

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМ РАЗВОРОТОМ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА ЗА ФИКСИРОВАННОЕ ВРЕМЯ

Михаил Валерьевич ЛЕВСКИЙ родился в 1966 г. в городе Ростове Ярославской области. Ведущий научный сотрудник НИИ космических систем ФГУП ГКНПЦ им. М.В. Хруничева. Кандидат технических наук, старший научный сотрудник. Основные научные интересы — в области приборов и систем автоматического управления, а также механики космического полета, теории систем ориентации, навигации и стабилизации летательных аппаратов, движения относительно центра масс космических аппаратов и орбитальных станций. Автор более 100 научных работ. E-mail: niiks@khrunichev.com

Mikhail V. LEVSKY, Ph.D., was born in 1966, in the Yaroslavl Region. He is a Principal Research Associate at Space Systems Research and Development Institute (NII KS) of the Khrunichev State Research and Production Space Center. His major research interests include automatic control instrumentation and systems, space flight mechanics, theory of orientation, navigation and stabilization systems, rotational motion of space vehicles and orbital stations. He has published more than 100 technical papers. E-mail: niiks@khrunichev.com

Рассмотрена задача оптимального управления пространственной переориентацией космического аппарата (КА) за фиксированное время. Минимизируется функционал, имеющий смысл расхода рабочего тела. Получено аналитическое решение поставленной задачи. Оптимальное решение находится в классе двухимпульсного управления, при котором разворот КА совершается по траектории «свободного движения». Исходная задача управления сводится к решению трех задач: разгону КА до необходимого кинетического момента, неуправляемому вращению КА и гашению угловой скорости. Для динамически симметричного КА дано полное решение задачи переориентации в замкнутой форме, что позволяет применять данный метод управления на практике. Приводятся результаты математического моделирования, демонстрирующие практическую реализуемость разработанного алгоритма управления.

Optimal control problem is discussed as applies to a fixed-time spatial spacecraft turn. A functional is minimized interpreting as a propellant consumption. An analytical solution is derived for the stated problem. The optimal solution belongs to a class of two-impulse control. Under this control spacecraft turns along the so called free motion trajectory. The initial control problem is reduced to solution of three problems including acceleration of the spacecraft needed to reach the necessary angular momentum, uncontrolled rotation of the spacecraft, and damping of angular velocity. The complete solution of the reorientation problem in the closed form is given for dynamically symmetric spacecraft. This solution allows us to use the control method in practice. Simulation results are presented to demonstrate practical realizability of the suggested control algorithm.

Ключевые слова: космический аппарат, управление движением, кватернион, принцип максимума, функционал, управляющая функция, динамика, оптимальное движение.

Key words: spacecraft, motion control, quaternion, Pontryagin maximum principle, functional, controlling function, dynamics, optimal motion.

В статье изучаются вопросы оптимизации терминального управления, обеспечивающего за фиксированное время T совмещение связанной с корпусом КА правой системы координат $OXYZ$ с программным базисом, положение которого в инерциальном пространстве задано. Для описания углового положения КА используются кватернионы [1]. В работе рассматривается наиболее распространенный случай, когда опорным является инерциальный базис $Ox_{И}y_{И}z_{И}$ (ИСК).

Исследованию задачи оптимального управления переориентацией твердого тела в различных постановках посвящено множество публикаций [1–7, 8, 10]. В частности, [4] посвящена вопросам опти-

мального разворота КА вокруг вектора конечного поворота. В [5] оптимальные управления находились методом совмещенного синтеза на основе алгоритма с прогнозирующей моделью, причем минимизировался функционал обобщенной работы. Управления в этом случае представляют собой непрерывные функции. Оптимальными же по экономичности являются релейные управления [2, 3]. Существенный недостаток оптимизации по критерию обобщенной работы — ее непригодность для случая произвольных (в том числе и неограниченно больших) начальных угловых отклонений [2]. Принятие сколько-нибудь близкой к реальности прогнозирующей модели влечет за собой неустраимые

математические сложности. В известных последних публикациях по затронутой проблеме [6, 7] представленное решение, к сожалению, не является принципиально новым. Реализующееся управление приводит к развороту КА вокруг оси Эйлера, хотя принципы оптимизации и алгоритмы управления различны. В то же время, очевидно, эйлеров разворот далеко не оптимален (в смысле минимума энергозатрат), как бы точно он ни исполнялся.

Оптимизация переориентации КА по критерию минимума расхода управляющих ресурсов представляет определенную сложность как в математическом, так и в вычислительном плане. Нахождению оптимальной программы разворота несимметричного КА аналитическими методами посвящена настоящая статья.

1. Уравнения движения и постановка задачи

Предполагается, что управление угловым положением КА осуществляется посредством трех и большего числа пар двигателей, создающих моменты относительно главных центральных осей инерции КА. Уравнения углового движения КА как твердого тела имеют вид:

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 + (J_3 - J_2) \omega_2 \omega_3 &= M_1; \\ J_2 \dot{\omega}_2 + (J_1 - J_3) \omega_1 \omega_3 &= M_2; \\ J_3 \dot{\omega}_3 + (J_2 - J_1) \omega_1 \omega_2 &= M_3, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где J_i — главные центральные моменты инерции КА; M_i — проекции главного момента внешних сил на главные центральные оси КА; ω_i — проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ абсолютной угловой скорости на оси связанного базиса \mathbf{E} , образованного главными центральными осями КА ($i = 1, 2, 3$).

