

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э.
Баумана (национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

На правах рукописи

Юй Чжаокай



**КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ДВУХСВЯЗНЫХ ПОЛОСТЯХ
В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ**

Специальности 1.1.7. – Теоретическая механика, динамика машин
1.1.9. – Механика жидкости, газа и плазмы

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

к.ф.-м.н., доцент

Темнов Александр Николаевич

Научный консультант:

д.т.н., доцент

Шкапов Павел Михайлович

Москва – 2023 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ	4
ВВЕДЕНИЕ.....	5
ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....	10
1.1. Равновесная форма свободной поверхности жидкости	10
1.2. Свободные колебания жидкости в условиях микрогравитации	14
1.3. Механический аналог малых колебаний жидкости в сосудах	18
1.4. Диссипация энергии колебаний маловязкой жидкости	20
1.5. Введение основных понятий гидромеханики невесомости.....	22
1.6. Выводы по главе 1.....	26
ГЛАВА 2. ФОРМА РАВНОВЕСНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ	27
2.1. Вывод условий равновесия гидромеханической системы сосуда	27
2.2. Положение равновесия капиллярной жидкости в коаксиальном цилиндре. 31	
2.3. Положение равновесия капиллярной жидкости в тороидальных сосудах ...	37
2.4. Выводы по главе 2.....	44
ГЛАВА 3. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ.....	46
3.1. Постановка задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости.....	46
3.2. Малые колебания капиллярной жидкости в коаксиальном цилиндре	51
3.2.1. Вывод уравнений и граничных условий	51
3.2.2. Малые колебания жидкости при плоской свободной поверхности	55
3.2.3. Малые колебания жидкости при произвольной форме свободной поверхности	58
3.2.4. Обсуждение результатов.....	60
3.3. Малые колебания капиллярной жидкости в тороидальных сосудах.....	64
3.3.1. Вывод уравнений и граничных условий	64
3.3.2. Вариационная формулировка задачи.....	66
3.3.3. Разработка алгоритма решения задачи.....	69
3.3.4. Обсуждение результатов.....	75

3.4. Выводы по главе 3.....	81
ГЛАВА 4. МЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛОГ И КОЭФФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ	83
4.1. Механический аналог свободных колебаний капиллярной жидкости.....	83
4.1.1. Свободные колебания капиллярной жидкости в неподвижном баке.....	83
4.1.2. Определение параметров механического аналога.....	87
4.1.3. Обсуждение результатов.....	91
4.2. Механический аналог вынужденных колебаний капиллярной жидкости....	93
4.2.1. Уравнения движения жидкости в подвижном баке	93
4.2.2. Уравнения движения маятниковой модели в подвижном баке	96
4.2.3. Определение потенциала Стокса-Жуковского	99
4.2.4. Обсуждение результатов.....	101
4.3. Обоснование диссипации энергии колебаний маловязкой жидкости.....	102
4.3.1. Диссипация энергии в погранслое вблизи стенки сосуда	103
4.3.2. Диссипация энергии в основной массе жидкости	105
4.3.3. Диссипация энергии на загрязнённой свободной поверхности.....	106
4.3.4. Диссипация энергии вблизи линии трёхфазного контакта	108
4.4. Оценка коэффициента затухания колебаний жидкости вблизи линии трёхфазного контакта	111
4.5. Выводы по главе 4.....	120
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	121
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	123

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

КА – космический аппарат

ЛА – летательный аппарат

ЛТК – линия трёхфазного контакта

МКЭ – метод конечных элементов

МКС – международная космическая станция

ОС – орбитальная станция

ПАВ – поверхностно-активное вещество

РБ – разгонный блок

РКТ – ракетно-космическая техника

РН – ракета-носитель

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования обусловлена необходимостью определения динамических характеристик колебаний жидкости в двухсвязных сосудах в условиях, близких к невесомости, и стандартизацией алгоритма решения задач.

Влияние колебаний жидких компонентов топлива на динамику и устойчивость движения летательных аппаратов и космических конструкций в условиях действия больших сил тяготения достаточно изучено в России, США и Китае [34–36, 46–47, 65, 77, 86, 122]. Несмотря на это, с созданием новых ОС, РБ и других КА большое внимание уделено исследованию движения жидкости ограниченного объёма в условиях микрогравитации, когда уровень ускорений в диапазоне 10^{-6} – $10^{-4} g_0$, а g_0 – ускорение свободного падения Земли и равно 9.81 м/с^2 . В условиях, близких к невесомости, нужно учитывать влияние поверхностного натяжения на динамику жидкости [1–3, 38, 50–51, 77, 86, 101].

В монографиях российских и зарубежных учёных [38, 77] обобщены результаты исследования поведений жидкости в сосудах в условиях, близких к невесомости. В опубликованных работах в основном описано поведение капиллярной жидкости в цилиндрических, сферических и эллипсоидальных сосудах, которые часто применяются в РКТ. Необходимость увеличения массы и объёма полезной нагрузки транспортных систем выведения приводит к увеличению объёма топливных баков верхних ступеней РН или РБ, и применению баков в виде двухсвязных полостей, имеющих форму тел вращения. Поведение жидкости в двухсвязных сосудах в условиях микрогравитации исследовано недостаточно и является объектом исследования данной работы.

Математические и физические обоснования задач гидромеханики с учётом поверхностного натяжения были исследованы при описании явлений в капиллярах, тонких слоях и каплях [32–33]. Предложенные метод разделения переменных и метод Ритца зависят от геометрии задачи и пригодны только для осесимметричных сосудов простой формы. В данной работе разработан универсальный алгоритм на

основе МКЭ для определения динамических характеристик колебаний жидкости в любом осесимметричном сосуде.

Экспериментальные данные [34, 68] исследования затухания колебаний жидкости дают значения декремента больше, чем расчёты с использованием теории погранслоя на стенках сосуда. Этот факт говорит о том, что рассеяние энергии колебаний происходит не только в погранслое, но также имеют место и другие явления, к примеру, из-за смачивания и растекания жидкости на стенке сосуда возможна диссипация энергии вблизи ЛТК [5, 17, 85, 99, 114, 117].

Целью работы является разработка методики определения динамических характеристик жидкости в двухсвязных полостях в условиях микрогравитации на основе метода конечных элементов.

