

На правах рукописи



БЕЛИЧЕНКО МИХАИЛ ВАЛЕРИЕВИЧ

**Исследование устойчивости частных движений
твёрдого тела с вибрирующей точкой подвеса**

01.02.01 – Теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2018

Работа выполнена на кафедре «Мехатроники и теоретической механики» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: **Холостова Ольга Владимировна**,
доктор физико-математических наук, доцент.

Официальные оппоненты: **Тихонов Алексей Александрович**,
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры теоретической и прикладной механики математико-механического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Санкт-Петербургский государственный университет».

Кулешов Александр Сергеевич,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова».

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Удмуртский государственный университет».

Защита состоится «21» декабря 2018 г. в 10:00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.125.14 в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете), по адресу: 125993, г. Москва, А-80, ГСП-3, Волоколамское шоссе, д. 4.

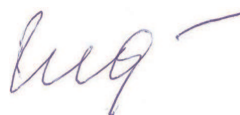
С диссертацией можно ознакомиться в научно-технической библиотеке Московского авиационного института и на сайте института

https://mai.ru/events/defence/index.php?ELEMENT_ID=98100.

Автореферат разослан «___» _____ 2018 г.

Отзывы и замечания по автореферату в двух экземплярах, заверенные печатью, просьба высылать по вышеуказанному адресу на имя ученого секретаря диссертационного совета.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
к.ф.-м.н, доцент



Гудаспов В.Ю.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию влияния высокочастотных вибраций на устойчивость ряда частных режимов движения твёрдого тела в однородном поле тяжести.

Актуальность данной темы обусловлена распространением источников вибрации и увеличением её роли в современных устройствах. В технике широко применяются различные рабочие режимы движения твёрдого тела с закреплённой точкой (точкой подвеса), и вызывает интерес его динамика при наличии вибраций. Воздействие вибраций может приводить к изменению устойчивости существующих рабочих режимов движения и к появлению новых движений, отсутствующих в случае тела с неподвижной точкой подвеса. Это может нарушить работу механизма или же привести к новым полезным динамическим эффектам.

Исследование динамики тяжёлого твёрдого тела с неподвижной точкой берёт своё начало с работ Л. Эйлера и Ж. Лагранжа. Волчок Лагранжа является важным объектом исследования в связи с широким использованием в технике симметричных гироскопов. Целый ряд работ посвящен изучению движения волчка при наличии возмущений, таких, как действие внешних сил, возмущение геометрии масс и движение точки подвеса.

Важным направлением исследований является изучение частных движений твёрдого тела с неподвижной точкой и произвольной геометрией масс, прежде всего стационарных вращений и маятниковых движений. Перманентные вращения тяжёлого твёрдого тела в общем случае геометрии масс впервые описаны О. Штауде (1894 г.), и на данный момент в работах Р. Граммеля, К. Магнуса, В. В. Румянцева, В. Н. Рубановского, Я. В. Татарина, О. В. Холостовой и др. проведён линейный и нелинейный анализ их устойчивости в общем и частных случаях геометрии масс тела. Маятниковые движения описал Б. К. Млодзеевский (1894 г.), исследование их устойчивости проведено в работах Ю. А. Архангельского, А. П. Маркеева, Б. С. Бардина и др.

Представляет интерес выявить влияние высокочастотных вибраций на существование и устойчивость известных частных движений твёрдого тела. В 1908 г. А. Стефенсон рассмотрел вопрос о стабилизации перевёрнутого положения равновесия математического маятника за счёт вертикальных вибраций точки подвеса. Системы маятникового типа при наличии вибраций изучались в работах П. Л. Капицы, Н. Н. Боголюбова, Т. Г. Стрижак, А. П. Маркеева, О. В. Холостовой и др. Динамика волчка Лагранжа и твёрдых тел с произвольной геометрией масс при наличии высокочастотных вибраций точки подвеса исследовались в работах А. П. Маркеева, О. В. Холостовой и др.

Целью данной диссертационной работы является исследование периодических движений тяжёлого твёрдого тела при наличии высокочастотных горизонтальных гармонических вибрации точки подвеса, а также исследование стационарных вращений и маятниковых движений в приближенной зада-

че о движении волчка Лагранжа для различных вариантов высокочастотных периодических вибраций точки подвеса.

Методы исследования. Для достижения цели диссертационной работы применялись методы теории устойчивости линейных и нелинейных гамильтоновых систем, включая устойчивость при резонансах и КАМ–теорию. Применялись методы нормальных форм, нормализация гамильтониана с помощью метода Депри–Хори. При проведении исследований использовались компьютерные системы аналитических вычислений и численные расчеты.

Достоверность результатов. Достоверность результатов, представленных в диссертации, обусловлена использованием строгих математических методов исследования и высокой точностью проведенных численных расчетов. Полученные результаты согласуются с уже известными результатами.

Научная новизна:

1. В рамках приближенной автономной системы дифференциальных уравнений движения исследована задача о существовании и бифуркациях положений относительного равновесия тяжёлого твёрдого тела при наличии высокочастотных горизонтальных гармонических вибраций точки подвеса. Для случая произвольной геометрии масс тела описаны относительные равновесия, для которых центр масс лежит на одной вертикали с точкой подвеса. Для ряда частных случаев геометрии масс (тело с центром масс на главной оси инерции или в главной плоскости инерции и динамически симметричное тело), помимо вертикальных, найдены наклонные положения относительного равновесия. Решён вопрос об их устойчивости.
2. Для указанных частных случаев геометрии масс построены высокочастотные периодические движения тела, рождающиеся из положений относительного равновесия приближенной задачи. Решён вопрос об их устойчивости в линейном приближении.
3. Исследованы стационарные вращения в приближенной задаче динамики волчка Лагранжа, точка подвеса которого совершает высокочастотное периодическое движение в трёхмерном пространстве. Для случаев вибраций, допускающих вертикальные положения оси волчка, проведён линейный и нелинейный анализ устойчивости стационарных вращений, происходящих вокруг вертикальной и наклонных осей.
4. В рамках приближенной системы решена задача о существовании, бифуркациях и устойчивости в линейном приближении стационарных вращений волчка Лагранжа для широкого спектра законов движения точки подвеса, включающего в себя произвольные вибрации в горизонтальной и вертикальной плоскостях и другие варианты.
5. В приближенной задаче о движении волчка Лагранжа для случаев вибраций, допускающих вертикальные положения оси, рассмотрены маятниковые движения волчка. Проведено интегрирование маятниковых

- движений во всём диапазоне изменения параметров задачи. Исследована орбитальная устойчивость этих движений в линейном приближении.
6. Построены диаграммы устойчивости для колебаний оси волчка в окрестности нижнего, верхнего и наклонного положений, и для вращений. Проанализирована эволюция областей устойчивости и неустойчивости этих движений в зависимости от соотношений между продольной, поперечной и вертикальной составляющими вибраций.

Положения и результаты, выносимые на защиту.

1. Описание вертикальных положений относительного равновесия в приближенной задаче о движении тяжёлого твёрдого тела при наличии высокочастотных горизонтальных гармонических вибраций точки подвеса. Решение вопроса о существовании и устойчивости вертикальных и боковых положений относительного равновесия для ряда частных случаев геометрии масс тела.
2. Построение высокочастотных периодических движений твёрдого тела, точка подвеса которого совершает высокочастотные горизонтальные гармонические вибрации, в случае тела с центром масс на главной оси инерции или в главной плоскости инерции и динамически симметричного тела, и линейный анализ их устойчивости.
3. Решение задачи о существовании, бифуркациях и устойчивости (в нелинейной постановке) стационарных вращений в приближенной задаче динамики волчка Лагранжа с вибрирующей в трёхмерном пространстве точкой подвеса в случае вибраций, допускающих вертикальные положения относительного равновесия оси волчка.
4. Описание и линейный анализ устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса для широкого спектра законов её движения.
5. Описание маятниковых движений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса в случае вибраций, допускающих вертикальные положения равновесия оси волчка.
6. Исследование орбитальной устойчивости в линейном приближении маятниковых колебаний оси волчка в окрестности нижнего, верхнего и наклонного положений, и вращений. Диаграммы устойчивости и анализ эволюции областей орбитальной устойчивости в линейном приближении и неустойчивости этих движений в зависимости от соотношений между интенсивностями продольной, поперечной и вертикальной составляющими вибраций.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа развивает актуальное направление исследования воздействия высокочастотных вибраций на устойчивость механических систем. Решены новые задачи существования и устойчивости для высокочастотных периодических движений

твёрдого тела с горизонтально вибрирующей точкой подвеса, а также для стационарных вращений и маятниковых движений волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса в широком случае вибраций, получены и описаны новые динамические эффекты. Результаты исследования могут быть полезны при разработке вибрационных систем, в том числе используемых в авиационной промышленности и ракетостроении, и анализе их свойств.

