{V}}{V}m_{up} + h_{14}n_{up} + h_{34}n_{vp} + \frac{1}{V}h_{44}\Delta\tilde{h}, \\ j &= (1 \dots k + 1), \end{aligned} \quad (1.39)$$

где величины h_{11} , h_{13} , h_{14} , h_{33} , h_{34} и h_{44} и V вычисляются на периодическом решении, соответствующем начальным условиям 1.38, а $\Delta\tilde{h}$ – отклонение фактического значения параметра h периодического решения, полученного на шаге предиктора, от точного значения $h = h^* + \Delta h$. Далее, принимая периодическое движение с начальными условиями (1.38) за опорное и действуя аналогично то-

му, как это было сделано на этапе предиктора, проинтегрируем систему уравнений (1.10), (1.32), (1.34), (1.39) с начальными условиями (1.11), $n_{11} = 1$, $n_{12} = 0$, $n_{21} = 0$, $n_{22} = 1$, $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, $n_{p1} = 0$, $n_{p2} = 0$, $m_p^j = 0$ на интервале $[0, \tilde{T}]$. Величины поправок $n_u(0)$, $n_v(0)$, $m_u(0)$, $m_v(0)$ и τ к начальным условиям (1.38) и периоду \tilde{T} находятся по формулам

$$\begin{aligned} n_u(0) &= \frac{n_{12}(\tilde{T})N_1 + (n_{22}(\tilde{T}) - 1)N_2}{n_{11}(\tilde{T})n_{22}(\tilde{T}) - n_{12}(\tilde{T})n_{21}(\tilde{T}) - n_{11}(\tilde{T}) - n_{22}(\tilde{T}) + 1}, \\ n_v(0) &= \frac{(1 - n_{11}(\tilde{T}))N_1 + n_{21}N_2}{n_{11}(\tilde{T})n_{22}(\tilde{T}) - n_{12}(\tilde{T})n_{21}(\tilde{T}) - n_{11}(\tilde{T}) - n_{22}(\tilde{T}) + 1}, \\ m_u(0) &= 0, \\ \tau &= -\frac{1}{V(0)}(m_u(T^*)(\tilde{T})n_u(0) + m_v(T^*)(\tilde{T})n_v(0) + m_u p(\tilde{T})) + \\ &\quad + \frac{1}{V(0)}[\dot{q}_1 \Delta \tilde{q}_1 + \dot{q}_2 \Delta \tilde{q}_2 + \dot{p}_1 \Delta \tilde{p}_1 + \dot{p}_2 \Delta \tilde{p}_2], \\ m_v &= \frac{\Delta \tilde{h}}{V(0)}, \end{aligned} \tag{1.40}$$

где величины N_1 , N_2 , $\Delta \tilde{q}_i$, $\Delta \tilde{p}_i$ вычисляются по следующим формулам

$$\begin{aligned} N_1 &= n_{p2}(\tilde{T}) - \dot{q}_2(0)\Delta \tilde{q}_1 + \dot{q}_1(0)\Delta \tilde{q}_2 + \dot{p}_2 \Delta \tilde{p}_1 + \dot{p}_1(0)\Delta \tilde{p}_2, \\ N_2 &= -n_{p1}(\tilde{T}) - \dot{p}_2(0)\Delta \tilde{q}_1 + \dot{p}_1(0)\Delta \tilde{q}_2 - \dot{q}_2 \Delta \tilde{p}_1 + \dot{q}_1(0)\Delta \tilde{p}_2, \\ \Delta \tilde{q}_i &= \tilde{q}_i(\tilde{T}) - \tilde{q}_i(0), \\ \Delta \tilde{p}_i &= \tilde{p}_i(\tilde{T}) - \tilde{p}_i(0), \\ i &= (1, 2). \end{aligned} \tag{1.41}$$

При переходе к исходным переменным величины (1.40) дают уточнённые начальные условия (1.13) и период T искомого решения (1.14). Шаг корректора может быть повторён для достижения необходимой точности периодического решения (1.14), определяемой величинами

$$\begin{aligned} \Delta q_i &= q_i(T) - q_i(0), \\ \Delta p_i &= p_i(T) - p_i(0), \\ i &= (1, 2). \end{aligned} \tag{1.42}$$

1.3. О методике выбора шага приращений параметров

Скорость вычислений при построении периодических движений с помощью метода, описанного в предыдущем параграфе, существенно зависит от методики выбора шага приращений параметров. В работе [83] была предложена следующая методика выбора шага приращений параметров $\Delta\pi$ и параметра Δh , позволяющая значительно повысить скорость численного построения периодических движений. Погрешность периодического движения, полученного численно на этапе предиктора, будем определять величиной [83]

$$d = d(\vec{\pi}, h, \vec{\Delta\pi}, \Delta h) = \max(|\Delta q_1|, |\Delta q_2|, |\Delta p_1|, |\Delta p_2|), \quad (1.43)$$

где величины $\Delta q_i, \Delta p_i, i = 1, 2$ вычисляются по формулам (1.42).

Разложим (1.43) в ряд Тейлора и, отбросив члены выше первого порядка малости, получим

$$d(\vec{\pi}, h, \vec{\Delta\pi}, \Delta h) = d_0 + d_h \Delta h + d_{\Delta h} \Delta(\Delta h) + \sum_{i=1}^k (d_{\pi_i} \Delta\pi_i + d_{\Delta\pi_i} \Delta(\Delta\pi_i)),$$

где

$$\begin{aligned} d_h &= \frac{\partial d}{\partial h}, \quad d_{\Delta h} = \frac{\partial d}{\partial(\Delta h)}, \\ d_{\pi_i} &= \frac{\partial d}{\partial \pi_i}, \quad d_{\Delta\pi_i} = \frac{\partial d}{\partial(\Delta\pi_i)} \end{aligned}$$

В случае, когда приращения параметров остаются постоянными ($\Delta\vec{\pi} = \text{const}, \Delta h = \text{const}$), данное разложение принимает вид

$$d(\vec{\pi}, h) = d_0 + d_h \Delta h + \sum_{i=1}^k (d_{\pi_i} \Delta\pi_i). \quad (1.44)$$

Условие постоянства приращений параметров обеспечивается за счёт объединения шагов предиктора в группы конечной длины. В пределах группы шагов приращения параметров остаются постоянными. Исходя из (1.44) и учитывая

известные погрешности d предыдущих шагов построения, можно подобрать значения приращений параметров так, что будут выполнены оценки

$$d_h \Delta h \approx \varepsilon_e, \quad d_{\pi_i} \Delta \pi_i \approx \varepsilon_e, \quad (1.45)$$

где ε_e - задаваемый порядок погрешности.

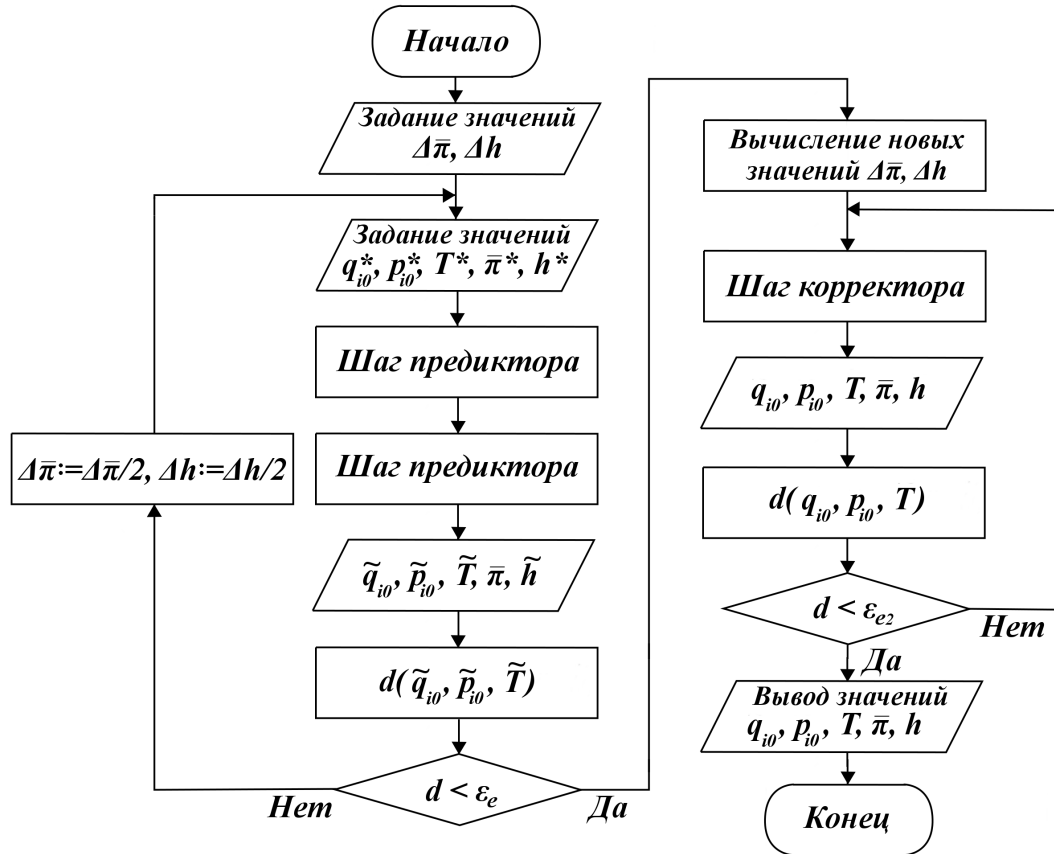


Рис. 1: Блок-схема процедуры «AlgV4», реализующей алгоритм продолжения по параметрам семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы. $q_1^*, q_2^*, p_1^*, p_2^*$ - начальные условия опорного периодического решения, q_1, q_2, p_1, p_2 - начальные условия нового периодического решения, $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2, \tilde{p}_1, \tilde{p}_2$ - приближённые начальные условия нового периодического решения.

На Рис. 1 представлена блок-схема программной реализации алгоритма численного продолжения по параметрам семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы. Для начала расчёта необходимо ввести в программу начальные условия (1.12), период T^* и значения параметров $\vec{\pi}^*, h^*$, отвечающие опорному решению (1.11), а также задать приращения параметров

$\Delta\vec{\pi}$ и Δh . В результате выполнения всех шагов предиктора становятся известны приближённые значения (1.38) и \tilde{T} начальных условий и периода искомого решения (1.14). Точность начальных условий (1.38) определяется критерием

$$d(\vec{\pi}, \tilde{h}) < \varepsilon_e. \quad (1.46)$$

Если данный критерий не выполняется, то приращения параметров $\Delta\vec{\pi}, \Delta h$ делятся на 2 и вычисление группы шагов предиктора повторяется с начальными условиями (1.12) опорного периодического движения (1.11). Если критерий (1.46) выполняется, то, согласно оценкам (1.45) новые значения приращений вычисляются по формулам

$$\Delta h = \frac{\varepsilon_e}{d_h}, \quad \Delta\pi_i = \frac{\varepsilon_e}{d_{\pi_i}}. \quad (1.47)$$

Затем начальные условия (1.38), период \tilde{T} и значение параметра \tilde{h} уточняются на шаге корректора. Шаг корректора повторяется, пока не будет выполнен критерий

$$d(\vec{\pi}, \tilde{h}) < \varepsilon_{e2}, \quad (1.48)$$

определяющий требуемую точность нового периодического движения (1.14), где ε_{e2} - задаваемый порядок погрешности ($\varepsilon_{e2} < \varepsilon_e$).

Глава 2

Периодические движения, рождающиеся из регулярных прецессий симметричного спутника

В данной главе изучается движение динамически симметричного спутника относительно его центра масс на круговой орбите. К частным случаям указанного движения относятся так называемые регулярные прецессии, которые отвечают положениям относительного равновесия спутника в орбитальной системе координат. Если регулярная прецессия устойчива, то уравнения движения спутника допускают существование семейств периодических движений, которые описывают колебания оси динамической симметрии спутника в окрестности прецессии и могут быть получены в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра – амплитуды колебаний. В нерезонансном случае существование таких движений следует из теоремы о голоморфном интеграле [54], а в резонансных случаях – из результатов работ [32, 57, 63].

В настоящей главе излагаются результаты аналитического построения периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника. Построение указанных периодических движений выполнялось на основе метода нормальных форм. Был рассмотрен как нерезонансный случай, так и случаи резонансов третьего и четвёртого порядков. Основные результаты данной главы опубликованы в работах [83–85].

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим спутник – твёрдое тело, центр масс O которого движется в центральном ньютоновском гравитационном поле сил по круговой орбите. Для описания движения спутника относительно центра масс введём орбитальную

$OXYZ$ и связанную $Oxyz$ системы координат (Рис. 2). Оси OZ , OX и OY орбитальной системы координат направим по радиус-вектору \vec{R} центра масс спутника, трансверсали к орбите и нормали \vec{n} к плоскости орбиты, соответственно. Оси Ox , Oy и Oz направим вдоль главных центральных осей инерции спутника, моменты инерции относительно которых будем обозначать J_1 , J_2 и J_3 .

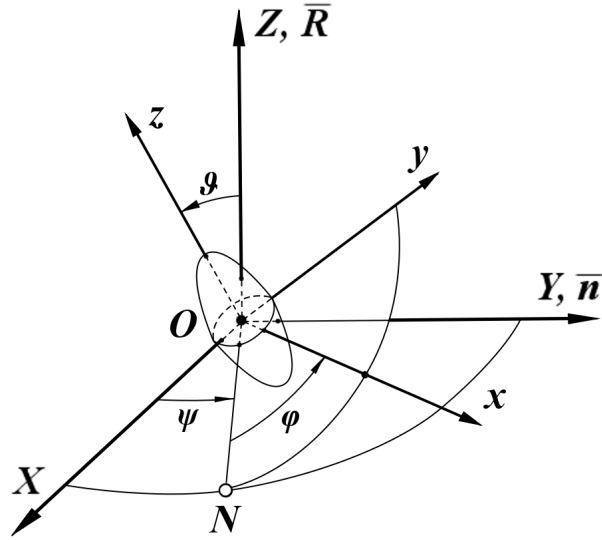


Рис. 2: Орбитальная $OXYZ$ и связанная $Oxyz$ системы координат для исследования движения спутника относительно его центра масс O . \vec{R} - радиус-вектор центра масс спутника относительно притягивающего центра, \vec{n} - нормаль к плоскости орбиты спутника.

Взаимное расположение орбитальной и связанной системы координат будем задавать углами Эйлера ψ , θ , φ . Далее положим, что спутник является динамически симметричным ($J_1 = J_2$) и введём следующие обозначения:

$$\delta = 3 \left(\frac{J_3}{J_1} - 1 \right) \quad (-3 < \delta \leq 3), \quad (2.1)$$

$$\gamma = \frac{J_3 r_0}{J_1 \omega_0} \quad (-\infty < \gamma < \infty),$$

где ω_0 - угловая скорость движения центра масс O спутника по орбите, а $r_0 = \dot{\psi} \cos \theta - \omega_0 \cos \psi \sin \theta$ - проекция абсолютной угловой скорости спутника на его ось симметрии Oz , сохраняющая при $J_1 = J_2$ постоянное значение.

Параметр δ определяет геометрию масс спутника. При $\delta < 0$ спутник является динамически-вытянутым, при $\delta > 0$ – динамически-сплюснутым, а при $\delta = 0$ – сферически симметричным.

Вводя обобщённые импульсы p_ψ , p_θ , p_φ , соответствующие обобщённым координатам ψ , θ , φ , уравнения движения динамически симметричного спутника на круговой орбите можно записать в гамильтоновой форме. В случае динамической симметрии координата φ является циклической, а соответствующий ей импульс сохраняет постоянное значение

$$p_\varphi = \frac{J_3 r_0}{J_1 \omega_0} = \gamma. \quad (2.2)$$

Таким образом, движение спутника описывается следующей канонической системой дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\psi}, & \frac{d\theta}{d\nu} &= \frac{\partial H}{\partial p_\theta}, \\ \frac{dp_\psi}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \psi}, & \frac{dp_\theta}{d\nu} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

с гамильтонианом [7]

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_\psi^2}{2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\theta^2}{2} - \left(\frac{\gamma \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \cos \psi \cot \theta \right) p_\psi - \\ &\quad - \sin \psi p_\theta + \frac{1}{2} \gamma^2 \cot^2 \theta + \gamma \frac{\cos \psi}{\sin \theta} + \frac{1}{2} \delta \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнения движения (2.3) динамически симметричного спутника на круговой орбите имеют стационарные решения $\theta = \theta_0$, $\psi = \psi_0$, $p_\psi = p_{\psi_0}$, $p_\theta = p_{\theta_0}$, соответствующие положениям относительного равновесия оси динамической симметрии спутника Oz в орбитальной системе координат $OXYZ$. При этом спутник находится в состоянии стационарного вращения вокруг оси симметрии Oz с постоянной угловой скоростью

$$\dot{\varphi} = \omega_0 \left(\frac{r_0}{\omega_0} + \cos \psi_0 \sin \theta_0 \right). \quad (2.5)$$

Было показано [1, 2], что существует три типа стационарных решений, описывающих регулярные прецессии спутника. Они задаются следующими соотношениями

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \psi_0 = \pi, \quad p_{\theta_0} = 0, \quad p_{\psi_0} = 0, \quad (2.6)$$

$$\sin \theta_0 = \frac{\gamma}{\delta - 1}, \quad \psi_0 = 0, \quad p_{\theta_0} = 0, \quad p_{\psi_0} = \delta \sin \theta_0 \cos \theta_0. \quad (2.7)$$

$$\theta_0 = \frac{\pi}{2}, \quad \cos \psi_0 = -\gamma, \quad p_{\theta_0} = \sin \psi_0, \quad p_{\psi_0} = 0, \quad (2.8)$$

Решение (2.6) существует при любых значениях параметров γ , δ и называется [4] цилиндрической прецессией. В данном случае ось динамической симметрии Oz коллинеарна нормали \vec{n} к плоскости орбиты и описывает в абсолютном пространстве цилиндрическую поверхность с радиусом, равным радиусу орбиты.

Решение (2.7) существует при $|\gamma| \leq |\delta - 1|$ и называется [4] конической прецессией. В этом случае ось динамической симметрии Oz описывает в абсолютном пространстве конус с углом раствора, равным $\pi - 2\theta_0$. Ось конуса перпендикулярна плоскости орбиты и проходит через притягивающий центр G_0 .

Решение (2.8) называется гиперболоидальной прецессией спутника. Данное решение существует при $|\gamma| \leq 1$. При гиперболоидальной прецессии ось динамической симметрии спутника Oz лежит в плоскости, перпендикулярной радиус-вектору \vec{R} центра масс и составляет угол $\pi - \psi_0$ с нормалью \vec{n} к плоскости орбиты. В абсолютном пространстве ось динамической симметрии спутника описывает гиперболоид вращения.

Задача об устойчивости регулярных прецессий динамически симметричного спутника была подробно исследована в работах [3, 4, 7].

Если регулярная прецессия устойчива по Ляпунову, то в её сколь угодно

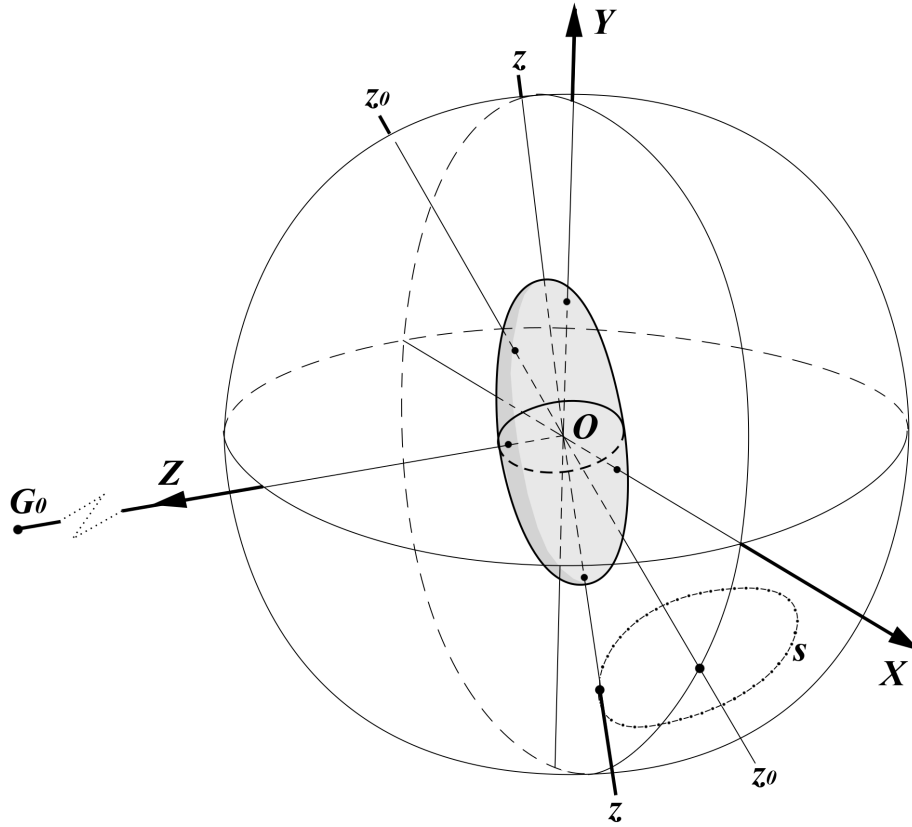


Рис. 3: Периодическое движение в окрестности гиперболической прецессии спутника. Штрихпунктирной линией (s) показана траектория изображающей точки оси динамической симметрии спутника на единичной сфере, z_0 - положение оси динамической симметрии при гиперболической прецессии, G_0 - притягивающий центр.

малой окрестности существуют периодические движения (Рис. 3). Выделяют два типа данных периодических движений: короткопериодические с периодом, близким к $2\pi/\omega_2$ и долгопериодические с периодом, близким к $2\pi/\omega_1$, где ω_1 и ω_2 – частоты линейной системы ($\omega_1 < \omega_2$), задаваемые соотношениями

$$\omega_{1,2} = \sqrt{F_1^i \mp \sqrt{F_2^i}}, \quad (2.9)$$

Постоянные коэффициенты F_1^i и F_2^i ($i = \Gamma, Z, K$), входящие в формулы (2.9) и соответствующие гиперболической (Γ), цилиндрической (Z) и конической

(K) прецессии, соответственно, вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
F_1^\Gamma &= \frac{\delta + 1}{2}, \\
F_2^\Gamma &= \frac{(\delta - 1)^2 + 4\gamma^2\delta}{4}, \\
F_1^Z &= \frac{1}{2}\gamma^2 - \gamma + \frac{1}{2}\delta + 1, \\
F_2^Z &= \frac{1}{4}\gamma^4 - \gamma^3 + \gamma^2 - 2\gamma\delta + \delta + \frac{1}{2}\gamma^2\delta + \frac{1}{4}\delta^2, \\
F_1^K &= \frac{1}{2(\delta - 1)^2} \left[1 + 5\delta^2 + \delta^2\gamma^2 + 3\delta\gamma^2 - 2\delta^3 - 4\delta \right], \\
F_2^K &= \frac{1}{4(\delta - 1)^4} \left[1 - 4\gamma^2\delta^5 + (\gamma^2 + 1)^2\delta^4 + (-4 + 10\gamma^2 + 6\gamma^4)\delta^3 + \right. \\
&\quad \left. + (9\gamma^4 + 6 - 10\gamma^2)\delta^2 + (-4 + 2\gamma^2)\delta \right].
\end{aligned}$$

Существование короткопериодических движений следует из теоремы Ляпунова о голоморфном интеграле [54]. Если частоты (2.9) не связаны резонансными соотношениями вида $\omega_2 = N\omega_1$, то указанная теорема также гарантирует существование долгопериодических движений. При наличии в системе с гамильтонианом (2.4) резонансов до четвёртого порядка включительно ($N = 0, 1, 2, 3$) существование долгопериодических движений следует из результатов работ [30, 32, 49, 51, 57, 62, 63, 65]. Указанные периодические движения представляют собой малые колебания оси динамической симметрии спутника Oz в окрестности регулярной прецессии и могут быть построены в виде сходящихся рядов по степеням малого параметра – амплитуды колебаний или отклонения $\Delta h = |h - h_0|$ постоянной энергии h от её значения h_0 на регулярной прецессии. Если значения амплитуды колебаний или отклонения постоянной энергии Δh не малы, то для построения периодических движений, рождающихся из регулярной прецессии спутника, необходимо применить численный метод.

Задача аналитического построения периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий динамически симметричного спутника рассматривалась ранее в работах [28–32]. В частности, в работах [28, 29] были получены

асимптотические выражения, описывающие короткопериодические движения в окрестности гиперболоидальной прецессии спутника, а также долгопериодические движения при нерезонансных значениях параметров. В работах [30–32] исследовались периодические движения, рождающиеся из цилиндрической прецессии спутника в резонансном случае.

Для аналитического построения периодических движений в данной диссертационной работе будем использовать метод нормальных форм. Это позволит применить общую методику построения периодических движений как в нерезонансных, так и в резонансных случаях.

2.2. Аналитическое построение семейств периодических движений, рождающихся регулярных прецессий спутника в нерезонансном случае

Рассмотрим вопрос об аналитическом построении семейств периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника в нерезонансном случае. С этой целью, следуя классической методике [54], приведём гамильтониан исходной задачи к нормальной форме и получим асимптотические выражения, описывающие коротко и долгопериодические движения спутника в окрестности цилиндрической, конической и гиперболоидальной прецессии.

2.2.1. Нормализация функции Гамильтона

Предполагая, что частоты (2.9) линейной системы не связаны резонансными соотношениями $\omega_2 = N\omega_1$ и $\Delta h = |h - h_0| \ll 1$, введем в окрестности регулярной прецессии локальные координаты ξ_i, η_i ($i = 1, 2$) по формулам

$$\psi = \psi_0 + \xi_1, \quad \theta = \theta_0 + \xi_2, \quad p_\psi = p_{\psi_0} + \eta_1, \quad p_\theta = p_{\theta_0} + \eta_2, \quad (2.10)$$

и разложим гамильтониан (2.4) исходной системы в ряд по степеням этих переменных

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots, \quad (2.11)$$

где H_k – форма степени k относительно ξ_i, η_i . Выполним теперь линейную каноническую замену переменных

$$\xi_i, \eta_i \rightarrow x_i, y_i (i = 1, 2), \quad (2.12)$$

которая приводит квадратичную часть H_2 гамильтониана к нормальной форме. В новых переменных x_i, y_i ($i = 1, 2$) функция Гамильтона (2.11) принимает вид

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2}\omega_1(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(x_2^2 + y_2^2) + \\ & + \sum_{n_1+n_2+m_1+m_2=3} h_{n_1 n_2 m_1 m_2} x_1^{n_1} x_2^{n_2} y_1^{m_1} y_2^{m_2} + \\ & + \sum_{n_1+n_2+m_1+m_2=4} h_{n_1 n_2 m_1 m_2} x_1^{n_1} x_2^{n_2} y_1^{m_1} y_2^{m_2} + \dots, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где $h_{n_1 n_2 m_1 m_2}$ – постоянные коэффициенты, зависящие от параметров задачи.

Далее, близкой к тождественной канонической унивалентной заменой переменных $x_i, y_i \rightarrow q_i, p_i$ ($i = 1, 2$) функция Гамильтона (2.4) в окрестности регулярной прецессии может быть приведена к следующей нормальной форме (см., например, [59])

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2}\omega_1(q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2(q_2^2 + p_2^2) + \\ & + a_{20}(q_1^2 + p_1^2)^2 + a_{11}(q_1^2 + p_1^2)(q_2^2 + p_2^2) + a_{02}(q_2^2 + p_2^2)^2 + H^{(5)}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где a_{20}, a_{11}, a_{02} – зависящие от параметров постоянные коэффициенты, а через $H^{(5)}$ обозначен сходящийся степенной ряд, не содержащий членов ниже пятой степени по каноническим переменным q_i, p_i ($i = 1, 2$).