Задачи исследования:

- 1) Разработка математической модели равновесия гидромеханической системы жидкость–газ–твёрдая стенка сосуда и алгоритмов отыскания форм равновесной свободной поверхности жидкости в двухсвязных полостях;
- 2) Получение собственных частот и форм малых колебаний жидкости в коаксиально-цилиндрическом сосуде;
- 3) Исследование математической модели малых колебаний капиллярной жидкости ограниченного объёма и разработка алгоритма решения задач в тороидальном сосуде на основе метода конечных элементов;
- 4) Разработка механического аналога малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации и получение выражения жёсткости спиральной пружины, моделирующей воздействие сил поверхностного натяжения;
- 5) Обоснование механизмов диссипации энергии малых колебаний жидкости с учётом капиллярного эффекта и оценка коэффициента демпфирования колебаний жидкости вблизи ЛТК.

Методы исследования. При решении поставленных задач применены различные математические и вычислительные методы, в том числе метод Рунге-Кутты 4-го порядка, метод разделения переменных, метод Ритца и МКЭ. Важную

роль в исследовании равновесия и колебаний капиллярной жидкости играют вариационные и энергетические подходы.

Научная новизна работы заключается в том, что в ней:

- 1) дано теоретическое объяснение явления о сосредоточении капиллярной жидкости около внешней стенки тороидального сосуда, экспериментально наблюдаемого в башне невесомости [107];
- 2) оценено влияние различных граничных условий вблизи ЛТК на собственные частоты и формы колебаний жидкости в тороидальных сосудах в условиях, близких к невесомости;
- 3) разработан механический аналог малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации с учётом сил поверхностного натяжения;
- 4) обоснован механизм диссипации энергии вблизи ЛТК и получено новое граничное условие с учётом изменения угла смачивания в процессе движения жидкости.

Достоверность и обоснованность полученных результатов обеспечивается:

- использованием вариационных принципов механики и энергетического подхода, как способов постановки задач гидромеханики в работе;
- реализацией разработанного алгоритма на программном комплексе MATLAB с проверкой достоверности и сходимости на наборе задач;
- удовлетворительным согласием отдельных частей результатов работы с известными (как аналитическими, численными, так и экспериментальными) данными других авторов.

Практическая ценность результатов работы состоит в том, что:

- 1) полученные результаты по положениям равновесия и динамическим характеристикам жидкости в коаксиально-цилиндрических и тороидальных сосудах могут быть использованы при проектировании двухсвязных топливных баков верхней ступени РН и РБ;
- 2) предложенный механизм диссипации энергии вблизи ЛТК является одной из возможных причин систематического расхождения экспериментальных и теоретических значений декремента малых колебаний жидкости;

- 3) разработанный алгоритм отыскания форм равновесной свободной поверхности может быть применен при проектировании заборных устройств топливных баков космических аппаратов, так как для решения подобных задач необходимо учитывать положение равновесия жидкости в космическом пространстве;
- 4) разработана методика определения динамических характеристик колебаний жидкости в слабых гравитационных полях, которая может быть использована при анализе динамики и устойчивости движения верхних ступеней РН, РБ или КА.

Личный вклад соискателя. Подробные формулировки приведенных задач в диссертационной работе выполнены соискателем. Алгоритмы решения задач на основе МКЭ разработаны и реализованы в программе MATLAB лично автором. Представленные результаты из совместных публикаций получены в основном соискателем и обсуждались вместе с руководителем и научным консультантом.

Апробация работы. Основные результаты работы докладывались на ряде Международных и Российских конференций:

1. VI–VIII Международная научная конференция «Фундаментальные и прикладные задачи механики» (г. Москва, декабрь 2020–2022 гг.);
2. XLV и XLVII Академические чтения по космонавтике «Королёвские чтения» (г. Москва, апрель 2021 г. и январь 2023 г.);
3. XLVII Международная молодёжная научная конференция «Гагаринские чтения» (г. Москва, апрель 2021 г.);
4. 12-ая и 13-ая Международная конференция – школа молодых учёных «Волны и вихри в сложных средах» (г. Москва, декабрь 2021–2022 гг.);
5. XXXI–XXXIII Крымская осенняя математическая школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (г. Алушта, сентябрь 2020–2022 гг.).

Публикация. Основные результаты диссертации отражены в 15 научных работах, из них 4 работы в рецензируемых журналах, рекомендуемых ВАК РФ и 1 статья в перечне международных научных изданий, включенных в базу данных

Web of Science, Scopus. Дополнительно результаты исследований опубликованы в сборниках тезисов научных конференций.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав с выводами по каждой главе, заключения, списка литературы из 128 наименований. Объём работы включает 134 страницы, 64 рисунков, 16 таблиц.

ГЛАВА 1. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В современных РН, РБ и КА содержатся баки, заполненные значительной частью жидкости. Например, масса жидких компонентов топлива составляет около 90% стартовой массы современных РН, а для спутников на высоких орбитах – 50%. Влияние колебаний жидкого топлива на динамику и устойчивость движения летательных аппаратов и космических конструкций в условиях действия больших сил тяготения достаточно изучено в работах Н.Н. Моисеева [35–36], Ф.Л. Черноусько [57], Б.И. Рабиновича [46–47], К.С. Колесникова [23–25], В.А. Бужинского [7–11], Н.Н. Abramson [65], Р.А. Ibrahim [86] и т.д. Несмотря на это, с созданием новых ОС, РБ и других КА большое внимание уделено задачам движения жидкости в сосуде в условиях микрогравитации. Основные результаты исследования поведения жидкости в невесомости обобщены в сборниках статьей под редакцией В.С. Авдуревского и В.И. Полежаева [1], А.Д. Мышкиса [2, 39, 101] и F.T. Dodge [77].

Типичным примером потери устойчивости движения КА из-за колебаний жидкости на борту является полёт аппарата Near Earth Asteroid Rendezvous (NEAR). КА NEAR кувыркался из-за плескания жидких компонентов топлива, что в конечном итоге привело к 13-месячной задержке миссии. Для обеспечения высоких требований к надёжности движения летательных аппаратов в космическом пространстве инженерам и конструкторам РКТ необходимо находить новые решения управления движением жидкостью в баках верхней ступени РН, РБ или КА. В настоящее время уделяют большое внимание изучению поведения жидкости в двухсвязных сосудах в условиях, близких к невесомости, которые имеют преимущество в компоновке КА.

1.1. Равновесная форма свободной поверхности жидкости

Задача исследования влияния невесомости на форму жидкости впервые была поставлена бельгийским физиком Плато, который создавал условие невесомости, помещая некоторое количество масла в смесь воды и спирта той же плотности. Данный метод называют методом нейтральной плавучести и является одним из

наиболее эффективных методов создания условий невесомости при наземном моделировании задач о равновесии и устойчивости жидкости. Например, применяли метод Плато для исследования равновесных конфигураций раздела жидкости и газа на конструктивно-подобных моделях бака жидкого водорода семейства РН Сатурн.