Апробация результатов. Результаты диссертации докладывались

- на научных семинарах кафедры «Мехатроника и теоретическая механика» Московского авиационного института (НИУ),
- Международной конференции «Авиация и космонавтика – 2012», (МАИ, 2012, Москва),
- Московской молодёжной научно-практической конференции «Инновации в авиации и космонавтике – 2014», (МАИ, 2014, Москва),
- Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, (РУДН, 2014, Москва),
- Международной конференции «Авиация и космонавтика», (МАИ, 2015, Москва),
- Международном симпозиуме «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем» DYVIS – 2015, (ИМАШ РАН, 2015, Москва),
- Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, (РУДН, 2015, Москва),
- Международной конференции «Vibroengineering PROCEDIA», (ИМАШ РАН, 2016, Москва),
- Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, (РУДН, 2016, Москва),
- Международной конференции «Нелинейная динамика машин» School-NMD 2017, (ИМАШ РАН, 2017, Москва),
- Международной конференции «Авиация и космонавтика», (МАИ, 2017, Москва),
- Международной конференции «Гагаринские чтения», (МАИ, 2018, Москва),
- Всероссийской конференции по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники, (РУДН, 2018, Москва).

Работа выполнена в рамках госзадания (проект № 3.3858.2017/4.6) и поддержана грантом РФФИ (проект №14–21–00068).

Публикации. Положения диссертационного исследования опубликованы в 15 научных работах, из них 3 статьи [1-3] в журналах, входящих в перечень ВАК, 12 публикаций [4-15] в сборниках и материалах конференций.

Личный вклад автора. Содержание диссертационной работы и основные положения, выносимые на защиту, отражают личный вклад автора в опубликованные работы и получены лично автором. Постановки задач, исследованных в рамках подготовки диссертационной работы, задавались на-

учным руководителем.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы из 103 наименований. Работа содержит 22 иллюстрации, 3 таблицы. Общий объем диссертации составляет 111 страниц.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность работы, приведён обзор исследований динамики волчка Лагранжа с неподвижной и подвижной точкой подвеса, динамики твёрдого тела с неподвижной и вибрирующей точкой подвеса. Описаны цель и задачи работы, и приведено её краткое содержание.

В первой главе рассматривается движение тяжёлого твёрдого тела массы m при условии, что одна из его точек (точка подвеса O) совершает горизонтальные гармонические колебания по закону $O'O = h \cos(\Omega t)$ относительно некоторой фиксированной точки пространства O' .

Введём поступательно движущуюся систему координат $OXYZ$, ось OZ которой направим вертикально вверх, а ось OY — вдоль направления колебаний точки подвеса, и связанную с телом систему координат $Oxyz$ с осями, направленными вдоль главных осей инерции тела для точки O . Соответствующие главные моменты инерции обозначим через A, B и C , а проекции радиус-вектора центра масс \mathbf{OG} на оси Ox, Oy и Oz — через x_G, y_G и z_G . Ориентацию связанной системы координат относительно $OXYZ$ опишем углами Эйлера ψ, θ и φ . Далее исключим из рассмотрения случай сферической симметрии тела и случаи Эйлера и Лагранжа распределения масс тела.

Пусть амплитуда колебаний точки подвеса тела h мала по сравнению с расстоянием $r_G = OG$, а частота Ω велика по сравнению с характерной частотой $\omega = \sqrt{g/r_G}$. Малый параметр ε введём по формуле $h = \varepsilon^2 r_G$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) и будем считать, что $g \sim \varepsilon^4 \Omega^2 r_G, h\Omega \sim 1$.

Решается задача о существовании, числе и устойчивости (в линейном приближении) высокочастотных периодических (с периодом, равным периоду колебаний точки подвеса) движений тела.

Движение тела будем описывать при помощи канонических уравнений Гамильтона. Введём импульсы $P_\psi, P_\theta, P_\varphi$, сопряжённые с углами ψ, θ, φ , составим гамильтониан и перейдём к безразмерным переменным, параметрам и времени. Далее с помощью метода Дебри-Хори исключаем независимую переменную t в слагаемых до порядка ε^3 включительно. Отбрасывая слагаемые $O(\varepsilon^4)$ и, возвращаясь к размерным переменным, параметрам и времени, выпишем приближенный автономный гамильтониан (за переменными системы

оставим прежние обозначения):

$$\mathcal{H} = \frac{(A \cos^2 \varphi + B \sin^2 \varphi)(P_\psi - P_\varphi \cos \theta)^2}{2AB \sin^2 \theta} + \frac{A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi}{2AB} P_\theta^2 + \frac{P_\varphi^2}{2C} + \frac{(B - A) \sin \varphi \cos \varphi (P_\psi - P_\varphi \cos \theta)^2}{AB \sin \theta} + mg(x_G \gamma_1 + y_G \gamma_2 + z_G \gamma_3) + \Pi_\nu, \quad (1)$$

где Π_ν — вибрационный потенциал, имеющий вид

$$\Pi_\nu = \sigma((z_G \alpha_2 - y_G \alpha_3)^2/A + (x_G \alpha_3 - z_G \alpha_1)^2/B + (y_G \alpha_1 - x_G \alpha_2)^2/C)/2, \quad (2)$$

а $\vec{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)^T$ и $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^T$ — компоненты ортов осей OZ и OY в связанной системе координат, причём

$$\alpha_1 = \sin \psi \cos \varphi + \cos \psi \sin \varphi \cos \theta, \quad \alpha_2 = -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \cos \theta, \\ \alpha_3 = -\cos \psi \sin \theta, \quad \gamma_1 = \sin \varphi \sin \theta, \quad \gamma_2 = \sin \varphi \cos \theta, \quad \gamma_3 = \cos \theta.$$

Параметр $\sigma = m^2 h^2 \Omega^2 / 2$ характеризует интенсивность вибраций.

Движения тела также можно описать с помощью приближенных автономных уравнений, представленных в виде модифицированных уравнений Эйлера-Пуассона

$$A\dot{p} + (C - B)qr = mg(z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3) + m_x, \\ B\dot{q} + (A - C)pq = mg(x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1) + m_y, \quad (3) \\ C\dot{r} + (B - A)rp = mg(y_G \gamma_1 - x_G \gamma_2) + m_z,$$

$$\dot{\vec{\alpha}} = \vec{\alpha} \times \vec{\omega}, \quad \dot{\vec{\gamma}} = \vec{\gamma} \times \vec{\omega},$$

$$m_x = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial \alpha_3} \alpha_2 - \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial \alpha_2} \alpha_3, \quad m_y = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial \alpha_1} \alpha_3 - \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial \alpha_3} \alpha_1, \quad m_z = \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial \alpha_2} \alpha_1 - \frac{\partial \Pi_\nu}{\partial \alpha_1} \alpha_2.$$

где $\vec{\omega} = (p, q, r)^T$ — вектор абсолютной угловой скорости в системе координат $Oxyz$, а добавки в правых частях уравнений Эйлера m_x, m_y, m_z — проекции вибрационного момента на оси связанной системы координат.

Опишем положения равновесия системы (3), для которых имеем $p = q = r \equiv 0, \alpha_i = \text{const}, \gamma_i = \text{const}(i = 1, 2, 3)$ и

$$0 = mg(z_G \gamma_2 - y_G \gamma_3) + m_x, \quad 0 = mg(x_G \gamma_3 - z_G \gamma_1) + m_y, \quad (4) \\ 0 = mg(y_G \gamma_1 - x_G \gamma_2) + m_z.$$

Рассмотрим сначала вертикальные положения равновесия, при которых центр масс находится на одной вертикали с точкой подвеса.

Для тела с произвольной геометрией масс ($x_G > 0, y_G > 0, z_G > 0, A \neq B \neq C$) существуют две группы качественно различных верхних и две группы нижних положений равновесия, определяемые условиями

$$\alpha_1 = \mp \frac{ACz_G^2 k_j + AB y_G (x_G + k_j y_G)}{z_G \sqrt{S}}, \quad \alpha_2 = \pm \frac{BCz_G^2 + AB x_G (x_G + k_j y_G)}{z_G \sqrt{S}}, \\ \alpha_3 = \pm \frac{AC x_G k_j - BC y_G}{\sqrt{S}}, \quad \gamma_1 = \pm \frac{x_G}{r_G}, \quad \gamma_2 = \pm \frac{y_G}{r_G}, \quad \gamma_3 = \pm \frac{z_G}{r_G}.$$

Здесь верхние знаки отвечают верхним положениям равновесия, а нижние — нижним, коэффициент S получается из условия $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$ и $k_j (j = 1, 2)$ — корни квадратного уравнения

$$\frac{B-C}{BC} x_G y_G k^2 + \left(\frac{B-C}{BC} x_G^2 - \frac{A-C}{AC} y_G^2 - \frac{A-B}{AB} z_G^2 \right) k - \frac{A-C}{AC} x_G y_G = 0.$$

При любых значениях A, B и C дискриминант этого уравнения положителен.

Для тела с центром масс в главной плоскости инерции ($y_G = 0$) положения равновесия таковы, что главная ось инерции Oy либо сонаправлена, либо перпендикулярна оси вибраций (рис. 1). При условии $\Delta = B(Ax_G^2 + Cz_G^2) - AC(x_G^2 + z_G^2) = 0$ возникает семейство положений равновесия, отвечающее любому повороту тела относительно вектора \mathbf{OG} .