Коэффициенты a_{20}, a_{11}, a_{02} были получены при помощи метода Депри-Хори [58, 88]. Используя этот метод, можно построить и замену, приводящую

гамильтониан к виду (2.14), причём, согласно [54], выбор новых переменных q_i, p_i можно осуществить так, что в разложении $H^{(5)}$ не будет членов, содержащих переменные q_1, p_1 в первой степени, а при $q_1 = p_1 = 0$ разложение $H^{(5)}$ представляет собой сходящийся ряд по степеням величины $\rho_2 = q_2^2 + p_2^2$. В этом случае каноническая система уравнений с гамильтонианом (2.14) имеет семейство периодических решений

$$q_1 = p_1 = 0, \quad q_2 = c \sin \Omega_2(\nu - \nu_0), \quad p_2 = c \cos \Omega_2(\nu - \nu_0), \quad (2.15)$$

которые описывают короткопериодические движения (колебания) спутника в окрестности его регулярной прецессии с периодом $T_2 = 2\pi/\Omega_2$. Величины ν_0 и c ($c > 0$) – произвольные постоянные, причём c задаёт амплитуду колебаний и предполагается малой величиной. Частота колебаний Ω_2 аналитически зависит от c и вычисляется по следующей асимптотической формуле

$$\Omega_2 = \omega_2 + 4c^2 a_{02} + O(c^4). \quad (2.16)$$

Если частоты (2.9) линейной системы не связаны резонансными соотношениями $\omega_2 = N\omega_1$ ($N = 0, 1, 2, 3$), т.е. в системе нет резонансов до четвёртого порядка включительно, то близкой к тождественной канонической унивалентной заменой переменных функция Гамильтона (2.4) в окрестности регулярной прецессии может быть приведена к нормальной форме (2.14). Эту замену можно построить таким образом, что в разложении $H^{(5)}$ не будет членов, содержащих переменные q_2, p_2 в первой степени, а при $q_2 = p_2 = 0$ разложение $H^{(5)}$ будет представлять собой сходящийся ряд по степеням величины $\rho_1 = q_1^2 + p_1^2$. При таком выборе новых переменных q_i, p_i ($i = 1, 2$) каноническая система уравнений с гамильтонианом (2.14) имеет семейство периодических решений

$$q_1 = c \sin \Omega_1(\nu - \nu_0), \quad p_1 = c \cos \Omega_1(\nu - \nu_0), \quad q_2 = p_2 = 0, \quad (2.17)$$

где

$$\Omega_1 = \omega_1 + 4c^2 a_{20} + O(c^4). \quad (2.18)$$

Указанное семейство решение описывает долгопериодические движения (колебания) спутника в окрестности его гиперболоидальной прецессии с периодом $T_1 = 2\pi/\Omega_1$.

2.2.2. Периодические движения, рождающиеся из цилиндрической прецессии спутника

Напомним, что цилиндрическая прецессия задаётся соотношениями (2.6) и соответствует стационарному движению, при котором ось динамической симметрии спутника Oz описывает в абсолютном пространстве цилиндрическую поверхность с радиусом, равным радиусу орбиты (Рис. 4).

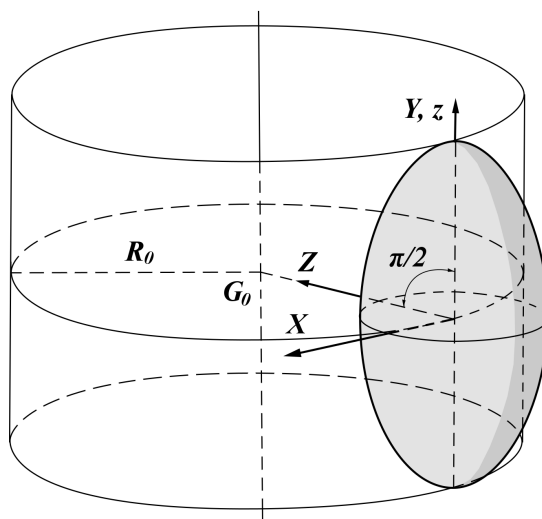


Рис. 4: Цилиндрическая прецессия спутника. G_0 - притягивающий центр.

На Рис. 5 в области допустимых значений параметров показаны подобласти существования и неустойчивости цилиндрической прецессии. Подобласть, закрашенная серым цветом, соответствует неустойчивой цилиндрической прецессии, а незакрашенная подобласть - устойчивой цилиндрической прецессии.

Если цилиндрическая прецессия устойчива, то в её окрестности существуют короткопериодические движения с периодом, близким к $2\pi/\omega_2$ и долгопе-

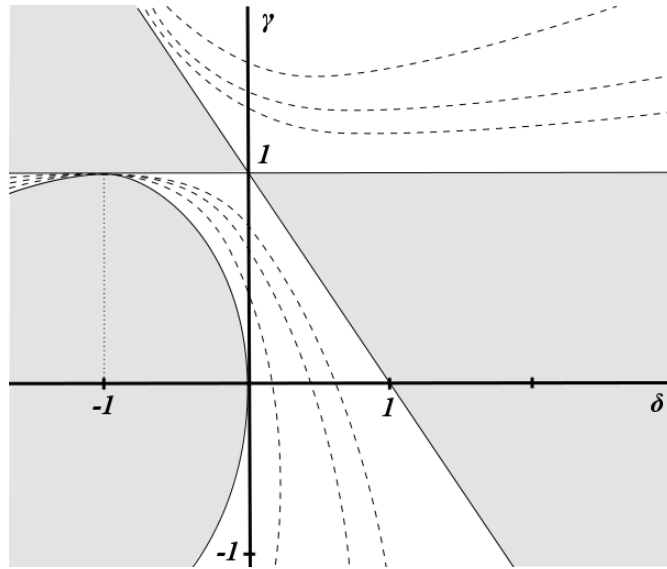


Рис. 5: Области существования и устойчивости цилиндрической прецессии симметричного спутника на круговой орбите.

риодические движения с периодом, близким к $2\pi/\omega_1$, частоты ω_1 и ω_2 которых вычисляются по формулам (2.9). Для построения данных периодических движений, следуя П. 2.2.1, введём в окрестности устойчивой цилиндрической прецессии локальные координаты ξ_i, η_i , ($i = 1..2$) по формулам (2.10) и разложим гамильтониан (2.4) исходной системы в ряд (2.11) по степеням ξ_i, η_i . При $k = 2, 3, 4$ будем иметь для членов ряда (2.11) следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \frac{1}{2} (\gamma^2 - \gamma + \delta) \xi_2^2 + (\gamma - 1) \xi_2 \eta_1 + \frac{1}{2} \eta_1^2 + \frac{1}{2} \eta_2^2 + \xi_1 \eta_2 + \frac{1}{2} \gamma \xi_1^2, \\
 H_3 &= 0, \\
 H_4 &= \frac{1}{4} \xi_2^2 \gamma \xi_1^2 - \frac{1}{24} \gamma \xi_1^4 + \left(-\frac{1}{6} \delta - \frac{5}{24} \gamma + \frac{1}{3} \gamma^2 \right) \xi_2^4 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \eta_1 \xi_2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \xi_2^2 \eta_1^2 + \left(\frac{5}{6} \gamma - \frac{1}{3} \right) \xi_2^3 \eta_1 - \frac{1}{6} \xi_1^3 \eta_2.
 \end{aligned} \tag{2.19}$$

Выполним теперь линейную каноническую замену переменных (2.12), которая приводит квадратичную часть гамильтониана (2.11) к нормальной форме (2.13). Для случая цилиндрической прецессии указанная замена имеет следую-

щий вид

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{\kappa_1 (1 - \gamma - \delta + \omega_1^2) x_1}{\omega_1} + \frac{\kappa_2 (1 - \gamma - \delta + \omega_2^2) x_2}{\omega_2}, \\
\xi_2 &= \kappa_1(\gamma - 2)y_1 + \kappa_2(\gamma - 2)y_2, \\
\eta_1 &= \kappa_1 (2\gamma - 1 - \gamma^2 - \delta + \omega_1^2) y_1 + \kappa_2 (2\gamma - 1 - \gamma^2 - \delta + \omega_2^2) y_2, \\
\eta_2 &= \frac{\kappa_1 (\gamma + \delta - \gamma\omega_1^2 - 1 + \omega_1^2) x_1}{\omega_1} + \frac{\kappa_2 (\gamma + \delta - \gamma\omega_2^2 - 1 + \omega_2^2) x_2}{\omega_2}, \\
\kappa_i &= A(\omega_i), \quad i = 1, 2
\end{aligned} \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= \frac{1}{\omega} \gamma^3 + (\delta - 4) \gamma^2 + (6 - 2\omega^2 - 2\delta) \gamma - 3 + \\
&\quad + 2\delta + \omega^4 + \delta^2 + 2\omega^2 - 2\delta\omega^2,
\end{aligned}$$

Далее, близкой к тождественной канонической унивалентной заменой переменных $x_i, y_i \rightarrow q_i, p_i$ ($i = 1, 2$) приведём функцию Гамильтона (2.4) исходной системы к нормальной форме (2.14). Формулы, по которым вычисляются постоянных коэффициентов a_{20}, a_{02}, a_{11} указанной нормальной формы в случае цилиндрической прецессии приведены в Приложении Б.1. Каноническая система уравнений с гамильтонианом (2.14) имеет семейство короткопериодических движений (2.15) и семейство долгопериодических движений (2.17). Используя формулы линейной замены (2.20), получаем в исходных переменных $\psi, \theta, p_\psi, p_\theta$ следующие асимптотические выражения для указанных семейств

$$\begin{aligned}
\psi &= \pi + c \frac{\kappa_2 (1 - \gamma - \delta + \omega_2^2)}{\omega_2} \sin \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
\theta &= \frac{\pi}{2} + c \kappa_2(\gamma - 2) \cos \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_\psi &= c \kappa_2 (2\gamma - 1 - \gamma^2 - \delta + \omega_2^2) \cos \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_\theta &= c \frac{\kappa_2 (\gamma + \delta - \gamma\omega_2^2 - 1 + \omega_2^2)}{\omega_2} \sin \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2),
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
\psi &= \pi + c \frac{\kappa_1 (1 - \gamma - \delta + \omega_1^2)}{\omega_1} \sin \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
\theta &= \frac{\pi}{2} + c \kappa_1(\gamma - 2) \cos \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_\psi &= c \kappa_1 (2\gamma - 1 - \gamma^2 - \delta + \omega_1^2) \cos \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_\theta &= c \frac{\kappa_1 (\gamma + \delta - \gamma\omega_1^2 - 1 + \omega_1^2)}{\omega_1} \sin \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

где частоты $\Omega_{1,2}$ вычисляются по формулам (2.18) и (2.16). Выражения (2.21) соответствуют семейству короткопериодических движений с периодом $T_2 = 2\pi/\Omega_2$, которое будем далее именовать Z_s . Выражения (2.22) соответствуют семейству долгопериодических движений с периодом $T_1 = 2\pi/\Omega_1$

2.2.3. Периодические движения, рождающиеся из конической прецессии спутника

Как отмечалось в Параграфе 2.1, коническая прецессия задаётся соотношениями (2.7) и соответствует стационарному движению, при котором ось динамической симметрии спутника Oz описывает в абсолютном пространстве конус с углом раствора, равным $\pi - 2\theta_0$ (Рис. 4).

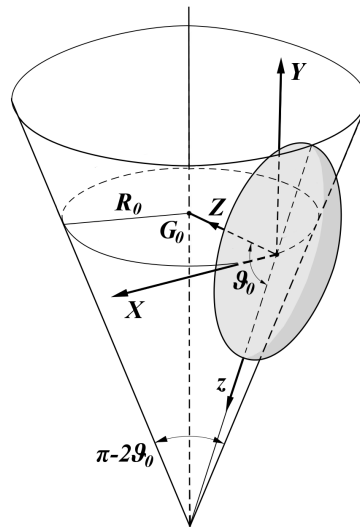


Рис. 6: Коническая прецессия спутника. G_0 - притягивающий центр.

На Рис. 5 в области допустимых значений параметров показаны подобласти существования и неустойчивости конической прецессии. Коническая прецессия существует в подобластях $I - III$. Подобласти II, III , закрашенные серым цветом, соответствуют неустойчивой конической прецессии, а незакрашенные подобласти I - устойчивой конической прецессии.

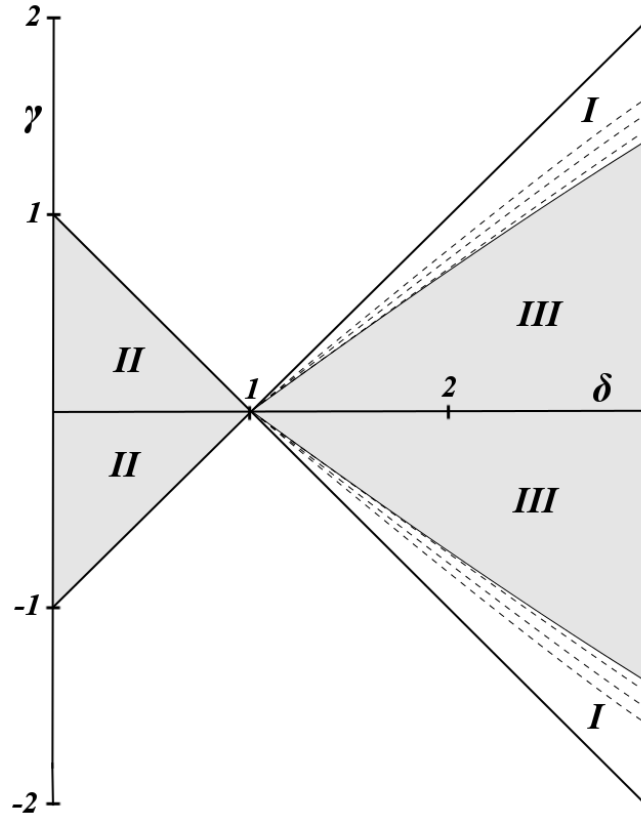


Рис. 7: Области существования и устойчивости конической прецессии симметричного спутника на круговой орбите.

В окрестности устойчивой конической прецессии существуют короткопериодические движения с периодом, близким к $2\pi/\omega_2$ и долгопериодические движения с периодом, близким к $2\pi/\omega_1$, частоты ω_1 и ω_2 которых вычисляются по формулам (2.9).

Далее, следуя П. 2.2.1, введём в окрестности устойчивой конической прецессии локальные координаты ξ_i, η_i , ($i = 1..2$) по формулам (2.10) и разложим гамильтониан (2.4) исходной системы в ряд (2.11) по степеням ξ_i, η_i . При

$k = 2, 3, 4$ будем иметь для членов ряда (2.11) следующие выражения:

$$\begin{aligned}
H_2 &= \frac{1}{2}C_{2000}\xi_1^2 + \frac{1}{2}C_{0200}\xi_2^2 + \frac{1}{2}C_{0020}\eta_1^2 + \frac{1}{2}\eta_2^2 - \xi_1\eta_2 + C_{0110}\xi_2\eta_1, \\
H_3 &= C_{2100}\xi_1^2\xi_2 + C_{2010}\xi_1^2\eta_1 + C_{0300}\xi_2^3 + C_{0210}\xi_2^2\eta_1 + C_{0120}\xi_2\eta_1^2, \\
H_4 &= C_{4000}\xi_1^4 + C_{0400}\xi_2^4 + \frac{1}{6}\xi_1^3\eta_2 + C_{2200}\xi_1^2\xi_2^2 + C_{2110}\xi_1^2\xi_2\eta_1 + \\
&\quad + C_{0310}\xi_2^3\eta_1 + C_{0220}\xi_2^2\eta_1^2.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

где постоянные коэффициенты C_{2000} , C_{0200} , C_{0020} и C_{0110} определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
C_1 &= (\delta - 1)^2, \quad C_2 = \frac{\sqrt{C_1 - \gamma^2}}{\gamma}, \quad C_{0110} = \frac{\delta^2 + \delta\gamma^2 + 2\delta + \gamma^2 - 1}{\gamma^2}, \\
C_{2000} &= 1 - \frac{\gamma^2 - \delta}{C_1}, \quad C_{0020} = \frac{C_1}{\gamma^2}, \quad C_{2100} = -\frac{1}{2}C_2, \quad C_{2010} = \frac{1}{2}C_2, \\
C_{0200} &= \frac{\delta^4 - (4 + 3\gamma^2)\delta^3 + (6 + \gamma^4 + 5\gamma^2)\delta^2 + (3\gamma^4 - 4 - \gamma^2)\delta - \gamma^2 + 1}{\gamma^2 C_1}, \\
C_{0300} &= -\frac{1}{2} \frac{-6\delta^2 - 3\gamma^2\delta^2 + \delta\gamma^4 + 6\delta + 2\delta^3 - 2 + \gamma^2 + 2\gamma^2\delta}{\gamma^2(\delta - 1)} C_2, \\
C_{0210} &= 2 \frac{\delta^2 - 3/4\gamma^2\delta - 2\delta - 1/4\gamma^2 + 1}{\gamma^2} C_2, \quad C_{0120} = -C_{0020}C_2, \\
C_{4000} &= \frac{\gamma^2\delta}{24C_1} - \frac{1}{24}, \quad C_{2110} = -\frac{1}{2}C_1, \quad C_{0220} = \frac{3}{2} \frac{C_1^2 - 2/3 C_1\gamma^2}{\gamma^4}, \\
C_{0400} &= \frac{1}{24\gamma^4 C_1} [36\delta^6 + (-48\gamma^2 - 216)\delta^5 + (540 + 15\gamma^4 + 152\gamma^2)\delta^4 + \\
&\quad + (12\gamma^4 - 720 - 128\gamma^2)\delta^3 + (540 - 7\gamma^6 - 48\gamma^2 - 62\gamma^4)\delta^2 + \\
&\quad + (112\gamma^2 + 28\gamma^4 - 216 - 9\gamma^6)\delta + 36 - 40\gamma^2 + 7\gamma^4], \\
C_{2200} &= \frac{1}{2} \frac{\delta^2 - (1/2\gamma^2 + 2)\delta - 1/2\gamma^2 + 1}{\gamma^2}, \\
C_{0310} &= -\frac{3}{\gamma^4} [\delta^4 + (-2/3\gamma^2 - 4)\delta^3 + (4/9\gamma^2 + 6)\delta^2 + \\
&\quad + \left(\frac{7}{18}\gamma^4 - 4 + \frac{10}{9}\gamma^2\right)\delta + 1/18\gamma^4 + 1 - \frac{8}{9}\gamma^2],
\end{aligned}$$

Выполним теперь линейную каноническую замену переменных (2.12), приводящую квадратичную часть гамильтониана (2.11) к нормальной форме (2.13).

Для случая конической прецессии данная замена имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{A_{11}\kappa_1(\delta-1)}{\omega_1\omega_2\gamma^2}x_1 + \frac{A_{12}\kappa_2(\delta-1)}{\omega_1\omega_2\gamma^2}x_2, \\
\xi_2 &= (\delta+1)\kappa_1y_1 + (\delta+1)\kappa_2y_2, \\
\eta_1 &= \frac{A_{21}\kappa_1}{(\delta-1)^2}y_1 + \frac{A_{22}\kappa_2}{(\delta-1)^2}y_2, \\
\eta_2 &= \frac{A_{31}\kappa_1}{\omega_1\omega_2\gamma^2}x_1 + \frac{A_{32}\kappa_2}{\omega_1\omega_2\gamma^2}x_2,
\end{aligned} \tag{2.24}$$

где

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \omega_2\delta^2 - 2\omega_2\delta + \omega_2 + \omega_2\delta\omega_1^2 - \omega_2\gamma^2 - \omega_2\omega_1^2, \\
A_{12} &= \omega_1\delta^2 - 2\omega_1\delta + \omega_1\delta\omega_2^2 - \omega_1\gamma^2 + \omega_1 - \omega_1\omega_2^2, \\
A_{21} &= \omega_1^2 - 4\delta^2 - \delta^2\gamma^2 - 3\delta\gamma^2 + 2\delta^3 + 2\delta - 2\omega_1^2\delta + \omega_1^2\delta^2, \\
A_{22} &= \omega_2^2 + \omega_2^2\delta^2 - 2\omega_2^2\delta - \delta^2\gamma^2 - 3\delta\gamma^2 + 2\delta^3 + 2\delta - 4\delta^2, \\
A_{31} &= \omega_2\omega_1^2 - \omega_2 - 2\omega_2\delta\omega_1^2 + \omega_2\omega_1^2\delta^2 - \omega_2\gamma^2\omega_1^2 - 3\omega_2\delta^2 - \\
&\quad - \omega_2\delta\gamma^2 + \omega_2\delta^3 + 3\omega_2\delta + \omega_2\gamma^2 - \omega_2\gamma^2\omega_1^2\delta, \\
A_{32} &= \omega_1\delta^3 + 3\omega_1\delta + \omega_1\gamma^2 + \omega_1\omega_2^2 + \omega_1\omega_2^2\delta^2 - 2\omega_1\delta\omega_2^2 - \omega_1 - \\
&\quad - \omega_1\gamma^2\omega_2^2 - \omega_1\gamma^2\omega_2^2\delta - 3\omega_1\delta^2 - \omega_1\delta\gamma^2,
\end{aligned}$$

$$\kappa_i = \frac{1}{(\delta-1)\gamma^2\omega_i}A(\omega_i), \quad (i = 1, 2)$$

$$\begin{aligned}
A(\omega) &= 2\omega^2 - \omega^4 - \gamma^2\delta^4 - 2\gamma^2\delta^3 + (8 - 2\omega^2)\gamma^2\delta^2 + \gamma^4\delta^2 + 3\gamma^4\delta + \\
&\quad + (5 + 3\omega^4 - 8\omega^2)\delta + (1 - 2\omega^2)\gamma^2 + (12\omega^2 - 3\omega^4 - 10)\delta^2 + \delta^5 + \\
&\quad + (-6 + 4\omega^2)\gamma^2\delta + (-5 + 2\omega^2)\delta^4 + (\omega^4 + 10 - 8\omega^2)\delta^3 - 1.
\end{aligned}$$

Далее, с помощью близкой к тождественной канонической унивалентной заменой переменных $x_i, y_i \rightarrow q_i, p_i$ ($i = 1, 2$) приведём Гамильтониан (2.4) исходной задачи к нормальной форме (2.14). Каноническая система уравнений с гамильтонианом (2.14) имеет семейство короткопериодических движений (2.15) и семейство долгопериодических движений (2.17). Используя формулы линейной замены (2.20), получаем в исходных переменных $\psi, \theta, p_\psi, p_\theta$ следующие

асимптотические выражения для указанных семейств периодических движений

$$\begin{aligned}
\psi &= c \frac{A_{12}\kappa_2(\delta-1)}{\omega_1\omega_2\gamma^2} \sin \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
\theta &= \frac{\gamma}{\delta-1} + c(\delta+1)\kappa_2 \cos \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_\psi &= p_{\psi_0} + c \frac{A_{22}\kappa_2}{(\delta-1)^2} \cos \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_\theta &= c \frac{A_{32}\kappa_2}{\omega_1\omega_2\gamma^2} \sin \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_{\psi_0} &= \frac{\gamma\delta\sqrt{\delta^2 - 2\delta - \gamma^2 + 1}}{(\delta-1)^2}.
\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$\begin{aligned}
\psi &= c \frac{A_{11}\kappa_1(\delta-1)}{\omega_1\omega_2\gamma^2} \sin \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
\theta &= \frac{\gamma}{\delta-1} + c(\delta+1)\kappa_1 \cos \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_\psi &= p_{\psi_0} + c \frac{A_{21}\kappa_1}{(\delta-1)^2} \cos \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_\theta &= c \frac{A_{31}\kappa_1}{\omega_1\omega_2\gamma^2} \sin \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_{\psi_0} &= \frac{\gamma\delta\sqrt{\delta^2 - 2\delta - \gamma^2 + 1}}{(\delta-1)^2}.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

где частоты $\Omega_{1,2}$ вычисляются по формулам (2.18) и (2.16). Выражения (2.21) соответствуют семейству короткопериодических движений с периодом $T_2 = 2\pi/\Omega_2$, которое будем далее именовать K_s . Выражения (2.22) соответствуют семейству долгопериодических движений с периодом $T_1 = 2\pi/\Omega_1$

2.2.4. Периодические движения, рождающиеся из гиперболоидальной прецессии спутника

Напомним, что гиперболоидальная прецессия спутника задаётся выражениями (2.8) и соответствует стационарному движению, при котором ось динамической симметрии спутника описывает в абсолютном пространстве гиперболоид вращения (Рис. 8).

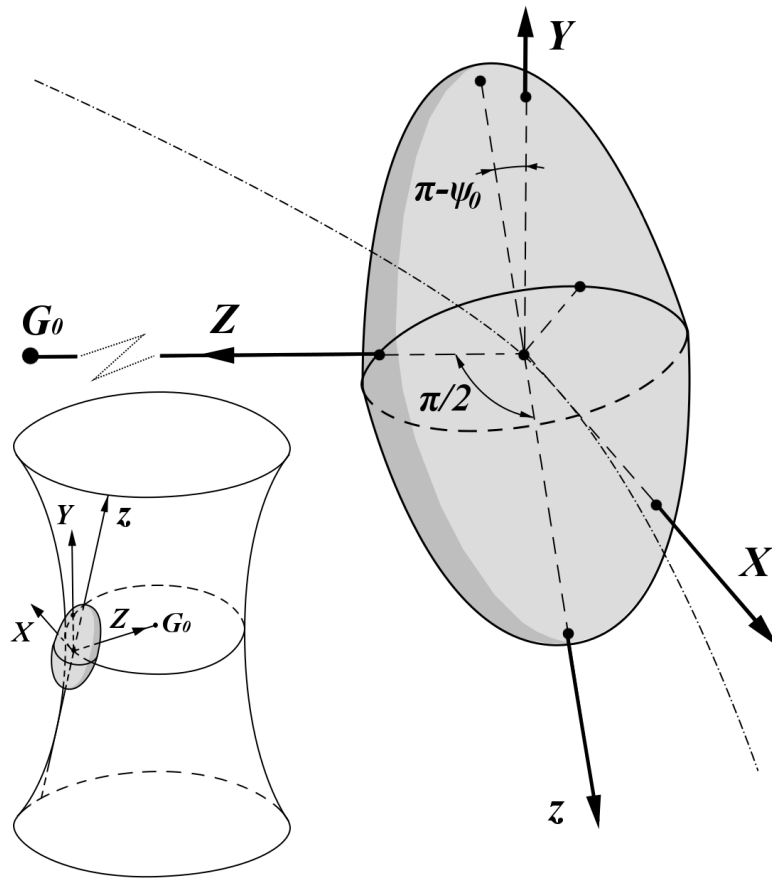


Рис. 8: Гиперболоидальная прецессия спутника. G_0 - притягивающий центр.

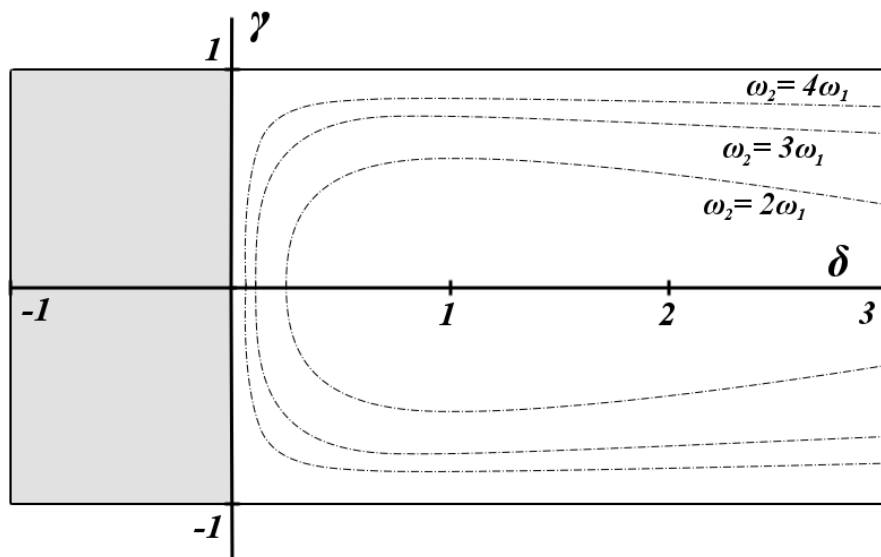


Рис. 9: Области существования и устойчивости гиперболоидальной прецессии симметричного спутника на грузовой орбите. Гиперболоидальная прецессия существует при $|\gamma| \leq 1$ и устойчива при $\delta > 0$. Пунктирными линиями показаны кривые резонансов третьего, четвёртого и пятого порядков.

Если $\delta > 0$, то гиперболоидальная устойчива по Ляпунову [3]. На Рис. 9 в области допустимых значений параметров показаны подобласти устойчивости и неустойчивости гиперболоидальной прецессии. Подобласть, закрашенная серым цветом, соответствует неустойчивой гиперболоидальной прецессии, а незакрашенная подобласть - устойчивой гиперболоидальной прецессии.

В окрестности устойчивой гиперболоидальной прецессии существуют короткопериодические движения с периодом, близким к $2\pi/\omega_2$ и долгопериодические движения с периодом, близким к $2\pi/\omega_1$, частоты ω_1 и ω_2 которых вычисляются по формулам (2.9). Для построения указанных периодических движений введём в окрестности устойчивой гиперболоидальной прецессии локальные координаты ξ_i, η_i , ($i = 1..2$) по формулам (2.10) и разложим гамильтониан (2.4) исходной системы в ряд (2.11) по степеням ξ_i, η_i . При $k = 2, 3, 4$ будем иметь для членов ряда (2.11) следующие выражения:

$$H_2 = 1/2 \xi_1^2 + \gamma \eta_2 \xi_1 + 1/2 \eta_2^2 + 1/2 \delta \xi_2^2 + 1/2 \eta_2^2 \quad (2.27)$$

$$H_3 = -\eta_2 \sin(\psi_0) \xi_1 \xi_2 + 1/2 \sin(\psi_0) \xi_1^2 \eta_2 - 1/2 \sin(\psi_0) \gamma \xi_2^2 \xi_1 \quad (2.28)$$

$$H_4 = 1/2 \eta_2^2 \xi_2^2 + (1/2 \gamma \xi_2 \xi_1^2 + 1/2 \gamma \xi_2^3) \eta_2 - 1/6 \gamma \xi_1^3 \eta_2 - 1/24 \xi_1^4 + \quad (2.29)$$

$$+ 1/4 \gamma^2 \xi_2^2 \xi_1^2 + (-1/6 \delta + 1/8 \gamma^2) \xi_2^4$$

Следуя П. 2.2.1, приведём теперь квадратичную часть гамильтониана (2.11) к нормальной форме (2.13), выполнив следующую каноническую замену переменных

$$\xi_1 = \frac{\kappa_1 (\delta - \omega_1^2) x_1}{\omega_1} + \frac{\kappa_2 (-\omega_2^2 + \delta) x_2}{\omega_2}, \quad \xi_2 = \kappa_1 \gamma y_1 + \kappa_2 \gamma y_2,$$

$$\eta_1 = \kappa_1 (\delta - \omega_1^2) y_1 + \kappa_2 (\delta - \omega_2^2) y_2, \quad \eta_2 = -\frac{\kappa_1 \delta \gamma x_1}{\omega_1} - \frac{\kappa_2 \delta \gamma x_2}{\omega_2}, \quad (2.30)$$

$$\kappa_i = \sqrt{\frac{\omega_i}{\omega_i^4 + \gamma^2 \delta - 2 \delta \omega_i^2 + \delta^2}}, \quad i = 1, 2$$

Выражения для постоянных коэффициентов h_{n_1, n_2, m_1, m_2} гамильтониана (2.13), соответствующие случаю гиперболоидальной прецессии, приведены в Приложении Б.2.