При переходе к условиям невесомости важную роль начинает играть поверхностное натяжение жидкости и во многих случаях возникают те же задачи, что для жидкости в капиллярах, тонких слоях и каплях. Поднятие жидкости по капиллярам впервые наблюдал Леонардо Да Винчи в 1490 г., однако понятие поверхностного натяжения было введено только в 1751 г. Сегнером. До XIX в. был накоплен определённый эмпирический материал и только в 1805 г. Юнг приступил к созданию математической теории капиллярности, исходя из аналогии между упругой плёнкой и свободной поверхностью жидкости, обладающей поверхностным натяжением. Одновременно более глубокий и физически естественный подход к этой теории дал Лаплас с учётом взаимодействия близкорасположенных частиц жидкости. Данный подход в определённом смысле завершён Гауссом в 1830 г., исходящим из принципа возможных перемещений и связанного с ним принципа минимума потенциальной энергии. Физическое обоснование поверхностных явлений приведено в монографии Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица по теоретической физике [33], а общая термодинамическая теория была предложена Гиббсом [14].

С различных позиций обоснована достоверность условия Лапласа, определяющего перепад давления на равновесной свободной поверхности, и краевого условия на ЛТК. Тем самым определена математическая формулировка задачи статики жидкости с учётом капиллярного эффекта. При этом нужно добавить условие несжимаемости жидкости, когда объём жидкости влияет на форму равновесия капиллярной жидкости в сосуде. При решении задачи статики полученное равенство на равновесной свободной поверхности сводится к обыкновенному нелинейному дифференциальному уравнению, а условие Дюпре–Юнга играет роль соответствующего краевого условия [1–4, 38–39, 53–54].

Первые исследования, стимулированные потребностями космической техники, провели М.Я. Барняк, А.Д. Мышкис, М.А. Беляева, А.Д. Тюпцов, Л.А. Слобожанин, Н.Н. Моисеев, А.А. Петров, Ф.Л. Черноусько, В.В. Румянцев, В.А. Самсонов и др. В кандидатской диссертации М.Я. Барняка [3] под руководством И.А. Луковского приведены приближённые методы для решения задач о форме равновесия свободной поверхности капиллярной жидкости в сосуде и её устойчивости. В ряде работ Н.Н. Моисеева [35] и Ф.Л. Черноусько [58] для решения подобных задач применены асимптотические методы. Эффективность этих методов достаточно высока, когда силы поверхностного натяжения малы или велики по сравнению с массовыми. В работах В.В. Румянцева [50] и В.А. Самсонова [51] исследована задача устойчивости равновесия или установившегося движения тела с полостью, наполненной двумя несмешивающимися жидкостями, обладающими поверхностным натяжением. Наиболее полные исследования по этой тематике проведены в работах М.А. Беляевой, Л.А. Слобожанина и А.Д. Тюпцова [4, 39, 53–54]. Проведен систематический анализ разнообразных типов задач статики капиллярной жидкости и уделено особое внимание важному с практической точки зрения случаю, когда сосуд и положение жидкости в нём осесимметричны.

В работе В.В. Сычёва [55] получены многие важные закономерности поведения жидкости при невесомости с помощью термодинамических методов. Причём получен график, позволяющий определять отделение одной из фаз от стенки сосуда при различных углах смачивания и объёмах жидкости. В статье [44] разработан более эффективный метод расчёта форм поверхностей, сходимость которого адекватно реагирует на физическое разрушение равновесных форм.

Китайский ученик В.В. Румянцева Wang Zhaolin в университете Tsinghua создал научную школу по динамике и устойчивости движения космических аппаратов с полостями, содержащими жидкость. Работы [120–121] посвящены определению форм свободной поверхности капиллярной жидкости в сферическом и цилиндрическом баках на основе метода Рунге-Кутты 4-го порядка. В статье [125] предложен эффективный алгоритм определения формы равновесия капиллярной

жидкости, и в работе [126] подробно описан метод стрельбы для решения данной краевой задачи. В статье [110] рассмотрено определение формы равновесной свободной поверхности в любом осесимметричном сосуде при введении сферической системы координат. В этих работах приведены численные методы вычисления форм равновесной поверхности жидкости в сосудах, имеющих форму кругового цилиндра и сферы, которые часто встречаются в РКТ.

В верхней ступени РН или РБ больше применяются топливные баки сложной конфигурации, к примеру, коаксиально-цилиндрические и тороидальные сосуды, которые удобны для наилучшей компоновки КА. В работе [104] подробно рассмотрено решение задачи о форме равновесия капиллярной жидкости в сосуде формы коаксиального цилиндра на основе метода Рунге-Кутты-Фельберга. Работа [6] посвящена осесимметричной задаче об эволюции свободной поверхности при разных объёмах жидкости в тороидальном сосуде с применением итерационно-разностного подхода. На башнях невесомости было проведено экспериментальное исследование по определению конфигураций раздела жидкости–газа в тороидальных сосудах при полной невесомости [107].

Если ускорение параллельно продольной оси осесимметричного сосуда, определяемая форма свободной поверхности представляет собой поверхность вращения и краевая задача статики сводится к определению линии меридиана поверхности при заданных граничных условиях. Но на инженерной практике часто встречаются случаи, в которых сосуд не осесимметричный или ускорение не параллельно продольной оси симметрии сосуда. В этих случаях задача статики капиллярной жидкости трёхмерная и решается энергетическим подходом [67]. На основе энергетического подхода и МКЭ разработана программа Surface Evolver – Fluid Interface Tool (SE-FIT) [106], которая представляет собой универсальный алгоритм расчёта формы поверхности с минимальной потенциальной энергией.

В статье [119] определены формы равновесия жидкости в сосудах со сферическим дном и плоской крышкой при условиях, близких к невесомости. Полученные результаты на программе Surface Evolver сходятся с экспериментальными результатами в спутниках. В работе [95] исследованы

характеристики смачивания жидкости в секторе кругового цилиндра в условиях микрогравитации и получены критерии устойчивости смачивания жидкости в стенках сосуда. Статья [87] посвящена исследованию формы равновесной свободной поверхности жидкости в сферических сосудах при разных числах Бонда B_0 (соотношение массовых сил и поверхностного натяжения), углах смачивания и объёмах жидкости.