Вертикальные положения равновесия для динамически симметричного тела ($A = B, y_G = 0$) совпадают с равновесиями тела с центром масс в главной плоскости инерции (кроме нереализуемого здесь случая $\Delta = 0$).

Для тела с центром масс на главной оси инерции ($y_G = 0, z_G = 0$) в положениях равновесия ось вибраций совпадает с осью Oy или Oz .

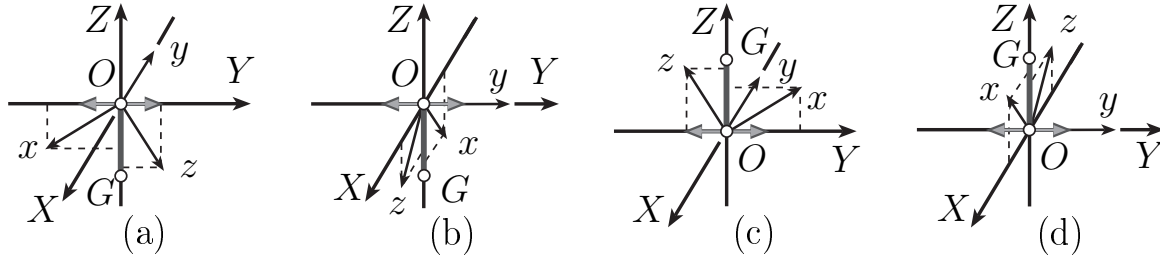


Рис. 1. Вертикальные равновесия тела с центром масс в главной плоскости инерции.

Для трёх рассмотренных частных случаев геометрии масс тела найдены отличные от вертикальных положения равновесия, при которых радиус-вектор центра масс лежит в вертикальной плоскости, содержащей линию вибраций, и составляет с вертикалью тупой угол (боковые положения равновесия).

Для тела с центром масс в главной плоскости инерции в случае $\Delta \neq 0$ существуют две группы боковых положений равновесия. Положения первой группы (рис. 2 а) существуют, если $\sigma \geq \sigma_1 = mgB/r_G$, при этом ось Oy сонаправлена с осью Ox , а вектора $\vec{\alpha}$ и $\vec{\gamma}$ имеют вид

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{x_G \mu_1 - \sigma_1 z_G}{\sigma r_G}, 0, \frac{z_G \mu_1 + \sigma_1 x_G}{\sigma r_G} \right)^T, \vec{\gamma} = \left(-\frac{z_G \mu_1 + \sigma_1 x_G}{\sigma r_G}, 0, \frac{x_G \mu_1 - \sigma_1 z_G}{\sigma r_G} \right)^T$$

где $\mu_1 = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_1^2}$. Равновесия второй группы (Рис. 2 б) существуют при $\sigma \geq \sigma_2 = CA m g r_G / (Ax_G^2 + Cz_G^2)$, и ось Oy лежит в плоскости OYZ , содержащей вертикаль и ось вибраций, при этом

$$\vec{\alpha} = \left(\frac{x_G \mu_2}{r_G \sigma}, \frac{\sigma_2}{\sigma}, \frac{z_G \mu_2}{r_G \sigma} \right)^T, \vec{\gamma} = \left(-\frac{x_G \sigma_2}{r_G \sigma}, \frac{\mu_2}{\sigma}, -\frac{z_G \sigma_2}{r_G \sigma} \right)^T$$

Здесь $\mu_2 = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_2^2}$. Боковые положения равновесия для динамически сим-

метричного тела и тела с центром масс на главной оси инерции получим, подставляя в указанные значения условия $A = B$ и $z_G = 0$ соответственно.

В случае $\Delta = 0$ выполняется соотношение $\sigma_1 = \sigma_2$, и также имеется семейство равновесий, при которых вектор \mathbf{OG} отклонён от вертикали на угол $\phi = \arccos(mgB/\sigma r_G)$, а равновесие достигается при любом повороте тела относительно \mathbf{OG} .

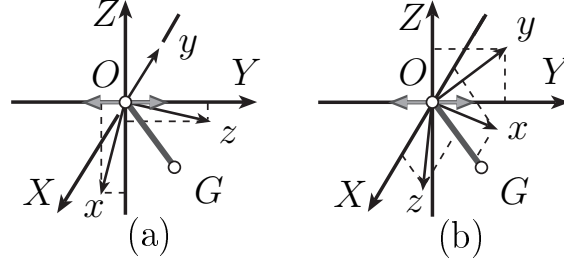


Рис. 2. Боковые положения равновесия тела с центром масс в главной плоскости инерции.

Устойчивость полученных равновесий изучена с использованием уравнений движения в канонической форме в переменных ψ, θ и φ . Возмущения введём по формулам $\psi = \psi_0 + x_1, \varphi = \varphi_0 + x_2, \theta = \theta_0 + x_3, P_\psi = y_1, P_\varphi = y_2, P_\theta = y_3$, где ψ_0, φ_0 и θ_0 соответствуют равновесным значениям углов Эйлера. Достаточными условиями устойчивости положений относительного равновесия являются условия знакоопределенности квадратичной формы H_2 гамильтониана возмущённого движения.

Рассмотрим также характеристическое уравнение линеаризованной системы уравнений возмущённого движения, имеющее вид

$$\lambda^6 + a_2\lambda^4 + a_1\lambda^2 + a_0 = 0,$$

Для устойчивости рассматриваемого равновесия необходимо, чтобы все корни уравнения были чисто мнимыми. Это условие выполняется, когда все a_j положительны, а дискриминант $-4a_2^3a_0 + a_2^2a_1^2 - 4a_1^3 + 18a_2a_1a_0 - 27a_0^2$ кубического относительно λ^2 уравнения неотрицателен.

Исследование показало, что необходимые условия устойчивости всегда совпадают с достаточными. При их нарушении имеет место неустойчивость.

Для тела с центром масс в главной плоскости инерции условия устойчивости не выполняются для верхних положений равновесия. Устойчивость нижнего положения первой группы определяется соотношениями $\Delta > 0, \sigma < \sigma_1$, а нижнего положения второй группы — неравенствами $\Delta < 0, \sigma < \sigma_2$. Боковые положения первой группы устойчивы при $\Delta > 0, \sigma > \sigma_1$, а боковые положения второй группы — при $\Delta < 0, \sigma > \sigma_2$. В случае семейств равновесий при $\Delta = 0$, а также для границ областей существования боковых положений равновесия, для исследования устойчивости требуется нелинейный анализ, который в рамках диссертации не проводился. Условия устойчивости для остальных случаев геометрии масс записываются аналогично.

При помощи метода малого параметра Пуанкаре построены высокочастотные периодические (с периодом $2\pi/\Omega$) движения тела в окрестности по-

положений относительного равновесия приближенной системы. Неустойчивые положения равновесия приближенной системы перейдут в неустойчивые периодические движения полной системы, а устойчивые равновесия — в периодические движения, устойчивые в линейном приближении. Это следует из непрерывности по ε характеристических показателей соответствующих линеаризованных уравнений возмущённого движения.

Результаты первой главы опубликованы в работе [1].

Во второй и третьей главах рассматривается приближенная задача о движении тела с геометрией масс, отвечающей случаю Лагранжа, в однородном поле тяжести, при условии, что точка подвеса волчка O совершает периодическое (с частотой Ω) движение, задаваемое в неподвижной системе координат O_*XYZ (ось O_*Z направлена вертикально вверх) компонентами $O_*\mathbf{O} = (u(t), v(t), w(t))^T$, средние по времени значения которых считаем равными нулю.

Введём, как в первой главе, поступательно движущуюся и связанную с телом системы координат $OXYZ$ и $Oxyz$, ось Oz направим вдоль оси динамической симметрии волчка. Ориентацию системы координат $Oxyz$ относительно $OXYZ$ будем задавать с помощью углов Эйлера ψ, θ, φ .

Пусть m — масса волчка, A и C — экваториальный и осевой моменты инерции, $l = OG$. Примем, что амплитуда отклонения h точки подвеса волчка от точки O_* мала по сравнению с приведённой длиной $L = A/ml$, а частота Ω велика в сравнении с характерной частотой $\omega_* = \sqrt{g/L}$. Введём малый параметр $\varepsilon^2 = h/L$ ($0 < \varepsilon \ll 1$) и положим $\omega_* \sim \varepsilon^2\Omega$, $h\Omega \sim 1$.