Для описания пространственного движения КА используем математический аппарат кватернионов (параметров Родрига—Гамильтона). Движение связанного базиса \mathbf{E} относительно опорного базиса \mathbf{I} будем задавать кватернионом Λ [1]. Для определенности будем считать базис \mathbf{I} инерциальным. В этом случае имеют место следующие кинематические уравнения:

$$\begin{aligned} 2\dot{\lambda}_0 &= -\lambda_1 \omega_1 - \lambda_2 \omega_2 - \lambda_3 \omega_3; \\ 2\dot{\lambda}_1 &= \lambda_0 \omega_1 + \lambda_2 \omega_3 - \lambda_3 \omega_2; \\ 2\dot{\lambda}_2 &= \lambda_0 \omega_2 + \lambda_3 \omega_1 - \lambda_1 \omega_3; \\ 2\dot{\lambda}_3 &= \lambda_0 \omega_3 + \lambda_1 \omega_2 - \lambda_2 \omega_1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

или в кватернионной форме

$$2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \boldsymbol{\omega},$$

где λ_j — компоненты кватерниона Λ ($j = 0, 1, 2, 3$),

причем $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$.

Управление движением КА вокруг центра масс производится путем изменения момента внешних сил \mathbf{M} , и переменные M_i , стоящие в правых частях системы (1.1), — управления. Полагаем, что область допустимых значений вектора \mathbf{M} подобна эллипсоиду инерции:

$$\frac{M_1^2}{J_1} + \frac{M_2^2}{J_2} + \frac{M_3^2}{J_3} \leq u_0^2. \quad (1.3)$$

Данная форма ограничения может быть принята при использовании управляющих реактивных микродвигателей.

Зададим граничные условия положения КА и его угловой скорости:

$$\Lambda(0) = \Lambda_H, \quad \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_0; \quad (1.4)$$

$$\Lambda(T) = \Lambda_K, \quad \boldsymbol{\omega}(T) = \boldsymbol{\omega}_T, \quad (1.5)$$

где T — время окончания процесса переориентации.

Рассмотрим задачу перевода КА из положения Λ_H в положение Λ_K за фиксированное (заданное) время T . Чтобы задача управления была замкнута, вводится оптимизируемый функционал

$$G = \int_0^T \sqrt{M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3} dt. \quad (1.6)$$

Данный вид функционала является типовым и характеризует работу управляющих сил [2]. Задача оптимального управления пространственным разворотом формулируется в следующей постановке: необходимо перевести КА из состояния (1.4) в состояние (1.5) в соответствии с уравнениями (1.1)—(1.2) при наличии ограничения (1.3); при этом функционал (1.6) должен быть минимальным. Практическое значение имеют задачи, в которых граничные значения $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_T = 0$, а Λ_H и Λ_K имеют произвольные значения.

2. Решение задачи оптимального разворота КА

Исследуемая задача оптимального управления близка по физическому содержанию к задаче разворота КА с минимальным расходом топлива, но ее можно решить известными вариационными методами оптимизации, так как функционал имеет квадратичную форму относительно управляющих

переменных M_i . Далее принимаем, что граничные угловые скорости равны нулю: $\omega_0 = \omega_T = 0$.

Будем решать поставленную задачу с помощью принципа максимума Л.С. Понтрягина [8]. Введем сопряженные переменные ϕ_i ($i = 1, 2, 3$), соответствующие переменным ω_i , и ψ_j ($j = 0, 1, 2, 3$), соответствующие компонентам кватерниона λ_j . Функция Понтрягина (гамильтонова функция) имеет вид

$$H = -g + H_d + H_k,$$

где H_d — динамическая часть, H_k — кинематическая часть; g соответствует выбранному критерию оптимальности.

В нашем случае $-g$ имеет смысл расходной части функции Понтрягина:

$$g = \sqrt{M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3};$$

$$H_d = \phi_1 \left(\frac{M_1}{J_1} + \frac{J_2 - J_3}{J_1} \omega_2 \omega_3 \right) + \phi_2 \left(\frac{M_2}{J_2} + \frac{J_3 - J_1}{J_2} \omega_1 \omega_3 \right) + \phi_3 \left(\frac{M_3}{J_3} + \frac{J_1 - J_2}{J_3} \omega_1 \omega_2 \right);$$

$$H_k = -0,5\psi_0 (\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2 + \lambda_3 \omega_3) + 0,5\psi_1 (\lambda_0 \omega_1 + \lambda_2 \omega_3 - \lambda_3 \omega_2) + 0,5\psi_2 (\lambda_0 \omega_2 + \lambda_3 \omega_1 - \lambda_1 \omega_3) + 0,5\psi_3 (\lambda_0 \omega_3 + \lambda_1 \omega_2 - \lambda_2 \omega_1).$$

Уравнения для сопряженных функций ω_i и ψ_j имеют вид:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= -\frac{\partial H}{\partial \omega_i} \quad (i = \overline{1,3}); \\ \dot{\psi}_j &= -\frac{\partial H}{\partial \lambda_j} \quad (j = \overline{0,3}) \end{aligned} \quad (2.1)$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_0 &= -0,5(\psi_1 \omega_1 + \psi_2 \omega_2 + \psi_3 \omega_3); \\ \dot{\psi}_1 &= 0,5(\psi_0 \omega_1 + \psi_2 \omega_3 - \psi_3 \omega_2); \\ \dot{\psi}_2 &= 0,5(\psi_0 \omega_2 + \psi_3 \omega_1 - \psi_1 \omega_3); \\ \dot{\psi}_3 &= 0,5(\psi_0 \omega_3 + \psi_1 \omega_2 - \psi_2 \omega_1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) могут быть представлены таким образом:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1 &= -\omega_3 n_2 \phi_2 - \omega_2 n_3 \phi_3 - p_1 / 2; \\ \dot{\phi}_2 &= -\omega_3 n_1 \phi_1 - \omega_1 n_3 \phi_3 - p_2 / 2; \\ \dot{\phi}_3 &= -\omega_2 n_1 \phi_1 - \omega_1 n_2 \phi_2 - p_3 / 2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$n_1 = (J_2 - J_3) / J_1, \quad n_2 = (J_3 - J_1) / J_2, \quad n_3 = (J_1 - J_2) / J_3$$

— постоянные коэффициенты.