Далее, близкой к тождественной канонической унивалентной заменой переменных $x_i, y_i \rightarrow q_i, p_i$ ($i = 1, 2$) приведём функцию Гамильтона (2.4) исходной системы к нормальной форме (2.14), где постоянные коэффициенты a_{20}, a_{11}, a_{02} вычисляются по следующим формулам

$$a_{20} = f(\omega_1, \omega_2), a_{02} = f(\omega_2, \omega_1), a_{11} = \frac{a_{11}^*}{a_{11}^{**}}, \quad (2.31)$$

где

$$f(u, v) = \frac{(20v^2 - 11)u^6 + (10v^4 - 46v^2 + 30)u^4}{16u^8 - 36u^6v^2 + 24u^4v^4 - 4v^6u^2} - \frac{(2v^6 + 6v^4 - 24v^2 + 15)u^2 + 4u^8 - 3v^6 + 6v^4 - 3v^2}{16u^8 - 36u^6v^2 + 24u^4v^4 - 4v^6u^2},$$

$$a_{11}^* = (2\omega_2^2 + 6)\omega_1^8 + (34\omega_2^4 - 40\omega_2^2 - 12)\omega_1^6 + (34\omega_2^6 - 112\omega_2^4 + 84\omega_2^2 + 6)\omega_1^4 + (2\omega_2^8 - 40\omega_2^6 + 84\omega_2^4 - 48\omega_2^2)\omega_1^2 + 6\omega_2^4 - 12\omega_2^6 + 6\omega_2^8,$$

$$a_{11}^{**} = 4\omega_2\omega_1^9 - 25\omega_2^3\omega_1^7 + 42\omega_2^5\omega_1^5 - 25\omega_2^7\omega_1^3 + 4\omega_2^9\omega_1.$$

Каноническая система уравнений с гамильтонианом (2.14) имеет семейство короткопериодических движений (2.15) и семейство долгопериодических движений (2.17). Используя формулы линейной замены (2.20), получаем в исходных переменных $\psi, \theta, p_\psi, p_\theta$ следующие асимптотические выражения для указанных семейств периодических движений

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + c \kappa_2 \frac{\delta - \omega_2^2}{\omega_2} \sin \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\ p_\psi &= c \kappa_2 (\delta - \omega_2^2) \cos \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\ \theta &= \theta_0 + c \kappa_2 \gamma \cos \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\ p_\theta &= p_{\theta_0} - c \frac{\kappa_2 \delta \gamma}{\omega_2} \sin \Omega_2(\nu - \nu_0) + O(c^2), \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}
\psi &= \psi_0 + c \kappa_1 \frac{\delta - \omega_1^2}{\omega_1} \sin \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_\psi &= c \kappa_1 (\delta - \omega_1^2) \cos \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
\theta &= \theta_0 + c \kappa_1 \gamma \cos \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2), \\
p_\theta &= p_{\theta_0} - c \frac{\kappa_1 \delta \gamma}{\omega_1} \sin \Omega_1(\nu - \nu_0) + O(c^2),
\end{aligned} \tag{2.33}$$

где частоты $\Omega_{1,2}$ вычисляются по формулам (2.18) и (2.16). Выражения (2.21) соответствуют семейству короткопериодических движений с периодом $T_2 = 2\pi/\Omega_2$, которое будем далее именовать Γ_s . Выражения (2.22) соответствуют семейству долгопериодических движений с периодом $T_1 = 2\pi/\Omega_1$

2.3. Аналитическое построение семейств

долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии в случае резонансов третьего и четвёртого порядков

Рассмотрим задачу об аналитическом построении семейств долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии динамически симметричного спутника в случае резонансов третьего и четвёртого порядков. В данном случае имеет место бифуркация периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии, и для их построения методика работы [54] неприменима. Следуя методике, развитой в работах [32, 63], опишем алгоритм аналитического построения указанных семейств.

2.3.1. Случай резонанса третьего порядка.

Если в системе имеет место резонанс третьего порядка $\omega_2 = 2\omega_1$, то, как было показано в [63], в зависимости от значений параметров в окрестности резонан-

са может существовать одно или два семейства долгопериодических движений. Опишем алгоритм аналитического построения указанных движений. С этой целью посредством канонической замены переменных $\psi, \theta, p_\psi, p_\theta \rightarrow q_1, q_2, p_1, p_2$ приведём гамильтониан (2.4) к нормальной форме

$$\begin{aligned} K = & \frac{1}{2}\omega_1 (q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2 (q_2^2 + p_2^2) + \\ & + \frac{1}{2}\alpha_1 \left(q_1 q_2 p_1 - \frac{1}{2}q_1^2 p_2 + \frac{1}{2}p_1^2 p_2 \right) + \\ & + \frac{1}{2}\alpha_2 \left(q_1 p_1 p_2 - \frac{1}{2}q_2 p_1^2 + \frac{1}{2}q_1^2 q_2 \right) + K^{(4)}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

где α_1 и α_2 - постоянные резонансные коэффициенты, зависящие от параметров задачи γ, δ . Каноническая замена, приводящая гамильтониан к виду (2.34), была построена методом Депри-Хори.

Выполним теперь каноническую замену переменных

$$q_1 = x_1, \quad q_2 = \frac{\alpha_1 x_2 + \alpha_2 y_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}, \quad p_1 = y_1, \quad p_2 = \frac{\alpha_1 y_2 - \alpha_2 x_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}},$$

которая приводит гамильтониан (2.34) к виду

$$K^I = \frac{1}{2}\omega_1 (\xi_1^2 + \eta_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2 (\xi_2^2 + \eta_2^2) + B_{21} [\xi_2 (\eta_1^2 - \xi_1^2) - 2\eta_2 \xi_1 \eta_1] + K_{II}^4, \quad (2.35)$$

где B_{21} - резонансный коэффициент

$$B_{21} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}, \quad (2.36)$$

в случае точного резонанса $\omega_2 = 2\omega_1$ принимающий вид

$$B_{21} = \sqrt{\frac{(3\omega_1^2 - 1)^2 (4\omega_1^2 - 1)}{3\omega_1^5}}. \quad (2.37)$$

Введём новое время τ по формуле $\tau = \omega_1 t$ и выполним масштабирующую каноническую замену переменных

$$\xi_1 = \varepsilon \alpha x_1, \quad \xi_2 = \varepsilon \alpha x_2, \quad \eta_1 = \varepsilon \alpha y_1, \quad \eta_2 = \varepsilon \alpha y_2 \quad (2.38)$$

с валентностью $n = \frac{1}{\varepsilon^2 \alpha^2}$. Замена (2.38) приводит гамильтониан (2.35) к виду

$$K^{II} = \frac{1}{2}(2 + \mu)(x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) + \varepsilon \frac{\sqrt{2}}{4}[x_2(y_1^2 - x_1^2) - 2y_2x_1y_1] + O_4, \quad (2.39)$$

где $\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} - 2$, ε - малые параметры (коэффициент невязки частот и масштабный коэффициент), $a = \frac{\omega_1 \sqrt{2}}{4B_{21}}$.

Канонические уравнения с гамильтонианом (2.39) имеют короткопериодические движения вида

$$\begin{aligned} x_2 &= \sqrt{C} \sin \Omega(\tau + \tau_0) + O(\varepsilon), \\ y_2 &= \sqrt{C} \cos \Omega(\tau + \tau_0) + O(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где $\Omega = 2 + \mu + O(\varepsilon^2)$, а C - произвольная постоянная. Если выполнено неравенство $|\mu| < \varepsilon \sqrt{2C}$, то движения (2.40) орбитально устойчивы в линейном приближении, если же $|\mu| > \varepsilon \sqrt{2C}$, то - орбитально неустойчивы. Последнее неравенство задаёт область параметрического резонанса, границы которой определяются уравнением

$$\mu^2 = 2\varepsilon^2 C. \quad (2.41)$$

Для того, чтобы получить уравнения границы (2.41) в пространстве исходных параметров задачи γ , δ , h , выразим постоянную C , коэффициент невязки частот μ и малый параметр ε через ω_2 , ω_1 и константу энергии h . Константа энергии h^* системы с гамильтонианом (2.39) связана с константой энергии h исходной системы с гамильтонианом (2.4) и постоянной C следующими соотношениями

$$h^* = nh = \frac{8B_{21}^2 h}{\varepsilon^2 \omega_1} = \frac{1}{2}(2 + \mu)C + O(\varepsilon^2). \quad (2.42)$$

Второе равенство в (2.42) получается подстановкой (2.40) в (2.39). Подставляя выражение для коэффициента невязки частот (2.41) в (2.42) и выражая резонансный коэффициент B_{21} через частоты ω_1 и ω_2 , получим уравнение для границы области параметрического резонанса в следующем виде:

$$\omega_2(\omega_2 - 2\omega_1)^2 = 32B_{21}^2 \omega_1 h + O(h^2). \quad (2.43)$$

Уравнение границы области параметрического резонанса в исходных параметрах будем искать в виде ряда

$$\gamma(\delta, h) = \gamma_0(\delta) + \gamma_1(\delta)\sqrt{h} + O(h), \quad (2.44)$$

где выражение

$$\gamma_0(\delta) \pm \frac{\sqrt{-4\delta^3 + 17\delta^2 - 4\delta}}{5\delta} \quad (2.45)$$

задаёт зависимость γ от δ при точном резонансе $\omega_2 = 2\omega_1$. Подставляя ряд (2.44) в (2.43) и приравнивая коэффициенты при равных степенях h , определим член ряда $\gamma_1(\delta)$ и получим приближённое уравнение границы области параметрического резонанса в пространстве параметров h, γ, δ :

$$\gamma(\delta, h) = \gamma_0(\delta) \pm \frac{|3\delta - 2|\sqrt{6^4/5 + 5\delta}}{25\sqrt{\delta(4 - \delta)}}\sqrt{h} + O(h). \quad (2.46)$$

Поверхность, задаваемая уравнением (2.46), показана на Рис. 10. При значениях γ, δ , близких к резонансным, и малом отклонении Δh константы энергии от её значения на гиперболоидальной прецессии, данная поверхность хорошо аппроксимирует границы области параметрического резонанса, что подтверждается совпадением результатов аналитического построения и численного анализа, выполненного в работе [84].

Для нахождения семейств долгопериодических движений воспользуемся методикой, изложенной в работе А. П. Маркеева [63]. Введём канонические полярные координаты по формулам

$$x_i = \sqrt{2r_i} \sin \phi_i, y_i = \sqrt{2r_i} \cos \phi_i, (i = 1, 2)$$

и выполним каноническую замену переменных

$$\phi_1 = Q_1, \phi_2 = Q_2 + 2Q_1, r_1 = P_1 - 2P_2, r_2 = P_2$$

в результате чего приведём гамильтониан (2.39) к виду

$$K^{III} = P_1 + \mu P_2 + \varepsilon(P_1 + 2P_2)\sqrt{P_2} \sin Q_2 + O(\varepsilon^2), \quad (2.47)$$

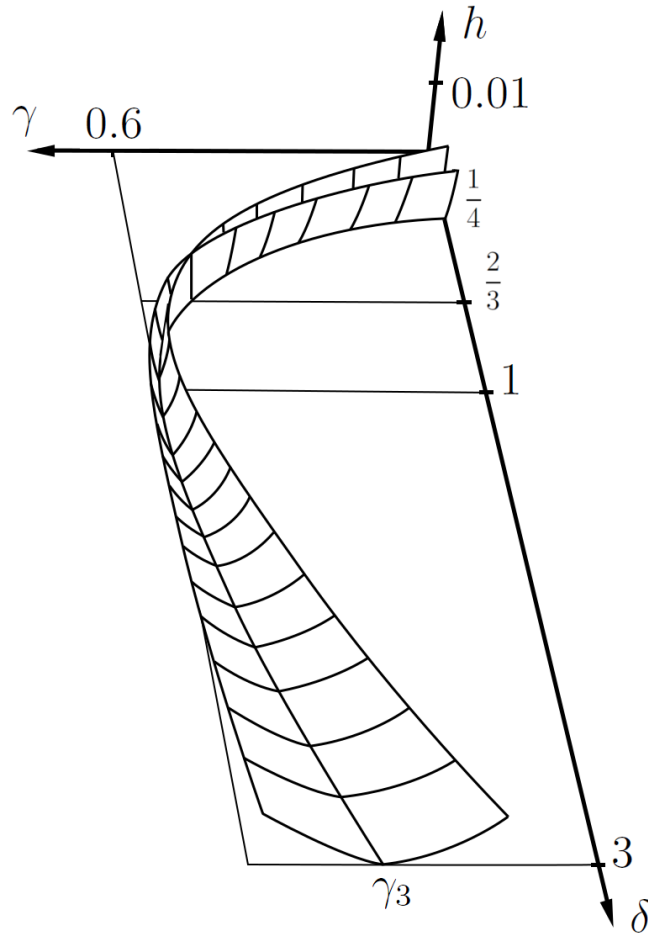


Рис. 10: Граница области параметрического резонанса (2.46) в пространстве параметров h, γ, δ . Через γ_3 обозначена кривая резонанса третьего порядка.

где, $P_1 \geq 2P_2$. Система с гамильтонианом (2.47) имеет первый интеграл $P_1 = C$, где C - постоянный параметр, связанный с исходными параметрами задачи через соотношения (2.42). Используя первый интеграл и отбрасывая в (2.47) члены выше первой степени по ε , получим приближённую систему с гамильтонианом

$$K^{IV} = \mu P_2 + \varepsilon(C - 2P_2)\sqrt{P_2} \sin Q_2, \quad (2.48)$$

Приравняв правые части (2.48) нулю, получим соотношения

$$\begin{aligned} \dot{Q}_2 &= \frac{\partial K^{IV}}{\partial P_2} = \varepsilon \left(\frac{C}{2\sqrt{P_2}} - 3\sqrt{P_2} \right) \sin Q_2 + \mu = 0, \\ \dot{P}_2 &= -\frac{\partial K^{IV}}{\partial Q_2} = -\varepsilon \left(C\sqrt{P_2} - 2P_2^{3/4} \right) \cos Q_2 = 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

из которых определяются следующие положения равновесия системы (2.48)

$$Q_2^* = \frac{\pi}{2}, P_2^* = \frac{\mu + \sqrt{\mu^2 + 6\varepsilon^2 C}}{6\varepsilon}, \quad (2.50)$$

и

$$Q_2^* = -\frac{\pi}{2}, P_2^* = \frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 + 6\varepsilon^2 C}}{6\varepsilon}, \quad (2.51)$$

которым в исходной системе отвечают семейства долгопериодических движений спутника в окрестности гиперболоидальной прецессии при малых отклонениях параметров задачи от резонансных значений, лежащих на поверхности (2.46). Семейство, отвечающее положению равновесия (2.50), будем далее называть Γ_1 . Семейство, отвечающее положению равновесия (2.51), будем называть Γ_2 . В исходных переменных $\psi, \theta, p_\psi, p_\theta$ указанные семейства были получены в виде рядов по степеням параметра C . Выражения для данных рядов не приводятся в силу их громоздкости.

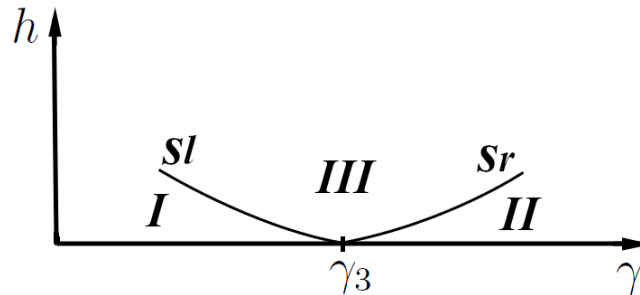


Рис. 11: Граница области параметрического резонанса (2.46) в пространстве параметров h, γ, δ . Через γ_3 обозначена кривая резонанса третьего порядка.

В зависимости от значений параметров μ, C, ε может существовать одно или оба положения равновесия (2.50), (2.51). Положение равновесия (2.50) существует при $\mu < \varepsilon\sqrt{2C}$, а положение равновесия (2.51) существует при $\mu > -\varepsilon\sqrt{2C}$.

На Рис. 11 при фиксированном значении δ показаны области существования семейств долгопериодических движений Γ_1, Γ_2 в окрестности резонансной кривой третьего порядка. Плоскость параметров γ, h разделена кривыми s_l и

s_r на три подобласти, которые будем обозначать I , II и III . В окрестности резонанса третьего порядка кривые s_1 и s_2 совпадают с границами области параметрического резонанса, задаваемыми соотношением (2.46). В областях I и III существует семейство орбитально устойчивых в линейном приближении долгопериодических движений Γ_1 а в областях II и III - семейство орбитально устойчивых в линейном приближении долгопериодических движений Γ_2 .

На границах s_l и s_r происходит бифуркация семейств периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии. Численный анализ показывает, что при переходе через границу s_l от семейства короткопериодических движений Γ_s отщепляется семейство долгопериодических движений Γ_2 , при чём семейство Γ_s становится орбитально неустойчивым. При переходе через границу s_2 семейство орбитально устойчивых в линейном приближении долгопериодических движений Γ_2 сливается с семейством короткопериодических движений Γ_s , которое становится орбитально устойчивым в линейном приближении. Численному исследованию бифуркации указанных семейств посвящена Глава 4 настоящей диссертационной работы.

2.3.2. Случай резонанса четвёртого порядка

Пусть в системе имеет место точный резонанс четвёртого порядка $\omega_2 = 3\omega_1$. Полагая отклонение Δh постоянной энергии от её значения на гиперболоидальной прецессии малым, исследуем вопрос о существовании долгопериодических движений. В частности, ниже будет показано, что при указанном резонансе существуют три семейства долгопериодических движений и одно семейство короткопериодических движений спутника.

Следуя работам [32, 57], посредством унивалентной канонической замены переменных $\psi, \theta, p_\psi, p_\theta \rightarrow \xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2$ приведём гамильтониан (2.4) к нормальной

форме

$$\begin{aligned}
K = & \frac{1}{2}\omega_1 (q_1^2 + p_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2 (q_2^2 + p_2^2) + \\
& + \frac{1}{4}a_{20} (q_1^2 + p_1^2)^2 + \frac{1}{4}a_{11} (q_1^2 + p_1^2) (q_2^2 + p_2^2) + \frac{1}{4}a_{02} (q_2^2 + p_2^2)^2 - \\
& - \frac{B_{31}}{4} [q_1^2 (q_1 q_2 + 3p_2 p_1) - p_1^2 (p_2 p_1 + 3q_1 q_2)] + O_6.
\end{aligned} \quad (2.52)$$

где a_{20} , a_{11} , a_{02} - постоянные коэффициенты, вычисляющиеся по формулам

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{1}{560\omega_1^6} (678\omega_1^6 + 13\omega_1^4 - 20\omega_1^2 + 1), \\
a_{20} &= \frac{1}{320\omega_1^6} (118\omega_1^6 - 319\omega_1^4 + 60\omega_1^2 - 3), \\
a_{02} &= -\frac{1}{6720\omega_1^6} (906\omega_1^6 - 983\omega_1^4 - 220\omega_1^2 + 11),
\end{aligned}$$

а B_{31} - резонансный коэффициент, вычисляемый по формуле

$$B_{31} = \frac{1}{120} \frac{(1 - 15\omega_1^2 + 56\omega_1^4) \sqrt{-3 + 30\omega_1^2 - 27\omega_1^4}}{\omega_1^6}$$

Введём новое время τ по формуле $\tau = \omega_1 \nu$ и выполним масштабирующую каноническую замену переменных

$$q_i = \sqrt{\frac{\varepsilon\omega_1}{B_{31}}} x_i, p_i = \sqrt{\frac{\varepsilon\omega_1}{B_{31}}} y_i$$

с валентностью $n = \frac{B_{31}}{\varepsilon\omega_1}$, которая приводит гамильтониан (2.52) к виду [32]

$$\begin{aligned}
K^{II} = & \frac{1}{2}\omega_1 (x_1^2 + y_1^2) + \frac{1}{2}\omega_2 (x_2^2 + y_2^2) + \\
& + \frac{1}{4}\varepsilon a_{20} (x_1^2 + y_1^2)^2 + \frac{1}{4}\varepsilon a_{11} (x_1^2 + y_1^2) (x_2^2 + y_2^2) + \\
& + \frac{1}{4}\varepsilon a_{02} (x_2^2 + y_2^2)^2 - \\
& - \varepsilon [x_1^2 (x_1 x_2 + 3y_2 y_1) - y_1^2 (y_2 y_1 + 3x_1 x_2)] + O_6.
\end{aligned} \quad (2.53)$$

где ε - масштабный коэффициент. Отбросив в (2.53) члены порядка ε^2 и выше и введя канонические полярные координаты по формулам

$$x_i = \sqrt{2r_i} \sin \phi_i,$$

$$y_i = \sqrt{2r_i} \cos \phi_i,$$

получим укороченную систему с гамильтонианом

$$K^{II} = r_1 + 3r_2 + \varepsilon \left\{ a_{20}r_1^2 + a_{11}r_1r_2 + a_{02}r_2^2 + r_1^{3/2}\sqrt{r_2} \cos(\phi_1 - 3\phi_2) \right\} \quad (2.54)$$

и первым интегралом

$$3r_1 + r_2 = \text{const.}$$

Выполним ещё одну каноническую замену переменных

$$\psi = \phi_1, \quad \theta = \phi_2 - 3\phi_1, \quad J = 3r_2 + r_1, \quad R = r_2,$$

которая приводит укороченную систему с гамильтонианом (2.54) к виду [32]

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\tau} = \frac{dF}{dR} &= \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} \frac{\sqrt{J-3R}(J-12R)\cos\theta}{\sqrt{R}} + \sigma J + \mu_2 R \right\}, \\ \frac{dR}{d\tau} = \frac{dF}{d\theta} &= \varepsilon \sqrt{R} (J-12R)^{3/2} \sin\theta \end{aligned} \quad (2.55)$$

с гамильтонианом

$$F = J + \varepsilon \left\{ a_{20}J^2 + \sigma JR + \mu_2 R^2 + \varepsilon \sqrt{R} (J-12R)^{3/2} \cos\theta \right\}$$

и первым интегралом $J = J_0 = \text{const}$, где $\sigma = a_{11} - 6a_{20}$, $\mu_2 = a_{02} + 9a_{20} - 3a_{11}$ - постоянные коэффициенты.

Система (2.55) имеет положения равновесия, отвечающие периодическим движениям в исходной системе с гамильтонианом (2.4) и определяемые формулами

$$\theta = \frac{\pi}{2} [1 - \text{sign}((12x_* - 1)(\sigma + 2\mu_2 x_*))], \quad R = x_* J_0$$

где x_* - действительный корень уравнения

$$(432 + 16\mu_2)x^3 + (16\mu_2\sigma - 216)x^2 + (4\sigma^2 + 27)x - 1 = 0. \quad (2.56)$$

В зависимости от значений параметров σ и μ_2 , зависящих от исходных параметров γ , δ , h , уравнение (2.56) может иметь один или три действительных корня. Анализ, проведённый в данной диссертационной работе, показал, что

в рассматриваемой задаче при значениях параметров, отвечающих резонансу четвёртого порядка, уравнение (2.56) всегда имеет 3 действительных корня и, следовательно, система (2.55) имеет три положения равновесия. В исходных переменных указанным положениям равновесия отвечают три семейства долгопериодических движений с периодами T_2, T_3, T_4 ($T_2 \neq T_3 \neq T_4$), которые мы будем обозначать через Γ_2, Γ_3 и Γ_4 . Указанные семейства получены в виде рядов по степеням малого параметра - постоянной энергии h исходной системы с гамильтонианом (2.4). Выражения для данных рядов не приводятся ввиду их громоздкости. Постоянная h связана с масштабным коэффициентом соотношением $h^* = \frac{hB_{31}}{\varepsilon\omega_2}$, где h^* - постоянная энергии системы (2.55).

Глава 3

Численное построение семейств периодических движений, рождающихся из регулярных прецессии спутника

Аналитическое представление семейств периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной, цилиндрической и конической прецессий симметричного спутника, полученное в Главе 2, справедливо лишь при малых значениях амплитуды s или, иначе говоря, малых отклонениях Δh постоянной энергии h от её значения на соответствующей регулярной прецессии. Для построения указанных семейств при произвольных значениях постоянной энергии h и всех допустимых значениях параметров γ и δ необходимо воспользоваться численным методом. В данной главе настоящей диссертационной работы семейства периодически движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника, были численно продолжены по параметрам до границ своих областей существования с помощью метода, описание которого дано в Главе 1. Основные результаты данной главы опубликованы в [84, 85, 87, 89–91].

Следуя Главе 2, будем обозначать через Γ_s , Z_s и K_s семейства короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной, цилиндрической и конической прецессий симметричного спутника, соответственно. Через Γ_i ($i = 1..4$) будем обозначать семейства долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии в случае резонансов третьего и четвёртого порядков.

3.1. О методике численного построения областей существования семейств периодических движений

Численное построение семейств Γ_s, Γ_i ($i=1..4$), Z_s, K_s производилось по следующей схеме. Пространство параметров задачи γ, δ, h разбивалось трёхмерной сеткой с шагом 0.01 по параметру γ , 0.25 по параметру δ и 0.01 по постоянной энергии с началом отсчёта в точке 0, 0, 0. На первом этапе для фиксированных значений γ и δ при малых отклонениях Δh постоянной энергии h от её значения для соответствующей регулярной прецессии с помощью аналитического представления, полученного в Главе 2, строились начальные условия опорных движений, принадлежащих к семействам $\Gamma_s, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4, Z_s, K_s$. Данные начальные условия затем численно продолжались по постоянной энергии h до ближайшего узла сетки. На следующем этапе указанные движения численно продолжались по постоянной энергии h до границ областей существования, достижения которых определялось критерием завершения семейства. Затем, при фиксированных значениях постоянной энергии h полученные движения численно продолжались по параметрам γ и δ до границ своих областей существования.