Аналогичным способом, как в первой главе, получен приближенный автономный гамильтониан, имеющий в размерных переменных и величинах вид

$$\tilde{H} = \frac{\tilde{P}_\varphi^2}{2C} + \frac{\tilde{P}_\theta^2}{2A} + \frac{(\tilde{P}_\psi - \tilde{P}_\varphi \cos \tilde{\theta})^2}{2A \sin^2 \tilde{\theta}} + \Pi(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}), \quad \Pi(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}) = \Pi_g + \Pi_v, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Pi_g = mgl \cos \tilde{\theta}, \quad \Pi_v = -\frac{m^2 l^2}{2A} [(a_1 \sin^2 \tilde{\psi} + a_2 \cos^2 \tilde{\psi}) \sin^2 \tilde{\theta} + \\ + (a_{XZ} \sin \tilde{\psi} - a_{YZ} \cos \tilde{\psi}) \sin 2\tilde{\theta} - a_{XY} \sin 2\tilde{\psi}]. \end{aligned}$$

В выражении для вибрационного потенциала Π_v введены обозначения

$$a_1 = a_X - a_Z, \quad a_2 = a_Y - a_Z,$$

$$a_X = \langle \dot{u}^2 \rangle, \quad a_Y = \langle \dot{v}^2 \rangle, \quad a_Z = \langle \dot{w}^2 \rangle, \quad a_{XY} = \langle \dot{u}\dot{v} \rangle, \quad a_{YZ} = \langle \dot{v}\dot{w} \rangle, \quad a_{XZ} = \langle \dot{w}\dot{u} \rangle.$$

Угловые скобки обозначают средние значения по t стоящих в них функций. Поворотом осей O_*X и O_*Y можно добиться выполнения условия $a_{XY} = 0$.

Далее будем работать в рамках приближенной системы уравнений, определяемой гамильтонианом (5). Точность этой системы на интервале времени $t \sim \varepsilon^{-1/2}$ описывается соотношениями

$$\begin{aligned} \hat{\psi} = \tilde{\psi} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \hat{P}_\psi = \tilde{P}_\psi - ml[(\dot{u} \cos \tilde{\psi} + \dot{v} \sin \tilde{\psi}) \sin \tilde{\theta}] + O(\varepsilon^{1/2}), \\ \hat{\theta} = \tilde{\theta} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \hat{P}_\theta = \tilde{P}_\theta + ml[(-\dot{u} \sin \tilde{\psi} + \dot{v} \cos \tilde{\psi}) \cos \tilde{\theta} + \dot{w} \sin \tilde{\theta}] + O(\varepsilon^{1/2}). \end{aligned}$$

В системе с гамильтонианом (5) (как и в исходной полной системе) координата $\tilde{\varphi}$ циклическая, и отвечающий ей импульс \tilde{P}_φ постоянен.

В случаях, когда ось симметрии волчка достигает вертикального положения ($\sin \tilde{\theta} = 0$), для устранения неопределённости перенаправим оси O_*Y и OY вертикально вверх. Используя параметры $a_{1*} = a_Y - a_X$, $a_{2*} = a_Y - a_Z$, перепишем приближённую функцию Гамильтона в виде

$$\tilde{H}_* = \frac{\tilde{P}_\varphi^2}{2C} + \frac{\tilde{P}_\theta^2}{2A} + \frac{(\tilde{P}_\psi - \tilde{P}_\varphi \cos \tilde{\theta})^2}{2A \sin^2 \tilde{\theta}} + \Pi_*(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}), \quad \Pi_*(\tilde{\theta}, \tilde{\psi}) = \Pi_g + \Pi_{v*}, \quad (6)$$

$$\Pi_{g*} = -mgl \cos \tilde{\psi} \sin \tilde{\theta}, \quad \Pi_{v*} = -\frac{m^2 l^2}{2A} [((a_{2*} - a_{1*}) \sin^2 \tilde{\psi} + a_{2*} \cos^2 \tilde{\psi}) \sin^2 \tilde{\theta} + (a_{XZ} \sin \tilde{\psi} - a_{YZ} \cos \tilde{\psi}) \sin 2\tilde{\theta} - a_{XY} \sin 2\tilde{\psi}].$$

Далее знаки тильды будем опускать.

Во второй главе для различных вариантов движения точки подвеса решается вопрос о существовании, бифуркациях и устойчивости стационарных вращений волчка, происходящих вокруг неподвижной в системе координат $OXYZ$ оси динамической симметрии. Указанные движения отвечают положениям равновесия приведённой системы с двумя степенями свободы, для которых равновесные значения $\psi = \psi_0$, $\theta = \theta_0$ совпадают со стационарными точками потенциальной энергии $\Pi(\theta, \psi)$. При этом $P_\psi = P_\varphi \cos \theta_0$, $P_\theta = 0$ ($P_\varphi = C\omega = \text{const}$) ($\omega > 0$ — угловая скорость волчка). Устойчивость этих равновесий далее исследуется при фиксированном значении импульса P_φ .

Схема исследования. Введём возмущения $q_1 = \theta - \theta_0$, $q_2 = \psi - \psi_0$, $p_1 = P_\theta$, $p_2 = P_\psi - C\omega \cos \theta_0$. Достаточные условия устойчивости вращений совпадают с условиями минимума потенциальной энергии $\Pi(\theta, \psi)$:

$$\Pi''_{\psi\psi} > 0, \quad \Delta = \Pi''_{\theta\theta} \Pi''_{\psi\psi} - (\Pi''_{\psi\theta})^2 > 0. \quad (7)$$

Из анализа характеристического уравнения линеаризованных уравнений возмущённого движения находим необходимые условия устойчивости. Они сводятся либо к условиям (7), либо к условию максимума потенциальной энергии, если угловая скорость вращения превосходит некоторое значение (случай гироскопической стабилизации)

$$\Pi''_{\psi\psi} < 0, \quad \Delta > 0, \quad (8)$$

$$\omega^2 > \frac{A}{C^2 \sin^2 \theta_0} \left[-(\Pi''_{\psi\psi} + \Pi''_{\theta\theta} \sin^2 \theta_0) + 2\sqrt{\Delta \sin^2 \theta_0} \right]. \quad (9)$$

При изменении знака неравенства (9) на противоположный или при условии $\Pi''_{\psi\psi} \Delta < 0$ (седловая точка функции $\Pi(\theta, \psi)$) имеет место неустойчивость.

1. *Случай* $a_{XY} = a_{YZ} = a_{XZ} = 0$. Этот случай вибраций охватывает случаи движения точки подвеса по вертикали, произвольного (в рамках сделанных предположений) движения в горизонтальной плоскости, движения по эллипсу с вертикальной осью и др. Без ограничения общности положим $a_X > a_Y$.

В этом случае система имеет вертикальные положения равновесия $\theta_0 = 0$

и $\theta_0 = \pi$ (перевернутый и висящий "спящий" волчок Лагранжа), а также ещё до двух пар "боковых" положений равновесия, при которых ось вращения волчка лежит в плоскости OXZ или в плоскости OYZ . Данные равновесия задаются соответственно выражениями $\psi_0 = \pi/2, \cos \theta_0 = -Ag/(mla_1), (|a_1| > Ag/ml)$ и $\psi_0 = 0, \cos \theta_0 = -Ag/(mla_2), (|a_2| > Ag/ml)$.

Для анализа устойчивости вращений вокруг вертикали использовался гамильтониан (6), а для исследования боковых равновесий — гамильтониан (5), с соответствующими для них параметрами вибраций.

Анализ показал, что если параметр $a_Y - Ag/(ml)$ наибольший из трёх параметров $a_Z, a_X, a_Y - Ag/(ml)$, то перевернутый "спящий" волчок устойчив для любой угловой скорости вращения, а если он наименьший, то вращение может быть стабилизировано за счёт угловой скорости вращения (только необходимые условия устойчивости), если

$$C\omega > \sqrt{ml} \left(\sqrt{Ag + ml(a_Z - a_Y)} + \sqrt{Ag + ml(a_X - a_Y)} \right). \quad (10)$$

При отсутствии вибраций ($a_X = a_Y = a_Z = 0$) неравенство (10) переходит в условие Маиевского — Четаева устойчивости перевернутого "спящего" волчка Лагранжа с неподвижной точкой подвеса $C^2\omega^2 > 4Amgl$.

Висящий "спящий" волчок устойчив для любых значений угловой скорости вращения, если параметр $a_Y + Ag/(ml)$ наибольший из трех параметров $a_Z, a_X, a_Y + Ag/(ml)$ (что включает в себя и случай неподвижной точки подвеса). Если этот параметр наименьший, и выполняется условие

$$C\omega > \sqrt{ml} \left(\sqrt{ml(a_Z - a_Y) - Ag} + \sqrt{ml(a_X - a_Y) - Ag} \right) \quad (11)$$

то выполняются только необходимые условия устойчивости вращения.

Боковые вращения первого типа устойчивы в случае, когда параметр a_X наибольший из трех параметров $a_X, a_Y, a_Z + Ag/(ml)$. Если же он средний по величине, то рассматриваемые вращения неустойчивы. Для боковых равновесий второго типа достаточные условия устойчивости не выполняются. Если параметр a_Y наименьший из трех параметров a_X, a_Y и $a_Z + Ag/(ml)$, то вращение может быть стабилизировано при условии

$$C\omega > ml\sqrt{a_X - a_Y} + \sqrt{(m^2l^2(a_Z - a_Y)^2 - A^2g^2)/(a_Z - a_Y)}. \quad (12)$$

В областях выполнения только необходимых условий устойчивости проведён нелинейный анализ с использованием методов исследования устойчивости автономных гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Проводилась нормализация гамильтониана возмущённого движения в слагаемых до четвёртой степени включительно относительно возмущений. При отсутствии резонансов третьего и четвёртого порядков нормализованный гамильтониан в симплектических полярных координатах φ_j, r_j ($q'_j = \sqrt{2r_j} \sin \varphi_j, p'_j = \sqrt{2r_j} \cos \varphi_j$ $j = 1, 2$) имеет вид

$$H = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2 + O(r_j^{5/2}). \quad (13)$$

При отсутствии вырождения ($D = c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 \neq 0$), исследуемое решение устойчиво по Ляпунову. Случай $D = 0$ не изучался.