В статье [80] предложен алгоритм на основе МКЭ для решения трёхмерных задач статики капиллярной жидкости в сосудах любой формы, в которой используется лагранжева параметризация [102–103]. Чтобы иметь возможность скользить по любой геометрии стенки сосуда, каждый узел свободной поверхности должен иметь три степени свободы. Но эта стратегия создает сингулярность, потому что деформация частицы жидкости в касательной плоскости свободной поверхности не вызывает изменения потенциальной энергии.

1.2. Свободные колебания жидкости в условиях микрогравитации

Задача о малых колебаниях тяжелой жидкости в ограниченном объеме издавна интересовала многих выдающихся математиков и механиков. В 1815 г. поставлена задача о поверхностных волнах с начальными условиями Коши и Пуассоном [37]. Задача Коши-Пуассона относится к одномерным стоячим волнам в океане бесконечной глубины. В этой задаче рассмотрены два различных начальных состояний: начальное смещение свободной поверхности при нулевых скоростях и начальное распределение поля скоростей при горизонтальной поверхности. В 1832 г. М.В. Остроградский опубликовал мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне, имеющем конечную глубину [41]. Последующие исследования по этой теме связаны с именами Стокса, Гельмгольца, Неймана, Ламба и других [32].

С развитием авиации и особенно РКТ задача о колебаниях жидкости ограниченного объёма стала весьма актуальной. Исходной для нового направления является работа Н.Е. Жуковского [18]. В этой работе была построена теория движения твёрдого тела с полостью, полностью наполненной идеальной

несжимаемой жидкостью, совершающей потенциальное движение. Данное движение определяется через три функции, называемые потенциалами Жуковского, которые находятся как решения стационарных краевых задач и зависят лишь от формы полости. При этом движение тела с жидкостью эквивалентно движению твёрдого тела с измененным тензором инерции, учитывающим движение жидкости.

Второй шаг сделан Н.Н. Моисеевым [35–36], Г.С. Наримановым [40], Д.Е. Охоцимским [42], Б.И. Рабиновичем [46–47], К.С. Колесниковым [23–25] и группой под руководством Н.Н. Abramson [65], которые рассмотрели задачу о движении тела с полостью, частично заполненной жидкостью. Движение жидкости описывается наряду с потенциалами Жуковского также характеристиками собственных колебаний жидкости в неподвижном сосуде. Таким образом, решение задачи о движении тела с жидкостью разбивается на два этапа: сначала надо найти потенциал Жуковского и собственные колебания жидкости в неподвижном сосуде, а затем найти присоединенные массы всей системы "тело + жидкость".

В начале 60-х годов прошлого века в гидромеханике возник целый ряд новых задач о движении жидкости в слабых гравитационных полях или в условиях полной невесомости. Группа молодых исследователей (Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д) под руководством А.Д. Мышкиса была привлечена к изучению данных задач в физико-техническом институте низких температур (г. Харьков). Их работы связаны с определением форм равновесия и условий её устойчивости, описанием малых движений и тепловой конвекции жидкости в условиях микрогравитации или полной невесомости. Подобными задачами были исследованы в отделе Н.Н. Моисеева в вычислительном центре АН СССР (г. Москва), а также в отделе И.А. Луковского в Институте математики (г. Киев). По их результатам исследований в 1976 году вышла первая в мире монография по гидромеханике невесомости [2]. Данная книга была переиздана во многих странах мира [101]. По развитию гидромеханики невесомости в 1992 году вышла обновленная версия данной монографии [38].

В группе молодых исследователей под руководством А.Д. Мышкиса задачи о малых колебаниях жидкости с учётом сил поверхностного натяжения были

исследованы Н.Д. Копачевским. В его работе [26] детально сформулирована задача о собственных колебаниях жидкости в слабом потенциальном поле массовых сил. Также исследованы вопросы о свойствах спектра частот колебаний и о существовании решения задачи Коши. В статьях [27–30] рассмотрены задачи об определении частот и форм колебаний идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде, в малозаполненном сферическом сосуде, в прямоугольном и секториальном каналах, для случая, когда гравитационные силы малы. В учебном пособии [31] и кандидатской диссертации ученика Н.Д. Копачевского [13] изучаются задачи статики, эволюционные задачи и спектральные проблемы, связанные с малым движением жидкости в условиях невесомости.

Задача гидродинамики с учётом капиллярных сил, как и для сосуда, частично заполненного тяжёлой жидкостью, разбивается на два этапа [3]. При этом если равновесная поверхность жидкости определена, то процедура определения потенциалов Жуковского не отличается от методики, детально разработанной для тяжёлой жидкости [38]. Поэтому основное внимание будем уделять задаче об определении собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости в неподвижном сосуде.

В монографиях зарубежных учёных [65, 77, 86] исследована динамика жидкости в условиях, близких к невесомости. Показано, что в современных задачах гидромеханики невесомости недостаточно разработаны численные методы определения динамических характеристик колебаний жидкости в двухсвязных сосудах и при сложном граничном условии на ЛТК.

В работе [43] проанализирована динамика непроницаемой мембраны, взаимодействующей с жидкостью в цилиндрическом сосуде. В статье [73] приведены теоретические анализы и экспериментальные результаты для колебания жидкости в круговом цилиндре в условиях малых осевых ускорений ($B_0 = 10 - 100$). В этой работе потенциал скоростей жидкости и поле смещений свободной поверхности были разложены по функциям Бесселя и гиперболическим функциям, полученным при решении задач колебаний тяжёлой жидкости. После подстановки их выражений в кинематическое условие и динамическое условие на свободной

поверхности получена алгебраическая система уравнений, решения которой есть собственные частоты и формы колебаний капиллярной жидкости. Разработанная методика определения динамических характеристик колебаний жидкости в условиях микрогравитации пригодна для цилиндрических сосудов. Кроме того, F.T. Dodge провел экспериментальные исследования о малых колебаниях жидкости в условиях малого ускорения в примере сферического и эллипсоидального сосудов на основе масштабной модели [74] и получена зависимость собственных частот от числа Бонда.

В работах [120–121] получены решения задач о свободных колебаниях жидкости в прямоугольном цилиндре и сферическом сосуде с применением метода Ритца. Статья [111] рассматривает вариационную формулировку задачи о колебаниях капиллярной жидкости в сферических сосудах и для её решения введены собственные функции на основе ряда гиперболических функций Гаусса. В статьях [123, 127–128] приведен приближённо-аналитический метод исследования колебаний капиллярной жидкости в круговом цилиндре на основе ряда функций Бесселя и гиперболических функций. Приведённые методы применяются для сосудов простой формы.