Для численного продолжения семейств периодических движений между двумя заданными точками в пространстве параметров задачи γ, δ, h применялся следующий алгоритм, блок-схема которого показана на Рис. 12. Пусть заданы координаты начальной $P_s(\gamma^*, \delta^*, h^*)$ и конечной $P_e(\gamma, \delta, h)$ точек в пространстве параметров задачи, а также T^* -периодическое движение, отвечающее точке P_s и задаваемое вектором

$$Z^* = [[\psi_0^*, \theta_0^*, p_{\psi_0}^*, p_{\theta_0}^*, T^*], [\gamma^*, \delta^*, h^*], [\Delta s, \alpha, \beta]], \quad (3.1)$$

где $\psi_0^*, \theta_0^*, p_{\psi_0}^*, p_{\theta_0}^*$ - начальные условия данного периодического движения, а Δs и α, β - длина шага в пространстве параметров и углы, связанные с прираще-

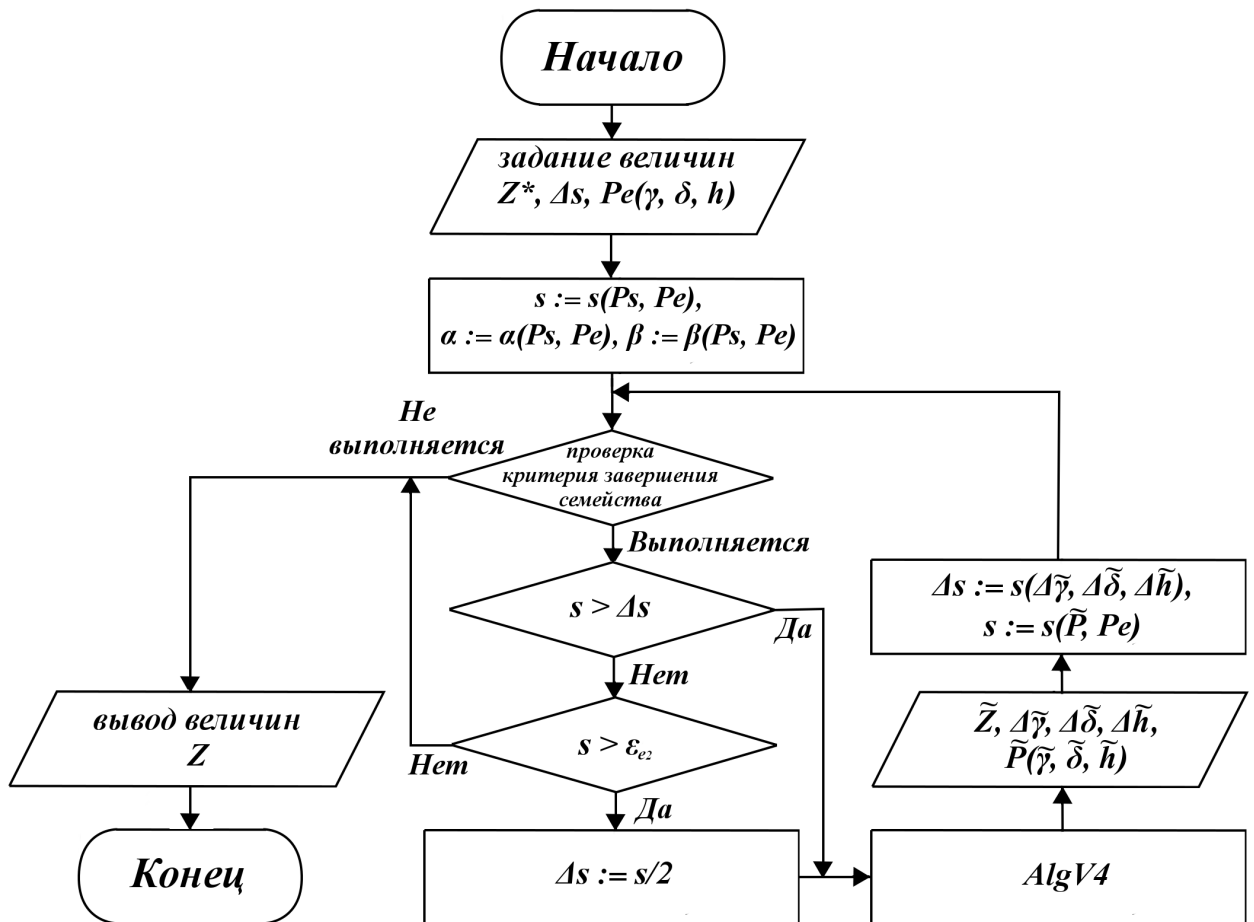


Рис. 12: Блок-схема алгоритма численного продолжения семейства периодических движений между заданными точками трёхмерного пространства параметров. P_s - начальная точка в пространстве параметров, соответствующая периодическому движению с начальными данными Z^* . P_e - конечная точка в пространстве параметров, соответствующая периодическому движению с начальными данными Z . \tilde{P} - промежуточная точка, лежащая на отрезке $[P_s, P_e]$.

ниями параметров $\Delta\gamma, \Delta\delta, \Delta h$ по следующим формулам

$$\Delta\gamma = s \cos(\alpha) \sin(\beta), \quad \Delta\delta = s \cos(\alpha) \cos(\beta), \quad \Delta h = s \sin(\alpha). \quad (3.2)$$

На первом шаге алгоритма величина шага Δs принимается равной малой произвольной величине ε_{e2} . Углы α, β задают направление численного продолжения в трёхмерном пространстве задачи (Рис. 13-а).

Будем искать периодическое движение, отвечающее конечной точке P_e и задаваемое вектором

$$Z = [[\psi_0, \theta_0, p_{\psi_0}, p_{\theta_0}, T], [\gamma, \delta, h], [\Delta s, \alpha, \beta]], \quad (3.3)$$

где $\psi_0, \theta_0, p_{\psi_0}, p_{\theta_0}$ и T - начальные условия и период искомого движения. С этой целью по формулам

$$\alpha = \alpha(P_s, P_e) = \frac{h - h^*}{s}, \quad \beta = \beta(P_s, P_e) = \begin{cases} 0, & s \cos(\alpha) = 0 \\ \frac{\gamma - \gamma^*}{s \cos(\alpha)}, & s \cos(\alpha) \neq 0 \end{cases}$$

$$s = s(P_s, P_e) = \sqrt{(\gamma - \gamma^*)^2 + (\delta - \delta^*)^2 + (h - h^*)^2},$$

вычислим расстояние s в пространстве параметров задачи между точками P_s и P_e и углы α, β .

Далее, если удовлетворяются условия $s > \Delta s$ и (1.36), то по формулам (3.2) вычисляются величины приращений параметров $\Delta\gamma, \Delta\delta, \Delta h$ и выполняется процедура AlgV4, блок-схема (Рис. 1) и описание которой приведены в Параграфе 1.3. В результате выполнения указанной процедуры определяется начальные условия $\tilde{\psi}_0, \tilde{\theta}_0, \tilde{p}_{\psi_0}, \tilde{p}_{\theta_0}$ \tilde{T} -периодического движения, а также новые приращения параметров $\Delta\tilde{\gamma}, \Delta\tilde{\delta}, \Delta\tilde{h}$. В пространстве параметров задачи указанное периодическое движение отвечает точке $\tilde{P}(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{h})$, лежащей на отрезке $[P_s, P_e]$. Далее, по формулам

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta\tilde{\gamma})^2 + (\Delta\tilde{\delta})^2 + (\Delta\tilde{h})^2}, \quad s = s(\tilde{P}, P_e) = \sqrt{(\gamma - \tilde{\gamma})^2 + (\delta - \tilde{\delta})^2 + (h - \tilde{h})^2},$$

вычисляется новое значение шага Δs и расстояние s между точками \tilde{P} и P_e .

Выполнение процедуры AlgV4 повторяется, пока не будет удовлетворено условие $s > \Delta s$ или не произойдет завершение семейства, определяющееся критерием (1.36). В случае, если критерий (1.36) не выполнен, возвращаются начальные условия и значения параметров периодического движения, на котором произошло завершение семейства. В случае, если завершения не произошло, но было выполнено условие $s > \Delta s$, процедура AlgV4 повторяется с шагом $\Delta s = \frac{s}{2}$, пока не будет удовлетворено условие $s > \varepsilon_{e2}$. В результате выполнения указанной процедуры становится известно периодическое движение, задаваемое вектором (3.3) и соответствующее конечной точке P_e .

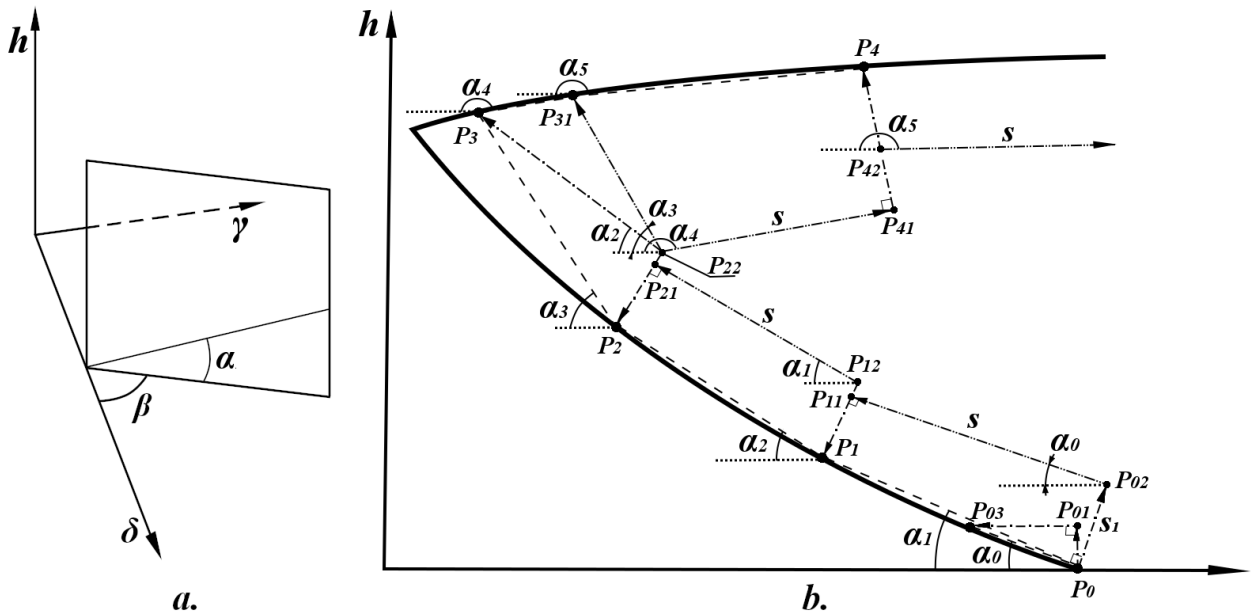


Рис. 13: Схема численного обхода границ областей существования семейства периодических движений в пространстве параметров задачи γ , δ , h .

В отдельных случаях для уточнения границ областей существования семейств периодических движений применялась методика, основанная на построении касательных к указанным границам (Рис. 13). Построение границ с помощью данной методики производится в фиксированном сечении пространства параметров задачи γ , δ , h , которое определяется углом β_0 между осью δ и плоскостью данного сечения (Рис. 13-а). В связи с тем, что при численном про-

должности семейств периодических движений вблизи границ их областей существования происходит падение точности вычислений, обход производится на фиксированном расстоянии s_1 от искомой границы. Блок-схема алгоритма, реализующего данную методику, показана на Рис. 14.

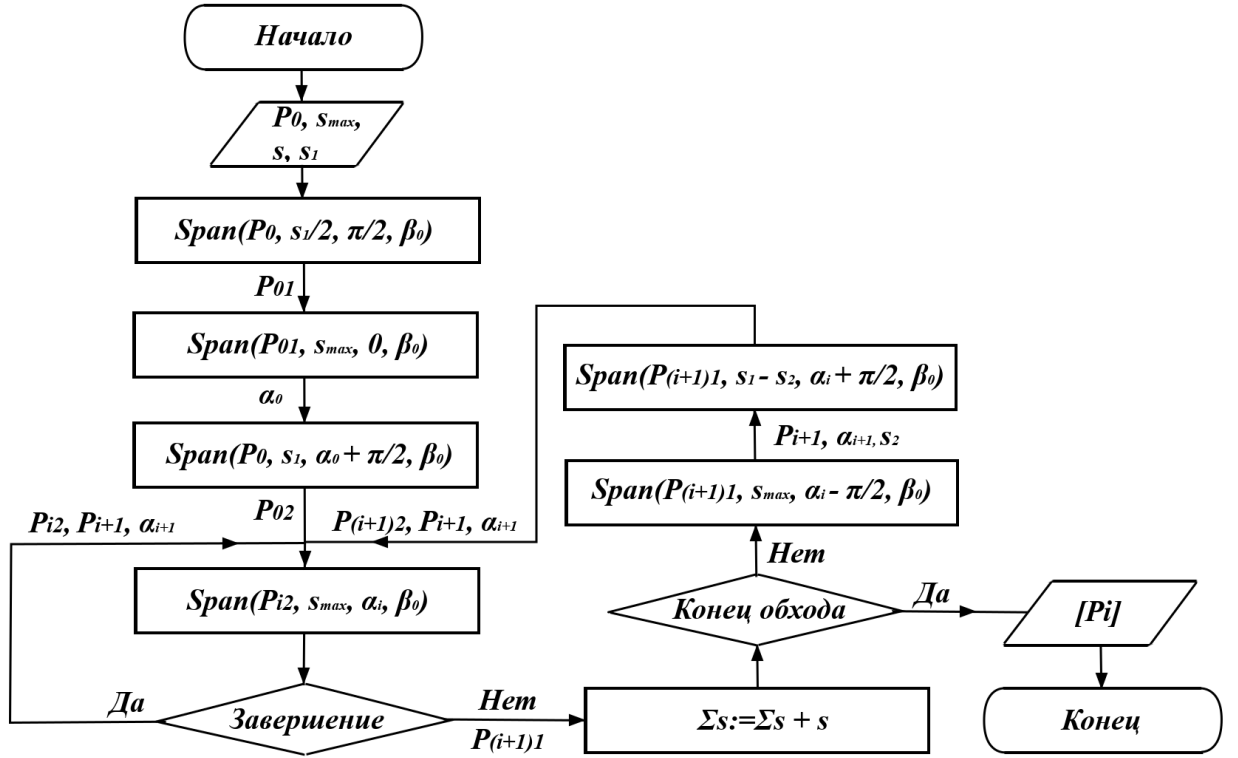


Рис. 14: Блок-схема алгоритма численного обхода границ областей существования семейства периодических движений.

Для начала расчёта по указанному алгоритму необходимо задать угол β_0 , определяющий сечение, в котором будет производиться обход, известную начальную точку границы P_0 , фиксированную длину шага s и расстояние s_1 . Далее будем считать, что угол между касательной к искомой границе в точке P_0 и плоскостью $\gamma - \delta$ лежит в пределах $(0, \pi/2)$. Для продолжения семейства периодических движений между точками пространства параметров задачи используется алгоритм Рис. 12, описание которого дано выше.

На первом шаге алгоритма периодическое движение, соответствующее точке P_0 , численно продолжается с шагом $s_1/2$ к точке P_{01} . Далее, периодическое

движение, соответствующее точке P_{01} , продолжается до завершения, в результате чего становится известна точка P_{03} , лежащая на искомой границе. Также становится известен угол α_0 между плоскостью $\gamma - \delta$ и отрезком $[P_0, P_{03}]$. Затем, в результате продолжения с начальной точки P_0 с шагом s_1 и углом $\alpha = \alpha_0 + \pi/2$ становится известна точка P_{02} , отстоящая от искомой границы на расстояние s_1 .

На i -том шаге алгоритма периодическое движения, соответствующее точке P_{i2} , продолжается с шагом s и углом $\alpha = \alpha_i$. В случае, если процедура продолжения заканчивается по критерию завершения семейства, становится известна новая точка искомой границы P_{i+1} и угол α_{i+1} , после чего шаг повторяется с точки P_{i2} . Если при продолжении из точки P_{i2} завершения семейства не происходит, то становится известна точка P_{i1} . Затем, периодическое движение, соответствующее данной точке, продолжается с углом $\alpha = \alpha_i - \pi/2$ до завершения, в результате чего становится известна новая точка искомой границы P_{i+1} и новый угол α_{i+1} . Далее, периодическое движение, соответствующее точке P_{i1} , продолжается с шагом $s_1 - s_2$ и углом $\alpha = \alpha_i + \pi/2$, где s_2 - длина отрезка $[P_{i1}, P_i]$. В результате становится известна точка $P_{(i+1)2}$ и шаг повторяется.

В случае, если граница области предполагается замкнутой кривой, завершение обхода происходит в случае, если точка P_{i2} оказывается в s -окрестности точки P_{02} . Если искомая граница не является замкнутой, то завершение происходит по достижению заданной суммарной длины обхода Σs . В результате выполнения описанной процедуры становится известен набор точек P_0, P_1, \dots, P_N искомой границы области существования периодического движения.

3.2. Семейства короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника

В данном параграфе представлены результаты численного продолжения семейств K_s , Z_s и Γ_s короткопериодических движений, рождающихся из конической, цилиндрической и гиперболоидальной прецессии симметричного спутника, соответственно. В качестве опорных движений использовались аналитические выражения, полученные для указанных семейств в Параграфах 2-4 Главы 2. На основе проведённого численного анализа для всех допустимых значениях параметров задачи γ , δ , h из области $\gamma \geq 0$, $0 < \delta \leq 3.0$, $h < 3.0$ были построены границы областей существования данных семейств периодических движений.

На Рис. 15 показаны области существования семейств K_s , Z_s , Γ_s короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника, построенные в плоскости параметров γ , h при фиксированных значениях параметра δ . На данном рисунке кривые S_0^K , S_0^Z и S_0^Γ определяют уровень энергии исходной канонической системы, при котором существует коническая, цилиндрическая и гиперболоидальная прецессия, соответственно. Кривые S_i^K , S_i^Z и S_i^Γ отвечают значениям параметров, при которых происходит бифуркация, либо завершение семейств K_s , Z_s и Γ_s . Вопрос о бифуркации указанных семейств рассмотрен в Главе 4 настоящей диссертационной работы.

При значениях $0 < \delta < 1.0$ области существования семейств K_s , Z_s , Γ_s имеют вид, показанный на Рис. 15-а. Область существования семейства Z_s короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии спутника, обозначена серым цветом. Данная область ограничена снизу кривой S_0^Z , соответствующей цилиндрической прецессии спутника, а сверху - кривой S_1^Z , на которой семейство Z_s завершается.

Семейство короткопериодических движений Γ_s , рождающихся из гипербо-

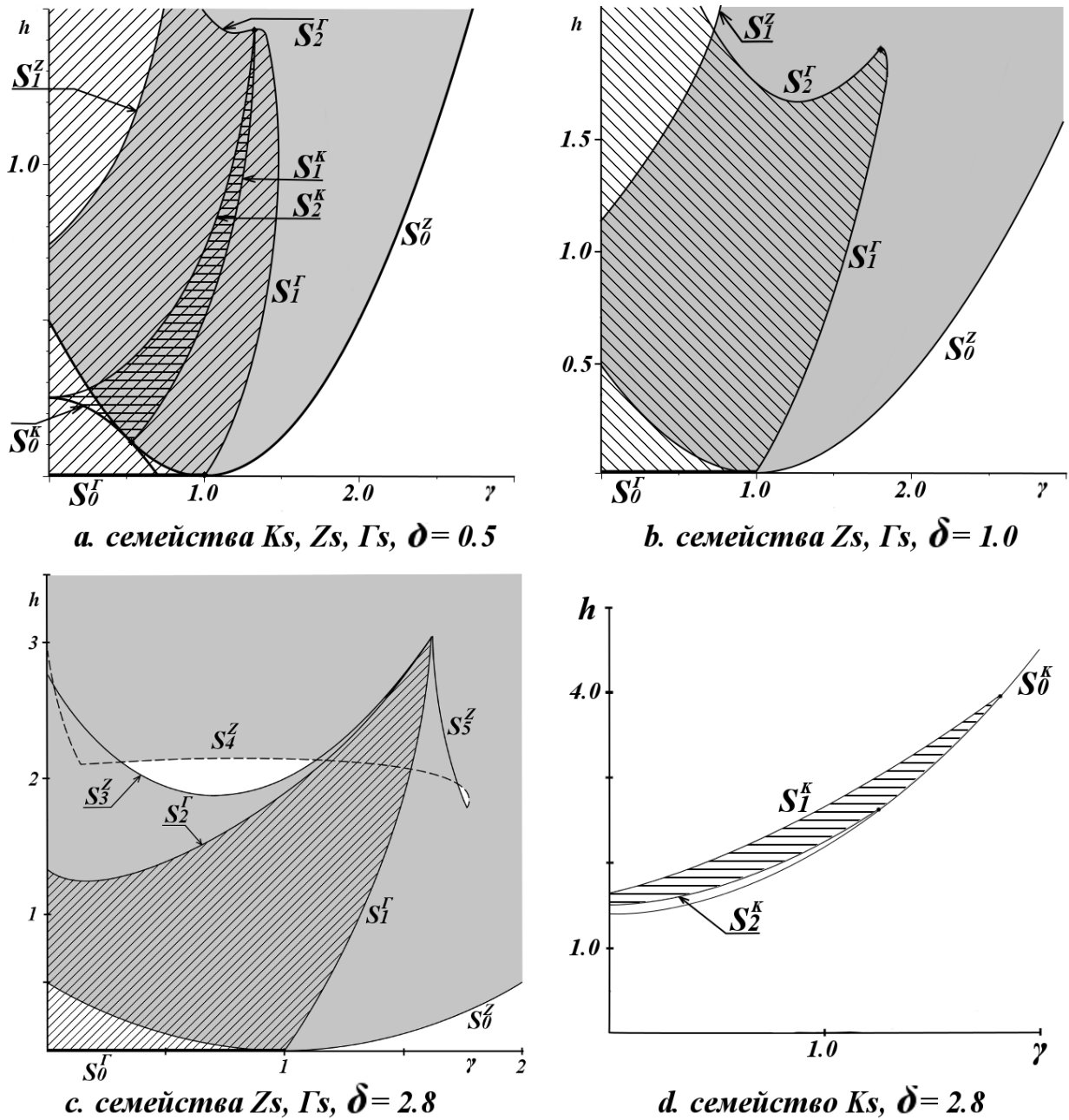


Рис. 15: Области существования семейств K_s, Z_s, Γ_s короткопериодических движений, рождающихся из конической, цилиндрической и гиперболоидальной прецессии спутника, построенные в плоскости параметров γ, h при фиксированных значениях $\delta = 0,5$ (a), $\delta = 1.0$ (b) и $\delta = 2.8$ (c, d). Серым цветом показана область существования семейства Z_s , горизонтальной штриховкой - семейства K_s , наклонной штриховкой - область существования семейства Γ_s .

лоидальной прецессии спутника, существует в области, обозначенной наклонной штриховкой и ограниченной кривыми S_0^Γ , S_1^Γ и S_2^Γ (Рис. 15-а). На границе S_2^Γ происходит завершение данного семейства, а на границе S_1^Γ , исходящей из точки $\gamma = 1.0$, имеет место бифуркация – семейство Γ_s перестаёт существовать, сливаясь с семейством Z_s короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии спутника.

Область существования семейства короткопериодических движений K_s , рождающихся из конической прецессии спутника, показана на Рис. 15-а горизонтальной штриховкой. Данная область ограничена кривыми S_0^K , S_1^K и S_2^K . Граница S_2^K , на которой происходит завершение семейства K_s , исходит из точки P_2 , лежащей на пересечении кривой S_0^K и оси h . Граница S_1^K исходит из точки P_1 касания кривых S_0^Z и S_0^K . На указанной границе имеет место бифуркация: семейство K_s завершается, сливаясь с семейством Z_s короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии. С приближением значения параметра δ к $\delta = 1.0$ точка P_2 приближается к точке P_1 , а S_2^K – к кривой S_1^K . При значении $\delta = 1.0$ ($J_3/J_1 = 4/3$) области существования семейств Z_s и K_s принимают вид, показанный на Рис. 15-б, а область существования семейства K_s вырождается и не может быть построена численно с использованием метода, применяемого в данной диссертационной работе.

При значениях $1.0 < \delta < 3.0$ вид области существования семейства Z_s короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии спутника, сохраняется аналогичным рассмотренному выше случаю $0 < \delta \leq 1.0$, однако, при фиксированном значении $\delta = 2.8$ было численно установлено, что данная область уже не является односвязной. Оказалось, что семейство Z_s не может быть продолжено в подобласти, ограниченные кривыми S_i^Z ($i = 3..5$) и обозначенные на Рис. 15-с белым цветом.

Область существования семейства Γ_s короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника, представлена на Рис.

15-с. На кривой S_2^Γ , ограничивающей данную область сверху, происходит завершение семейства Γ_s , а на кривой S_1^Γ имеет место бифуркация, при которой семейство Γ_s сливается с семейством Z_s и перестаёт существовать.

Область существования семейства K_s короткопериодических движений, рождающихся из конической прецессии спутника при значениях $1.0 < \delta < 3.0$ показана на Рис. 15-d. Указанная область ограничена кривыми S_0^K , S_1^K и S_2^K . На границе S_1^K происходит завершение семейства K_s , а на границе S_2^K данное семейство сливается с семейством Z_s короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии спутника.

Для гиперболоидальной прецессии область существования в трёхмерном пространстве параметров задачи γ, δ и h представлена на Рис. 16. Граница области существования состоит из 5 поверхностей. Поверхность S_0^Γ отвечает значениям параметров задачи, при которых существует гиперболоидальная прецессия, и ограничивает область существования снизу. Поверхность S_2^Γ ограничивает область существования сверху и определяется критерием завершения семейства. На поверхности S_1^Γ происходит бифуркация и периодические движения, принадлежащие к семейству Γ_s , совпадают с периодическими движениями, рождающимися из цилиндрической прецессии спутника и принадлежащими к семейству Z_s . Боковые поверхности задаются равенствами $\delta = 0$, $\delta = 3$. На Рис. 17 показано сечение области существования семейства короткопериодических движений Γ_s плоскостью $\gamma = 1.0$.

Численное продолжение семейства Γ_s за значение $\delta = 0.0$, соответствующее случаю сферически-симметричного спутника, невозможно с помощью используемого метода. Численно было установлено, что указанная область симметрична относительно плоскости $\gamma = 0$. Семейство Γ_s может быть также численно продолжено по параметру δ в область значений $\delta > 3.0$, однако в данной работе указанный случай не рассматривался.

На Рис. 19 показаны траектории точки пересечения оси динамической сим-

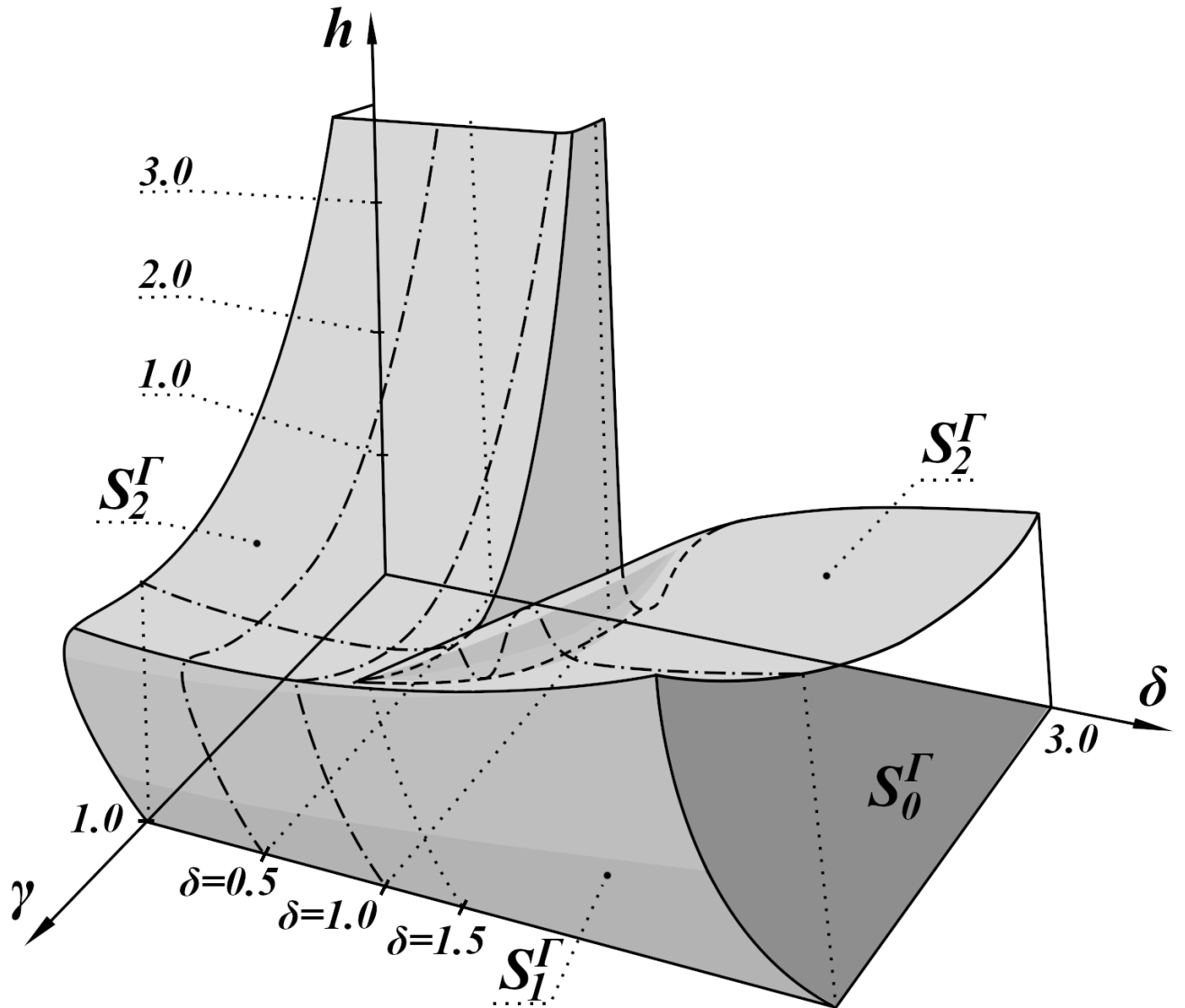


Рис. 16: Область существования семейства короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника, в пространстве параметров задачи γ, δ и h при $0 < \delta \leq 3.0$.