При резонансах третьего ($\omega_1 = 2\omega_2$) и четвёртого ($\omega_1 = 3\omega_2$) порядков в правых частях (13) добавляются слагаемые вида $k_3\sqrt{r_1}r_2 \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2)$ и $k_4r_2\sqrt{r_1r_2} \cos(\varphi_1 + 3\varphi_2)$ соответственно. В первом случае при $k_3 \neq 0$ имеем неустойчивость, а при $k_3 = 0$ и $c_{20} + 2c_{11} + 4c_{02} \neq 0$ — устойчивость по Ляпунову. Во втором случае при выполнении неравенства

$$|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}| > 3\sqrt{3}|k_4| \quad (14)$$

положение равновесия устойчиво по Ляпунову, при изменении знака неравенства имеет место неустойчивость.

Вертикальные положения. Введём безразмерные параметры

$$\beta_1 = ml(a_Z - a_Y)/Ag, \quad \beta_2 = ml(a_X - a_Y)/Ag \quad (\beta_1 > \beta_2), \quad \gamma = C\omega/\sqrt{Amgl}$$

Получены явные выражения для коэффициентов нормальной формы гамильтониана возмущённого движения в нерезонансном случае и в случае резонанса четвертого порядка. Выписаны уравнения резонансных поверхностей и поверхности вырождения $D = 0$.

Показано, что для нижнего положения на резонансной поверхности выполнено условие (14), и имеет место устойчивость по Ляпунову. Для верхнего положения на резонансной поверхности имеется область неустойчивости. На рис. 3 в плоскости параметров β_2, γ представлены сечения области выполнения необходимых условий устойчивости плоскостями $\beta_1 = \beta_1^* = \text{const}$. Рис. 3 а-с соответствуют интервалам $-1 < \beta_1^* \leq -1/2$ (а), $-1/2 < \beta_1^* \leq -9/20$ (б), $\beta_1^* > -9/20$ (с). Границы области $\beta_2 = -1, \beta_2 = \beta_2^*$ и $\gamma = \sqrt{\beta_1 + 1} + \sqrt{\beta_2 + 1}$ показаны тонкими сплошными линиями, кривые вырождения — пунктирными линиями, резонансные кривые изображены сплошными полужирными линиями на участках устойчивости и точечными линиями на участках неустойчивости. На рис. 3 d показана проекция области неустойчивости, имеющей на поверхности резонанса, на плоскость параметров β_1, β_2 . Пунктирной линией отмечена линия пересечения поверхности резонанса и поверхности вырождения.

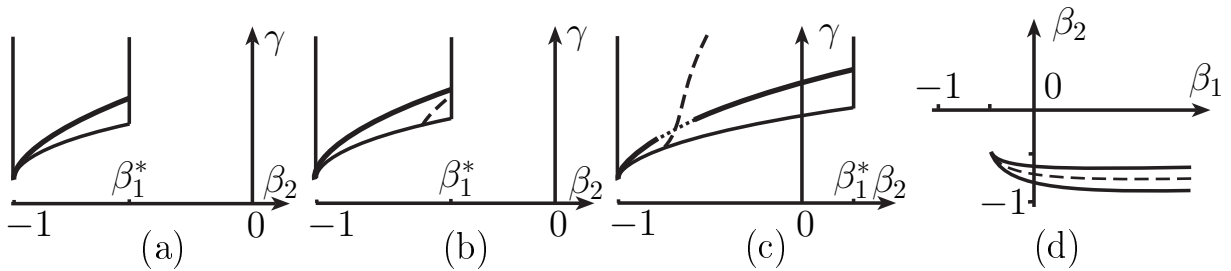


Рис. 3. Нелинейный анализ устойчивости (верхнее равновесие).

Боковые равновесия второго типа. Введём безразмерные параметры

$$\alpha_1 = ml(a_X - a_Z)/Ag, \quad \alpha_2 = ml(a_Y - a_Z)/Ag \quad (\alpha_1 > \alpha_2)$$

и параметр γ , аналогичный предыдущему.

Проведена нормализация гамильтониана возмущённого движения, выявлены случаи резонансов третьего и четвертого порядков и случаи вырождения.

Сечения исследуемой части пространства параметров плоскостями $\alpha_2 = \alpha_2^* = \text{const}$ показаны на рис. 4. В этих сечениях область ограничена прямой $\alpha_1 = \alpha_2^*$, ($\alpha_2^* < -1$) и кривой $\gamma > \sqrt{\alpha_1 - \alpha_2^*} + \sqrt{\frac{\alpha_2^{*2} - 1}{|\alpha_2^*|}}$. Приняты те же обозначения, что и на рис. 3, а кривые резонанса третьего порядка показаны штрих-пунктирными линиями, на них имеем неустойчивость. На кривой резонанса четвёртого порядка при $\alpha_2^* < -3.53$ равновесие устойчиво по Ляпунову (рис. 4 а), а при $-3.53 < \alpha_2^* < -1$ имеется область неустойчивости (рис. 4 б), проекция которой на плоскость параметров α_1, α_2 показана на рис. 4 с.

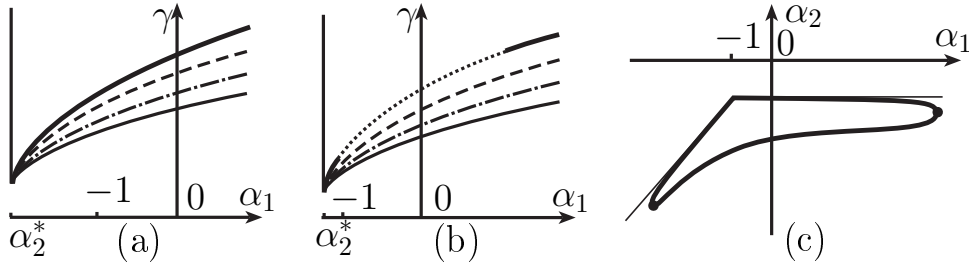


Рис. 4. Нелинейный анализ устойчивости (боковое равновесие).

2. *Случай вибраций вдоль наклонной прямой.* Пусть вибрации происходят вдоль наклонной прямой, расположенной в плоскости O_*YZ и составляющей с горизонталью угол α ($\alpha \in (0; \pi/2)$). Обозначим через V среднеквадратичную скорость точки O .

Положения оси стационарных вращений волчка описываются условиями $\psi_0 = 0$ и

$$\sin \theta_0 = -\beta \sin 2(\theta_0 - \alpha), \quad \beta = mlV/(2Ag). \quad (15)$$

Число корней уравнения (15) меняется при переходе через кривую, задаваемую условиями (15) и

$$\cos \theta_0 + 2\beta \cos 2(\theta_0 - \alpha) = 0 \quad (16)$$

где θ_0 выступает в роли параметра. Эта кривая показана жирной линией на Рис. 5 (относящемся к более общему случаю вибраций) в плоскости параметров β, α . Для точек левее этой кривой уравнение (15) имеет два корня $\theta_0 = \theta_{01} \in (0; \alpha)$, $\theta_0 = \theta_{02} \in (\pi/2 + \alpha; \pi)$, а для точек правее этой прямой — четыре корня $\theta_0 = \theta_{01}$, $\theta_0 = \theta_{02}$, $\theta_0 = \theta_{03,04} \in (\pi + \alpha; 3\pi/2 + \alpha)$.

Корень θ_{02} в обеих областях и корень θ_{04} в правой области соответствуют точкам минимума потенциальной энергии $\Pi(\theta, \psi)$ (выполнены достаточные условия устойчивости). Корень θ_{01} всегда соответствует точке максимума $\Pi(\theta, \psi)$, и стационарное вращение (при условии (9)) устойчиво в линейном

приближении. Корень θ_{03} отвечает седловой точке потенциальной энергии и неустойчивому стационарному вращению.

3. *Случай* $a_{XY} = a_{XZ} = 0$. Этот случай включает в себя произвольное движение точки подвеса волчка в вертикальной плоскости, случай движения точки подвеса по эллипсу, одна из осей которого горизонтальна, а другая наклонна.

