УДК 629.78

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СЖАТЫХ ПОДКРЕПЛЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ЧАСТНОГО ВИДА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КРИТЕРИЯ ПОДОБИЯ

В.Е.Кичеев

Рассматривается круговая цилиндрическая подкрепленная оболочка регулярной конструкции при загружении осевой сжимающей силой. Сформирован критерий подобия. Из условия минимума веса при обеспечении статической прочности получена зависимость оптимального шага шпангоутов от критерия подобия.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

N – расчетная осевая сжимающая сила;

D – диаметр оболочки;

E – модуль упругости;

$K_N = \dfrac{N}{D^2 E}$ **– критерий подобия сжатой подкрепленной оболочки;**

L – шаг шпангоутов;

$m = \dfrac{L}{D}$ **– относительный шаг шпангоутов;**

n – число стрингеров;

t – шаг стрингеров;

$F_{Ш}$ **– площадь поперечного сечения шпангоута;**

$\overline{F}_{Ш} = \dfrac{F_{Ш}}{D^2}$ **- относительная площадь поперечного сечения шпангоута;**

δ - толщина обшивки;

$\delta_{П}$ **- приведенная толщина панели;**

$\delta_{Ш} = \dfrac{F_{Ш}}{L}$ **- условная толщина обшивки, эквивалентная по весу шпангоутам;**

$\delta_o = \delta_{П} + \delta_{Ш}$ **- приведенная толщина подкрепленной оболочки.**

Остальные обозначения такие же, как в [2].

Данная статья является продолжением и развитием работ [1] и [2].

Задача проектирования тонкостенных конструкций летательных аппаратов включает в себя оптимизацию ее конструктивных параметров. Из большого многообразия возможных постановок задач ограничимся частным случаем: простейшая конструкция при простейшем загружении.

Рассматривается круговая цилиндрическая оболочка постоянной толщины, подкрепленная продольным и поперечным набором. Продольный набор состоит только из стрингеров одинакового сечения, расположенных с постоянным шагом параллельно оси оболочки. Поперечный набор состоит из одинаковых шпангоутов, расположенных с постоянным шагом перпендикулярно оси оболочки. Рассматривается простейшее загружение: действует только осевая сжимающая сила.

При фиксированном шаге шпангоутов оболочку, подкрепленную стрингерами, можно рассматривать как сжатую панель, оптимальные геометрические параметры которой получены в [2].

Ставится задача нахождения шага шпангоутов, обеспечивающего минимум веса конструкции при обеспечении статической прочности.

Поставленная задача решается при следующих допущениях:

1. В конструкции отсутствуют лонжероны и усиленные стрингеры.
2. Площадь поперечного сечения шпангоута постоянна по контуру поперечного сечения оболочки.
3. Площадь поперечного сечения шпангоута не зависит от шага шпангоутов.
4. Осевая сжимающая сила постоянна по длине оболочки.
5. Параметры поперечного сечения шпангоута таковы, что они обеспечивают отсутствии местной потери устойчивости подкрепленной оболочки.

Остальные допущения такие же, как в [2].

Развертку поперечного сечения подкрепленной оболочки можно рассматривать как поперечное сечение плоской панели. Диаметр оболочки считаем достаточно большим, а толщину обшивки достаточно малой, поэтому кривизной обшивки можно пренебречь. Для оптимальной сжатой панели в [2] получено следующее выражение приведенной толщины панели.

$$\delta_П = \frac{3}{2}\delta, \tag{1}$$

где

$$\delta = L\sqrt[3]{\frac{2}{\pi^2}\frac{K_q}{\varphi}}, \tag{2}$$

$$K_q = \frac{q}{LE} \tag{3}$$

$$\varphi = c\chi C_i \left(\frac{1}{C_\delta^2} + \frac{C_W}{C_F} + \frac{C_b}{C_F C_\delta}\right) \quad (4)$$

Сформируем критерий подобия сжатой подкрепленной оболочки путем преобразования критерия подобия сжатой панели. Для этого выразим погонную силу **q** через сосредоточенную силу **N**, и перейдем от характерного размера **L** для панели к характерному размеру **D** для оболочки.