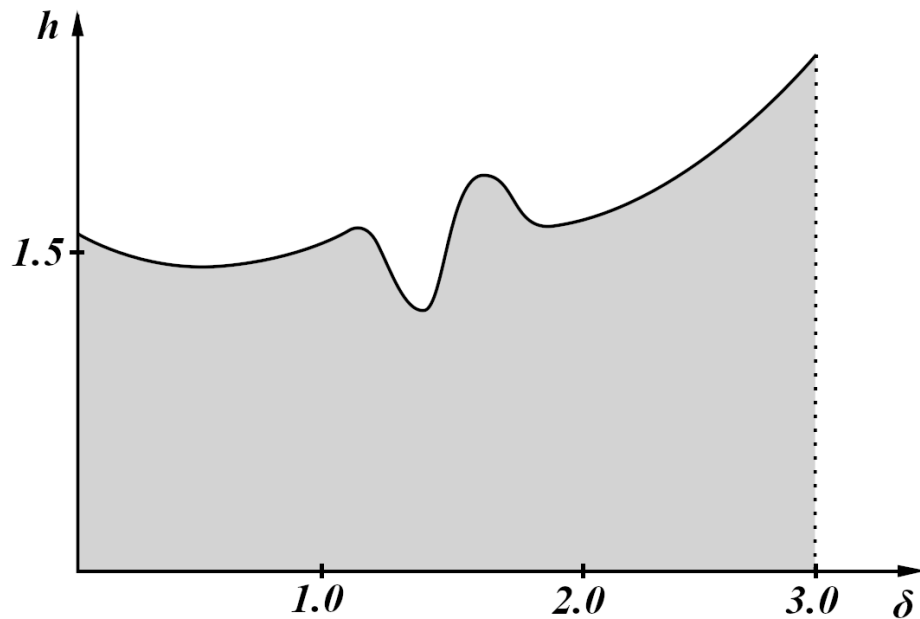


Рис. 17: Сечение области существования семейства короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника, плоскостью $\gamma = 1.0$ при $0 < \delta \leq 3.0$.

метрии спутника с единичной сферой, соответствующие периодическим движениям семейств K_s , Z_s и Γ_s , построенным при фиксированных значениях параметров $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.5$. Синим и красным цветами обозначены траектории периодических движений, для которых отклонения Δh константы энергии от её значения на соответствующей регулярной прецессии равны 0.01 и 0.1, соответственно.

3.3. Семейства долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника

В данном параграфе представлены результаты численного продолжения по параметрам семейств Γ_i ($i = 1..4$) долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника в случае резо-

нансов третьего и четвертого порядков.

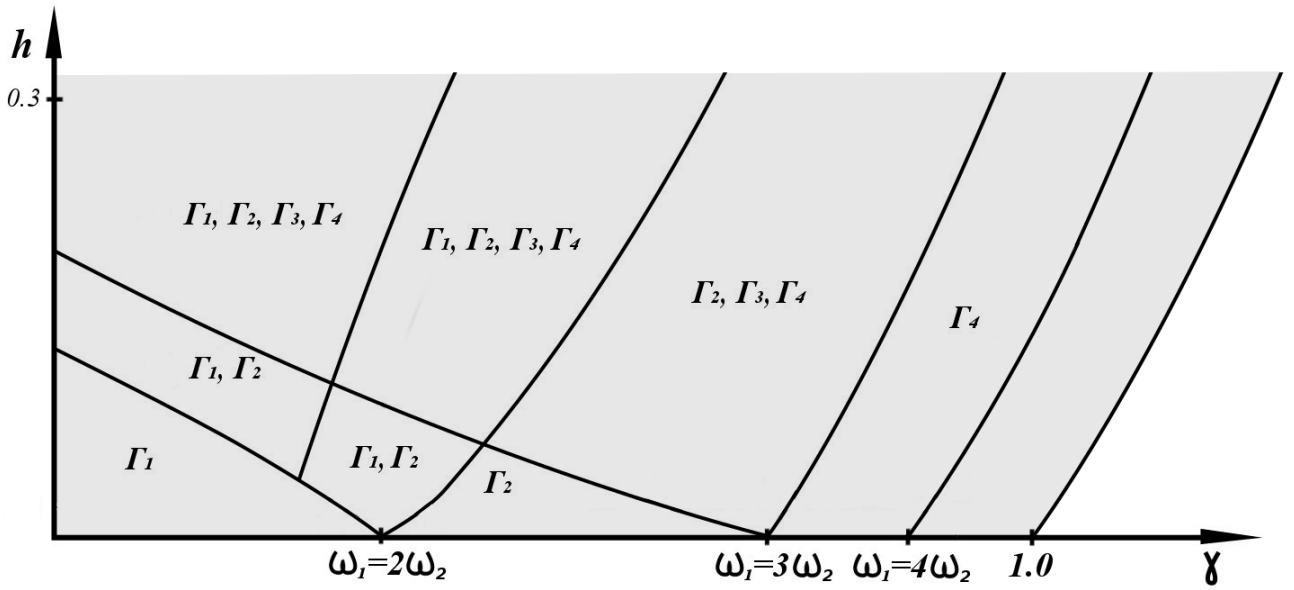


Рис. 18: Сечение областей существования семейств долгопериодических движений $\Gamma_1, \Gamma_1^*, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, рождающихся из гиперболоидальной прецессии, плоскостью $\delta = 1$.

На Рис. 18 показаны области существования семейств Γ_i ($i = 1..4$) для фиксированного значения $\delta = 1.0$ и $h < 0.3$. Указанный вид областей существования сохраняется при значениях параметра $\delta > 0.115$. Семейство короткопериодических движений Γ_s существует во всей представленной на указанном рисунке области параметров γ, h . Сплошными линиями на данном рисунке показаны границы, разделяющие плоскость параметров на подобласти с различным числом долгопериодических движений Γ_i ($i = 1..4$).

При переходе через границы подобластей может происходить бифуркация, рождение либо завершение семейства периодических движений. Границы подобластей примыкают к точкам горизонтальной оси ($h = 0$), отвечающим резонансам $\omega_2 = 2\omega_1$ и $\omega_2 = 3\omega_1$, возникающим между частотами ω_1 и ω_2 линейаризованной в окрестности гиперболоидальной прецессии системы. Вопрос о бифуркации указанных семейств рассмотрен в Главе 4 данной диссертационной работы.

На Рис. 20 показаны точки пересечения оси динамической симметрии спут-

ника с единичной сферой, соответствующие долгопериодическим движениям семейств Γ_i ($i = 1..4$) и короткопериодическим движениям семейства Γ_s , построенным при фиксированных значениях параметров $\gamma = 0.6$, $\delta = 1.0$ и $\gamma = 0.8$, $\delta = 1.0$. Синим цветом показаны траектории, соответствующие значению постоянной энергии $h = 0.01$. Красным цветом показаны траектории, соответствующие значению $h = 0.3$.

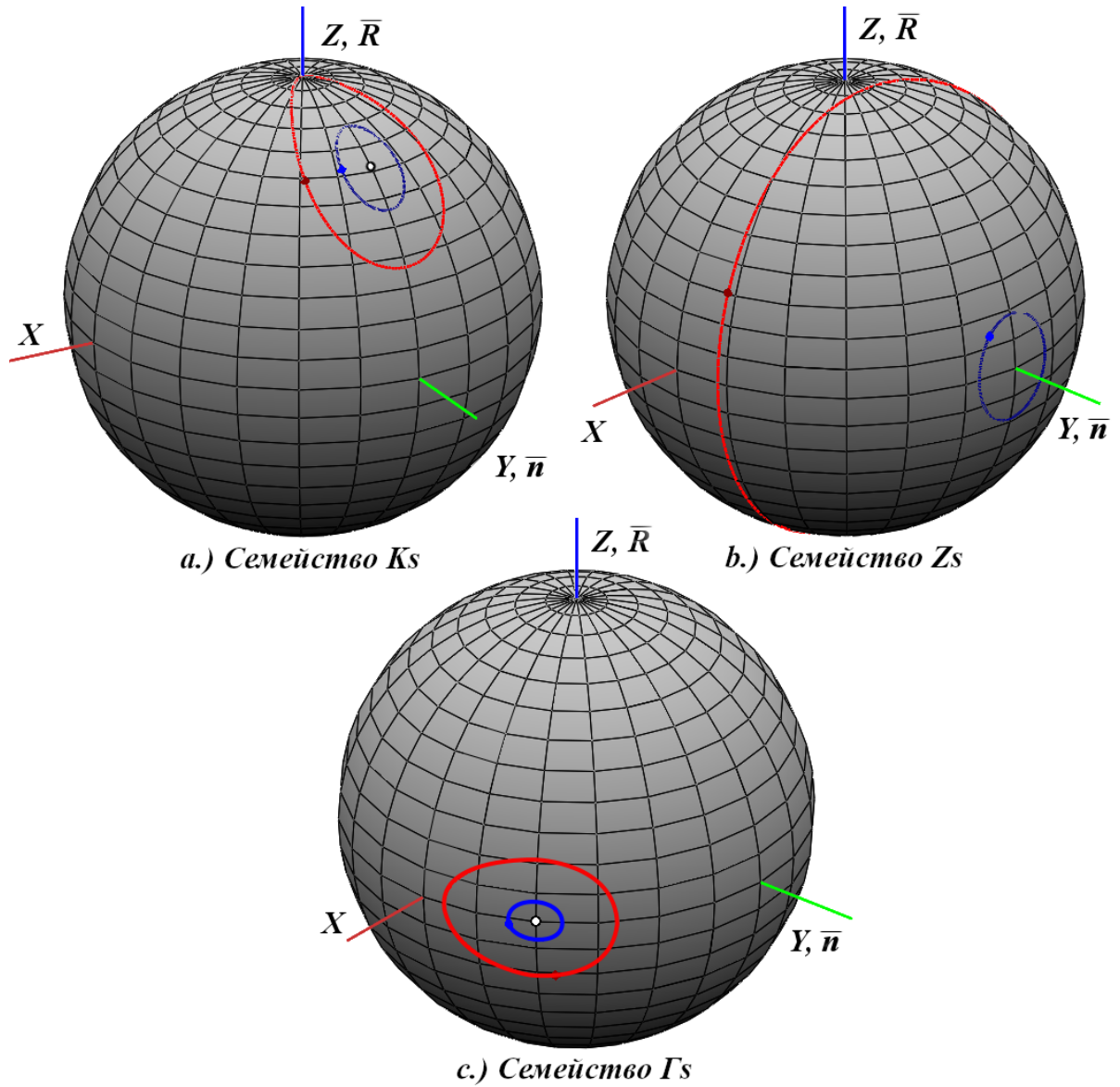


Рис. 19: Траектории точки пересечения оси динамической симметрии спутника с единичной сферой, соответствующие периодическим движениям семейств K_s , Z_s и Γ_s , построенным при фиксированных значениях параметров $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.5$

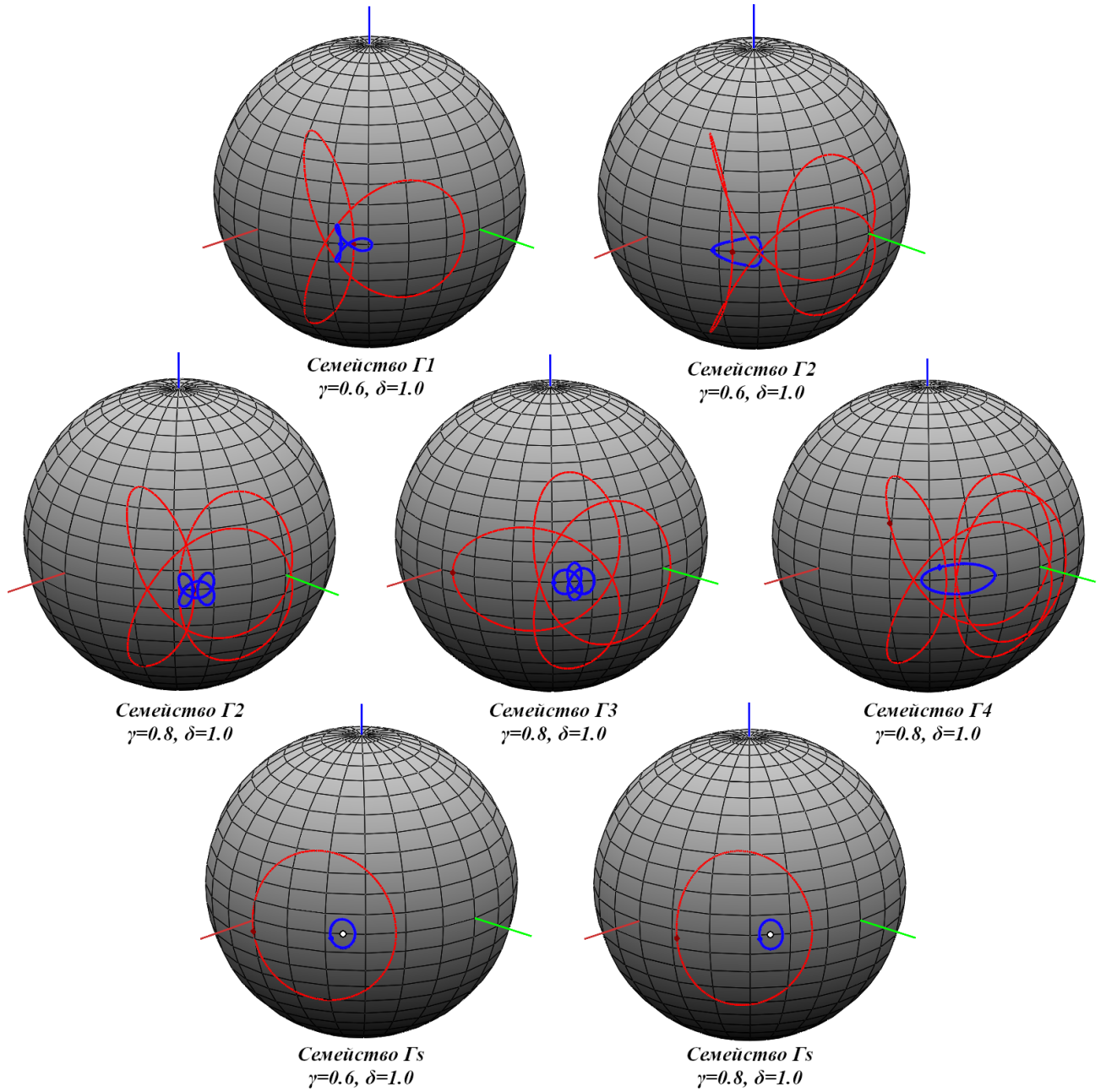


Рис. 20: Траектории точки пересечения оси динамической симметрии спутника с единичной сферой, соответствующие долгопериодическим движениям семейств Γ_i ($i = 1..4$) и короткопериодическим движениям семейства Γ_s , построенным при фиксированных значениях параметров $\gamma = 0.6, \delta = 1.0$ и $\gamma = 0.8, \delta = 1.0$. Синим цветом показаны траектории, соответствующие значению постоянной энергии $h = 0.01$, красным цветом – соответствующие значению $h = 0.3$. Белой точкой показано положение оси динамической симметрии спутника при гиперболоидальной прецессии.

Глава 4

Об орбитальной устойчивости и бифуркациях периодических движений симметричного спутника

Для анализа динамики системы в окрестности периодических движений важное значение имеет решение задачи об их бифуркации и устойчивости. Исследованию устойчивости и бифуркации периодических движений посвящено большое количество работ [14, 51, 54, 58, 62, 84, 85, 90, 92–97].

В данной главе диссертационной работы выполнено исследование орбитальной устойчивости и бифуркаций периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий, численное и аналитическое построение которых было выполнено в Главах 2 и 3. Исследование орбитальной устойчивости проводилось в рамках линейного приближения. Подробно изучена орбитальная устойчивость нерезонансных периодических движений, а также рассмотрена задача об орбитальной устойчивости периодических решений, рождающихся из гиперболической прецессии при значениях параметров, отвечающих резонансам третьего и четвертого порядка. Изучен характер бифуркации периодических движений и построены бифуркационные диаграммы. Для получения представления о глобальном характере движения вблизи бифуркационных значений параметров и верификации результатов применялся метод сечений Пуанкаре. Основные результаты данной главы представлены в следующих работах [84–86].

4.1. Методика исследования орбитальной устойчивости периодических движений в линейном приближении

В первом приближении задача об орбитальной устойчивости периодических движений, полученных методом численного продолжения по параметру, сводится к исследованию устойчивости следующей линейной гамильтоновой системы, получающейся линеаризацией системы канонических уравнений для нормальных смещений (1.28), [34]:

$$\dot{\vec{n}} = IH_n \vec{n} \quad (4.1)$$

где $I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, H_n - матрица коэффициентов, которые вычисляются численно в процессе построения периодических решений. Характеристическое уравнение системы (4.1) имеет следующий вид:

$$\rho^2 - 2A\rho + 1 = 0,$$

где $A = \frac{1}{2}(Sp[N(T)]) = \frac{1}{2}(n_{11}(T) + n_{22}(T))$, $N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix}$ - фундаментальная матрица системы (5), нормированная условием $N(0) = E$, а T - период исследуемого решения. Для устойчивости системы уравнений (4.1) в первом приближении необходимо, чтобы выполнялось условие $|A| < 1$.

Так как система уравнений (4.1) является частью системы (1.32), разрешаемой при численном продолжении периодических движений на шаге предиктора, выводы об орбитальной устойчивости данных периодических движений в линейном приближении можно получать непосредственно в процессе их продолжения по параметрам.

4.2. Методика построения сечений Пуанкаре

Для исследования бифуркации периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника, в настоящей диссертационной работе была

применён метод сечений Пуанкаре [93, 97]. Кратко изложим алгоритм построения сечений Пуанкаре.

Рассмотрим автономную гамильтонову систему (1) с двумя степенями свободы и интегралом энергии $H = h$, где $H(q_1, q_2, p_1, p_2, \vec{\pi})$ - гамильтониан, h^* - константа энергии, $\vec{\pi} = (\pi_1, \dots, \pi_k)$ - вектор параметров. Допустим, что для фиксированных значений параметров и константы энергии $\vec{\pi} = \vec{\pi}^*, h = h^*$ система (1.10) имеет частное решение

$$q_1^*(t), q_2^*(t), p_1^*(t), p_2^*(t), \quad (4.2)$$

с начальными условиями $q_{10}^0, q_{20}^0, p_{10}^0, p_{20}^0$.

Сечение Пуанкаре, соответствующее решению (4.2), будем строить в двумерной плоскости q_2, p_2 , зафиксировав значение переменной $q_1 = q_{10}^0$. На n -м шаге процедуры происходит численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (1.10) с начальными условиями n -1-го шага до пересечения с плоскостью q_2, p_2 , которое определяется условиями

$$\begin{aligned} q_1 &= q_{10}^*, \\ \text{sign}(p_1) &= \text{sign}(p_{10}^{n-1}), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где второе условие задаёт направление, в котором траектория пересекает плоскость q_2, p_2 , а p_{10}^{n-1} - начальное значение импульса p_1 на $n - 1$ -м шаге. В результате становятся известны начальные значения $q_{10}^n = q_{10}^0, q_{20}^n, p_{10}^n, p_{20}^n$, соответствующие n -й точке q_{20}^n, p_{20}^n отображения Пуанкаре. Значение импульса p_{10}^n вычисляется по формуле

$$p_{10}^n = H(q_{10}^0, q_{20}^n, p_{20}^n, \vec{\pi}^*, h^*), \quad (4.4)$$

Процедура построения сечения Пуанкаре продолжается, пока не будет достигнуто заданное количество N точек пересечения с плоскостью.

На Рис. 2 приведена блок-схема итерационной процедуры построения сечения Пуанкаре для одного набора начальных условий. Для построения глобаль-

ной картины сечения Пуанкаре для системы (1.10) при фиксированных значениях параметров $\vec{\pi} = \vec{\pi}^*$, постоянной энергии $h = h^*$ и переменной $q_1 = q_{10}^0$ строится область допустимых значений для начальных условий. Далее указанная область разбивается сеткой с заданным шагом и для каждого узла сетки выполняется описанная выше процедура построения сечений Пуанкаре.

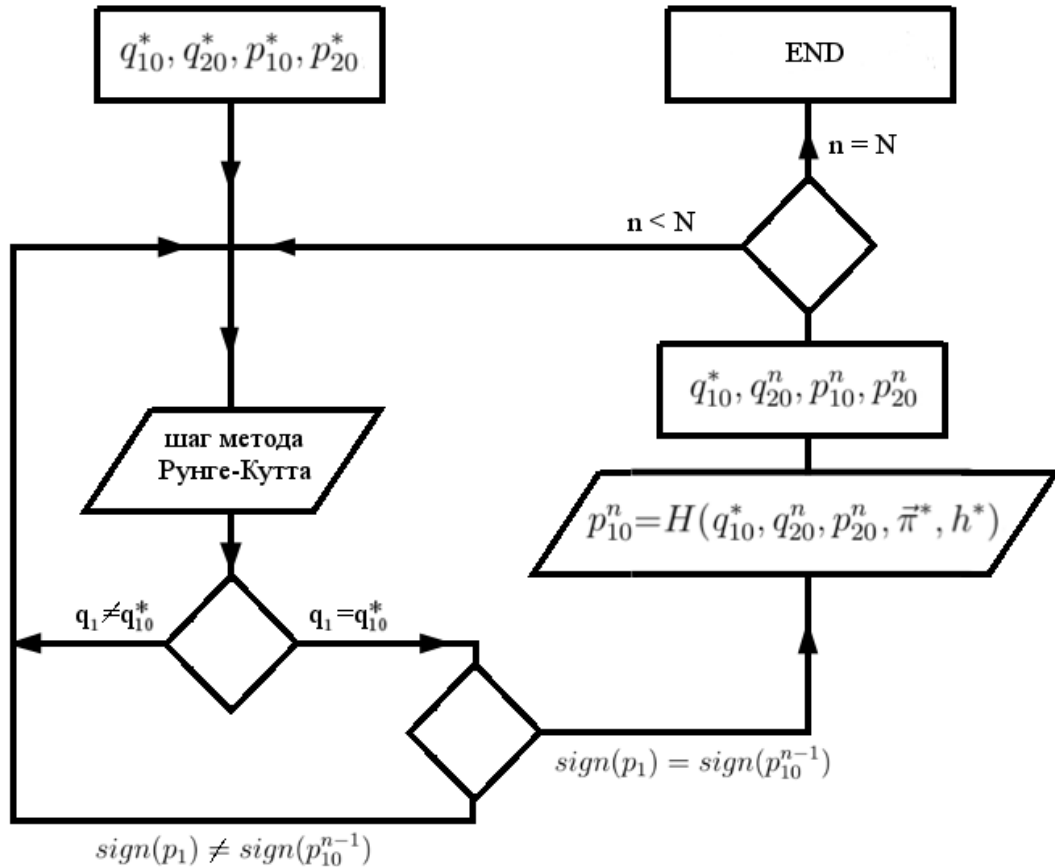


Рис. 21: Блок-схема процедуры построения отображения Пуанкаре.

В данной диссертационной работе на языке программирования C-sharp и в системе символьных вычислений Maple 15 был разработан программный комплекс для построения сечений Пуанкаре и диаграмм бифуркации периодических движений. В Приложении 3 приведены описания основных процедур данного программного комплекса.

4.3. Об орбитальной устойчивости и бифуркации короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника

В Главах 2 и 3 настоящей диссертационной работы были аналитически и численно построены семейства короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий динамически симметричного спутника. В данном параграфе для всех значений параметров задачи из области $0 < \delta < 3.0$, $0 \leq \gamma < 2.0$, $h < 3.0$ исследован вопрос о бифуркации указанных семейств и их орбитальной устойчивости в линейном приближении. Для верификации и иллюстрации полученных результатов был применён метод сечений Пуанкаре.

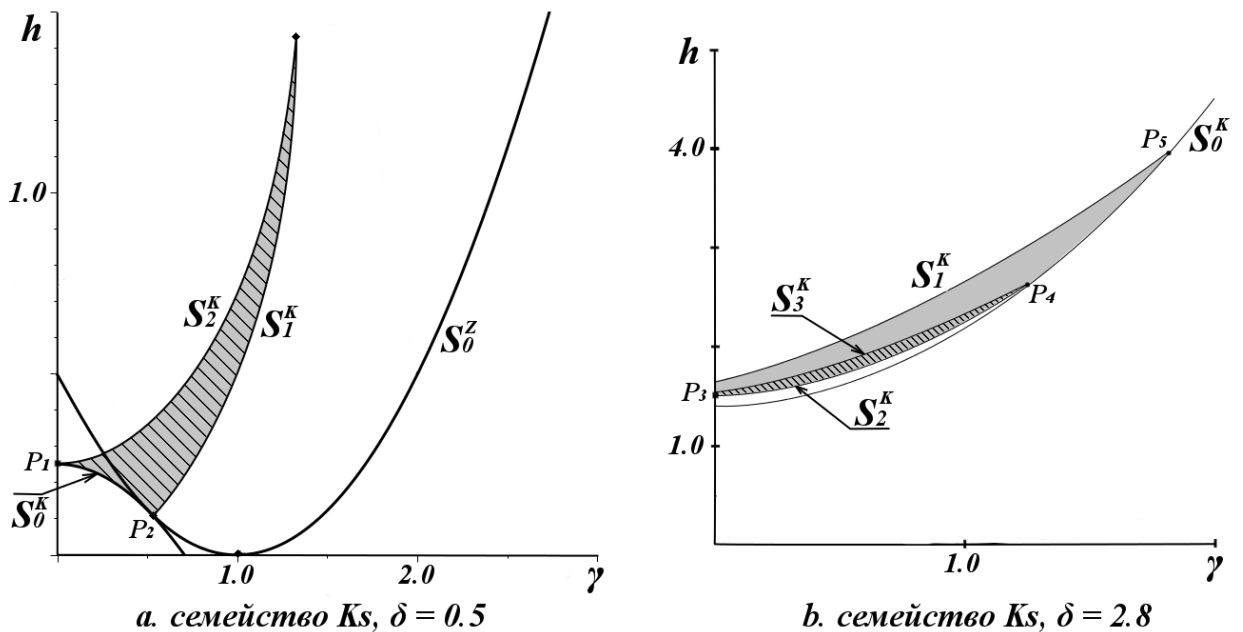


Рис. 22: Области существования и орбитальной устойчивости в линейном приближении короткопериодических движений K_s , рождающихся из конической прецессии симметричного спутника, при фиксированных значениях $\delta = 0.5$ и $\delta = 2.8$.

Серым цветом показаны области существования указанного семейства, косой штриховкой показаны области его орбитальной неустойчивости.

На Рис. 22 и 23 для значений параметров задачи $0 < \delta < 3.0$ и $0 \leq \gamma < 2.0$

показаны области существования и орбитальной устойчивости в линейном приближении семейств K_s , Z_s , Γ_s короткопериодических движений, рождающихся из конической, цилиндрической и гиперболоидальной прецессии симметричного спутника, соответственно.

На Рис. 22-а для фиксированного значения $\delta = 0.5$ показаны области существования (обозначены серым цветом) и орбитальной неустойчивости (обозначены штриховкой) семейства K_s короткопериодических движений, рождающихся из конической прецессии динамически симметричного спутника. Данное семейство орбитально неустойчиво всюду внутри своей области существования, ограниченной кривыми S_0^K , S_1^K , S_2^K . Отрезок $[P1, P2)$ кривой S_0^K , соответствует неустойчивой конической прецессии спутника. Кривая S_1^K совпадает с границей S_2^Z области орбитальной неустойчивости семейства Z_s , на которой происходит бифуркация: семейство K_s сливается с семейством короткопериодических движений Z_s , рождающихся из цилиндрической прецессии спутника. Данный вид областей существования и орбитальной неустойчивости семейства K_s сохраняется при значениях $0 < \delta < 1.0$.

При значениях $\delta > 1.0$ области существования и орбитальной устойчивости семейства K_s короткопериодических движений, рождающихся из конической прецессии спутника, принимают вид, показанный на Рис. 22-б. Область существования данного семейства ограничена кривыми S_0^K , S_1^K , S_2^K и осью h . Интервалы (P_4, P_5) и $[P_3, P_4)$ кривой S_0^K отвечают устойчивой и неустойчивой конической прецессии спутника, соответственно. На границе S_2^K происходит завершение семейства K_s , а границе S_1^K имеет место бифуркация: K_s сливается с семейством Z_s короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии спутника. Семейство K_s орбитально устойчиво в линейном приближении в области, ограниченной кривыми S_0^K , S_1^K , S_3^K и осью h и орбитально неустойчиво в области, ограниченной кривыми S_2^K , S_3^K и осью h .