Без ограничения общности полагаем $a_{YZ} > 0$. Введём безразмерный параметр β и углы α ($\alpha \in (0; \pi/2)$) и δ ($\delta \in (0; \pi)$) по формулам

$$\beta = \frac{ml\sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_{YZ}^2}}{2Ag}, \quad \cos 2\alpha = \frac{a_2}{\sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_{YZ}^2}}, \quad \sin 2\alpha = \frac{2a_{YZ}}{\sqrt{\alpha_2^2 + 4\alpha_{YZ}^2}},$$

$$\cos \delta = \frac{a_2 - a_1}{\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + a_{YZ}^2}}, \quad \sin \delta = \frac{a_{YZ}}{\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + a_{YZ}^2}}.$$

Показано, что существуют два типа стационарных вращений волчка. При вращениях *первого типа* ось волчка лежит в плоскости OYZ ($\psi_0 = 0$), а угол θ_0 определяется уравнением, в выбранных обозначениях совпадающим с (15). Число и расположение корней этого уравнения полностью соответствуют предыдущему случаю. Однако анализ знака выражения $\Pi''_{\psi\psi}$ выявляет дополнительное условие, определяющее границу областей устойчивости, имеющее вид

$$\beta = \pm \sin \delta / \sin 2(\delta - \alpha). \quad (17)$$

На рис. 5 а-ф показаны различные случаи взаимного расположения бифуркационной кривой (15,16) и кривой (17) при $\delta = \text{const}$, для $\delta \in (0; \pi/4)$ (а), $\delta = \pi/4$ (б), $\delta \in (\pi/4; \pi/2)$ (с), $\delta \in (\pi/2; 3\pi/4)$ (д), $\delta = 3\pi/4$ (е) и $\delta \in (3\pi/4; \pi)$ (ф). Эти кривые разбивают исследуемую область изменения параметров β, α на области 1-10. Внутри областей 1-10 каждый из корней θ_0

Таблица 1. Результаты анализа устойчивости решений первого типа.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
θ_{01}	Н. у.	Неус.	Н. у.	Н. у.	Н. у.	Н. у.	Н. у.	Неус.	Н. у.	Н. у.
θ_{02}	Д. у.	Д. у.	Неус.	Д. у.	Д. у.	Д. у.	Д. у.	Д. у.	Д. у.	Неус.
θ_{03}	\nexists	\nexists	\nexists	Неус.	Неус.	Н. у.	Н. у.	Неус.	Н. у.	Н. у.
θ_{04}	\nexists	\nexists	\nexists	Д. у.	Д. у.	Неус.	Неус.	Д. у.	Д. у.	Неус.

сохраняет свой характер устойчивости. Результаты исследования приведём в таблице 1. Символы «Д.у.» и «Н.у.» означают выполнение для соответствующих области и корня достаточных и только необходимых условий устойчивости (к последним следует добавить ограничение вида (9)). Символы «Неус.» означают неустойчивость соответствующего решения. \nexists означает отсутствие корня в данной области.

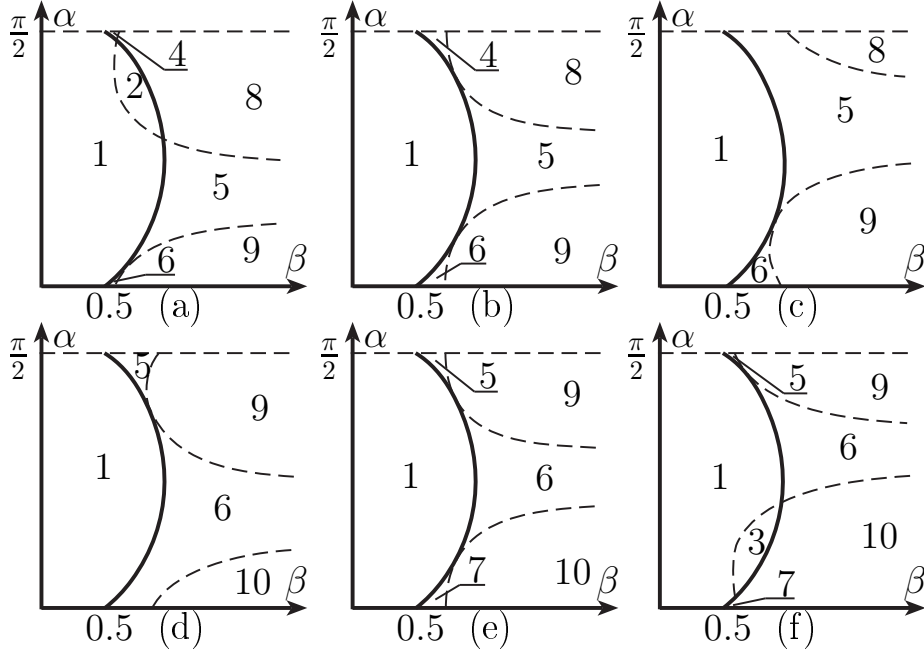


Рис. 5. Бифуркационные диаграммы при различных значениях δ .

Стационарные вращения *второго типа* определяются величинами

$$\cos \theta_0 = -\frac{Ag(a_1 - a_2)}{ml(a_1^2 - a_1a_2 - a_{YZ}^2)}, \quad \cos \psi_0 = -\frac{a_{YZ} \cos \theta_0}{(a_1 - a_2) \sin \theta_0}$$

и существуют при $Ag\sqrt{a_{YZ}^2 + (a_1 - a_2)^2} \leq ml|a_1^2 - a_1a_2 - a_{YZ}^2|$.

Достаточные условия устойчивости этих вращений описываются неравенствами $a_1^2 - a_1a_2 - a_{YZ}^2 > 0$, $a_1 - a_2 > 0$, а только необходимые условия — неравенствами $a_1^2 - a_1a_2 - a_{YZ}^2 > 0$, $a_1 - a_2 < 0$, к которым следует присоединить ограничение (9) на величину угловой скорости.

Результаты второй главы опубликованы в работе [2].

В третьей главе изучаются маятниковые движения волчка Лагранжа в рамках приближенной системы с гамильтонианом (6) в предположении, что $a_{XY} = a_{YZ} = a_{XZ} = 0$. Назовём составляющие вибрации точки подвеса волчка вдоль осей OX , OY и OZ продольными, вертикальными и поперечными соответственно.

Введём в гамильтониане (6) безразмерные параметры, импульсы и время

$$\alpha = \frac{a_{1*}m^2l^2}{A^2\omega_*^2}, \quad \beta = \frac{a_{2*}m^2l^2}{A^2\omega_*^2}, \quad \gamma = \frac{A}{C},$$

$$\tilde{P}_\psi = A\omega_*P_1, \quad \tilde{P}_\theta = A\omega_*P_2, \quad \tilde{P}_\varphi = A\omega_*P_3, \quad \tau = \omega_*t,$$

и, опуская знаки тильды, запишем гамильтониан в виде

$$H = \frac{\gamma P_3^2}{2} + \frac{P_2^2}{2} + \frac{(P_1 - P_3 \cos \theta)^2}{2 \sin^2 \theta} - \cos \psi \sin \theta - \frac{1}{2}((\beta - \alpha) \sin^2 \psi + \beta \cos^2 \psi) \sin^2 \theta \quad (18)$$

При $P_3 = 0$ система с гамильтонианом (18) имеет частные решения, при которых ось волчка совершает маятниковые движения в вертикальной плоскости OXY . Для этих движений $\theta = \pi/2, P_2 = 0$, а изменение переменных ψ (угла отклонения оси волчка от нижнего вертикального положения) и P_1 описывается каноническими уравнениями с функцией Гамильтона

$$\hat{H} = \frac{P_1^2}{2} + \Pi(\psi, \alpha), \quad \Pi(\psi, \alpha) = -\cos \psi - \frac{\alpha}{2} \cos^2 \psi \quad (19)$$

Гамильтониан (19) отвечает канонической системе с одной степенью свободы (называемой далее модельной), с потенциальной энергией $\Pi(\psi, \alpha)$ и интегралом энергии $\hat{H} = h = \text{const}$.

График функции $\Pi(\psi, \alpha)$ показан на рис. 6 а-с для случаев $|\alpha| \leq 1, \alpha > 1$ и $\alpha < -1$ соответственно. Здесь введены обозначения $\psi_* = \pi - \arccos(1/\alpha)$ (рис. 6 б, с). Точки максимума и минимума потенциальной энергии отвечают неустойчивым и устойчивым равновесиям системы с гамильтонианом (19).

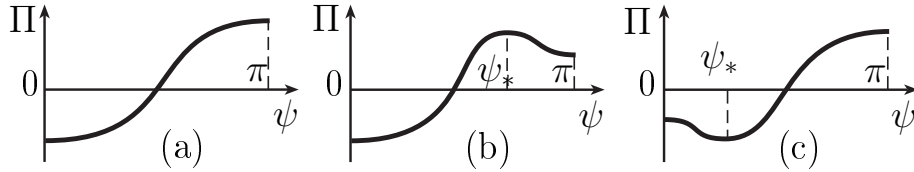


Рис. 6. Потенциальная энергия при $|\alpha| \leq 1, \alpha > 1$ и $\alpha < -1$.

Плоскость параметров α и h можно разбить на восемь областей с различным характером движений (рис. 7) модельной системы. границы областей — части гиперболы $2\alpha h = 1$, прямые $h = -\alpha/2 \pm 1$ и луч $\alpha = 0, h > -1$.