Для исследования плескания жидкости в сосудах произвольной осесимметричной формы в условиях микрогравитации часто применяются современные численные методы. В технических тезисах [71–72] исследованы поведения капиллярной жидкости в цилиндрических сосудах со сферическим дном и в сфероидальных сосудах на основе метода конечных разностей. При помощи модифицированного метода Галёркина получены решения задачи для случаев свободных и вынужденных колебаний капиллярной жидкости [69]. В статьях [80, 100, 117, 124] разработаны численные алгоритмы на основе МКЭ для получения собственных частот и форм колебаний жидкости с учётом капиллярного эффекта. В работе [76] приведено сравнение полученных результатов на основе МКЭ и из программ Flow-3D и NASA VOF3D. В статьях [83, 115] приведены численные результаты поведения жидкости в условиях микрогравитации, полученные в программе ComFLOW [70], и доказана правильность разработанного алгоритма по

сравнению с экспериментальными результатами в малом спутнике SlosSat FLEVO. В работах [93–94] исследовано поведение жидкости в условиях микрогравитации с применением метода конечных объёмов и учитывается изменение угла смачивания в процессе движения жидкости. И в [108–109] проведено моделирование колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения на основе произвольного Лагранжева-эйлерова подхода.

1.3. Механический аналог малых колебаний жидкости в сосудах

В процессе плескания жидкости её центр массы совершает колебательное движение, при моделировании системы жидкости в полости обычно используются механические модели в виде маятников или осцилляторов типа масса–пружина. Такие механические модели обеспечивают точное воспроизведение сил и моментов, возникающих в результате течения идеальной жидкости [75–76].

В начале 60-х годов прошлого века были изданы работы академика К.С. Колесникова [23–24], в которых наглядно демонстрировалось воздействие жидкого наполнения на динамику движения РН. Для решения задач динамики сложных упругих систем разработаны упрощённые математические модели, учитывающие колебания топлива в баках на основе маятниковой аналогии. Постулируется, что для i -го осциллятора частота его собственных колебаний равна частоте i -го тона поперечных колебаний жидкости в баке. Параметры аналога определены энергетическим методом, т.е. сравнением для i -го тона колебаний полной механической энергии аналога и исходной гидромеханической системы.

Механическим аналогом для осесимметричных колебаний упругого бака с жидкостью при соответствующей нормировке собственных функций в потенциале скорости частиц жидкости в общем случае является бесконечная совокупность параллельных осцилляторов (грузов, подвешенных на пружинах), сумма массы которых равна физической массе жидкости в упругом баке с жидкостью. Обычно в практических расчётах достаточно ограничиться введением нескольких маятников с собственными частотами, соответствующими первым двум, максимум трем, тонам колебаний жидкости. В монографии К.С. Колесникова [25] систематически

изложены основные проблемы и пути обеспечения устойчивости движения жидкостной ракеты с применением механических аналогов колебаний жидкости.

В работах академика Ф.Л. Черноусько [59–60] детально исследовано взаимодействие корпуса объектов и подвижных внутренних масс. Полученные результаты использованы не только для разработки алгоритма управления поворотов мобильного робота, но и пригодны для анализе динамики движения летательных аппаратов с полостями, содержащими жидкость. В статьях В.А. Самсонова и М.З. Досаева [15–16, 78–79] исследована динамика системы, состоящей из твердого тела, упругих элементов и внутренних подвижных масс. На основе полученных результатов разработан алгоритм управления движением подвижных объектов.

В монографии Н.Н. Abramson [65] и её обновленной версии [77] также систематически изложены полученные результаты по разработке механической модели колебаний жидкости в сосудах. Приведены аналитические выражения параметров механического аналога движения жидкости в прямоугольных и круговых цилиндрах. При этом даны экспериментальные исследования определения параметров механической модели основного тона малых колебаний жидкости. При необходимости механические модели можно модифицировать путём введения линейных демпферов, чтобы они имитировали небольшое вязкое демпфирование. Оценки демпфирования можно получить либо на основании испытаний моделей, либо на основании отдельного анализа пограничного слоя стенки сосуда с использованием решения потенциального течения идеальной жидкости в качестве внешнего потока.

Большинство работ посвящены определению параметров механического аналога колебаний жидкости в осесимметричных задачах [69, 71–72, 112]. Следует отметить, что в РКТ применяются топливные баки сложной конфигурации. Даже для осесимметричных резервуаров при определенных режимах работы двигателей направление ускорения аппарата не параллельно продольной оси сосуда. В этом случае часто используют экспериментальные методы.

В литературе [25, 34, 47, 65, 77, 86, 122] обоснованы общие принципы разработки механической модели колебаний жидкости: сила, момент, собственная частота и кинетическая энергия движения жидкости и её механического аналога должны быть одинаковы. Параметры механической модели плескания жидкости могут быть определены для различных сосудов на основе этих принципов.

В статье [92] предложена маятниковая модель для волновых движений тяжёлой жидкости. Разработанный алгоритм может быть использован для малых колебаний жидкости в сосудах, имеющих произвольную форму. Для решения проблемы плескания жидкого топлива с расходом предложена механическая модель с переменными параметрами и проанализировано влияние нескольких факторов на эффективность разработанной механической модели [91]. Для моделирования движений жидкости при стыковке транспортных кораблей и ОС в [116] описан алгоритм разработки трёхмерных осцилляторов типа масса–пружина.

Для моделирования малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации предложен маятник со спиральной пружиной [76–77]. Маятник моделирует воздействие массовой силы, а воздействие силы поверхностного натяжения учитывается спиральной пружиной. В статье [96] разработана механическая модель нелинейных колебаний жидкости.

1.4. Диссипация энергии колебаний маловязкой жидкости

Учёт вязкости приводит к сложной гидромеханической задаче и основные результаты достигнуты в теории колебаний маловязкой жидкости, когда число Рейнольдса большое. В этом случае напряжения трения проявляются в основном в пристеночной зоне и имеется возможность построения асимптотических решений [33]. Колебания маловязкой жидкости в сосудах была изучены Ф.Л. Черноусько [57], Б.И. Рабиновичем [47], И.Б. Богорядом [5], К.М. Case, W.C. Parkinson [68], G.H. Keulegan [88–89], J.W. Miles [98] и т.д.

В работах Г.Н. Микишева [34], Б.И. Рабиновича [47] и К.М. Case, W.C. Parkinson [68] проведён расчёт коэффициента затухания колебаний только на основе гипотез погранслоя Стокса вблизи стенки сосуда. Их исследования

показали, что экспериментальное значение коэффициента затухания колебаний жидкости в цилиндрических баках систематически больше теоретического значения в 1,4 раза, полученного по приближённой методике только на основе пограничного слоя вблизи стенки сосуда. Чтобы избежать расхождения между экспериментальными и теоретическими значениями, Г.Н. Микишев и Б.И. Рабинович ввели эмпирическую поправку в формулу диссипативной силы в погранслое Стокса.