На Рис. 23-а. для фиксированного значения параметра $\delta = 0.5$ и значе-

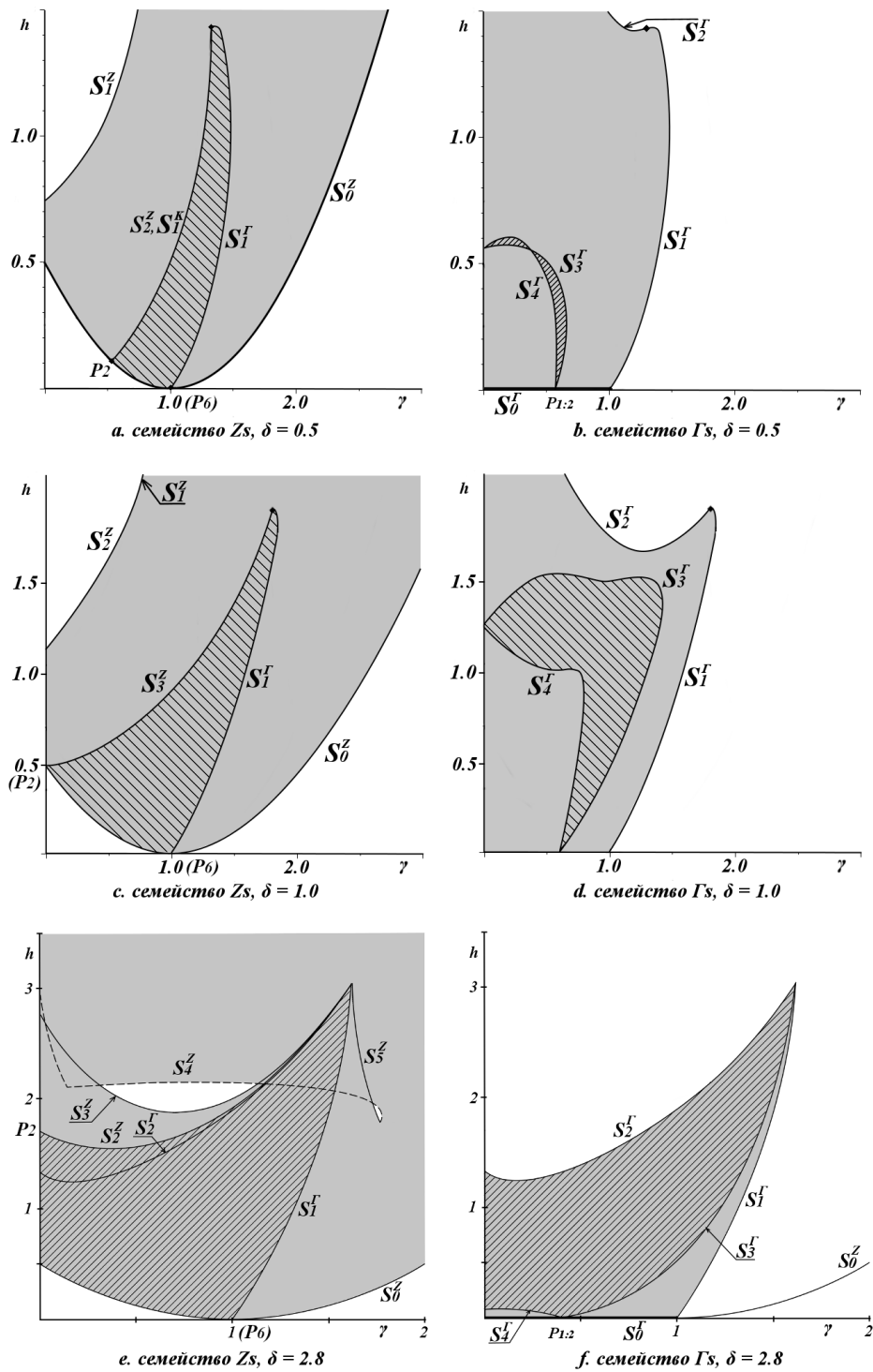


Рис. 23: Области существования и орбитальной устойчивости в линейном приближении короткопериодических движений Z_s и Γ_s , рождающихся из цилиндрической и гиперболидаальной прецессий динамически симметричного спутника, при фиксированных значениях $\delta = 0.5, \delta = 1.0$ и $\delta = 2.8$. Серым цветом показаны области существования указанных семейств, косой штриховкой показаны области их орбитальной неустойчивости.

ний константы интеграла энергии $h < 1.5$ показаны области существования и орбитальной устойчивости семейства Z_s короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии спутника. Область существования семейства Z_s ограничена сверху кривой S_1^Z , на которой происходит завершение указанного семейства, а снизу – кривой S_0^K , которая соответствует цилиндрической прецессии спутника. Цилиндрическая прецессия устойчива во всех точках указанной кривой, кроме интервала $[P_2, P_6]$. Из точек P_2 и P_6 исходят кривые S_1^Γ , S_1^K , ограничивающие область орбитальной неустойчивости семейства короткопериодических движений Z_s . Семейство Z_s орбитально устойчиво в линейном приближении в области, ограниченной кривыми S_0^Z , S_1^Z , S_1^Γ , S_1^K . С ростом значения параметра δ точка P_2 приближается к оси h и при $\delta = 1.0$ область орбитальной неустойчивости принимает вид Рис. 23-с).

При дальнейшем увеличении параметра δ области существования и орбитальной устойчивости семейства короткопериодических движений Z_s принимают вид, показанный на 23-е. При значении $\delta = 2.8$ были также численно построены области, ограниченные кривыми S_3^Z , S_4^Z и S_5^Z , внутри которых семейство Z_s не может быть численно продолжено при помощи алгоритма, применяемого в данной диссертационной работе.

Области существования и орбитальной устойчивости семейства Γ_s короткопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника, показаны на Рис. 23-b,d,f. Кривая S_0^Γ , находящаяся вблизи оси γ , отвечает устойчивой гиперболоидальной прецессии. Семейство Γ_s существует в области, ограниченной кривыми S_0^Γ , S_1^Γ , S_2^Γ и осью h . На кривой S_2^Γ происходит завершение указанного семейства, а при переходе через кривую S_1^Γ происходит бифуркация и Γ_s сливается с семейством Z_s короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии спутника. Из точки $P_{1:2}$, соответствующей резонансу третьего порядка, исходят кривые S_3^Γ и S_4^Γ , ограничивающие область орбитальной неустойчивости семейства Γ_s . При увеличении значения парамет-

ра δ область орбитальной неустойчивости расширяется и при $\delta > 1.1$ принимает вид, показанный на Рис. 23-f.

Для проверки полученных выше результатов было проведено исследование бифуркации семейств периодических движений K_s , Z_s и Γ_s с помощью метода сечений Пуанкаре. Ниже для фиксированного значения $\delta = 0.5$ приведены диаграммы бифуркации указанных семейств и соответствующие данным бифуркациям отображения Пуанкаре.

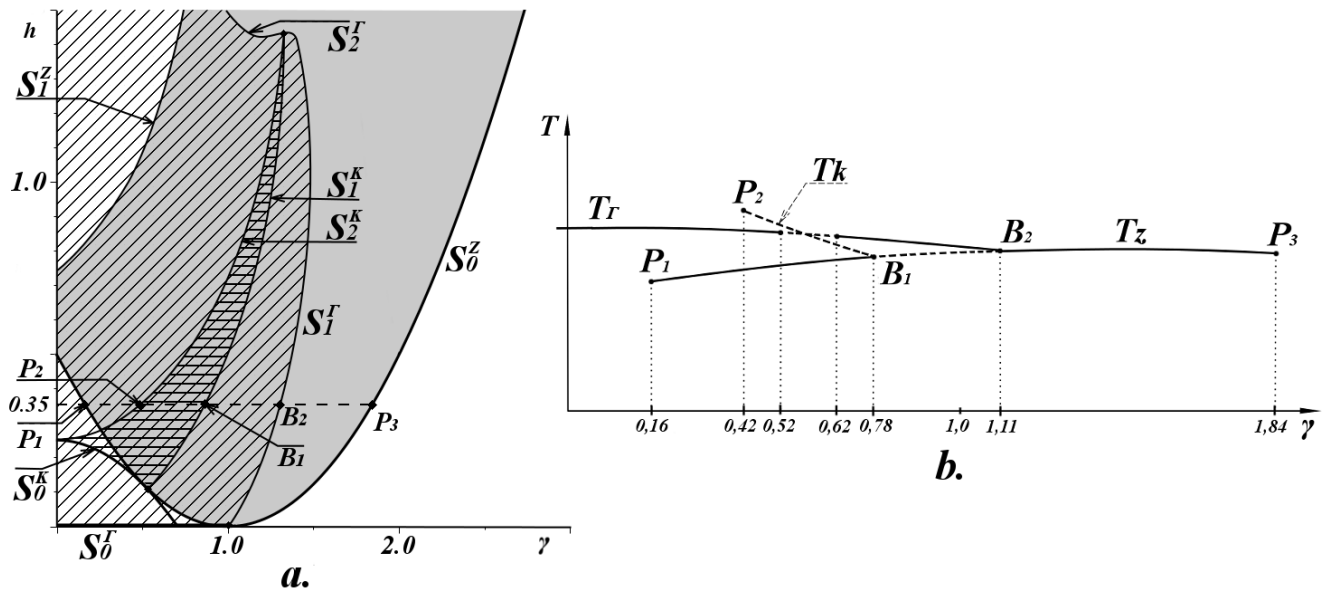


Рис. 24: Диаграмма бифуркации семейств K_s , Z_s , Γ_s периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника, при фиксированном значении $\delta = 0.5$ (а.) и график зависимости их периодов T_K , T_Z и T_Γ от значения параметра γ при $\delta = 0.5$ и $h = 0.35$ (б.) Серым цветом показана область существования семейства короткопериодических движений Z_s , рождающихся из цилиндрической прецессии, перекрестной штриховкой – область существования семейства короткопериодических движений K_s , рождающихся из конической прецессии. Семейство короткопериодических движений Γ_s , рождающихся из гиперболоидальной прецессии, существует в областях, отмеченных косой и перекрестной штриховками.

Как уже было отмечено, на границах S_1^K и S_1^F (см. Рис. 24-а) областей существования короткопериодических движений имеет место явление бифуркации. При переходе через границу S_1^K семейство K_s сливается с семейством Z_s

короткопериодических движений, рождающихся из цилиндрической прецессии спутника, при этом семейство Z_s становится орбитально неустойчивым. При переходе через границу S_1^{Γ} семейство Γ_s сливается с семейством Z_s , которое становится орбитально устойчивым в линейном приближении.

На Рис. 24-б представлена зависимость периодов T_K , T_Z и T_{Γ} семейств K_s от значения параметра γ при фиксированных значениях параметров $\delta = 0.5$ и $h = 0.35$. При $\gamma < 0.16$ существует одно семейство орбитально устойчивых в линейном приближении короткопериодических движений Γ_s , рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника. При переходе через значение $\gamma = 0.16$ из цилиндрической прецессии рождается семейство орбитально устойчивых в линейном приближении короткопериодических движений Z_s . С ростом значения параметра γ периоды T_K и T_z семейств K_s , Z_s , соответственно, приближаются друг к другу и в точке B_1 при $\gamma = 0.78$ совпадают. Таким образом, происходит бифуркация: семейство K_s сливается с семейством Z_s и перестаёт существовать, а периодические движения, принадлежащие к семейству Z_s становятся орбитально неустойчивыми. На Рис. 25-а показано сечение Пуанкаре, построенное слева от точки бифуркации B_1 . С увеличением параметра γ точки, соответствующие орбитально неустойчивым периодическим движениям семейства K_s и орбитально устойчивым в линейном приближении периодическим движениям семейства Z_s , сближаются и при переходе через значение $\gamma = 0.78$, отвечающее точке B_1 , сливаются. При этом периодические движения семейства Z_s становятся орбитально неустойчивыми.

На Рис. 25 также отмечены точки, соответствующие орбитально неустойчивым долгопериодическим движениям семейств Γ_3 , Γ_4 и орбитально устойчивым долгопериодическим движениям семейств K_1 , Z_i ($i = 1..4$). Семейства K_1 , Z_i ($i = 1..4$) были построены численно с помощью сечений Пуанкаре, а семейства Γ_3 , Γ_4 рождаются из гиперболоидальной прецессии спутника в случае резонанса четвёртого порядка. Из результатов численного анализа следует, что долгопе-

риодические движения семейств Z_i ($i = 1..4$) и K_1 с уменьшением значения постоянной энергии h завершаются, при чём движения Z_i ($i = 1..4$) совпадают с цилиндрической, а движения K_1 – с конической прецессией спутника, соответственно.

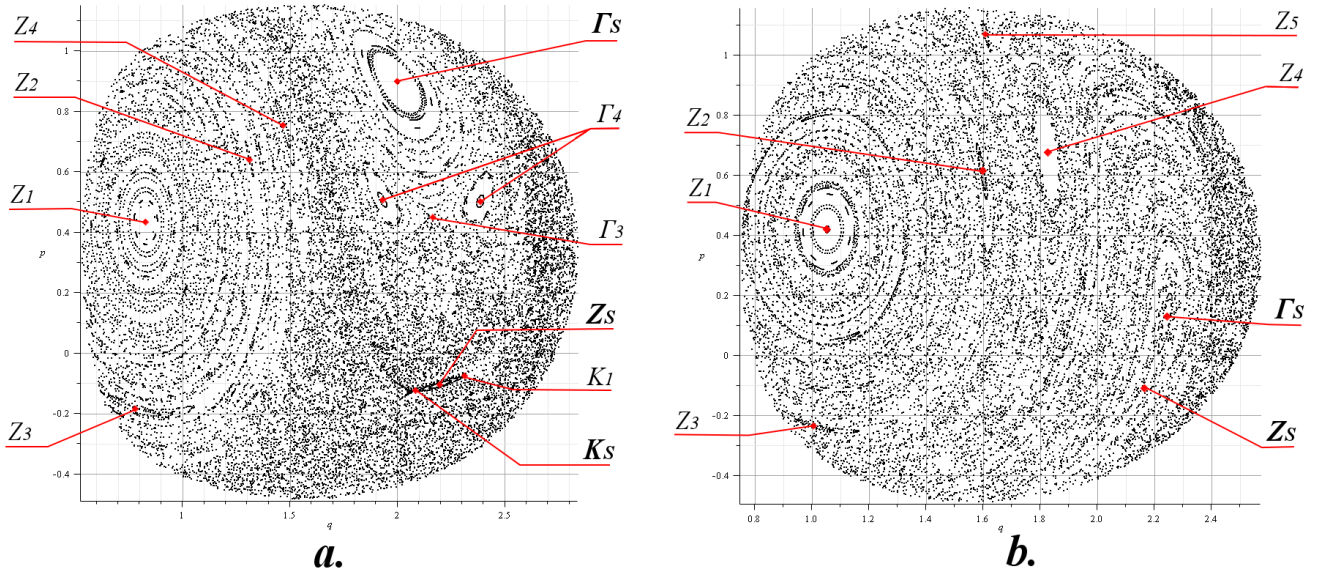


Рис. 25: *Отображения Пуанкаре, построенные в окрестности точек B_1 (a) и B_2 (b) бифуркации семейств K_S , Z_S , Γ_S короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника, при фиксированных значениях параметров $\delta = 0.5$, $h = 0.35$, $\gamma = 0.77$ (a) и $\gamma = 1.09$ (b).*

При дальнейшем увеличении значения γ период T_Γ семейства Γ_S уменьшается и в точке B_2 указанное семейство сливается с семейством Z_S , которое становится орбитально устойчивым в линейном приближении. На Рис. 25-b и Рис. 26 показаны сечения Пуанкаре, построенные слева и справа от точки бифуркации B_2 . С увеличением параметра γ точки, соответствующие орбитально устойчивым в линейном приближении периодическим движениям семейств Γ_S и орбитально неустойчивым периодическим движениям Z_S , сближаются и сливаются в точке B_2 , образуя точку, соответствующую орбитально устойчивому в линейном периодическому движению семейства Z_S . На Рис. 25-b, Рис. 26 кроме периодических движений Z_i ($i = 1..4$), рассмотренных выше, также отмечено

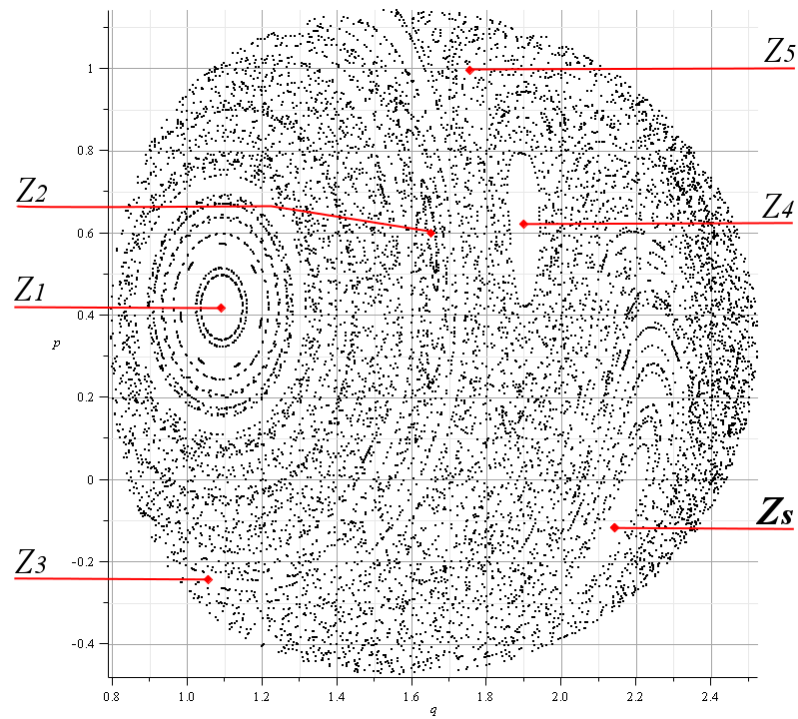


Рис. 26: *Отображение Пуанкаре, построенное в окрестности точки бифуркации B_2 семейств K_S , Z_S , Γ_S короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника, при фиксированных значениях параметров $\delta = 0.5$, $\gamma = 1.15$, $h = 0.35$.*

орбитально устойчивое в линейном приближении периодическое движение Z_5 , которое с уменьшением значения константы энергии h завершается, совпадая с цилиндрической прецессией спутника.

4.4. Об орбитальной устойчивости и бифуркациях долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессий спутника

В данном параграфе выполнено исследование орбитальной устойчивости и бифуркации семейств долгопериодических движений рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника, аналитическое и численное построение которых было выполнено в Главах 2 и 3. В пространстве параметров задачи γ , δ , h построены диаграммы бифуркации указанных семейств и графики зависимости их периодов от параметра γ при фиксированных значениях параметров δ и h . Для проверки полученных результатов, как и ранее, был применён метод сечений Пуанкаре.

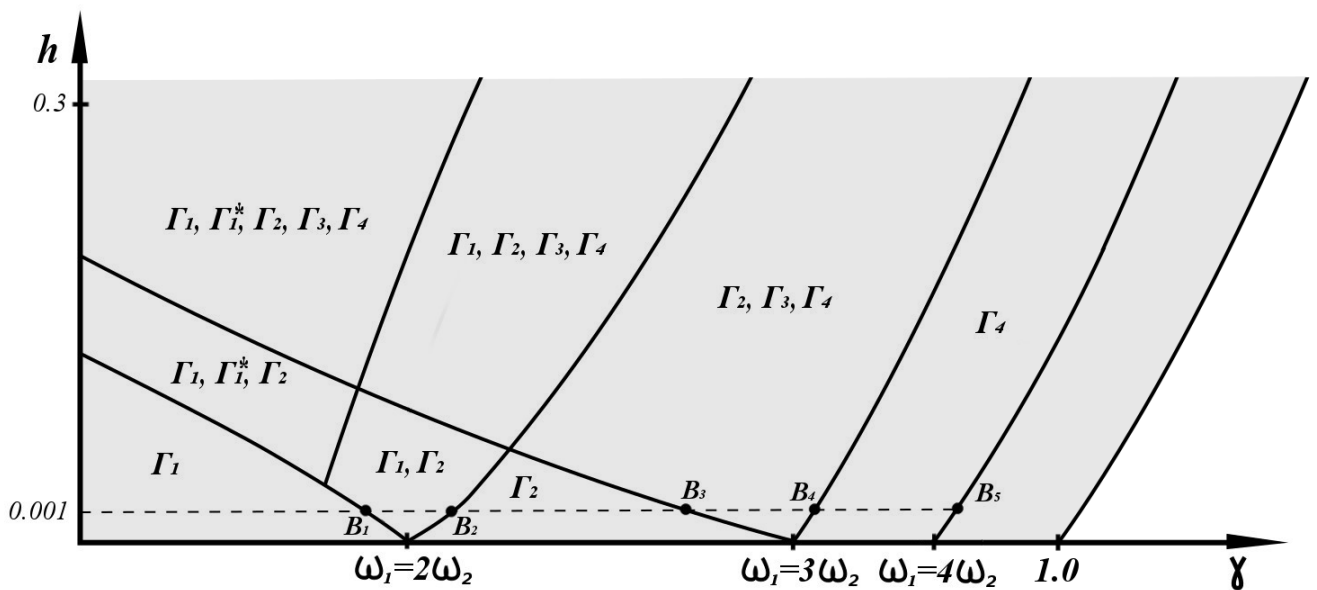


Рис. 27: Диаграмма бифуркации семейств периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника, при $\delta = 1.0$.

На Рис. 27 представлена диаграмма бифуркации семейств периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника, при $\delta = 1.0$. На данной диаграмме сплошными линиями показаны границы, разделяющие плоскость параметров на подобласти с различным числом

долгопериодических движений Γ_i ($i = 1..4$). При переходе через границы подобластей может происходить бифуркация, рождение либо завершение семейства периодических движений. Границы подобластей примыкают к точкам горизонтальной оси ($h = 0$), отвечающим резонансам $\omega_2 = 2\omega_1$ и $\omega_2 = 3\omega_1$, возникающим между частотами ω_1 и ω_2 линеаризованной в окрестности гиперболоидальной прецессии системы. При значениях константы энергии $h > 0.05$ также существует семейство долгопериодических движений Γ_1^* , которое не может быть построено аналитически в малой окрестности гиперболоидальной прецессии. Начальные условия опорного движения, использовавшиеся для численного построения указанного семейства, были получены с помощью метода отображений Пуанкаре. Семейство короткопериодических движений Γ_s существует во всей представленной на указанном рисунке области параметров γ, h .

Для исследования характера бифуркаций периодических движений, возникающих при переходе из одной подобласти в другую при различных фиксированных значениях энергии h и заданном значении $\delta = 1.0$ в плоскости γ, T были построены диаграммы, описывающие зависимость периода T периодических движений от параметра γ . На данных диаграммах нижняя кривая Γ_s соответствует периоду семейства Γ_s , а верхние кривые (также обозначенные через Γ_s) отвечают кратным значениям периода того же семейства, то есть удвоенному, утроенному и учетверённому периоду, соответственно. Через $T_1 - T_4$ обозначены кривые зависимости периодов долгопериодических движений $\Gamma_1 - \Gamma_4$ от параметра γ . Чёрными линиями показаны отрезки данных кривых, которым соответствует орбитальная устойчивость периодического движения в линейном приближении, а серыми - орбитальная неустойчивость.

На Рис. 28 показана бифуркационная диаграмма для значения константы энергии $h = 0.001$, которое соответствует малым амплитудам s . В данном случае поведение семейств периодических движений хорошо описывается аналитической теорией, развитой в [32, 63]. При малых значениях параметра γ

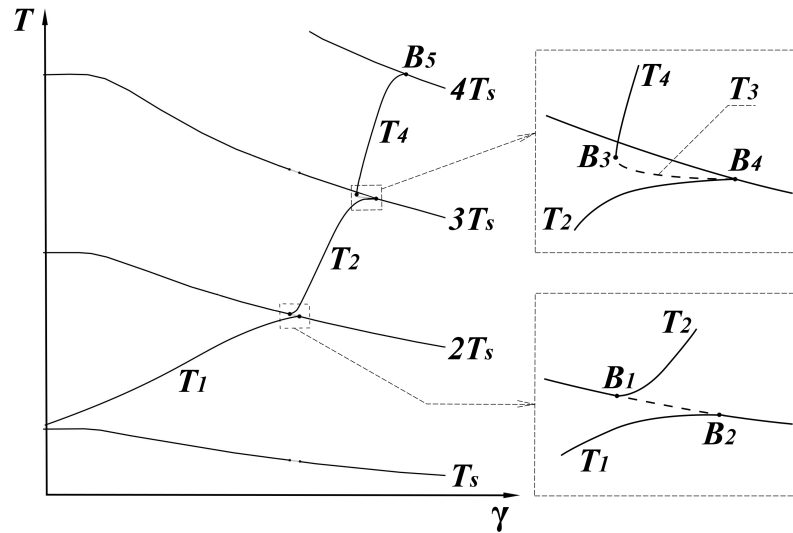


Рис. 28: Диаграмма зависимости периодов T_s, T_i ($i = 1..4$) семейств Γ_s, Γ_i ($i = 1..4$) периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника, от параметра γ при фиксированных значениях параметров $h = 0.001$ и $\delta = 1.0$.

Сплошные линии соответствуют значениям γ , при которых семейства Γ_s, Γ_i ($i = 1..4$) орбитально устойчивы в линейном приближении, а пунктирные линии - значениям γ , при которых указанные семейства орбитально неустойчивы.

существует два семейства периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника: семейство короткопериодических движений Γ_s и семейство долгопериодических движений Γ_1 . При увеличении значения параметра γ период долгопериодических движений семейства Γ_1 возрастает и приближается к удвоенному периоду короткопериодических движений Γ_s . При значении параметра $\gamma = 0.605$ период T_1 становится равен удвоенному периоду T_s (точка B_2 на Рис. 28), что соответствует бифуркации удвоения периода, при этом семейство Γ_1 сливается с Γ_s и прекращает своё существование.

В точке B_1 (Рис. 28), отвечающей значению $\gamma = 0.596$, берёт начало кривая T_2 периода семейства долгопериодических движений Γ_2 . При данном значении параметра имеет место бифуркация, при которой от семейства короткопериодических движений Γ_s отделяется семейство долгопериодических движений Γ_2 . При этом орбитальная устойчивость семейства короткопериодических движе-

ний Γ_s сменяется на неустойчивость. На Рис. 28 интервал неустойчивости показан пунктирной линией. При возрастании параметра γ период семейства Γ_2 возрастает до тех пор, пока его значение не станет равным утроенному периоду семейства короткопериодических движений Γ_s . На Рис. 28 точка B_4 ($\gamma = 0.801$) соответствует бифуркации, при которой семейство Γ_2 сливается с Γ_s и прекращает своё существование.

В точке B_3 (значение $\gamma = 0.797$) берут начало кривые T_3 и T_4 , соответствующие периодам семейств долгопериодических движений Γ_3 и Γ_4 . С увеличением параметра γ период движений, принадлежащих к семейству Γ_3 , уменьшается, пока кривая T_3 не совпадает с T_s в точке B_4 ($\gamma = 0.801$). Периодические движения, принадлежащие к семейству Γ_3 , орбитально неустойчивы. Период T_4 долгопериодических движений семейства Γ_4 возрастает с увеличением γ . В точке B_5 , отвечающей значению $\gamma = 0.84$, семейство Γ_4 сливается с семейством короткопериодических движений Γ_s , при этом период T_4 принадлежащих к данному семейству движений становится равен учетверённому периоду T_s . Движения, принадлежащие к семейству Γ_4 , орбитально устойчивы в линейном приближении. Представленные выше результаты согласуются с выводами работ [32, 63].

На Рис. 29 показана бифуркационная диаграмма для значения константы энергии $h = 0.1$. При малых значениях параметра γ существует два семейства периодических движений: семейство короткопериодических движений Γ_s и семейство долгопериодических движений Γ_1 . При увеличении значения γ период T_1 движений семейства Γ_1 возрастает и приближается к удвоенному периоду T_s короткопериодических движений Γ_s . При значении $\gamma = 0.695$ в точке B_2 происходит бифуркация: семейство Γ_1 сливается с Γ_s и прекращает своё существование.

В точке B_1^* (Рис. 29), отвечающей значению $\gamma = 0.436$, берут начало кривые T_1^* и T_2 , соответствующие периодам семейств долгопериодических движений Γ_1^* и Γ_2 . Период T_1^* движений семейства Γ_1^* уменьшается с ростом значения

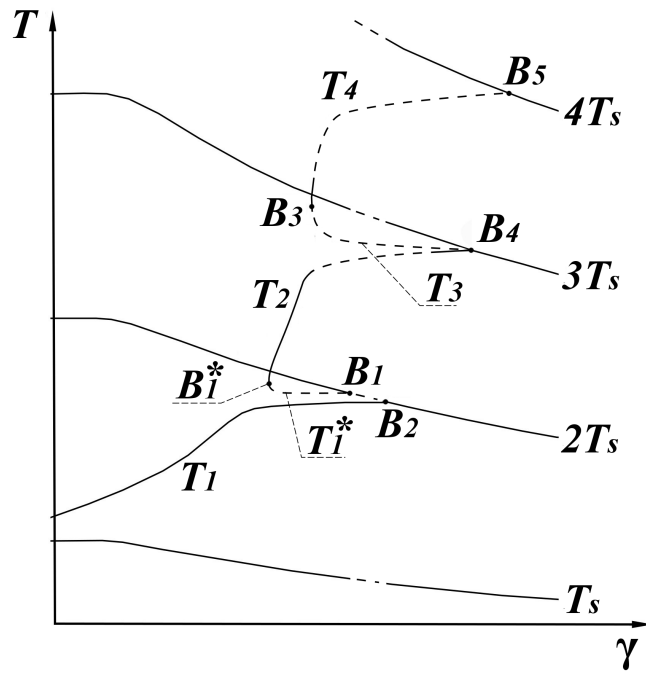


Рис. 29: Диаграмма зависимости периодов T_s, T_1^*, T_i ($i = 1..4$) семейств $\Gamma_s, \Gamma_1^s, \Gamma_i$ ($i = 1..4$) периодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника, от параметра γ при фиксированных значениях параметров $h = 0.1$ и $\delta = 1.0$. Сплошные линии соответствуют значениям γ , при которых семейства $\Gamma_s, \Gamma_1^s, \Gamma_i$ ($i = 1..4$) орбитально устойчивы в линейном приближении, а пунктирные линии - значениям γ , при которых указанные семейства орбитально неустойчивы.