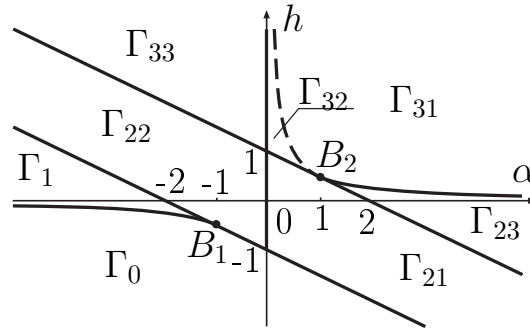


Рис. 7. Бифуркационная диаграмма.

В области Γ_0 движение невозможно. В области Γ_1 ось волчка совершает колебания в окрестности устойчивых боковых равновесий. В областях Γ_{21} и Γ_{22} ось волчка колеблется около нижнего положения равновесия. Точкам области Γ_{23} соответствуют движения двух типов — колебания около нижнего положения равновесия и колебания около верхнего положения равновесия. В областях Γ_{31}, Γ_{32} и Γ_{33} происходят вращения волчка.

Проведено интегрирование уравнений движения модельной системы в областях колебаний и вращений, а также на границах областей, соответствующим

ющих асимптотическим движениям. Выписаны явные выражения для частот колебаний и вращений.

Далее исследуется вопрос об орбитальной устойчивости (в линейном приближении) полученных частных движений (маятниковых колебаний и вращений) системы с гамильтонианом (18) по отношению к возмущениям переменных θ, ψ и P_1, P_2 при фиксированном значении $P_3 = 0$.

В областях колебаний и вращений модельной системы введём переменные действие-угол I, w и перепишем модельный гамильтониан в виде $\hat{H} = \omega I$ (ω — частота рассматриваемого движения). Движения системы с этим гамильтонианом примем за невозмущённое.

Перепишем гамильтониан (18), введя в нём переменные I, w . Введём возмущения $r = I - I_0$, $p_2 = P_2$, $q_2 = \theta - \pi/2$, где I_0 — значение переменной действие на невозмущённом движении. Квадратичная часть гамильтониана возмущённого движения относительно переменных q_2, p_2 и $|r|^{1/2}$ имеет вид

$$H_2 = \omega r + f_{20}q_2^2 + f_{02}p_2^2, \quad f_{20} = (\cos \psi + \beta - \alpha \sin^2 \psi + P_1^2) / 2, \quad f_{02} = 1/2$$

Здесь функции $\psi(I, w)$ и $P_1(I, w)$ вычисляются на невозмущённом движении.

Решим вопрос об устойчивости этой системы по отношению к переменным r, p_2, q_2 . Критерий устойчивости этой системы совпадает с критерием устойчивости редуцированной системы с одной степенью свободы, описывающей движение системы на изоэнергетическом уровне $H = 0$, отвечающем невозмущённому движению. За новую независимую переменную примем переменную угол w . Разрешив соотношение $H = 0$ относительно r , запишем

$$r = -K(q_2, p_2, w), \quad K = K_2 + K_4 + \dots, \quad K_2 = f_{20}q_2^2 + f_{02}p_2^2 \quad (20)$$

Получаем неавтономную гамильтонову систему с одной степенью свободы с гамильтонианом K и независимой переменной w . Задача об орбитальной устойчивости маятниковых движений сводится к задаче устойчивости положения равновесия $q_2 = 0, p_2 = 0$ системы с функцией Гамильтона K . Линеаризованные уравнения возмущённого движения этой системы и их характеристическое уравнение имеют вид

$$\frac{dq_2}{dw} = \frac{2}{\omega} f_{02} p_2, \quad \frac{dp_2}{dw} = -\frac{2}{\omega} f_{20} q_2, \quad \rho^2 - 2\kappa\rho + 1 = 0, \quad (21)$$

где $2\kappa = x_{11}(T) + x_{22}(T)$, $T = 2\pi/\omega$ — период решения $\psi(\tau)$. Функции $x_{11}(w)$ и $x_{22}(w)$ — элементы матрицы фундаментальных решений $\mathbf{X}(w) = \|x_{ij}(w)\| (i, j = 1, 2)$ с начальными условиями $\mathbf{X}(w) = \mathbf{E}_2$, где \mathbf{E}_2 — единичная матрица второго порядка.

При $|\kappa| > 1$ исследуемое положение равновесия системы с гамильтонианом K неустойчиво, а при $|\kappa| < 1$ устойчиво в линейном приближении. В граничном случае $\kappa = 1$ характеристическое уравнение имеет кратный корень $\rho = 1$ (резонанс первого порядка), а в граничном случае $\kappa = -1$ кратный корень $\rho = -1$ (резонанс второго порядка).

Для точек (α, h) , отвечающих устойчивым положениям равновесия в

невозмущённом движении, система (21) автономна. Частоты малых колебаний, отвечающие боковому, нижнему и верхнему устойчивым равновесиям имеют вид

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{4\alpha(\alpha - \beta)}{\alpha^2 - 1}}, \quad \Omega_2 = \sqrt{\frac{\beta + 1}{\alpha + 1}}, \quad \Omega_3 = \sqrt{\frac{\beta - 1}{\alpha - 1}}$$

В трехмерном пространстве параметров имеются области неустойчивости (области параметрического резонанса). Порождающими для них являются кривые в плоскости (α, β) , отвечающие случаям резонанса первого порядка, для которых $\Omega_j = n$, $(j = 1, 2, 3)$. В плоскости (α, β) имеются также кривые резонанса второго порядка ($\Omega_j = (2n - 1)/2$, $(j = 1, 2, 3)$), из которых выходит одна резонансная поверхность, и области неустойчивости (в трехмерном пространстве параметров) отсутствуют.

Проведено численное интегрирование уравнений (21). Рассмотрены сечения $\beta = \text{const}$ пространства параметров α, β, h для различных значений β , и построены диаграммы устойчивости в плоскости параметров α и h . Исследование проводилось в диапазоне $\alpha \in [-5; 5]$, $h \in [-3.5; 3.5]$, $\beta \in [-2; 2]$ (для колебаний в окрестности верхнего положения $\beta \in [-2; 3]$).

На рис. 8–10 представлены качественно различные диаграммы устойчивости для значений $\beta = -2$ и $\beta = 0$ (рис. 8), $\beta = 0.85$ и $\beta = 2$ (рис. 9). В области Γ_{23} на рис. 8,9 представлена эволюция устойчивости колебаний около нижнего положения; диаграммы устойчивости колебаний в окрестности верхнего положения показаны на рис. 10 для случаев $\beta = 2$ и $\beta = 3$.

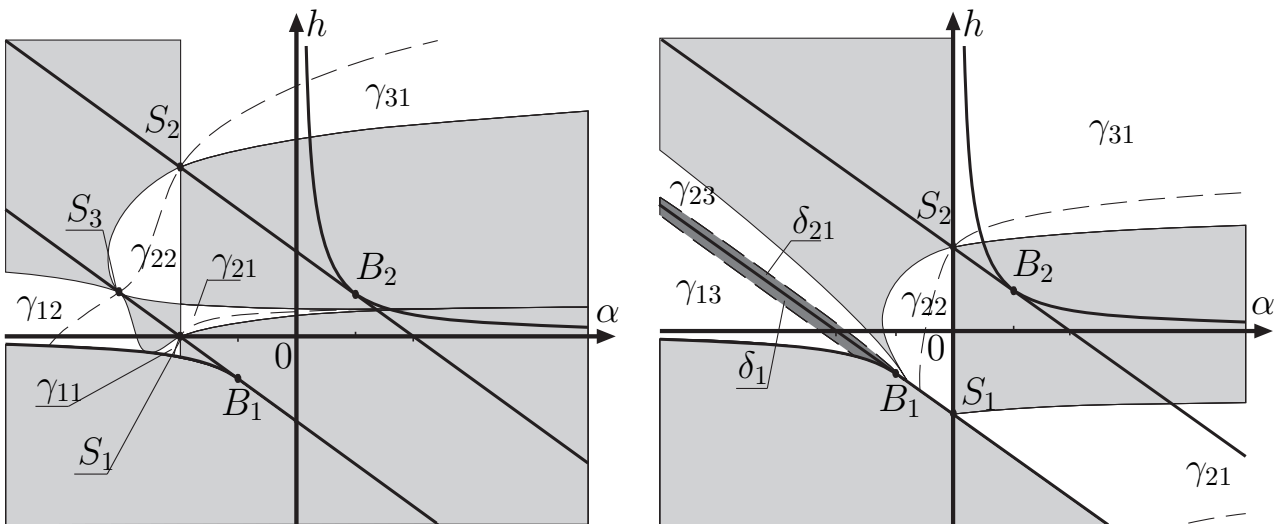


Рис. 8. Диаграммы устойчивости при $\beta = -2$ и $\beta = 0$.

Границы областей с различными движениями (рис. 7), показаны на рис. 8–10 жирными линиями. Кривые резонанса первого порядка, являющиеся границами областей устойчивости, показаны тонкими линиями, а кривые резонанса второго порядка — пунктирными линиями.