Преобразуем функцию H_k , отвечающую за геометрические свойства движения:

$$\begin{aligned} H_k &= 0,5\omega_1 (\lambda_0 \psi_1 + \lambda_3 \psi_2 - \lambda_1 \psi_3 - \lambda_2 \psi_3) + \\ &+ 0,5\omega_2 (\lambda_0 \psi_2 + \lambda_1 \psi_3 - \lambda_2 \psi_0 - \lambda_3 \psi_1) + \\ &+ 0,5\omega_3 (\lambda_0 \psi_3 + \lambda_2 \psi_1 - \lambda_3 \psi_0 - \lambda_1 \psi_2) = \\ &= 0,5(\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 + \omega_3 p_3), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} p_1 &= \lambda_0 \psi_1 + \lambda_3 \psi_2 - \lambda_1 \psi_0 - \lambda_2 \psi_3; \\ p_2 &= \lambda_0 \psi_2 + \lambda_1 \psi_3 - \lambda_2 \psi_0 - \lambda_3 \psi_1; \\ p_3 &= \lambda_0 \psi_3 + \lambda_2 \psi_1 - \lambda_3 \psi_0 - \lambda_1 \psi_2. \end{aligned}$$

Будем полагать, что величины p_1, p_2, p_3 представляют собой проекции некоторого вектора \mathbf{p} на оси связанного базиса \mathbf{E} . Из уравнений (2.2) следует, что совокупность переменных $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ обладает свойствами кватернионов. Далее принимаем, что сопряженные переменные $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3$ являются компонентами некоего кватерниона Ψ , для которого справедливо соотношение $2\dot{\Psi} = \Psi \circ \omega$.

Тогда введенный вектор \mathbf{p} может быть записан в кватернионной форме $\mathbf{p} = \text{vect}(\tilde{\Lambda} \circ \Psi)$, а кинематическая часть функции H принимает вид $H_k = \omega \cdot \mathbf{p} / 2$.

Исследуем свойства решения сопряженной системы уравнений (2.2). Системы уравнений (1.2) и (2.2) — кинематические уравнения для одной и той же угловой скорости ω . Решения кинематических уравнений (1.2) для переменных λ_j и (2.2) для переменных ψ_j различаются лишь начальными условиями, а кватернионы Ψ и Λ отличаются один от другого на константу (постоянный кватернион): $\Psi = C_E \circ \Lambda$, где $C_E = \text{const}$ — постоянный кватернион. Имеем $2\dot{\Psi} = 2C_E \circ \dot{\Lambda} = C_E \circ \Lambda \circ \omega = \Psi \circ \omega$.

Для совместной невырожденности системы уравнений (1.2), (2.2) необходимо и достаточно, чтобы $\text{vect } \mathbf{c}_E \neq 0$. В противном случае

$$\psi_0 : \lambda_0 = \psi_1 : \lambda_1 = \psi_2 : \lambda_2 = \psi_3 : \lambda_3,$$

уравнения (1.2) и (2.2) не будут независимыми (в том смысле, что из 8 уравнений независимыми станут только 4), $\mathbf{p} = 0$ и решение задачи теряет смысл. Поэтому при нахождении оптимального управления кватернионы Λ и Ψ считаются не тождественными (функции ψ_j не пропорциональны переменным λ_j), и рассматривается только вариант $\mathbf{p} \neq 0$. Дифференцируя выражения для p_i ($i = \overline{1,3}$) и подставляя в них уравнения (1.2), (2.2) для λ_j и ψ_j ($j = \overline{0,3}$), получим необходимые дифференциальные уравнения для временных функций p_i :

$$\dot{p}_1 = \omega_3 p_2 - \omega_2 p_3; \dot{p}_2 = \omega_1 p_3 - \omega_3 p_1; \dot{p}_3 = \omega_2 p_1 - \omega_1 p_2 \quad (2.4)$$

или в векторной форме

$$\dot{\mathbf{p}} = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{p}, \quad (2.5)$$

где p_i — проекции вектора \mathbf{p} на оси связанного базиса \mathbf{E} .

Полученное дифференциальное уравнение (2.5) для вектора \mathbf{p} отражает его вращение с угловой скоростью $-\boldsymbol{\omega}$ относительно связанного базиса и неподвижность его в опорной системе отсчета. В силу того что $|\mathbf{p}| = \text{const}$, полагаем в дальнейшем вектор \mathbf{p} нормированным: $|\mathbf{p}| = 1$.

Таким образом, задача определения оптимального управления сводится к решению системы уравнений (1.1), (2.3), (2.4) при условии, что само управление выбрано из требования максимизации гамильтониана. Граничные условия по угловому положению Λ_H и Λ_K определяют семейство решений $\mathbf{p}(t)$, которое имеет вид [1] $\mathbf{p} = \tilde{\Lambda} \circ \mathbf{c}_E \circ \Lambda$, где

$$\mathbf{c}_E = \Lambda_H \circ \mathbf{p}(0) \circ \tilde{\Lambda}_H = \text{const}.$$

Для того чтобы КА имел требуемую ориентацию на правом конце $\Lambda(t) = \Lambda_K$, необходимо определить вектор \mathbf{c}_E (или значение вектора \mathbf{p} в начальный момент времени) исходя из получающихся при этом решений системы (1.2). Задача нахождения оптимального управления состоит в исследовании динамических уравнений Эйлера (1.1) и сопряженных им уравнений (2.3) при указанном движении вектора \mathbf{p} . Система дифференциальных уравнений (2.3)—(2.4) совместно с требованием максимума

функции Понтрягина H являются необходимыми условиями оптимальности. Уравнения связи выражаются системой уравнений (1.1), (1.2) с одновременным выполнением ограничения (1.3), накладываемого на движение динамической системы. Граничные условия по угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ и условия максимума функции H определяют решения $\boldsymbol{\omega}(t)$ и $\boldsymbol{\varphi}(t)$, где $\boldsymbol{\varphi} = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\}$. Граничные условия по положению Λ_H и Λ_K определяют решения $\Lambda(t)$ и $\mathbf{p}(t)$.