При принятых допущениях имеем равномерное распределение погонной сжимающей силы **q** по контуру поперечного сечения оболочки. Из уравнения равновесия

$$q = \frac{N}{\pi D} \quad (5)$$

Перейдем к относительному шагу шпангоутов. Введем обозначение

$$m = \frac{L}{D} \quad (6)$$

Отсюда

$$L = mD \quad (7)$$

Подставим (5) и (7) в (3)

$$K_q = \frac{1}{\pi m}\frac{N}{D^2 E}$$

(8)

Введем обозначение

$$K_N = \frac{N}{D^2 E} \quad (9)$$

Безразмерная величина $\mathbf{K}_N$ есть критерий подобия. Он учитывает загружение, характерный размер и материал конструкции. С учетом (9) формула (8) принимает вид

$$K_q = \frac{1}{\pi m} K_N$$

(10)

Подставим (7) и (10) в (2)

$$\delta = \frac{D}{\pi}\sqrt[3]{\frac{2m^2 K_N}{\varphi}} \quad (11)$$

«Размажем» шпангоуты по обшивке, в результате получим условную толщину обшивки, эквивалентную по весу шпангоутам

$$\delta_ш = \frac{F_ш}{L} \tag{12}$$

Перейдем к относительной площади поперечного сечения шпангоута. Введем обозначение

$$\overline{F}_ш = \frac{F_ш}{D^2} \tag{13}$$

Отсюда

$$F_ш = \overline{F}_ш D^2$$

(14)

Подставим (7) и (14) в (12)

$$\delta_ш = \frac{\overline{F}_ш D}{m}$$

(15)

Рассмотрим приведенную толщину подкрепленной оболочки. Введем обозначение

$$\delta_{оп} = \delta_ш + \delta \tag{16}$$

С учетом (1), (11), (15) имеем

$$\delta_o = D\left[\frac{3}{2\pi}\sqrt[3]{\frac{2m^2 K_{Nш}}{\varphi}} + \frac{\overline{F}}{m}\right] \tag{17}$$

Критерий подобия $\mathbf{K}_N$ (9) вычисляется по исходным данным при проектировании, поэтому он известен. Параметры φ (4) и $\overline{F}_ш$ (14) считаем фиксированными. В этом случае имеем функцию одной переменной

$$\delta_o = \delta_o(m)$$

(18)

Из необходимого условия экстремума

$$\frac{d\delta_o}{dm} = 0$$

(19)

с учетом (17) получаем

$$m = \sqrt[5]{\frac{\pi^3}{2}\frac{\varphi \overline{F}_ш^3}{K_N}} \tag{20}$$

Следует отметить, что относительный шаг шпангоутов в большей степени зависит от относительной площади поперечного сечения шпангоута, и в меньшей степени от критерия подобия.

Представляет интерес распределение материала между элементами конструкции при оптимальном шаге шпангоутов. Подставим (20) в (11) и (15), в результате получим одинаковые выражения

$$\delta = \delta_{ш} = D\sqrt[5]{\frac{2}{\pi^3}\frac{K_{Nш}\bar{F}^2}{\varphi}} \tag{21}$$

Отсюда следует простое соотношение: вес шпангоутов равен весу обшивки.

Приведенную толщину подкрепленной оболочки представим в следующем виде

$$\delta_o = \delta_П + \delta_ш = \delta\left(\frac{\delta_П}{\delta} + \frac{\delta_ш}{\delta}\right)$$

(22)

Подставим (1) и учитывая (21), получим

$$\delta_o = \delta\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{5}{2}\delta \tag{23}$$

Подставим (21) в (23) и вычислим постоянный множитель. Приведенная толщина оптимальной подкрепленной оболочки равна

$$\delta_o = 1,445 D\sqrt[5]{\frac{K_{Nш}\bar{F}^2}{\varphi}}$$

(24)

С учетом (23), (1), (21), получаем следующее распределение материала между элементами конструкции оптимальной подкрепленной оболочки.

40% - вес обшивки;

40% - вес шпангоутов; (24а)

20% - вес стрингеров.

При проектировании тонкостенных конструкций обычно основное внимание уделяется подбору стрингеров. Как видно из (24) и (24а), основное внимание следует уделять выбору толщины обшивки и площади поперечного сечения шпангоута.

Из (24) видно, что для получения конструкции минимального веса надо выбирать относительную площадь поперечного сечения шпангоута минимально возможной, а относительные параметры поперечного сечения подкрепленной оболочки следует выбирать такие, которые обеспечивают наибольшее значение обобщенного параметра φ.