γ и приближается к удвоенному периоду T_s . В точке B_1 ($\gamma = 0.61$) происходит бифуркация и семейство Γ_1^* прекращает существование, сливаясь с семейством короткопериодических движений Γ_s . Существование семейства Γ_1^* невозможно объяснить на основе применённой в настоящей работе аналитической теории. Это связано с тем, что при данном значении константы энергии амплитуда c уже не является достаточно малой для полного аналитического описания. При значении константы энергии $h = 0.1$ движения, принадлежащие к семейству Γ_1^* орбитально неустойчивы.

Период T_2 семейства долгопериодических движений Γ_2 возрастает с увеличением значения параметра γ и приближается к утроенному периоду T_s семейства Γ_s . В точке B_4 , соответствующей значению $\gamma = 0.855$, происходит бифур-

кация: семейство долгопериодических движений Γ_2 перестаёт существовать и сливается с семейством короткопериодических движений Γ_s .

В точке B_3 (значение $\gamma = 0.533$) берут начало кривые T_3 и T_4 , соответствующие периодам семейств долгопериодических движений Γ_3 и Γ_4 . С увеличением параметра γ период T_3 движений, принадлежащих к семейству Γ_3 , уменьшается и в точке B_4 кривая T_3 совпадает с T_s . Периодические движения, принадлежащие к семейству Γ_3 , орбитально неустойчивы. Период T_4 долгопериодических движений семейства Γ_4 возрастает с увеличением γ и приближается к учетверённому периоду T_s . В точке B_5 , отвечающей значению $\gamma = 0.925$, семейство Γ_4 сливается с семейством короткопериодических движений Γ_s .

На Рис. 29 интервалы орбитальной устойчивости семейств долгопериодических движений Γ_i ($i = 1..4$) в линейном приближении обозначены сплошными линиями, а интервалы их орбитальной неустойчивости - пунктирными линиями.

На Рис. 30-а показана бифуркационная диаграмма для значения константы энергии $h = 0.205$. Поведение семейств периодических движений $\Gamma_s, \Gamma_1^*, \Gamma_i$ ($i = 1..4$), описываемое данной диаграммой, аналогично ранее рассмотренному случаю значения $h = 0.1$. При увеличении значения константы энергии точка B_1^* приближается к кривой T_1 и на интервале $h \in (0.205, 0.206)$ существует значение h^* , при котором кривые T_1 и T_1^* меняются местами (Рис. 30-b). При значениях $h < h^*$ кривая T_1 сливается с кривой T_s в точке B_2 , а кривая T_1^* сливается с кривой T_s в точке B_1 . При $h > h^*$ кривая T_1 сливается с T_s в точке B_1 , а T_1^* сливается с T_s в точке B_2 . Так как при рассматриваемом значении константы энергии амплитуда c не может считаться малой, данное поведение кривых T_1 и T_1^* не может быть объяснено аналитической теорией. При значениях константы энергии $h > h^*$ кривые T_1 и T_1^* пересекаются (Рис. 30-b), однако, точка их пересечения не является точкой бифуркации.

Для верификации и иллюстрации результатов, полученных в данном пара-

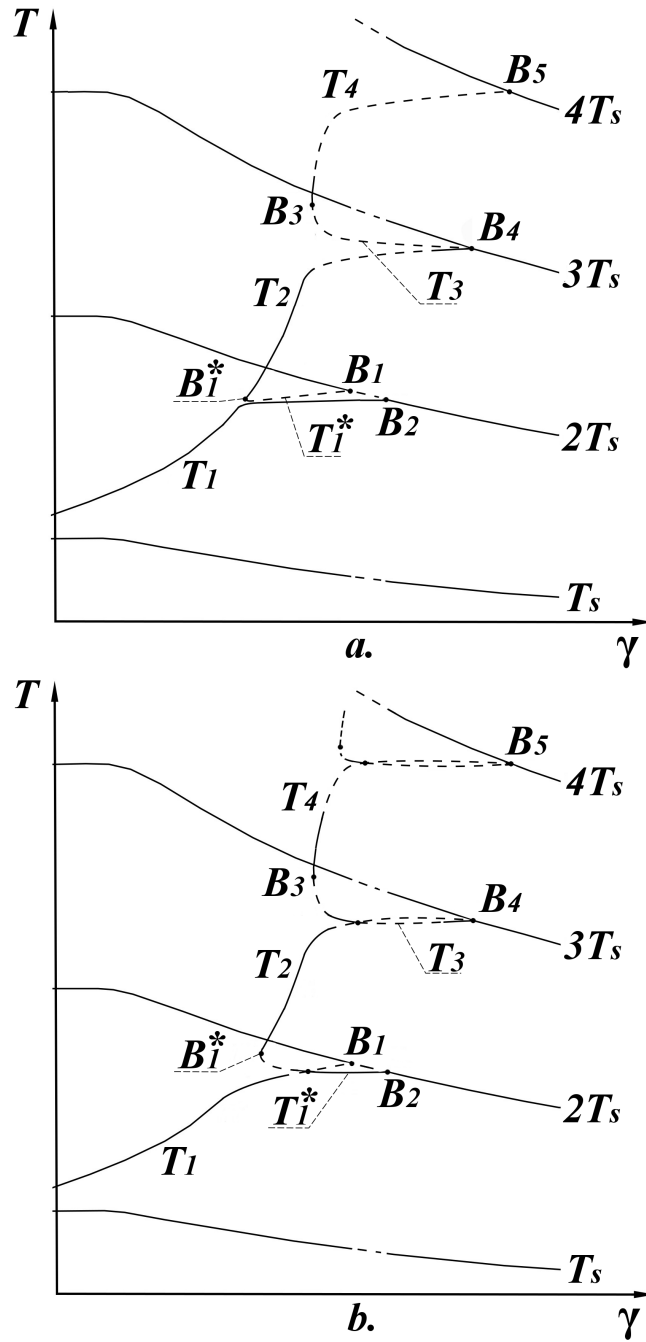


Рис. 30: Диаграмма зависимости периодов T_s, T_1^*, T_i ($i = 1..4$) семейств $\Gamma_s, \Gamma_1^8, \Gamma_i$ ($i = 1..4$) периодических движений, рождающихся из гиперболидаальной прецессии симметричного спутника, от параметра γ при фиксированных значениях параметров $h = 0.205$ и $\delta = 1.0$ (a.) и $h = 0.3$ и $\delta = 1.0$ (b.). Сплошные линии соответствуют значениям γ , при которых семейства $\Gamma_s, \Gamma_1^8, \Gamma_i$ ($i = 1..4$) орбитально устойчивы в линейном приближении, а пунктирные линии - значениям γ , при которых указанные семейства орбитально неустойчивы.

графе, был применён метод сечений Пуанкаре. Далее на Рис. 31, 32 показаны сечения Пуанкаре, построенные в окрестности точек бифуркации B_i ($i = 1..5$) долгопериодических движений Γ_i ($i = 1..4$), рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника в случае резонансов третьего и четвёртого порядков при фиксированных значениях параметров $\delta = 1.0$, $h = 0.1$. Кроме семейств Γ_i ($i = 1..4$) на данных отображениях также отмечены семейства долгопериодических движений Γ_1^* , Γ_{0i} ($i = 1..3$), которые были построены численно. При численном продолжении в сторону уменьшения значения постоянной энергии h указанные семейства сливаются с гиперболоидальной прецессией спутника.

Слева от точки B_{01} при значениях $\gamma < 0.23$ существует семейство орбитально устойчивых в линейном приближении короткопериодических движений Γ_s и семейство орбитально устойчивых в линейном приближении долгопериодических движений Γ_1 . При переходе через точку B_{01} происходит бифуркация: от семейства Γ_1 отщепляется орбитально устойчивое в линейном приближении семейство долгопериодических движений Γ_{02} . На Рис. 31-а показано сечение Пуанкаре, построенное в окрестности точки бифуркации B_{01} при значении $\gamma = 0.24$. На данном отображении отмечены точки, соответствующие орбитально устойчивым в линейном приближении периодическим движениям семейств Γ_s , Γ_1 и Γ_{02} . С ростом значения параметра γ семейство Γ_{02} завершается в точке B_{02} , сливаясь с семейством короткопериодических движений Γ_s .

При увеличении значения γ в точке B_1^* появляется орбитально неустойчивое семейство долгопериодических движений Γ_1^* и орбитально устойчивое в линейном приближении семейство долгопериодических движений Γ_2 . На Рис. 31-б показано сечение Пуанкаре, построенное слева от точки B_1^* при значении $\gamma = 0.436$. На данном отображении вблизи точки, соответствующей орбитально неустойчивому периодическому движению семейства Γ_1^* отмечены две точки, соответствующие орбитально устойчивым в линейном приближении долгопериодическим движениям семейств Γ_2 и Γ_{01} . Семейство Γ_{01} не может быть постро-

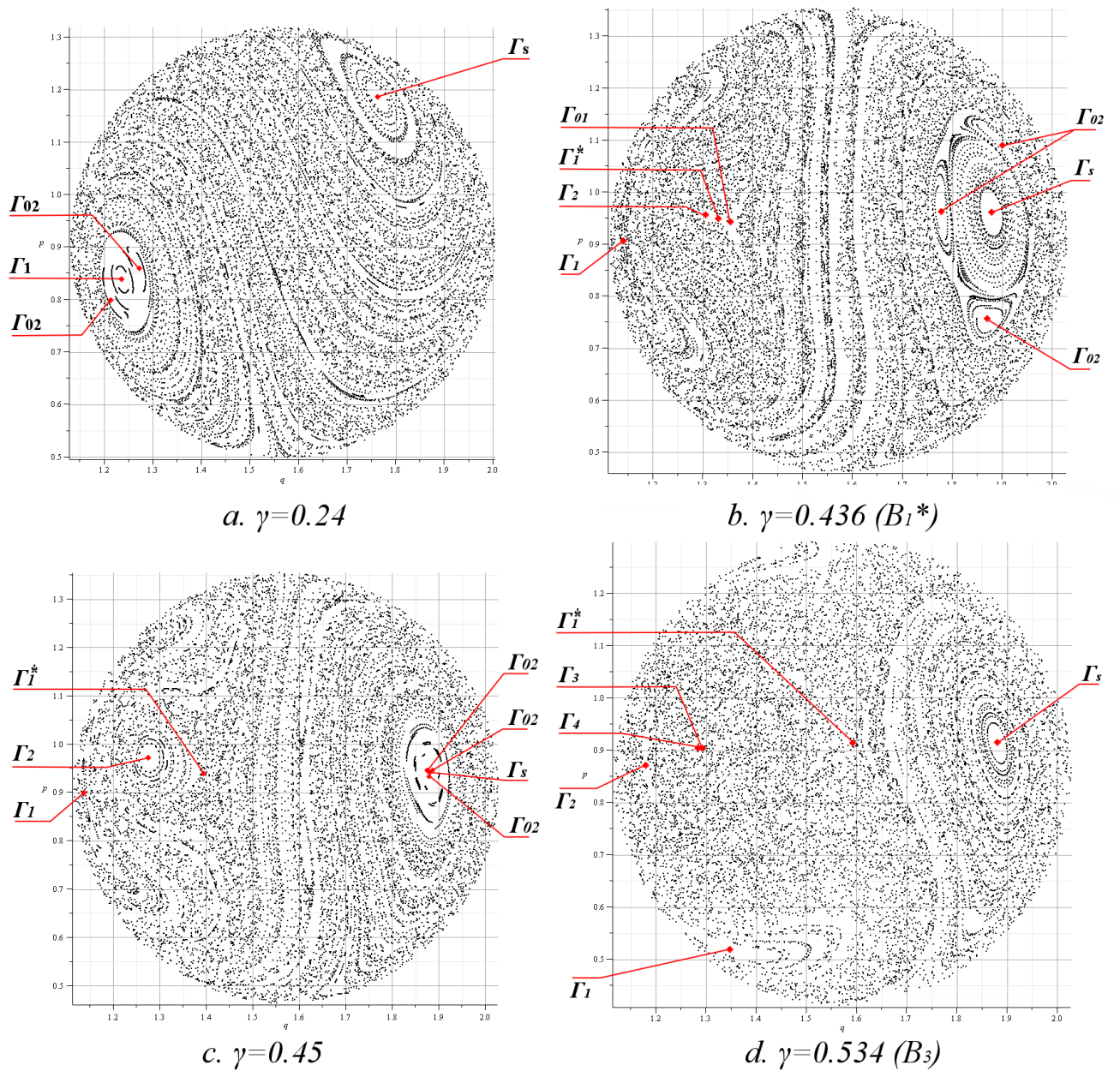


Рис. 31: Отображения Пуанкаре, построенные в окрестности точек бифуркации семейств короткопериодических (Γ_s) и долгопериодических (Γ_i [$i = 1..4$], Γ_1^* , Γ_{01} , Γ_{02}) движений, рождающихся из гиперболидаальной прецессии спутника, при фиксированных значениях параметров $\delta = 1.0$, $h = 0.1$ и $\gamma = 0.24$ (a), $\gamma = 0.436$ (b), $\gamma = 0.45$ (c), $\gamma = 0.534$ (d).

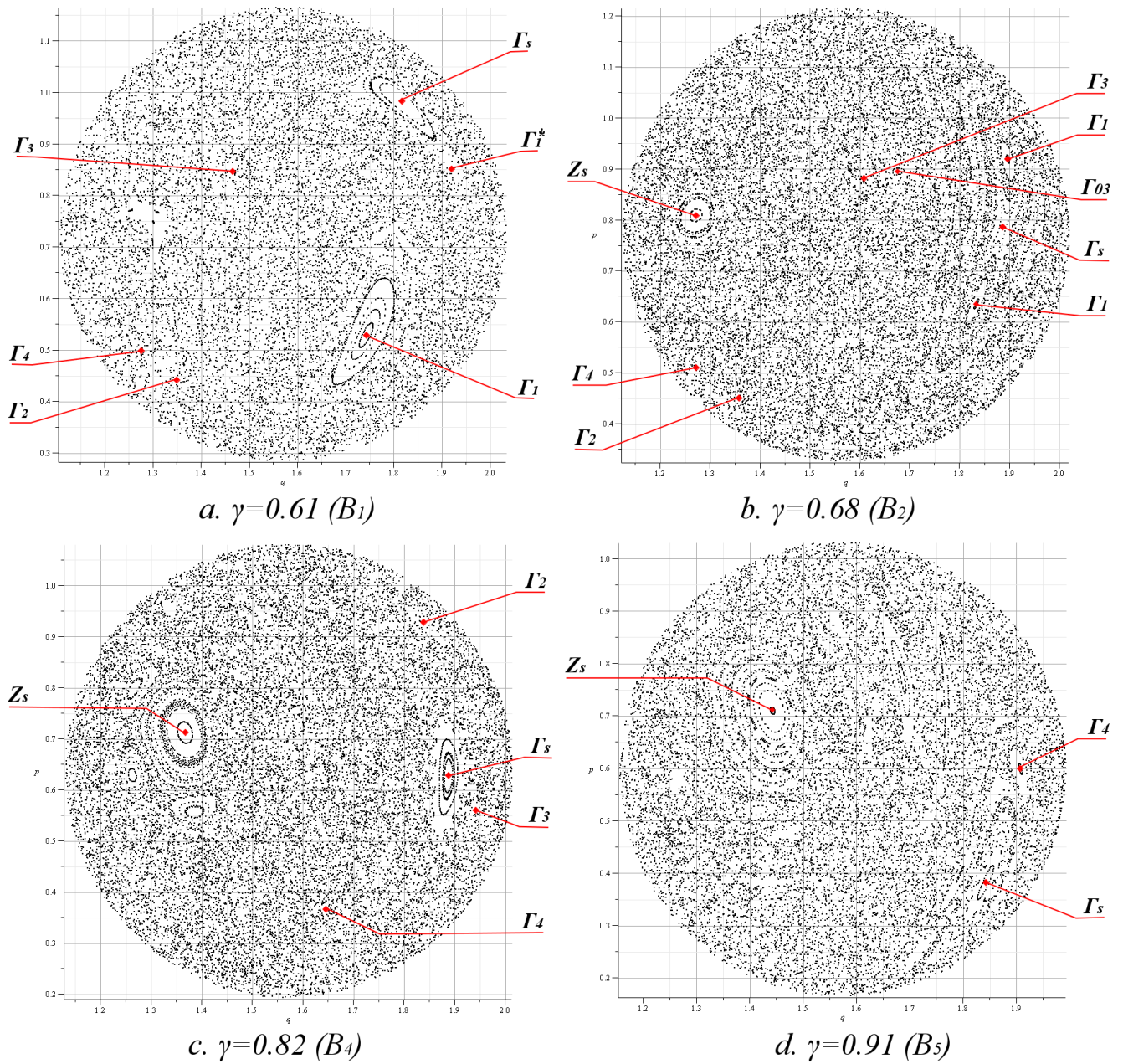


Рис. 32: Отображения Пуанкаре, построенные в окрестности точек бифуркации семейств короткопериодических (Γ_s) и долгопериодических (Γ_i [$i = 1..4$], Γ_1^* , Γ_{03}) движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника, при фиксированных значениях параметров $\delta = 1.0$, $h = 0.1$ и $\gamma = 0.61$ (a), $\gamma = 0.68$ (b), $\gamma = 0.82$ (c), $\gamma = 0.91$ (d).

ено аналитически в окрестности гиперболоидальной прецессии.

На Рис. 31-с показано сечение Пуанкаре, построенное вблизи точки бифуркации B_{02} при фиксированном значении $\gamma = 0.45$. На указанном отображении отмечены точки, соответствующие короткопериодическому движению семейства Γ_s и долгопериодическому семейству Γ_{02} , которые при увеличении значения γ сливаются, образуя точку, соответствующую устойчивому короткопериодическому движению семейства Γ_s . Кроме того, на данном рисунке отмечены точки, соответствующие орбитально устойчивым в линейном приближении движениям семейств Γ_1 , Γ_2 и орбитально неустойчивому движению семейства Γ_1^* .

При переходе через точку B_3 рождается семейство орбитально неустойчивых долгопериодических движений Γ_3 и семейство орбитально устойчивых в линейном приближении долгопериодических движений Γ_4 . На Рис. 31-d показано сечение Пуанкаре, построенное вблизи точки бифуркации B_3 при значении $\gamma = 0.534$, на котором отмечены точки, соответствующие указанным семействам долгопериодических движений.

На Рис. 32-а показано сечение Пуанкаре, построенное вблизи точки бифуркации B_1 при значении $\gamma = 0.61$. С приближением значения γ к бифуркационному значению точки, соответствующие орбитально неустойчивым периодическим движениям семейства Γ_1^* и орбитально устойчивым в линейном приближении периодическим движениям семейства Γ_s сближаются. При переходе через точку B_1 указанные семейства сливаются и семейство Γ_s становится орбитально неустойчивым. Также на указанном отображении отмечены точки, соответствующие орбитально устойчивым движениям семейств Γ_1 , Γ_2 , орбитально неустойчивым движениям семейств Γ_3 , Γ_4 и орбитально устойчивому семейству короткопериодических движений Z_s , рождающихся из цилиндрической прецессии спутника.

На Рис. 32-b показано сечение Пуанкаре, построенное вблизи точки би-

фуркации B_2 . С ростом значения параметра γ точки, отвечающие орбитально устойчивому в линейном приближении долгопериодическому движению семейства Γ_1 , приближаются к точке, отвечающей орбитально неустойчивому короткопериодическому движению семейства Γ_s , и сливаются с ней, образуя точку, отвечающую устойчивому короткопериодическому движению семейства Γ_s .

На Рис. 32-с показано сечение Пуанкаре, построенное вблизи точки бифуркации B_3 . При приближении к бифуркационной точке B_3 точки, отвечающие орбитально устойчивым в линейном приближении короткопериодическим движениям семейства Γ_s и долгопериодическим движениям семейства Γ_2 , а также орбитально неустойчивым долгопериодическим движениям семейства Γ_3 , сближаются и сливаются, образуя точку, отвечающую устойчивому короткопериодическому движению семейства Γ_s . С дальнейшим ростом значения параметра γ точки, отвечающие орбитально устойчивым семействам периодических движений Γ_s и Γ_4 сближаются и при переходе через точку бифуркации B_4 (Рис. 32-d) сливаются, образуя точку, отвечающую устойчивому короткопериодическому движению семейства Γ_s .

При дальнейшем увеличении значения γ точки, соответствующие периодическим движениям семейств Γ_s , Γ_2 , Γ_3 сближаются (Рис. 32-с) и при переходе через бифуркационное значение параметра γ в точке B_4 сливаются, образуя точку, соответствующую устойчивому короткопериодическому движению семейства Γ_s .

Заключение

В заключении сформулируем основные результаты диссертационной работы.

1. Разработана модификация алгоритма численного продолжения по параметру семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы А. Г. Сокольского и С. Р. Каримова. В диссертационной работе для указанного алгоритма сделаны следующие уточнения. Предложен явный вид матрицы перехода к нормальным, тангенциальному и энергетическому смещениям и изложена методика выбора приращений параметров, что позволило существенно повысить скорость построения семейств периодических движений. Разработан программный комплекс, реализующий указанный алгоритм в среде символьных вычислений Maple 15.
2. Выполнено аналитическое построение семейств периодических движений, рождающихся из регулярных прецессий динамически симметричного спутника. Указанные семейства получены виде рядов по степеням малого параметра - амплитуды колебания оси динамической симметрии спутника вблизи соответствующей регулярной прецессии. В нерезонансном случае построены семейства коротко- и долгопериодических движений, рождающихся из цилиндрической, конической и гиперболоидальной прецессии динамически симметричного спутника. Построены семейства долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника в случае резонансов третьего и четвёртого порядка.
3. В трёхмерном пространстве параметров задачи численно построены области существования семейств короткопериодических движений, рождающиеся из цилиндрической, конической и гиперболоидальной прецессии

спутника и семейств долгопериодических движений, рождающиеся из гиперболоидальной прецессии спутника в случае резонансов третьего и четвёртого порядка. Указанные области были получены с помощью алгоритма численного продолжения, изложенного в диссертационной работе.

4. Проведён линейный анализ орбитальной устойчивости семейств короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий, и семейств долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии. В трёхмерном пространстве параметров задачи построены диаграммы орбитальной устойчивости указанных семейств. В предельных случаях, когда амплитуда колебаний оси динамической симметрии спутника вблизи регулярной прецессии мала, выводы об орбитальной устойчивости получены аналитически, при произвольных значениях амплитуды выполнен численный анализ орбитальной устойчивости. Установлено полное соответствие результатов численного и аналитического исследования.
5. Исследована бифуркация семейств короткопериодических движений, рождающихся из регулярных прецессий спутника и семейств долгопериодических движений, рождающихся из гиперболоидальной прецессии спутника. Построены диаграммы бифуркации данных семейств. Для верификации и иллюстрации полученных выводов был применён метод сечений Пуанкаре. Разработан программный комплекс для построения бифуркационных диаграмм и сечений Пуанкаре.

Приложение А

А.1.

$$\begin{aligned}
h_{11} &= \frac{1}{V} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2} \right) \left(\left[\frac{\partial H}{\partial q_2} \right]^2 + \left[\frac{\partial H}{\partial p_1} \right]^2 \right) + \right. \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} \right) \left(\left[\frac{\partial H}{\partial q_1} \right]^2 + \left[\frac{\partial H}{\partial p_2} \right]^2 \right) + \\
&\quad 2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial q_2} \right) - \\
&\quad \left. - 2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_2} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_2} \right) \right] \\
h_{13} &= \frac{1}{V} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_2} + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2} \right) \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} + \right. \\
&\quad + \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial q_2} \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_1} \right) - \\
&\quad - \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_1} \right) \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} \right) + \\
&\quad \left. + \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_2} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} \right) \right] \\
h_{14} &= \frac{1}{V} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} \right) \left(\left[\frac{\partial H}{\partial q_1} \right]^2 - \left[\frac{\partial H}{\partial q_2} \right]^2 + \left[\frac{\partial H}{\partial p_1} \right]^2 - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2} \right]^2 \right) - \right. \\
&\quad - \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial q_2} + \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} \right) + \\
&\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_2} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_{33} &= \frac{1}{V} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_2^2} \right) \left(\left[\frac{\partial H}{\partial p_1} \right]^2 + \left[\frac{\partial H}{\partial p_2} \right]^2 \right) + \right. \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2} \right) \left(\left[\frac{\partial H}{\partial q_1} \right]^2 + \left[\frac{\partial H}{\partial q_2} \right]^2 \right) - \\
&\quad - 2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_1} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} + \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_1} \right) - \\
&\quad \left. - 2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_2} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} + \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_2} \right) \right] \\
h_{34} &= \frac{1}{V} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_1} \right) \left(\left[\frac{\partial H}{\partial q_1} \right]^2 - \left[\frac{\partial H}{\partial q_2} \right]^2 + \left[\frac{\partial H}{\partial p_1} \right]^2 - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2} \right]^2 \right) + \right. \\
&\quad + \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_1} - \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} \right) - \\
&\quad \left. - 2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_2} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial q_2} \right) \right] \\
h_{44} &= \frac{1}{V} \left[\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1^2} \right) \left(\left[\frac{\partial H}{\partial q_1} \right]^2 - \left[\frac{\partial H}{\partial p_1} \right]^2 \right) + \right. \\
&\quad \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_2^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_2^2} \right) \left(\left[\frac{\partial H}{\partial q_2} \right]^2 - \left[\frac{\partial H}{\partial p_2} \right]^2 \right) + \\
&\quad + 2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial q_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_2} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial q_2} - \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} \right) + \\
&\quad + 2 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_2} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_1} \right) \left(\frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_2} - \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_1} \right) + \\
&\quad \left. + 4 \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial^2 H}{\partial q_1 \partial p_1} + 4 \frac{\partial H}{\partial q_2} \frac{\partial H}{\partial p_2} \frac{\partial^2 H}{\partial q_2 \partial p_2} \right]
\end{aligned}$$

Приложение Б

Б.1.