Определим условия максимума гамильтониана. Функция Понтрягина H равна

$$H = -\sqrt{M_1^2/J_1 + M_2^2/J_2 + M_3^2/J_3} + M_1\varphi_1/J_1 + M_2\varphi_2/J_2 + M_3\varphi_3/J_3 + H_{inv},$$

где H_{inv} не зависит явно от управляющих функций M_i ($i = \overline{1,3}$).

Введем новые переменные: $u_i = M_i/\sqrt{J_i}$ и $\eta_i = \varphi_i/\sqrt{J_i}$ ($i = \overline{1,3}$). Ограничение (1.3) на управление запишется следующим образом: $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq u_0^2$. Перейдя к другим управлениям u_i и новым переменным η_i , получим

$$H = -|\mathbf{u}| + \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} + H_{inv} = |\mathbf{u}|(|\boldsymbol{\eta}| \cos \gamma - 1) + H_{inv},$$

где $\mathbf{u} = \{u_1, u_2, u_3\}$, $\boldsymbol{\eta} = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\}$, γ — угол между векторами \mathbf{u} и $\boldsymbol{\eta}$.

Очевидно, функция Понтрягина H при ограничении $|\mathbf{u}| \leq u_0$ максимальна, когда $\gamma = 0$, векторы \mathbf{u} и $\boldsymbol{\eta}$ имеют одинаковое направление, а управление \mathbf{u} имеет вид

$$\mathbf{u} = \begin{cases} u_0 \boldsymbol{\eta} / |\boldsymbol{\eta}|, & \text{если } |\boldsymbol{\eta}| > 1; \\ 0, & \text{если } |\boldsymbol{\eta}| \leq 1 \end{cases}$$

или для моментов

$$M_i = \begin{cases} \frac{u_0 \varphi_i}{\sqrt{\varphi_1^2/J_1 + \varphi_2^2/J_2 + \varphi_3^2/J_3}}, & \text{если } \sqrt{\sum_{i=1}^3 \varphi_i^2/J_i} > 1; \\ 0, & \text{если } \sqrt{\sum_{i=1}^3 \varphi_i^2/J_i} \leq 1, i = \overline{1,3}. \end{cases} \quad (2.6)$$

Уравнения (1.1), (2.3), (2.4) совместно с соотношением (2.6) образуют замкнутую систему урав-

нений. Ее общее решение определить трудно (практически невозможно). Попытаемся найти частное решение поставленной задачи.

3. Одно частное решение задачи оптимального управления разворотом КА

Если предположить, что в какой-то момент времени $t^{(k)} \in [0, T]$ $\Phi = 0$, то полученная структура управления приводит к тому, что оптимальное решение для сопряженного вектора Φ находится по уравнениям

$$\Phi_i = a(t) \cdot p_i, \quad (3.1)$$

где $a(t)$ — скалярная функция времени ($i = \overline{1,3}$).

Функции $\Phi_i(t)$, $p_i(t)$, связанные между собой соотношением (3.1), удовлетворяют необходимым условиям оптимальности (они являются решением системы уравнений (1.1), (2.3), (2.4) при управлении (2.6)). Доказать это утверждение несложно, если обозначить: V — величина вектора Φ ; μ — единичный вектор, определяющий направление вектора Φ ($V = |\Phi|$, $\mu = \Phi / |\Phi|$), а сопряженный вектор Φ представить в виде $\Phi = V \mu$ ($\Phi_i = V \cdot \mu_i, i = \overline{1,3}$).

При этом, уравнения (3.1) истинны, если $\dot{a} = -0,5$. Оптимальное значение управляющего момента M принимает вид

$$M_i = \begin{cases} \frac{u_0 \text{sign}(a) \cdot p_i}{\sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3}}, & \text{если } |a| \sqrt{\sum_{i=1}^3 p_i^2/J_i} > 1; \\ 0, & \text{если } |a| \sqrt{\sum_{i=1}^3 p_i^2/J_i} \leq 1, \end{cases}$$

причем $a = a(0) - t/2$.

Уравнения (1.1), (2.3) и (2.4) совместно с соотношением (2.6) образуют замкнутую систему уравнений, которые определяют оптимальное решение задачи. Из уравнения (2.5) получаем, что решение системы (1.1), (2.3), (2.4), (2.6) находится в классе движений, при которых кинетический момент КА L имеет постоянное направление в ИСК. А для этого необходимо, чтобы выполнялись соотношения

$$J_i \omega_i = b \cdot p_i, \quad (3.2)$$

где b — коэффициент пропорциональности, зависящий от времени. С учетом (3.1), управляющие моменты будут равны $M_i = \chi(t) \cdot p_i$. Подставляя выражения для M_i в неравенство (1.3) с учетом усло-

вия нормировки для вектора p получим

$$|M| \leq u_0 / \sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3}. \quad (3.1),$$