Представляет интерес число стрингеров в оптимальной конструкции. В [2] получено следующее выражение шага стрингеров

$$t = \frac{2C_F}{C_\delta^2} L\sqrt[3]{\frac{2}{\pi^2}\frac{K_q}{\varphi}} \tag{25}$$

Подставим (7) и (10) в (25)

$$t = \frac{2C_F}{C_\delta^2} \frac{D}{\pi} \sqrt[3]{\frac{2m^2 K_N}{\varphi}} \tag{26}$$

При оптимальном относительном шаге шпангоутов (20) формула (26) принимает вид

$$t = \frac{2C_F}{C_\delta^2} D \sqrt[5]{\frac{2}{\pi^3} \frac{K_{N\text{ш}} \bar{F}^2}{\varphi}} \tag{27}$$

Число стрингеров

$$n = \frac{\pi D}{t} \tag{28}$$

Подставим (27) в (28), после простых преобразований получим

$$t = 2,718 \frac{C_\delta^2}{C_F} \sqrt[5]{\frac{\varphi}{K_{N\text{ш}} \bar{F}^2}} \tag{29}$$

Оптимальное число стрингеров уменьшается с ростом критерия подобия. Этот результат не противоречит здравому смыслу и подтверждается практикой проектирования.

Распространим полученное выше решение на случай загружения изгибающим моментом. Обозначим:

М – расчетный изгибающий момент;

М $_{КР}$ - критический изгибающий момент, соответствующий началу потери устойчивости.

Рассмотрим отношение этих нагрузок. Обозначим

$$\mu = \frac{M}{M_{КР}} \tag{30}$$

Коэффициент μ по своему физическому смыслу аналогичен коэффициенту пластичности.

Коэффициент μ может быть вычислен по результатам статических испытаний аналогичных конструкций, или путем расчета с использованием метода редукционных коэффициентов.

Найдем связь между нагрузками **М** и **N**, при которой проектируемые на разное загружение конструкции будут иметь одинаковый вес. Для этого рассмотрим трубу диаметром **D** с толщиной стенки δ, загруженную изгибающим моментом **М** $_{КР}$. Из [3] имеем следующую приближенную формулу момента сопротивления тонкостенной трубы

$$W = 0,8 D^2 \delta \tag{31}$$

Считаем, что материал трубы работает в условиях применимости закона Гука.

Максимальное нормальное напряжение от изгиба определяется по известной формуле

$$\sigma = \frac{M_{KP}}{W} \tag{32}$$

В сжатой зоне перейдем к погонной сжимающей силе, максимальная величина которой

$$q = \sigma\delta \tag{33}$$

Подставим (32) в (33), и учитывая (31), получим

$$q = \frac{M_{KP}}{0,8D^2} \tag{34}$$

Перейдем к расчетному изгибающему моменту. Из (30) имеем

$$M_{KP} = \frac{M}{\mu}$$

(35)

Подставим (35) в (34)

$$q = \frac{1}{0,8\mu}\frac{M}{D^2} \tag{36}$$

Эквивалентная осевая сжимающая сила с учетом (36) имеет вид

$$N = \pi D q = \frac{\pi}{0,8\mu}\frac{M}{D} \tag{37}$$

Получили связь между нагрузками M и N, при которой проектируемые на разное загружение конструкции будут иметь одинаковый вес.

Подставим (37) в (9)

$$K_N = \frac{N}{D^2 E} = \frac{\pi}{0,8\mu}\frac{M}{D^3 E}$$

(38)

Введем обозначение

$$K_M = \frac{M}{D^3 E} \tag{39}$$

Безразмерная величина K_M есть критерий подобия подкрепленной оболочки при изгибе.

С учетом (39) формула (38) принимает вид

$$K_N = \frac{\pi}{0,8\mu} K_M \tag{40}$$

Подставим (40) в (24), получим следующую формулу приведенной толщины подкрепленной оболочки при изгибе

$$\delta_o = 1,445 D \sqrt[5]{\frac{\pi}{0,8\mu} \frac{K_{Mu} \bar{F}^2}{\varphi}} \tag{41}$$

Очевидно, что рекомендации по проектированию оптимальных подкрепленных оболочек при сжатии и изгибе совпадают.

По нашему мнению, предлагаемый критериальный подход к проектированию оптимальных силовых конструкций позволит разработать эффективные приемы проектирования тонкостенных конструкций минимального веса, которые ориентированы на начальные этапы проектирования летательного аппарата.

Продолжим рассмотрение задачи численного решения канонических уравнений метода сил

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

(42)

с использованием геометрического подхода, изложенного в [1]. С целью улучшения сходимости при решении системы уравнений (42) с плохо обусловленной матрицей предлагается решать задачу с использованием не двух, а большего числа уравнений вспомогательных гиперплоскостей.

Предлагается следующая последовательность вычислений на примере первого шага.