Для выяснения физических причин возникновения данного расхождения в статье [98] предложены четыре механизма диссипации энергии колебаний жидкости: в погранслое твёрдой стенки сосуда, в основной массе жидкости, за счёт загрязнения свободной поверхности ПАВ, вблизи ЛТК. Первые два механизма рассеяния энергии достаточно изучены. А последние два механизма диссипации энергии жидкости связаны с капиллярным эффектом и исследованы не до конца.

В работах В.А. Калиниченко [20–22] систематически изложено подавление интенсивных колебаний свободной поверхности жидкости. Поверхностное натяжение оказывается весьма чувствительно к наличию в них ПАВ. Обычно с увеличением концентрации ПАВ поверхностное натяжение уменьшается и после достижения определённой концентрации ПАВ поверхностное натяжение больше не изменяется. При колебаниях свободной поверхности жидкости возникает градиент концентрации ПАВ, вследствие которого градиент поверхностного натяжения вызывает перенос вещества вдоль поверхности. В результате в погранслое свободной поверхности происходит диссипация энергии [84, 98].

Наблюдения показывают, что в процессе колебаний жидкости динамический угол смачивания немного отличается от статического. Как показано в работе [98], статический угол смачивания воды в сосуде из стекла равен 104.5 градуса, при относительной скорости движения воды в сосуде, превышающей 0.4 мм/с, динамический угол смачивания составляет 113 градусов в сторону газа, а при движении жидкости от стороны газа – 96 градусов. Если скорость волнового движения жидкости меньше 0.4 мм/с, угол смачивания жидкости линейно зависит от скорости ЛТК.

В работе [15] исследовано напряжение в зоне линии смачивания, и монографии И.Б. Богоряда [5] обоснованы реальные процессы в пристеночной зоне и вблизи ЛТК системы "жидкость–газ–стенка сосуда". Получены результаты, связанные с моделью течения в пристеночной зоне. В статье В.А. Якутенка [45] введено понятие движущейся силы, вызванной отличием динамического угла от статического при растекании жидкости. В статьях А.С. Романова [48–49] рассмотрен метод непротиворечивого описания динамического угла смачивания при стекании частично смачивающей жидкости по твердой поверхности.

В работе L.M. Hocking [85] детально обоснована формулировка граничного условия вблизи ЛТК на основе линейной зависимости изменения угла смачивания от скорости движения ЛТК. На примере капиллярных вол в прямоугольном канале дана оценка диссипации энергии вблизи ЛТК. Используя метода пограничного слоя, J.W. Miles [99] исследовал диссипацию энергии колебаний жидкости вблизи ЛТК в круговом цилиндре. В статье [114] разработан эффективный алгоритм определения коэффициента затухания вблизи ЛТК с применением приближённо-аналитического метода.

В статье [113] показано, что уменьшение частот колебаний жидкости приводит к увеличению коэффициента затухания в слабых гравитационных полях. В работах [117–118] исследованы колебания маловязкой жидкости с учётом капиллярного эффекта на основе МКЭ. Полученные численные результаты подтверждены приближенно-аналитическими и экспериментальными значениями. Рациональность разработанного численного алгоритма также подтверждена практикой при разработке математической модели поведения жидкости в топливных баках спутников. В этих работах не учитываются формы равновесия свободной поверхности жидкости и кривизна стенки сосуда в условиях микрогравитации.

1.5. Введение основных понятий гидромеханики невесомости

Невесомость и микрогравитация. В привычных для всех земных условиях во многих физических явлениях и процессах важную роль играют силы тяжести.

Полёт КА на орбите Земли, а также в условиях космического полёта под действием притяжения Солнца и планет представляет по существу свободное падение в гравитационном поле. Именно в этом смысле следует понимать термин невесомость при описании условий космического полёта.

Строго говоря, вероятность полного отсутствия перегрузок на космическом корабле очень мала, так как на него могут действовать силы, вызванные управлением ориентацией в полёте, неоднородностью внешнего гравитационного поля, аэродинамическим сопротивлением, солнечным давлением, электрическим сопротивлением при прохождении радиационных поясов, геомагнитным полем и другими внешними воздействиями. Кроме того, ускорения могут возникать от вращения космического аппарата в связи с поддержанием его ориентации. Наиболее вероятно для космического аппарата наличие малых ускорений, имеющих порядок $g = 10^{-6} - 10^{-4} g_0$, где $g_0 = 9.8 \text{ м/с}^2$ – ускорение свободного падения Земли. Под этими условиями понимается термин микрогравитация.

Для кратковременной имитации микрогравитации в наземных условиях можно использовать полёты самолётов по кеплеровским траекториям, а также свободное падение контейнеров с исследуемым объектом и соответствующей аппаратурой в башнях невесомости. Чтобы устранить влияние аэродинамического сопротивления и тем самым лучше воспроизвести условия невесомости, производят откачку воздуха из падающего контейнера и сбрасывают испытуемый объект внутри контейнера. Например, при вакууме 10^{-1} мм рт.ст. в падающем контейнере добиваются ускорения, составляющего $10^{-5} g_0$ [1–2].

При орбитальном полёте присутствуют стабильные и долговременные условия микрогравитации. Например, малый спутник Sloshtat FLEVO был разработан европейским космическим агентством (ЕКА) и предназначен для изучения характеристик плескания жидкости в условиях микрогравитации. Кроме того, МКС представляет собой хорошую лабораторию, позволяющую проводить эксперименты в условиях микрогравитации.

Поверхностное натяжение и угол смачивания. Возможность существования влияния межмолекулярных взаимодействий вблизи свободной

поверхности на поведение жидкости впервые была обнаружена при изучении жидкости в капиллярах. Межмолекулярные силы вблизи поверхности раздела двух сред называются поверхностным натяжением по аналогии между поверхностью раздела и растянутой упругой плёнкой.

На поверхности раздела жидкости и газа эта сила обуславливается тем, что силы молекулярного взаимодействия в жидкости больше, чем в насыщенном паре этой жидкости (рис. 1.1).