(3.2) для переменных Φ_i, p_i, ω_i являются решением системы уравнений (1.1), (2.3), (2.4). Покажем, что для решения (3.2) справедливо равенство

$p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3 = \text{const}$ на всем отрезке времени $[0, T]$. Для этого достаточно продифференцировать по времени левую часть указанного равенства с учетом свойств движения вектора p . Производные компонент вектора p заменяются сначала по соотношениям (2.4), а затем компоненты вектора ω заменяются по формулам (3.2):

$$\begin{aligned} & p_1 \dot{p}_1 / J_1 + p_2 \dot{p}_2 / J_2 + p_3 \dot{p}_3 / J_3 = \\ & = \omega_1 p_2 p_3 / J_3 - \omega_1 p_2 p_3 / J_2 + \omega_1 p_2 p_3 / J_2 - \\ & - \omega_2 p_1 p_3 / J_3 + \omega_2 p_1 p_3 / J_3 - \omega_1 p_2 p_3 / J_3 \equiv 0. \end{aligned}$$

Обозначив $m_0 = u_0 / \sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3}$, получим $|M| = |\chi(t)| \leq m_0$. В результате формула (2.6), полученная для оптимального управления, приобретает вид

$$M = 0,5 m_0 [\text{sign}(a + a^*) + \text{sign}(a - a^*)] \cdot p,$$

где $a^* = 1 / \sqrt{p_1^2/J_1 + p_2^2/J_2 + p_3^2/J_3}$.

Соотношения (3.1)—(3.2) являются решением поставленной задачи. Подставим (3.1), (3.2) в уравнения (1.1), (2.3), (2.4). Для переменной p_1 получаем

$$\dot{a} p_1 + a(\omega_3 p_2 - \omega_2 p_3) = -\omega_3 n_2 p_2 - \omega_2 n_3 p_3 - p_1 / 2,$$

где $n_2 = (J_3 - J_1) / J_2$; $n_3 = (J_1 - J_2) / J_3$;

$$\dot{a} p_1 = -p_1 / 2 - a[\omega_3 p_2 (n_2 + 1) + \omega_2 p_3 (n_3 - 1)] =$$

$$= -p_1 / 2 - a b p_2 p_3 \left[\frac{J_3 - J_1 + J_2}{J_3 J_2} + \frac{J_1 - J_2 - J_3}{J_2 J_3} \right] = -p_1 / 2.$$

Аналогично получим $\dot{a} p_2 = -p_2 / 2$ и $\dot{a} p_3 = -p_3 / 2$. Отсюда следует, что решение (3.1)—(3.2) будет удовлетворять необходимым условиям оптимальности при условии $\dot{a} = -0,5$. Вид уравнений (3.2) вытекает из управления (2.6), соотношений (3.1) и динамических уравнений Эйлера (1.1). Подтверждение истинности решений (3.1)—(3.2) для системы дифференциальных уравнений (1.1), (2.3), (2.4), (2.6) по-

лучим последовательной подстановкой соотношения (3.1) в уравнения (2.3) с учетом связей (3.2) для всех $i = 1, 2, 3$. Зависимость коэффициента b от времени получается из динамических уравнений Эйлера (1.1) при управлении (2.6) с учетом соотношений

$$(3.2). \text{ Равенство } b = \sqrt{(J_1\omega_1)^2 + (J_2\omega_2)^2 + (J_3\omega_3)^2} = |\mathbf{L}|$$

следует непосредственно из (3.2). С учетом изложенного, соотношения (2.6) и (3.2) принимают вид:

$$M_i = m_0 p_i \frac{\text{sign}(\rho - t/2 + a^*) + \text{sign}(\rho - t/2 - a^*)}{2}; \quad (3.3)$$

$$J_i \omega_i = (L_0 - m_0 |\rho - t/2 + a^*| - m_0 |\rho - t/2 - a^*| + 2m_0 \rho) p_i, \quad i = \overline{1,3}. \quad (3.4)$$

Таким образом, для динамической системы (1.1)–(1.2) с ограничением (1.3) управление (3.3), при котором кинетический момент корпуса КА имеет постоянное направление в инерциальном пространстве, удовлетворяет необходимым условиям оптимальности. Полученное управление относится к классу управления по траектории «свободного движения». Если начальная $\boldsymbol{\omega}_0$ и конечная $\boldsymbol{\omega}_T$ угловые скорости равны нулю, то управление по траектории «свободного движения» имеет место, оно реализуется. В случае $\boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}(T) = 0$ решение (3.3) (а значит, и (3.1), (3.4)) единственное, и это легко доказать, используя переменные μ, V . Если указанные граничные скорости $\boldsymbol{\omega}_0$ или $\boldsymbol{\omega}_T$ отличны от нуля, то для осуществимости управления по траектории «свободного движения» ненулевая угловая скорость должна быть согласована с граничными условиями по положению $\Lambda(0)$ и $\Lambda(T)$ (граничные угловые скорости должны принадлежать «траектории свободного движения», проходящей через начальное Λ_H и конечное Λ_K угловые положения КА).