$$a_{20} = F(\omega_1, \kappa_1), \quad a_{02} = F(\omega_2, \kappa_2),$$

$$F(\omega, \kappa) = -\frac{\kappa^4}{16\omega^4} \left(-4 - 36\omega^8 - 16\omega^2 + 8\omega^4 + 48\omega^6 - 60\delta\gamma\omega^4 - 76\delta\omega^6\gamma - \right. \\ - 12\omega^4\delta^2\gamma^2 + 48\gamma^2\delta\omega^2 + 60\delta\gamma^2\omega^4 + 4\omega^2\delta\gamma^4 + 2\omega^2\delta^2\gamma^3 - 16\omega^2\delta\gamma^3 - \\ - 68\delta\gamma\omega^2 + 4\omega^2\delta^3\gamma + 24\omega^6\gamma^2\delta + 12\delta^2\gamma\omega^2 + 30\delta^2\omega^4\gamma - 20\omega^4\delta\gamma^3 + \\ + 4\delta\gamma^4 + 6\delta^2\gamma^3 + 4\delta^3\gamma^2 + \delta^4\gamma + 54\delta^2\gamma + 16\delta^3 - 28\delta\gamma^3 - 28\gamma^2 - \\ - 20\delta^3\gamma - 4\delta^4 + \gamma^5 + 16\delta + 17\gamma - 52\delta\gamma + 60\gamma^2\delta - 24\delta^2 + 22\gamma^3 - \\ - 8\gamma^4 + 32\gamma^2\omega^6 + 64\delta\omega^6 + 41\omega^8\gamma - 16\delta^2\omega^2 - 64\omega^2\gamma^2 - 50\omega^4\gamma + \\ + 72\gamma^2\omega^4 - 60\gamma\omega^6 - 46\gamma^3\omega^4 + 2\omega^2\gamma^5 - 12\omega^2\gamma^4 + 16\omega^4\delta - 24\omega^4\delta^2 - \\ - 14\omega^6\gamma^3 - 3\omega^4\gamma^5 + 16\omega^4\gamma^4 - 12\omega^8\gamma^2 + 52\gamma\omega^2 + 32\delta\omega^2 - \\ \left. - 36\delta^2\gamma^2 + 38\gamma^3\omega^2 + 4\omega^6\gamma^4 \right),$$

$$a_{11} = -\frac{\kappa_1\kappa_2}{4\omega_1\omega_2} \left(-4 + 4\omega_2^4\delta^2 - 8\omega_2^4\delta - 11\omega_2^4\gamma + 10\omega_2^4\gamma^2 - \right. \\ - 3\omega_2^4\gamma^3 + 24\omega_2^2\gamma^2\delta - 34\omega_2^2\delta\gamma + 2\omega_2^2\delta^3\gamma - 8\omega_2^2\delta\gamma^3 + 6\omega_2^2\delta^2\gamma + \\ + \omega_2^2\delta^2\gamma^3 + 2\omega_2^2\delta\gamma^4 + 14\omega_2^4\delta\gamma - 3\omega_2^4\delta^2\gamma - 6\omega_2^4\gamma^2\delta - \\ - 32\omega_2^2\gamma^2 - 6\omega_2^2\gamma^4 + 19\omega_2^2\gamma^3 - 8\omega_2^2\delta^2 + \omega_2^2\gamma^5 + \\ + \omega_1^2\delta^2\gamma^3 + 2\omega_1^2\delta\gamma^4 + 2\omega_1^2\delta^3\gamma + 4\omega_2^4 - 8\delta^2\omega_1^2 - \\ - 32\omega_1^2\gamma^2 - 11\omega_1^4\gamma + 19\gamma^3\omega_1^2 + 10\gamma^2\omega_1^4 - 3\gamma^3\omega_1^4 + 4\delta\gamma^4 + \\ + 6\delta^2\gamma^3 + 4\delta^3\gamma^2 + \delta^4\gamma + 54\delta^2\gamma + 16\delta^3 - 28\delta\gamma^3 - \\ - 28\gamma^2 - 36\delta^2\gamma^2 - 20\delta^3\gamma - 4\delta^4 + \gamma^5 + 16\delta + 17\gamma + 6\delta^2\gamma\omega_1^2 + \\ \left. + 14\delta\gamma\omega_1^4 + 24\gamma^2\delta\omega_1^2 - 34\delta\gamma\omega_1^2 - 6\delta\gamma^2\omega_1^4 - 3\delta^2\omega_1^4\gamma - \right)$$

$$\begin{aligned}
& - 8\omega_1^2\delta\gamma^3 - 8\omega_1^2 + 4\omega_1^4 + 24\omega_1^4\omega_2^2 - 20\omega_1^4\omega_2^4 - \\
& - 8\omega_1^2\omega_2^6 - 12\gamma^2\omega_1^2\omega_2^2\delta^2 + 12\gamma^2\omega_1^2\omega_2^4\delta - 20\gamma^3\omega_1^2\delta\omega_2^2 + \\
& + 72\gamma^2\omega_1^2\delta\omega_2^2 - 38\gamma\omega_1^4\delta\omega_2^2 + 36\gamma\omega_1^2\omega_2^2\delta^2 - \\
& - 38\gamma\omega_1^2\omega_2^4\delta - 88\gamma\omega_1^2\delta\omega_2^2 - 52\delta\gamma + 60\gamma^2\delta - 24\delta^2 + \\
& + 12\gamma^2\omega_1^4\delta\omega_2^2 + 24\omega_1^2\omega_2^4 + 32\omega_1^2\delta\omega_2^2 - 30\gamma\omega_1^2\omega_2^4 - \\
& - 28\gamma\omega_1^2\omega_2^2 + \omega_1^2\gamma^5 - 7\gamma^3\omega_1^4\omega_2^2 + 32\omega_1^2\omega_2^4\delta - \\
& - 6\omega_1^2\gamma^4 - 40\gamma^3\omega_1^2\omega_2^2 - 8\omega_1^4\delta + 4\omega_1^4\delta^2 + 8\gamma\omega_1^2\omega_2^6 - \\
& - 7\gamma^3\omega_1^2\omega_2^4 - 3\gamma^5\omega_1^2\omega_2^2 - 30\gamma\omega_1^4\omega_2^2 - 2\gamma^2\omega_1^2\omega_2^6 - \\
& - 2\gamma^2\omega_1^6\omega_2^2 + 8\gamma\omega_1^6\omega_2^2 - 32\omega_1^2\omega_2^2\delta^2 + \\
& + 52\gamma^2\omega_1^2\omega_2^2 - 8\gamma^2\omega_1^4\omega_2^4 + 16\gamma^2\omega_1^2\omega_2^4 + 2\gamma^4\omega_1^4\omega_2^2 + \\
& + 16\gamma^2\omega_1^4\omega_2^2 + 2\gamma^4\omega_1^2\omega_2^4 + 16\gamma^4\omega_1^2\omega_2^2 + 22\gamma^3 + \\
& - 8\gamma^4 + 25\gamma\omega_1^4\omega_2^4 + 32\omega_1^4\delta\omega_2^2 - 8\omega_1^6\omega_2^2 + 26\gamma\omega_1^2 + \\
& + 16\delta\omega_1^2 - 8\omega_2^2 + 26\gamma\omega_2^2 + 16\delta\omega_2^2 \Big).
\end{aligned}$$

B.2.

$$h_{0004} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\gamma^4 + \left(-\omega_2^2 + \frac{2}{3}\delta \right) \gamma^2 + (\delta - \omega_2^2)^2 \right) \gamma^2 \kappa_2^4$$

$$h_{0013} = \left(\frac{1}{2}\gamma^4 + \left(\frac{4}{3}\delta - \frac{3}{2}\omega_2^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 \right) \gamma^2 + (\delta - \omega_2^2) (2\delta - \omega_1^2 - \omega_2^2) \right) \kappa_2^3 \kappa_1 \gamma^2$$

$$\begin{aligned}
h_{0022} = & \frac{1}{4} \kappa_1^2 \kappa_2^2 \gamma^2 \left[12\delta^2 + 2\omega_2^4 + 8\omega_1^2\omega_2^2 - 6\omega_1^2\gamma^2 + \right. \\
& \left. + 2\omega_1^4 - 12\delta\omega_2^2 - 6\omega_2^2\gamma^2 + 3\gamma^4 + 8\gamma^2\delta - 12\delta\omega_1^2 \right]
\end{aligned}$$

$$h_{0031} = 2\kappa_2 \left[\frac{1}{4}\gamma^4 + \left(-\frac{3}{4}\omega_1^2 + \frac{2}{3}\delta - \frac{1}{4}\omega_2^2 \right) \gamma^2 + (\delta - \omega_1^2) \left(\delta - \frac{1}{2}\omega_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2 \right) \right] \kappa_1^3 \gamma^2$$

$$\begin{aligned}
h_{0040} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \gamma^4 + \left(-\omega_1^2 + \frac{2}{3} \delta \right) \gamma^2 + (\delta - \omega_1^2)^2 \right) \gamma^2 \kappa_1^4 \\
h_{0102} &= \frac{1}{\omega_2} \sqrt{1 - \gamma^2} \left(\delta + \frac{1}{2} \gamma^2 - \omega_2^2 \right) (\delta - \omega_2^2) \gamma \kappa_2^3 \\
h_{0111} &= \frac{1}{\omega_2} \kappa_2^2 \sqrt{1 - \gamma^2} (\delta - \omega_2^2) (2\delta - \omega_1^2 - \omega_2^2 + \gamma^2) \kappa_1 \gamma \\
h_{0120} &= \frac{1}{\omega_2} \left(\delta + \frac{1}{2} \gamma^2 - \omega_1^2 \right) \sqrt{1 - \gamma^2} (\delta - \omega_2^2) \kappa_2 \gamma \kappa_1^2 \\
h_{0202} &= \frac{1}{4\omega_2^2} (2\delta + \gamma^2 - 2\omega_2^2) (\delta - \omega_2^2)^2 \gamma^2 \kappa_2^4 \\
h_{0211} &= \frac{1}{2\omega_2^2} \kappa_2^3 (\delta - \omega_2^2)^2 (2\delta - \omega_1^2 - \omega_2^2 + \gamma^2) \kappa_1 \gamma^2 \\
h_{0220} &= \frac{1}{4\omega_2^2} (2\delta + \gamma^2 - 2\omega_1^2) (\delta - \omega_2^2)^2 \kappa_2^2 \gamma^2 \kappa_1^2 \\
h_{0300} &= \frac{1}{2\omega_2^3} \sqrt{1 - \gamma^2} \kappa_2^3 \delta \gamma (\delta - \omega_2^2)^2 \\
h_{0400} &= \frac{1}{24\omega_2^4} (\omega_2^2 + 4\gamma^2 \delta - \delta) \kappa_2^4 (\delta - \omega_2^2)^3 \\
h_{1002} &= \frac{1}{\omega_1} \sqrt{1 - \gamma^2} (\delta - \omega_1^2) \kappa_2^2 \gamma \kappa_1 \left(\delta + \frac{1}{2} \gamma^2 - \omega_2^2 \right) \\
h_{1011} &= \frac{1}{\omega_1} \kappa_2 \sqrt{1 - \gamma^2} (\delta - \omega_1^2) (2\delta - \omega_1^2 - \omega_2^2 + \gamma^2) \kappa_1^2 \gamma \\
h_{1020} &= \frac{1}{\omega_1} \left(\delta + \frac{1}{2} \gamma^2 - \omega_1^2 \right) \sqrt{1 - \gamma^2} (\delta - \omega_1^2) \gamma \kappa_1^3 \\
h_{1102} &= \frac{1}{\omega_1 \omega_2} (\delta - \omega_2^2) (\delta - \omega_1^2) \kappa_2^3 \gamma^2 \kappa_1 \left(\delta + \frac{1}{2} \gamma^2 - \omega_2^2 \right) \\
h_{1111} &= \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \kappa_2^2 (\delta - \omega_1^2) (\delta - \omega_2^2) (2\delta - \omega_1^2 - \omega_2^2 + \gamma^2) \kappa_1^2 \gamma^2 \\
h_{1120} &= \frac{1}{\omega_1 \omega_2} \left(\delta + \frac{1}{2} \gamma^2 - \omega_1^2 \right) (\delta - \omega_2^2) (\delta - \omega_1^2) \kappa_2 \gamma^2 \kappa_1^3 \\
h_{1200} &= \frac{1}{2\omega_1 \omega_2^2} \gamma (\delta - \omega_2^2) \sqrt{1 - \gamma^2} \delta \kappa_1 \kappa_2^2 (3\delta - \omega_2^2 - 2\omega_1^2) \\
h_{1300} &= \frac{1}{6\omega_1 \omega_2^3} (\delta - \omega_2^2)^2 \left[4\gamma^2 \delta^2 - \delta^2 - \gamma^2 \delta \omega_2^2 + \right. \\
&\quad \left. + \delta \omega_2^2 + \delta \omega_1^2 - 3\gamma^2 \delta \omega_1^2 - \omega_1^2 \omega_2^2 \right] \kappa_1 \kappa_2^3
\end{aligned}$$

$$h_{2002} = \frac{1}{4\omega_1^2} (\delta - \omega_1^2)^2 \kappa_2^2 \gamma^2 \kappa_1^2 (2\delta + \gamma^2 - 2\omega_2^2)$$

$$h_{2011} = \frac{1}{2\omega_1^2} \kappa_2 (\delta - \omega_1^2)^2 (2\delta - \omega_1^2 - \omega_2^2 + \gamma^2) \kappa_1^3 \gamma^2$$

$$h_{2020} = \frac{1}{4\omega_1^2} (2\delta + \gamma^2 - 2\omega_1^2) (\delta - \omega_1^2)^2 \gamma^2 \kappa_1^4$$

$$h_{2100} = \frac{1}{2\omega_1^2 \omega_2} \gamma (3\delta - 2\omega_2^2 - \omega_1^2) \sqrt{1 - \gamma^2} \delta (\delta - \omega_1^2) \kappa_1^2 \kappa_2$$

$$h_{2200} = \frac{(\delta - \omega_2^2) (\delta - \omega_1^2) \kappa_1^2 \kappa_2^2}{\omega_1^2 \omega_2^2} \left[\left(\gamma^2 - \frac{1}{4} \right) \delta^2 - \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \left(\gamma^2 - \frac{1}{2} \right) \delta - \frac{1}{4} \omega_1^2 \omega_2^2 \right]$$

$$h_{3000} = \frac{1}{2\omega_1^3} \sqrt{1 - \gamma^2} \kappa_1^3 \delta \gamma (\delta - \omega_1^2)^2.$$

$$h_{3100} = \frac{1}{6\omega_1^3 \omega_2} (4\gamma^2 \delta^2 - \delta^2 - \gamma^2 \delta \omega_1^2 + \delta \omega_1^2 + \delta \omega_2^2 - 3\gamma^2 \delta \omega_2^2 - \omega_1^2 \omega_2^2) (\delta - \omega_1^2)^2 \kappa_1^3 \kappa_2$$

$$h_{4000} = \frac{1}{24\omega_1^4} (\omega_1^2 + 4\gamma^2 \delta - \delta) (\delta - \omega_1^2)^3 \kappa_1^4.$$

Список литературы

1. *Кондурарь В. Т.* Частные решения общей задачи о поступательно-вращательном движении сфероида под действием притяжения шара // *Астрономический журнал*. 1959. Т. 36. 5. С. 890–901.
2. *Дубошин Г. Н.* О вращательном движении искусственных небесных тел // *Бюлл. ИТА АН СССР*. 1960. Т. 7. 7. С. 511–520.
3. *Черноузько Ф. Л.* Об устойчивости регулярной прецессии спутника // *Прикладная математика и механика*. 1964. Т. 28. 1. С. 155–157.
4. *Белецкий В.В.* Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. М: Изд-во МГУ, 1975. 308 с.
5. *Холостова О. В.* Об устойчивости цилиндрической прецессии спутника в одном частном случае // *Космич. исследования*. 2008. Vol. 46. no. 3. P. 270–278.
6. *Маркеев А.П.* Об одном способе исследования устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем // *Изв. РАН. МТТ*. 2004. 6. С. 3–12.
7. *Маркеев А.П.* Линейные гамильтоновы системы и некоторые задачи об устойчивости движения спутника относительно центра масс. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2009.
8. *Торжеский А.П.* Периодические решения уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите // *Космич. исслед.* 1964. Т. 2. Вып. 5. С. 667–678.
9. *Златоустов В.А., Охоцимский Д.Е., Сарычев В.А., Торжеский А.П.* Исследование колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Космич. исслед.* 1964. Т. 2. Вып. 5. С. 657–666.
10. *V. A. Zlatoustov, A. P. Markeev.* Stability of planar oscillations of a satellite in an elliptic orbit // *Celestial Mech.* 1973. Vol. 7. no. 1. P. 31–45.

11. *Сарычев В.А., Златоустов В.А.* Периодические колебания спутника в плоскости эллиптической орбиты. Препринт № 48 Ин-та Прикладной математики АН СССР, 1975.
12. *Брюно А.Д.* О колебаниях спутника на эллиптической орбите. Препринт № 53 Ин-та Прикладной математики АН СССР, 1976. С. 20.
13. *Сарычев В. А., Сазонов В. В., Златоустов В. А.* Периодические вращения спутника в плоскости эллиптической орбиты // Космич. исследования. 1979. Vol. 17. no. 2. P. 190–207.
14. *Брюно А. Д.* Ограниченная задача трёх тел: плоские периодические орбиты. М.: Наука, 1990.
15. *Маркеев А.П., Бардин Б.С.* Плоские вращательные движения спутника на эллиптической орбите // Космич. исслед. 1994. Т. 32. 6. С. 43–49.
16. *Брюно А.Д.* Семейства периодических решений уравнения Белецкого // Космич. исслед. 2002. Т. 40. № 3. С. 295–316.
17. *A. P. Markeev, B. S. Bardin.* On stability of planar oscillations and rotations of satellite in a circular orbit // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 2003. Vol. 85. no. 1. P. 51–66.
18. *Маркеев А.П.* Об устойчивости колебаний спутника в плоскости эллиптической орбиты // Доклады Академии наук. 2007. Т. 413. № 3. С. 340–344.
19. *Бардин Б. С., Чекин А. М.* Об орбитальной устойчивости плоских вращений спутника-пластинки на круговой орбите // Вестник МАИ. 2007. Vol. 14. no. 2. P. 23–36.
20. *Бардин Б.С., Чекин А.М.* Об орбитальной устойчивости плоских колебаний спутника на круговой орбите // Космич. исслед. 2008. Т. 46. Вып. 3. С. 278–288.
21. *Маркеев А.П.* О вращениях почти симметричного спутника относительно направления, фиксированного в абсолютном пространстве эллиптической орбите при резонансе меркурианского типа // ПММ. 2008. Т. 72. 5.

- С. 707–720.
22. *Бардин Б.С., Чекина Е.А.* Об устойчивости резонансного вращения спутника на эллиптической орбите // *Нелинейная динамика*. 2016. Т. 12. Вып. 4.
 23. *Бардин Б.С., Чекина Е.А.* Об устойчивости резонансного вращения динамически симметричного спутника в плоскости эллиптической орбиты // *Труды МАИ*. 2016. Вып. 89.
 24. *B. S. Bardin, E. A. Chekina.* On the Constructive Algorithm for Stability Analysis of an Equilibrium Point of a Periodic Hamiltonian System with Two Degrees of Freedom in the Case of Combinational Resonance // *Regul. and Chaotic Dyn.* 2019. Vol. 24. no. 2. P. 127–144.
 25. *Чуркина Т.Е.* Об устойчивости одного плоского резонансного движения спутника при наличии пространственных возмущений // *Изв. РАН. МТТ*. 2007. 4. С. 14–25.
 26. *Бардин Б. С., Чекина Е. А.* Об устойчивости плоских колебаний спутника-пластинки в случае резонанса основного типа // *НД*. 2017. Vol. 13. no. 4. P. 465–476.
 27. *B. S. Bardin, E. A. Chekina.* On orbital stability of planar oscillations of a satellite in a circular orbit on the boundary of the parametric resonance // *AIP Conf. Proc.* 2018. Vol. 1959.
 28. *Сокольский А. Г., Хованский С. А.* Периодические движения, близкие гиперболоидальной прецессии спутника на круговой орбите // *Космические исследования*. 1979. Т. 17. 2. С. 208–217.
 29. *I. Shevchenko, A. Sokolskiy.* Hyperboloidal precession of a dynamically symmetric satellite. Construction of normal forms of the Hamiltonian // *CeMDA*. 1995. Vol. 62. no. 4. P. 289–304.
 30. *Маркеев А.П.* О критическом случае пары нулевых корней в гамильтоновой системе с двумя степенями свободы // *ПММ*. 1998. Т. 62. Вып. 3. С. 372–382.

31. *Бардин Б. С.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы в случае резонанса четвёртого порядка // НД. 2007. Vol. 3. no. 1. P. 57–74.
32. *Бардин Б. С., Чекин А. М.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 3:1 // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. 3.
33. *Хованский С. А.* Периодические движения спутника на круговой орбите: Ph.D. thesis / МАИ. Москва, 1984.
34. *Сокольскийкий А. Г., Хованский С. А.* О численном продолжении периодических решений лагранжевой системы с двумя степенями свободы // Космические исследования. 1983. Т. 21. 6. С. 851–860.
35. *Магнус К.* Гироскоп: теория и применение. М.: Мир, 1974.
36. *Овчинников М. Ю.* Близкие к стационарным периодические движения осесимметричного спутника с магнитным демпфером // Препринт ИПМ. 1982. no. 178.
37. *Овчинников М. Ю.* Периодические движения осесимметричного гравитационно-ориентированного спутника с демпфером // Препринт ИПМ. 1982. no. 90.
38. *Сарычев В. А., Сазонов В. В., Овчинников М. Ю.* Периодические колебания спутника относительно центра масс под действием магнитного момента // Препринт ИПМ. 1982. no. 182.
39. *Сарычев В. А., Овчинников М. Ю.* Движение спутника с постоянным магнитом относительно центра масс // Космические Исследования. 1986. Vol. 24. no. 4. P. 527–543.
40. *Сарычев В. А., Овчинников М. Ю., Герман А. Д.* Периодические движения спутника с сильным магнитом в плоскости полярной орбиты с учётом возмущений // Космические Исследования. 1988. Vol. 26. no. 6. P. 830–839.
41. *Овчинников М. Ю., Бондаренко В. Н.* О движении относительно центра масс вращающегося тела с демпфером сухого трения // Препринт ИПМ.

1991. no. 35.
42. *Овчинников М. Ю.* Стационарные вращения твёрдого тела с жёсткой лопастью в однородной атмосфере // Известия РАН. 2003. no. 5. P. 3–23.
 43. *Тихонов А. А.* Интегрируемый случай вращательного движения гиростата в гравитационном и магнитном полях Земли // Вестник Удмуртского университета. 2009. Vol. 2. P. 89–96.
 44. *Ильин А. А., Куприянова Н. В., Овчинников М. Ю.* Стационарные вращательные движения твёрдого тела с сильным магнитом в переменном магнитном поле при наличии диссипации // Известия РАН. 2009. Vol. 3. P. 12–24.
 45. *Тихонов А. А., Тхай В. Н.* Симметричные колебания в задаче о вращательном движении гиростата на слабоэллиптической орбите в гравитационном и магнитном полях // Вестник СПбГУ. 2015. Vol. 2. no. 2. P. 278–286.
 46. *Овчинников М. Ю., Ролдугин Д. С., Пеньков В. И.* Периодические движения спутника с магнитным управлением и маховиком при повороте в плоскости орбиты // Препринт ИПМ. 2017. no. 102.
 47. *Брюно А. Д.* Неустойчивость в системе Гамильтона и распределение астероидов // Матем. сб. 1970. Vol. 83. no. 2. P. 273–312.
 48. *K. Meyer, D. Schmidt.* Periodic orbits near L_4 for mass ratios near the critical mass ratio of Routh // CeMec. 1971. Vol. 4. no. 1. P. 99–109.
 49. *B. S. Bardin.* On motions near the Lagrange equilibrium point L_4 in the case of Routh's critical mass ratio // Celest. Mech. 2002. Vol. 82. no. 2. P. 163–177.
 50. *J. Galan, F. Munoz-Almaraz, E. Freire, E. Doedel, A. Vanderbauwhede.* Stability and bifurcation of the figure-8 solution of the three body system // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 88. no. 24.
 51. *Бардин Б. С.* Об орбитальной устойчивости периодических движений гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в случае резонанса 3:1 //

- Прикладная математика и механика. 2007. Т. 71. 6. С. 976–988.
52. *Бардин Б. С.* Об орбитальной устойчивости маятникообразных движений твёрдого тела в случае Бобылёва-Стеклова // НД. 2009. Vol. 5. no. 4. P. 535–550.
 53. *Бардин Б. С., Савин А. А.* Об орбитальной устойчивости маятниковых колебаний и вращений симметричного твёрдого тела с неподвижной точкой // НД. 2012. Vol. 8. no. 2. P. 249–266.
 54. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Собр. соч. Т. 2. М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1956. С. 7–263.
 55. *A. Wintner.* Grundlagen einer Genealogie der periodischen Bahnen im restringierten Dreikörperproblem // Math Z. 1931. Vol. 34. no. 3. P. 321.
 56. *J. Henrard.* Periodic orbits emanating from a resonant equilibrium // Cel. Mech. 1970. Vol. 1. P. 437–466.
 57. *D. S. Schmidt.* Periodic solutions near a resonant equilibrium of a Hamiltonian system // Celestial Mechanics. 1974. no. 9.
 58. *Маркеев А.П.* Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М: Наука, 1978. 312 с.
 59. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М: Эдиториал УРСС, 2003. 416 с.
 60. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
 61. *Маркеев А.П., Чеховская Т.Н.* О резонансных периодических решениях гамильтоновых систем, рождающихся из положения равновесия // ПММ. 1982. Т. 46. Вып. 1. С. 27 – 33.
 62. *Маркеев А.П.* Об устойчивости и нелинейных колебаниях гамильтоновой системы в одном резонансном случае // Изв. РАН. МТТ. 1998. № 4. С. 38 – 49.
 63. *Маркеев А.П.* О нелинейных колебаниях гамильтоновой системы при резонансе 2:1 // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 5. С. 757–769.

64. *Бардин Б.С.* О ветвлении периодических решений системы, близкой к системе Ляпунова // ПММ. 1999. Т. 63. Вып. 4. С. 538–548.
65. *B. S. Bardin.* On nonlinear motions of Hamiltonian system in case of fourth order resonance // Regul. Chaotic Dyn. 2007. Vol. 12. no. 1. P. 86–100.
66. *C. Burrau, E. Stroemgren.* Numerische Untersuchungen ueber eine Klasse periodischer Bahnen im probleme restreint // Astronomische Nachrichten. 1915. Vol. 200. no. 4797. P. 313–330.
67. *A. Deprit, J. Henrard.* Natural Families of Periodic Orbits // The Astronomical Journal. 1967. Vol. 72. no. 2. P. 158–172.
68. *M. Henon.* Numerical Exploration of the Restricted Problem. V. Hill's case: Periodic Orbits and Their Stability // Astron. & Astrophys. 1969. Vol. 1. P. 223–238.
69. *R. Broucke.* Periodic orbits in the planar general three-body problem // Cel. Mech. 1975. Vol. 11. P. 13–38.
70. *V. V. Markellos, P. P. Kazantzis, C. G. Zagouras.* Numerical exploration of periodic orbits // Ap. & S. S. 1978. Vol. 54. P. 379–388.
71. *Хибник А. И.* Периодические решения системы п дифференциальных уравнений. Пушкино: науч. центр биол. иссл. АН СССР, 1979.
72. *Каримов С. Р., Сокольский А. Г.* Метод продолжения по параметрам естественных семейств периодических движений гамильтоновых систем // Препринт / ИТА АН СССР. № 9. 1990. С. 32.
73. New Trends for Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics / Ed. by E. A. Lacombe, J. Libre. World Scientific, 1994. P. 151–161.
74. *M. Lara, A. Deprit, A. Elipe.* Numerical continuation of families of frozen orbits in the zonal problem of artificial satellite theory // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy. 1995. Vol. 62. no. 2. P. 167–181.
75. *M. Lara, J. Pelaez.* On the numerical continuation of periodic orbits. An intrinsic, 3-dimentional, differential, predictor-corrector algorithm // Astronomy &

- Astrophysics. 2002. Vol. 389. no. 2. P. 692–701.
76. *F. J. Munoz-Almaraz, E. Freire, J. Galan, E. Doedel, A. Vanderbauwhede.* Continuation of periodic orbits in conservative and Hamiltonian systems // *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2003. Vol. 181. P. 1–38.
77. *A. Dena, M. Rodriguez, S. Serrano, R. Barrio.* High-Precision Continuation of Periodic Orbits // *Abstract and Applied Analysis*. 2012. Vol. 2012.
78. *C. Wulff, A. Schebesch.* Numerical Continuation of Hamiltonian Relative Periodic Orbits // *Nonlinear Science*. 2008. Vol. 18. P. 343–390.
79. *C. Wulff, A. Schebesch.* Numerical continuation of Symmetric Periodic Orbits // *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2006. Vol. 5.
80. *C. Wulff, A. Hohmann, P. Deuffhard.* Numerical continuation of periodic orbits with symmetry. Technical report of Konrad-Zuse-Zentrum, Berlin, 1994.
81. *A. Riguas, E. Tresaco.* Numerical continuation of one-parameter families of periodic orbits // *Fifteenth International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics and its Applications*. 2018.
82. *F. Blesa.* The use of continuation methods to obtaining periodic orbits in Hamiltonian and dissipative systems // *Fifteenth International Conference Zaragoza-Pau on Mathematics and its Applications*. 2018.
83. *Сухов Е. А., Бардин Б. С.* Численно-аналитическое построение семейства периодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2016. Т. 53.
84. *Сухов Е. А., Бардин Б. С.* Численно-аналитическое построение и исследование устойчивости периодических движений симметричного спутника // *Инженерный журнал: наука и инновации*. 2017. 11.
85. *E. Sukhov.* Analytical and Numerical Computation and Study of Long-periodic motions Originating from Hyperboloidal Precession of a Symmetric Satellite // *AIP Conference Proceedings*. 2018. Vol. 1959. no. 040021.

86. *E. A. Sukhov*. Bifurcation analysis of periodic motions originating from regular precessions of a dynamically symmetric satellite // Non-linear dynamics. 2019. Vol. 15. no. 4.
87. *Бардин Б. С., Сухов Е. А.* Об алгоритме продолжения по параметрам семейств периодических движений автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы // Тез. докл. LIV Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц плазмы и оптоэлектроники / РУДН. Москва: 2018. С. 198–202.
88. *G.E.O. Giacaglia*. Perturbation methods in non-linear systems. N.Y.: Springer - Verlag, 1972. Перевод на русский: Джакалья Г.Е.О. Методы возмущений для нелинейных систем. М.: Наука, 1979. 319 с.
89. *Сухов Е. А.* Численно-аналитическое построение периодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии // Труды XXVII международной конференции МИКМУС / ИМАШ РАН. Москва: 2015. Р. 253–256.
90. *Сухов Е. А., Бардин Б. С.* О периодических движениях, рождающихся из гиперболоидальной прецессии симметричного спутника // Тез. докл. LIII Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц плазмы и оптоэлектроники / РУДН. Москва: 2017. С. 164–168.
91. *Сухов Е. А.* Построение и исследование устойчивости долгопериодических движений симметричного спутника, рождающихся из его гиперболоидальной прецессии // тезисы Международной конференции по математической теории управления и механике МСТМ-2017 / ВлГУ им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, МГУ, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН. Суздаль: 2017.
92. *H. Keller*. Applications of Bifurcation Theory / Ed. by P. Rabinowitz. New York: Academic Press, 1977. Р. 359–384.
93. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика.

М:Мир, 1985.

94. *B. Fiedler*. Global Bifurcation of Periodic Solutions with Symmetry. Berlin: Springer Verlag, 1988.
95. *C. Wulff, J. Lamb, I. Melbourne*. Bifurcation from relative periodic solutions // Ergodic Th. Dyn. Syst. 2001. Vol. 21. P. 605–635.
96. *J. Lamb, I. Melbourne, C. Wulff*. General bifurcations from periodic solutions with spatiotemporal symmetry, including mode interactions and resonances // J. Differential Equations. 2003. Vol. 191. no. 2. P. 377–407.
97. *Y. Kuznetsov*. Elements of Applied Bifurcation Theory // Applied Mathematical Sciences. Springer, 2004. Vol. 112.