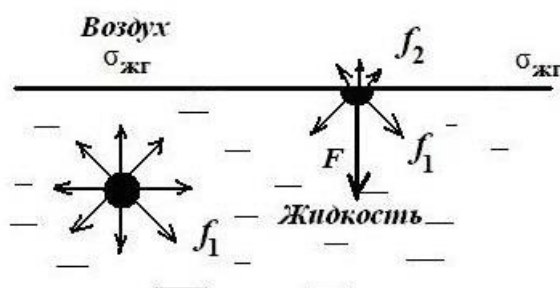


Рис. 1.1. Схема определения поверхностного натяжения, где f_1 – межмолекулярная сила между частицами жидкости, f_2 – межмолекулярная сила между частицами жидкости и газа, $\sigma_{жг}$ – коэффициент поверхностного натяжения.

Сила поверхностного натяжения направлена внутрь жидкости по нормали к поверхности и стремится сократить площадь поверхность раздела. Слой жидкости на границе с газом, в котором равнодействующие сил, действующих на молекулы, отличны от нуля, называется поверхностным слоем. Хотя толщина поверхностного слоя мала и составляет несколько мономолекулярных слоев, данный слой оказывает давление на объём жидкости и создаёт внутреннее давление в жидкости.

По сравнению с остальным объёмом жидкости поверхностный слой обладает избыточной внутренней энергией, которая называется поверхностной энергией U . Так как объём поверхностного слоя ничтожно мал по сравнению со всем объёмом жидкости, то можно считать, что поверхностный слой имеет нулевую толщину, а поверхностная энергия пропорциональна поверхности жидкости S , т.е. $U = \sigma S$. Коэффициент пропорциональности σ равен поверхностной плотности энергии слоя и в теории капиллярных явлений называется коэффициентом поверхностного

натяжения. Данный коэффициент имеет размерность энергии на единицу поверхности или силы на единицу длины $H/м$.

Значение поверхностного натяжения зависит от физических свойств соприкасающихся сред. На свободной поверхности жидкости коэффициент σ зависит от температуры, а также от давления газа. С увеличением этих параметров σ уменьшается и зависимость σ от температуры носит эмпирический характер.

Когда жидкость соприкасается с твердым телом, образуется линия трёхфазного контакта, ограничивающая смоченную часть твердой поверхности. При этом на линии трёхфазного контакта жидкость образует некоторый двугранный угол α , который называют углом смачивания. По значениям α жидкости делятся на несмачивающую и смачивающую (рис. 1.2). Из аналогии между поверхностью раздела двух сред и растянутой упругой плёнкой следует, что при равновесии на линии смачивания должно выполняться следующее соотношение: $\cos\alpha = (\sigma_{13} - \sigma_{12})/\sigma_{23}$, которое называется условием Дюпре-Юнга.

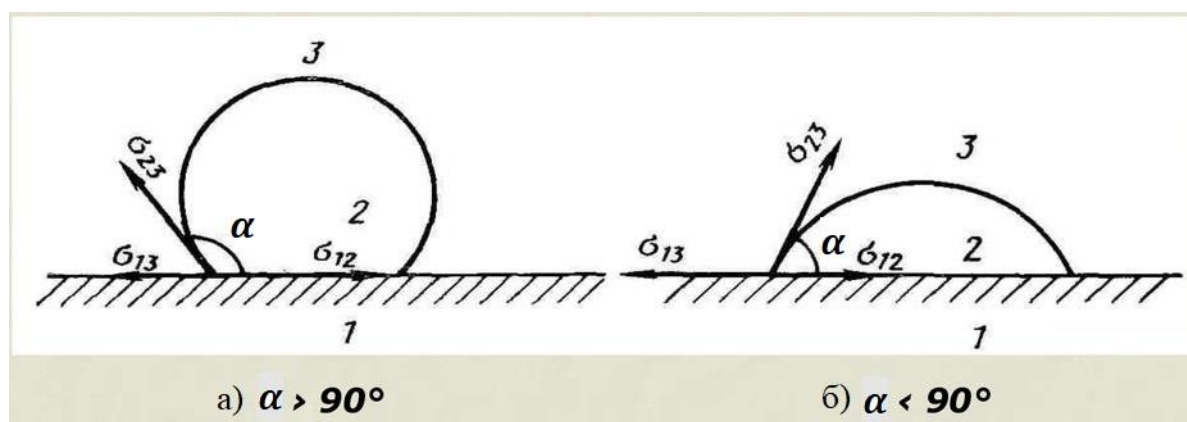


Рис. 1.2. Схема определения угла смачивания α :

а – несмачивающая жидкость, б – смачивающая жидкость, 1 – твёрдое тело, 2 – жидкость, 3 – газ, σ_{12} , σ_{23} и σ_{13} – коэффициенты поверхностного натяжения на границе жидкость–твёрдое тело, жидкость–газ и газ–твёрдое тело соответственно.

Следует отметить, что поверхностное натяжение и угол смачивания весьма чувствительны к наличию на них ПАВ. Во всех рассматриваемых в настоящей работе задачах статики и динамики жидкости параметры σ и α считаются исходными и могут быть однозначно заданы.

1.6. Выводы по главе 1

Из приведённого обзора литературы следует, что влияние колебаний жидкости на динамику и устойчивость движения летательных аппаратов и космических конструкций в условиях действия больших сил тяготения достаточно изучено. В связи с созданием новых ОС, РБ и других КА большое внимание уделено проблеме плескания жидкости в сосуде в условиях микрогравитации.

В работах российских и зарубежных учёных в основном исследованы поведения капиллярной жидкости в цилиндрических, сферических и эллипсоидальных сосудах, которые часто применяются в РКТ. Необходимость увеличения массы и объёма полезного груза транспортных систем выведения приводит к увеличению объёма топливных баков верхней ступеней РН или РБ, и применению баков в виде двухсвязных полостей, имеющих форму тел вращения. Поведение жидкости в двухсвязных сосудах в условиях микрогравитации исследовано недостаточно полно и является объектом исследования данной работы.

Экспериментальные данные исследования затухания колебаний жидкости дают значения декремента больше, чем расчёты только с использованием теории погранслоя на стенке сосуда. Этот факт говорит о том, что рассеяние энергии колебаний происходит не только в погранслое, но также имеют место и другие явления, к примеру, из-за смачивания и растекания жидкости на стенке сосуда возможна диссипация энергии вблизи ЛТК.

Разработка алгоритма определения динамических характеристик жидкости в двухсвязных полостях в условиях микрогравитации представляет собой актуальную задачу и является предметом исследования данной диссертации.

ГЛАВА 2. ФОРМА РАВНОВЕСНОЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ

Во второй главе рассмотрена осесимметричная задача об определении положения и формы свободной равновесной поверхности жидкости в двухсвязных полостях в условиях, близких к невесомости. Как и большинство практически важных задач со свободной границей, задачи о формах равновесной поверхности капиллярной жидкости, имеют сложную нелинейную формулировку.