Задача построения оптимального управления заключается в нахождении такого значения вектора $\mathbf{p}(0)$, чтобы в результате движения КА согласно уравнениям (1.1), (1.2), (2.4), (3.3) выполнялось равенство $\Lambda(T) = \Lambda_K$. Определение вектора $\mathbf{p}(0)$ — самостоятельная и довольно непростая задача. Система уравнений (1.1), (1.2), (2.4), (3.3) имеет аналитическое решение в элементарных функциях только для осесимметричного и сферического тел. Задача оптимального управления для сферического тела в данной постановке подробно рассмотре-

на в [1]. Для осесимметричного тела $J_1 \neq J_2 = J_3$ решение может быть записано в виде:

$$p_1 = p_{10}; \quad p_2 = p_{20} \cos \sigma + p_{30} \sin \sigma; \quad (3.5)$$

$$p_3 = -p_{20} \sin \sigma + p_{30} \cos \sigma,$$

$$\text{где } \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}(0), \quad \sigma = \frac{J_3 - J_1}{J_2} \int_0^t \omega_1(t) dt.$$

В этом случае соотношения (3.5) совместно с равенствами (3.3) и (3.4) образуют решение системы уравнений (1.1), (2.3), (2.4) при условии (2.6). Причем, как было отмечено выше, данное решение справедливо не для всех граничных условий, а только при $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_T = 0$ и произвольных Λ_H и Λ_K либо если векторы $\boldsymbol{\omega}_0$ и $\boldsymbol{\omega}_T$ лежат на конической поверхности, определяемой вектором \mathbf{c}_E (при этом вектор \mathbf{p} также описывает конус вокруг продольной оси Ox в связанной системе координат). Поэтому для таких случаев движения КА граничные условия уменьшаются с девяти до пяти. При таком типе управления осесимметричное тело движется по «конической траектории». Необходимое для синтеза управления решение данной системы находится в форме регулярной прецессии [9]. Перевод КА из положения Λ_H в положение Λ_K осуществляется одновременным поворотом его вокруг вектора \mathbf{c}_E , неподвижного относительно инерциального базиса I , на угол β и вокруг своей продольной оси на угол α . Используя аппарат кватернионов, получим соотношение $\Lambda_K = \Lambda_H \circ e^{\mathbf{p}_0 \beta / 2} \circ e^{\mathbf{e}_1 \alpha / 2}$, где \mathbf{e}_1 — орт продольной оси КА. Зависимость параметров $\mathbf{p}_0, \alpha, \beta$ от граничных угловых положений Λ_H и Λ_K определяется системой уравнений:

$$\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} - p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_0;$$

$$\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{10} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_1;$$

$$p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = v_2;$$

$$-p_{20} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + p_{30} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = v_3;$$

$$\alpha = \frac{J_2 - J_1}{J_1} p_{10} \beta,$$

где v_0, v_1, v_2, v_3 — компоненты кватерниона разворота $\Lambda_p = \tilde{\Lambda}_H \circ \Lambda_K$; α — угол поворота КА вокруг продольной оси; β — угол поворота вокруг вектора \mathbf{p} (или вектора кинетического момента). При этом считается, что $|\alpha| \leq \pi, 0 \leq \beta \leq \pi$.

Для произвольного КА ($J_1 \neq J_2 \neq J_3$) решение системы уравнений (1.1), (2.4), (3.3) находится только численными методами (например, методом последовательных приближений). Определение вектора \mathbf{p}_0 производится путем решения краевой задачи $\Lambda(0) = \Lambda_H, \Lambda(T) = \Lambda_K$ с учетом накладываемых на движение связей (1.1), (1.2), в которых $M_i = 0$. В результате получим значение вектора угловой скорости в начальный момент времени $\boldsymbol{\omega}_{\text{рас}}$, при котором обеспечивается перевод КА при свободном его вращении относительно центра масс ($\mathbf{M} = 0$) из состояния $\Lambda(0) = \Lambda_H, \boldsymbol{\omega}(0) = \boldsymbol{\omega}_{\text{рас}}$ в состояние $\Lambda(T) = \Lambda_K$ ($\boldsymbol{\omega}(T)$ при этом произвольно). Значение вектора \mathbf{p}_0 связано с найденным $\boldsymbol{\omega}_{\text{рас}}$ соотношениями

$$p_{i0} = \frac{J_i \omega_{i\text{рас}}}{\sqrt{(J_1 \omega_{1\text{рас}})^2 + (J_2 \omega_{2\text{рас}})^2 + (J_3 \omega_{3\text{рас}})^2}}$$

Таким образом, оптимальное движение КА должно состоять из участков, на которых действует максимальный по величине управляющий момент, и участка свободного движения. На участках ненулевого управляющего момента оптимальное управление определяется соотношениями (3.3), а именно момент \mathbf{M} параллелен вектору \mathbf{p} и остается неизменным в инерциальном базисе \mathbf{I} ; вектор кинетического момента \mathbf{L} имеет постоянное направление в инерциальном пространстве, но меняется по величине (на участке разгона увеличивается до заданного значения, а на участке торможения уменьшается). При движении КА на участке с нулевым управляющим моментом параметры траектории вращения определяются теми же неизменными в инерциальной системе координат векторами \mathbf{L} и \mathbf{p} и соотношениями (3.1). Определяющим при нахождении оптимальных решений $\mathbf{p}(t), \boldsymbol{\omega}(t)$ является значение вектора \mathbf{p} на момент времени $t = 0$. Решив с учетом (1.2) и (1.1), в которых $\mathbf{M} = 0$, кинематическую задачу ориентации по переводу КА из положения $\Lambda(0) = \Lambda_H$ в положение Λ_K , най-

дем расчетное значение вектора \mathbf{p}_0 и соответствующий ему вектор $\mathbf{c}_E = \text{const}$.

Частный характер решения состоит в том, что на всем интервале разворота $\mathbf{L} \parallel \mathbf{p}$, а $\Lambda(t) \circ \mathbf{p}(t) \circ \tilde{\Lambda}(t) = \text{const}$ (направление кинетического момента КА постоянно в инерциальной системе координат). При этом $a(0) = (T + (L_T - L_0)/m_0)/4$, где L_0, L_T — кинетический момент КА на начало и окончание маневра разворота (обычно $L_0 = L_T = 0$). При развороте КА по траектории «свободного дви-

жения» выполняется соотношение $\int_0^T K dt = K_C t_{\text{ПР}}$.