Области неустойчивости на рис. 8–10 показаны светло-серым цветом, области устойчивости в линейном приближении не закрашены. Тёмно-серым

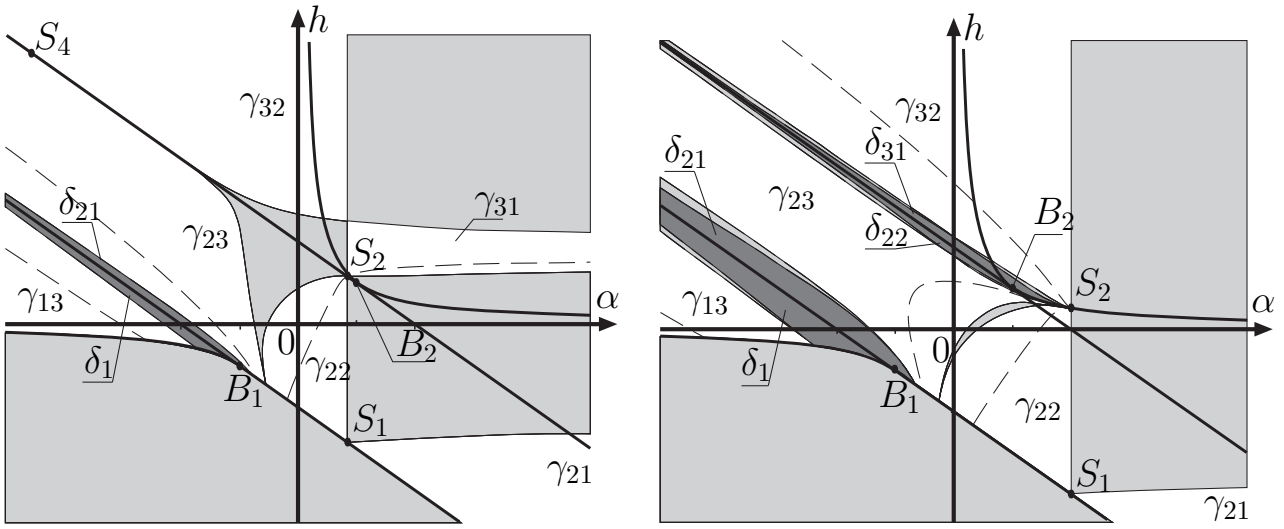


Рис. 9. Диаграммы устойчивости при $\beta = 0.85$ и $\beta = 2$.

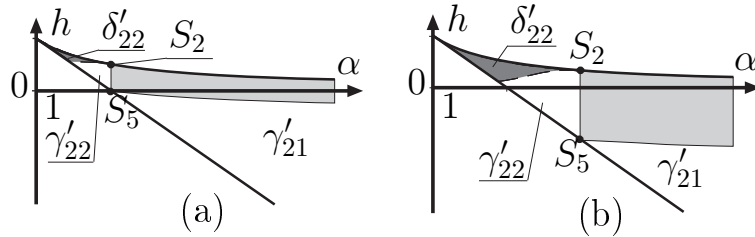


Рис. 10. Диаграммы устойчивости колебаний около верхнего положения при $\beta = 2, 3$.

цветом показаны области, содержащие счетное множество резонансных кривых. Границы темно-серых областей проведены по одной из резонансных кривых первого или второго порядков. Эти области включают в себя часть границ бифуркационной диаграммы (см. рис. 7), точкам которых отвечают асимптотические движения системы с гамильтонианом (19).

Опишем эволюцию картины устойчивости для каждого типа движений.

Колебания в окрестности бокового положения равновесия, происходящие в области Γ_1 могут быть устойчивы только в случае, когда продольные вибрации интенсивнее поперечных. При сильных поперечных вибрациях ($\beta < 0$) имеется лишь две небольшие области устойчивости γ_{11} и γ_{12} , ограниченные некоторым уровнем энергии колебаний. В случае слабых поперечных вибраций ($\beta > 0$) для этих колебаний существует счётное множество областей устойчивости вплоть до верхней границы области Γ_1 .

Для *колебаний около нижнего положения равновесия* (области Γ_{21}, Γ_{22} и Γ_{23}) в случае, если поперечные вибрации интенсивнее продольных, присутствует обширная область устойчивости (ограниченная уровнем энергии колебаний) при условии, что вертикальные вибрации интенсивнее или немного слабее поперечных ($\alpha > \beta > -1$). В случае, когда поперечные вибрации слабее продольных, области устойчивости тем обширнее, чем сильнее вертикальные вибрации, и уже при $\beta = 1.132590$ области устойчивости существуют вплоть до верхней границы области колебаний.

Колебания в окрестности верхнего положения равновесия (область Γ_{23})

могут быть устойчивы только если вертикальные вибрации значительно превосходят продольные и поперечные $\alpha > 1, \beta > 1$. Если при этом продольные вибрации слабее поперечных ($\alpha > \beta$), то область устойчивости колебаний ограничена некоторым уровнем энергии колебаний, иначе ($\alpha < \beta$) области устойчивости существуют вплоть до верхней границы области Γ_{23} .

Вращения (области Γ_{31}, Γ_{32} и Γ_{33}) имеют обширные области устойчивости в случае, когда поперечные вибрации интенсивнее остальных компонент вибраций ($\alpha > \beta$ и $\beta < 0$), и в случае, когда поперечные вибрации слабее продольных и значительно слабее вертикальных ($\alpha < \beta, \beta > 1.132590$).

Заметим, что вид маятникового движения определяется параметрами α и h , но характер его устойчивости зависит от параметра β . В большинстве случаев характер устойчивости движения меняется на противоположный при переходе через прямую $\alpha = \beta$. Если величина β близка к α , то подбором значения β (увеличивая или ослабляя интенсивность поперечной составляющей вибрации) почти всегда можно стабилизировать рассматриваемое маятниковое движение.

Результаты третьей главы опубликованы в работе [3].

Публикации автора диссертации в журналах, входящих в перечень ВАК

1. *Беличенко М. В.* Об устойчивости высокочастотных периодических движений тяжёлого твёрдого тела с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2016. Вып. 6. С. 15–28.
2. *Беличенко М. В., Холостова О. В.* Об устойчивости стационарных вращений в приближенной задаче о движении волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13. № 1. С. 81–104.
3. *M. V. Belichenko* On the Stability of Pendulum-type Motions in the Approximate Problem of Dynamics of a Lagrange Top with a Vibrating Suspension Point // Russian Journal of Nonlinear Dynamics 2018. Vol. 14. № 2. P. 243–263.

Прочие публикации автора диссертации

4. *Беличенко М. В.* Об устойчивости относительных равновесий твёрдого тела с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // 11-я Международная конференция "Авиация и космонавтика – 2012". Тезисы докладов. 2012г. Москва. С. 375.
5. *Беличенко М. В.* Линейный анализ устойчивости относительных равновесий твёрдого тела с вибрирующей вдоль горизонтали точкой подвеса // Московская молодёжная научно-практическая конференция «Инновации

- в авиации и космонавтике – 2014». Тезисы докладов. 2014г. Москва. С. 200.
6. *Беличенко М. В.* Об устойчивости относительных равновесий твёрдого тела с вибрирующей вдоль горизонтали точкой подвеса // I Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Тезисы докладов. 2014г. Москва. С. 185–188.
 7. *Беличенко М. В.* Исследование частных случаев движения твёрдого тела с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // 14-я Международная конференция "Авиация и космонавтика". Тезисы докладов. 2015г. Москва. С. 384.
 8. *Беличенко М. В.* Об устойчивости относительных равновесий тяжёлого твёрдого тела с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // XVIII международный симпозиум «Динамика виброударных (сильно нелинейных) систем» DYVIS – 2015. Тезисы докладов. 2015г. Москва. С. 50–56.
 9. *Беличенко М. В.* Исследование устойчивости периодических движений твёрдого тела с горизонтально вибрирующей точкой подвеса // LI Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Тезисы докладов. 2015г. Москва. С. 144–145.
 10. *Беличенко М. В., Холостова О. В.* Investigation of influence of high-frequency vibrations on the stability of stationary rotations of Lagrange's top // Vibroengineering PROCEDIA. №8. Тезисы докладов. 2016г. Москва. С. 213–218.
 11. *Беличенко М. В.* Исследование устойчивости стационарных вращений волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // LII Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Тезисы докладов. 2016г. Москва. С. 134–136.
 12. *Беличенко М. В., Холостова О. В.* Исследование маятниковых движений волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // IV Международная Школа-конференция «Нелинейная динамика машин» School-NMD 2017. Тезисы докладов. 2017г. Москва. С. 159–165.
 13. *Беличенко М. В.* Исследование устойчивости маятниковых движений волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // 16-я Международная конференция "Авиация и космонавтика". Тезисы докладов. 2017г. Москва. С. 368–369.
 14. *Беличенко М. В.* Исследование устойчивости маятниковых движений гироскопа Лагранжа с вибрирующим подвесом // XLIV Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения». Тезисы докладов. 2018г. Москва. С. 399.
 15. *Беличенко М. В.* Об устойчивости маятниковых движений волчка Лагранжа с вибрирующей точкой подвеса // LIV Всероссийская конференция по проблемам динамики, физики частиц, физики плазмы и оптоэлектроники. Тезисы докладов. 2018г. Москва.