Путем элементарных преобразований уравнений (42) аналогично [1] формируем уравнения вспомогательных гиперплоскостей

$$\sum_{j=1}^{n} A_{qj} X_j = B_q \qquad (q = 1, 2, ..., m),$$

(43)

где

$$A_{qj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \lambda_{qi}; \qquad B_q = \sum_{i=1}^{n} b_i \lambda_{qi} \tag{44}$$

$$\lambda_{qi} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{(q-1)j} \qquad (q = 2, 3, ..., m) \tag{45}$$

Здесь q - порядковый номер уравнения вспомогательной гиперплоскости, а также номер вектора λ. При $q = 1$ за вектор λ принимаем вектор-столбец свободных членов системы уравнений (42).

$$\lambda_{1i} = b_i \tag{46}$$

Число уравнений m произвольное. Вопрос выбора рационального числа m требует самостоятельного исследования и здесь не рассматривается. По-видимому, можно ограничиться значением

$$m = 3 \tag{47}$$

Для уравнений (43) применяем известную процедуру ортогонализации по строкам. В результате получаем преобразованные уравнения, которые запишем так

$$\sum_{j=1}^{n} A_{qj}^{*} X_j = B_q^{*} \quad (q = 1, 2, ..., m)$$

(48)

Здесь индекс * означает то, что уравнения ортогональны. Первое уравнение в (43) и первое уравнение в (48) одинаковые. С целью однообразия записи уравнений (48) при $q = 1$ принимаем

$$A_{1j}^{*} = A_{1j} \tag{49}$$

Для уравнений (48) применяем процедуру уравновешивания по строкам, при которой осуществляется уравнивание углов наклона гиперплоскостей (48). В результате получаем преобразованные уравнения, которые запишем так

$$\sum_{j=1}^{n} A_{qj}^{**} X_j = B_q^{**} \quad (q = 1, 2, ..., m)$$

(50)

Здесь индекс ** означает то, что уравнения ортогональны и уравновешены по строкам.

Из уравнений (50) путем элементарных преобразований формируем уравнение разрешающей гиперплоскости. Каждое уравнение умножаем на свой свободный член и складываем. В результате имеем

$$\sum_{j=1}^{n} A_j X_j = B,$$

(51)

где

$$A_j = \sum_{q=1}^{m} A_{qj}^{**} B_q^{**}; \qquad B = \sum_{q=1}^{m} \left[B_q^{**} \right]^2 \tag{52}$$

Осуществляя спуск по разрешающей гиперплоскости (51) аналогично [1], получаем первое приближение вектора X

$$X_j = \frac{A_j B}{C}, \tag{53}$$

где

$$C = \sum_{j=1}^{n} A_j^2 . \qquad (54)$$

Следует заметить, что можно не делать преобразования уравнений (48) к виду (50),а выполнять уравновешивание по строкам в процессе вычислений. В этом случае формируем уравнение разрешающей гиперплоскости из (48). Коэффициенты и свободный член уравнения (51) вычисляются по следующим формулам

$$A_j = \sum_{q=1}^{m} \frac{A_{qj}^* B_q^*}{C_q^*}; \qquad B = \sum_{q=1}^{m} \frac{\left[B_q^*\right]^2}{C_q^*}, \qquad (55)$$

где

$$C_q^* = \sum_{j=1}^{n} \left[A_{qj}^*\right]^2$$

(56)

Последующие приближения вычисляются аналогичным образом, при этом необходимо делать перенос начала координат в точку очередного приближения вектора X .

При вычислении второго и последующих приближений можно использовать информацию предыдущего шага аналогично [1]. По-видимому, на основе вышеизложенного можно разработать эффективный алгоритм численного решения канонических уравнений метода сил.

Список литературы

1. Кичеев В.Е. Проектирование сжатых стержней силовых авиационных конструкций с использованием критерия подобия.
   //Электронный журнал «Труды МАИ», вып. 14 – http//www.mai.ru (26.12.2003)
2. Кичеев В.Е. Проектирование сжатых панелей легких самолетов с пользованием критерия подобия.
   //Электронный журнал «Труды МАИ», вып.27 – http//www.mai.ru (2007 г.)
3. Астахов М.Ф., Караваев А.В., Макаров С.Я., Суздальцев Я.Я. Справочная книга по расчету самолета на прочность. – М.: Оборонгиз, 1954. -702 с.

Сведения об авторе

Кичеев Валентин Ефимович – старший научный сотрудник ОСКБЭС Московского *авиационного института (государственного технического университета), к.т.н..*

Телефон: (495) 158-44-68, 158-49-09.