Угол вращения вокруг \mathbf{L} равен $\beta = K_C t_{\text{ПР}}/J$, где J — момент инерции относительно поперечной оси; K_C — средняя величина кинетического момента ($K_C \neq 0$); $t_{\text{ПР}}$ — прогнозируемое время разворота (время достижения конечной позиции Λ_K), полученное моделированием неуправляемого вращения КА ($\mathbf{M} = 0$) с начальными условиями $\boldsymbol{\omega}_{i0} = K_C p_{i0}/J_i$.

Для случая нулевых граничных условий $\boldsymbol{\omega}_0 = \boldsymbol{\omega}_T = 0$ реализуется только один-единственный тип движения: первый участок — разгон КА с максимальным управляющим моментом $|\mathbf{M}| = m_0$ до $|\mathbf{L}| = L_{\text{зад}}$, далее участок свободного движения КА с постоянным по величине кинетическим моментом $|\mathbf{L}| = L_{\text{зад}}$ длительностью $T [1 - 4K_C t_{\text{ПР}}/(m_0 T^2)]^{1/2}$ ($\mathbf{M} = 0$) и затем симметричный участок торможения КА с максимальным управляющим моментом $|\mathbf{M}| = m_0$ до остановки КА ($\mathbf{M} \parallel \mathbf{L}$). Здесь $L_{\text{зад}} = m_0 \tau$, где $\tau = T [1 - [1 - 4K_C t_{\text{ПР}}/(m_0 T^2)]^{1/2}]/2$ — время разгона (торможения).

Следует особо подчеркнуть, что найденное решение задачи оптимального управления для характерных условий разворота — плоского разворота КА вокруг одной из главных центральных осей инерции и пространственного разворота сферически симметричного КА — совпадает с известными решениями в этих частных случаях разворота КА [1, 3, 4]. Результаты численного моделирования также подтвердили оптимальность полученного управления (для любых произвольных условий разворота КА, в том числе и несимметричного).

4. Пример математического моделирования

Возьмем пространственный разворот некоторого КА с массово-инерционными характеристиками: $J_1 = 31000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, J_2 = 167000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2, J_3 = 161000 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ из начального положения Λ_H , совпадающего с осями опорного базиса \mathbf{I} , в заданное конечное поло-

жение $\Lambda_K = \Lambda_{3AD}$ за время $T = 450$ с. Начальные и конечные угловые скорости равны нулю: $\omega_0 = \omega_T = 0$. Элементы кватерниона Λ_{3AD} , характеризующие требуемое угловое положение КА после разворота, равны:

$$\lambda_0 = 0,5000; \lambda_1 = 0,6548; \lambda_2 = 0,5200; \lambda_3 = 0,2248.$$

Мощность исполнительных органов характеризуется величиной $u_0 = 0,028165$ Н/кг^{1/2}. После решения кинематической задачи ориентации по переводу КА из положения $\Lambda(0) = \Lambda_H$ в положение $\Lambda(T) = \Lambda_K$ (задачи оптимального разворота в импульсной постановке) были получены расчетное значение вектора $\mathbf{p}_0 = \{0,259906; 0,411805; 0,873422\}$ и $\mathbf{c}_E = \mathbf{p}_0$ (так как $\Lambda_H = \{1, 0, 0, 0\}$). Поэтому максимальная величина управляющего момента составит $m_0 = 10$ Н·м. Результаты математического моделирования движения КА при оптимальном уп-

равлении представлены на рис. 1—3. На рис. 1 изображены графики изменения угловых скоростей в связанной с КА системе координат $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$. На нем отчетливо видно разделение всего разворота на три характерных этапа: разгон (набор угловой скорости), неуправляемое движение КА ($M = 0$) и торможение (гашение угловой скорости до нуля). Поведение скорости изменения величины кинетического момента K носит релейный характер. Причем длительность участков разгона t_p ($\dot{K} > 0$) и торможения t_T ($\dot{K} < 0$) одинакова и равна $\tau = 50$ с. На рис. 2 приведена динамика изменения координат $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ во времени. Характерным является незначительное изменение проекции p_1 (составляющая угловой скорости ω_1 на участке свободного вращения также имеет практически постоянное значение). Это свидетельствует о том, что ось Ox продольная. На рис. 3 приведены графики изменения компонент $\lambda_0(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\lambda_3(t)$ кватерниона $\Lambda(T)$, опреде-

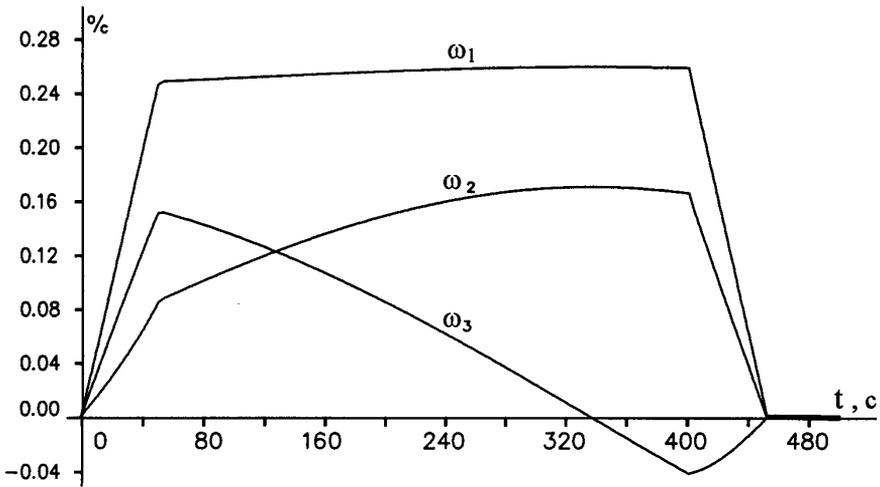


Рис. 1. Графики изменения угловых скоростей во время разворота КА

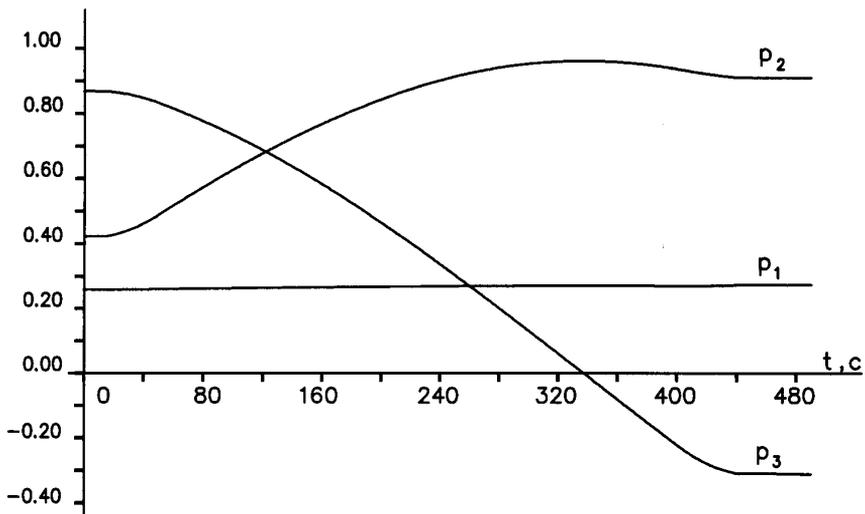
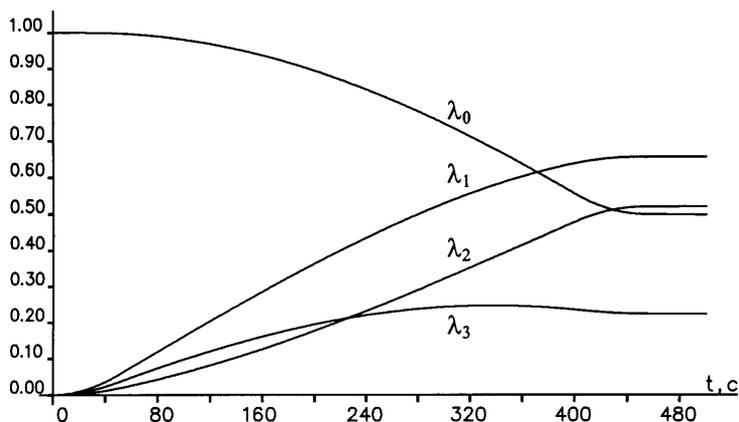


Рис. 2. Графики изменения сопряженных переменных во время разворота

Рис. 3. Графики изменения компонент кватерниона Λ во время разворота КА

ляющего текущую ориентацию КА. В отличие от переменных ω_i , переменные p_i и λ_j являются гладкими функциями времени.

Выводы

В статье рассмотрена и решена динамическая задача разворота КА (когда управлением является момент сил) за фиксированное время с минимальной работой управляющих сил. Оптимальное решение строится на основе принципа максимума. В работе показано, что оптимальное управление определяется в классе двухимпульсных управлений и реализует движение КА, состоящее из трех участков: набора угловой скорости с максимальным управляющим моментом, свободного вращения с нулевым управляющим моментом и гашения угловой скорости с максимальным управляющим моментом.

Статья демонстрирует возможности аналитического решения динамической задачи управления разворотом КА за фиксированное время и построения оптимального управления строгим, математически безупречным способом. Новой является сама постановка задачи оптимального управления (совокупность уравнений движения, ограничений на управляющие переменные, граничных условий, критерия оптимальности). Основным научным результатом — нахождение закона управления разворотом КА, удовлетворяющего всем необходимым условиям оптимальности. В статье даны формулы для расчета временных характеристик (моментов переключения управляющих функций) маневра разворота: длительности разгона и торможения и продолжительности участка вращения КА по инерции. Задача разворота решена до конца, и, что особенно важно, конечный результат получен аналитическими методами, хорошо проверенными классическими процедурами. Актуальность такого решения очевидна. Использование разработанного способа

управления пространственной переориентацией позволяет снизить на 25—40% затраты топлива на разворот существующих КА.

Библиографический список

1. Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. — М.: Наука, 1973.
2. Красовский А.А. Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование. — М.: Наука, 1973.
3. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией КА. — М.: Наука, 1974.
4. Алексеев К.Б., Бебенин Г.Г. Управление космическими летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1974.
5. Зубов Н.Е. Оптимальное управление терминальной переориентацией КА на основе алгоритма с прогнозирующей моделью // Космич. исслед. 1991. Т.29. Вып.3.
6. Челноков Ю.Н. Управление ориентацией КА, использующее кватернионы // Космич. исслед. 1994. Т.32. Вып.3.
7. Ваньков А.И. Адаптивное робастное управление угловым движением КА с использованием прогнозирующих моделей // Космич. исслед. 1994. Т.32. Вып.4-5.
8. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1983.
9. Маркеев А.П. Теоретическая механика. — М.: Наука, 1990.
10. Левский М.В. Система управления пространственным разворотом КА. Патент на изобретение № 2006431 РФ // Бюллетень «Изобретения. Заявки и патенты». 1994. № 2.

НИИ КС ГКНПЦ им. М.В. Хруничева
Статья поступила в редакцию