Топливный бак, частично заполненный жидкостью, представляет собой механическую систему жидкость–газ–стенка сосуда. Необходимым условием равновесия данной системы является локальный минимум потенциальной энергии. Используя множитель Лагранжа, примененный по отношению к условию несжимаемости жидкости, из выражения для первой вариации потенциальной энергии системы выведены условия равновесия рассматриваемой системы в условиях микрогравитации. Задача статики сводится к решению системы дифференциальных уравнений на свободной поверхности жидкости при граничном условии Дюпре–Юнга на ЛТК.

Основное внимание в данной главе уделено разработке методики отыскания форм равновесной свободной поверхности в коаксиально-цилиндрических и тороидальных сосудах. Полученные результаты о формах и положениях равновесия жидкости в условиях микрогравитации могут быть применены при проектировании заборных устройств топливных баков КА. Полученная равновесная поверхность представляет собой невозмущённую границу области, занимаемой жидкостью, и является необходимой информацией для дальнейшего исследования динамики жидкого топлива.

2.1. Вывод условий равновесия гидромеханической системы сосуда

Топливная ёмкость рассмотрена как механическая система жидкость–газ–стенка сосуда. Допустим, что вектор ускорения \mathbf{g} действует параллельно оси сосуда, жидкость несжимаемая и однородная и плотность газа пренебрежимо мала. Сосуд может совершать неинерциальное движение и все дальнейшие рассмотрения в

данной главе проводим в системе координат, неподвижно связанной с сосудом (рис. 2.1).

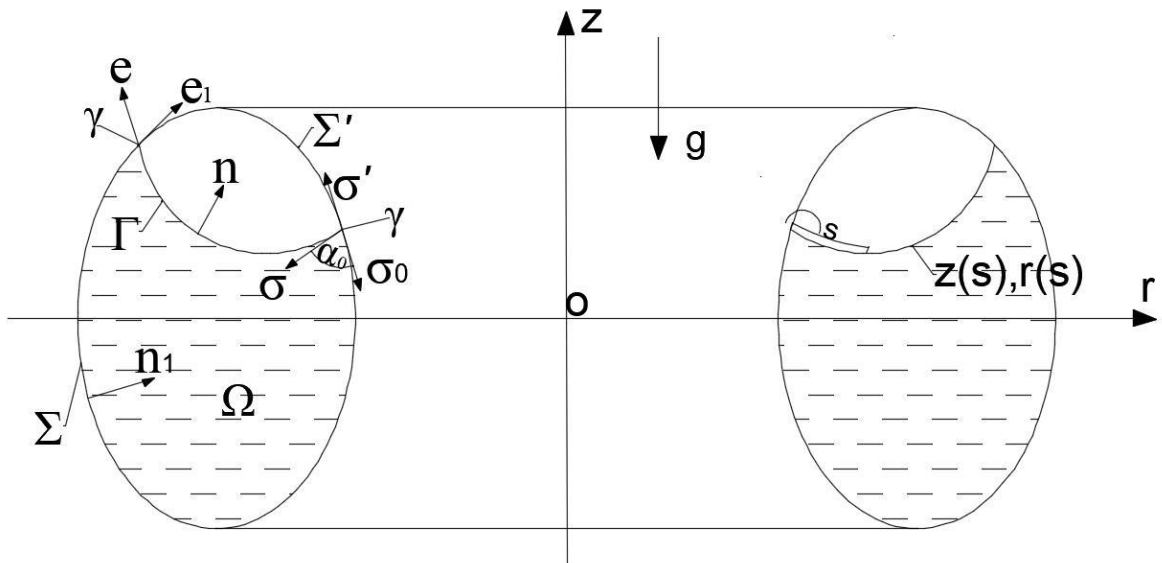


Рис. 2.1. Основные обозначения параметров механической системы жидкость–газ–твёрдая стенка и системы координат:

σ , σ_0 , σ' – коэффициенты поверхностного натяжения разделов жидкости–газа, жидкости–твёрдой стенки и газа–твёрдой стенки соответственно; α_0 – угол смачивания жидкости; γ – ЛТК; Γ – свободная поверхность жидкости; Σ – смачиваемая поверхность стенки жидкостью; Σ' – смачиваемая поверхность стенки газом; \mathbf{n} и \mathbf{n}_1 – вектор нормали свободной поверхности и смачиваемой поверхности соответственно; \mathbf{e} и \mathbf{e}_1 – внешние нормали ЛТК в касательной плоскости свободной и смачиваемой поверхности соответственно; Ω – область, занимаемая жидкостью; s – длина дуги линии меридиана равновесной свободной поверхности; $z(s)$ и $r(s)$ – параметрические функции линии меридиана равновесной свободной поверхности

Определим потенциальную энергию U системы с учётом поверхностного взаимодействия жидкости и газа между собой и со стенками сосуда:

$$U = \int_{\Omega} \rho g z d\Omega + \sigma |\Gamma| + \sigma_0 |\Sigma| + \sigma' |\Sigma'|, \quad (2.1)$$

где ρ – плотность жидкости, g – ускорение, $|\Gamma|$, $|\Sigma|$ и $|\Sigma'|$ означают площади соответствующих поверхностей (см. рис. 2.1). Жидкость, газ и материал стенки считаем однородными, то величины ρ и σ , σ_0 , σ' имеют определенные постоянные значения.

Согласно вариационному принципу стационарности потенциальной энергии система находится в состоянии равновесия только тогда, когда $\delta U = 0$ для всех допустимых вариаций $\delta \mathbf{r}$ свободной поверхности Γ [2, 38].

В данном случае допустимыми являются такие вариации поверхности Γ , которые удовлетворяют условием несжимаемости жидкости и условием непротекания жидкости через стенку сосуда:

$$\delta \int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} d\Gamma = 0, \quad \mathbf{n}_1 \cdot \delta \mathbf{r} = 0 \text{ на } \gamma. \quad (2.2)$$

Если каждая точка свободной поверхности Γ с радиус-вектором \mathbf{r} сместится на малый вектор $\delta \mathbf{r}$, получим вариацию площади свободной поверхности:

$$\delta |\Gamma| = \int_{\gamma} \mathbf{e} \cdot \delta \mathbf{r} d\gamma - \int_{\Gamma} 2H\mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} d\Gamma, \quad (2.3)$$

где $H = (k_1 + k_2)/2$ – средняя кривизна поверхности Γ , а k_1, k_2 – главные кривизны равновесной свободной поверхности.

Аналогично получим вариации смачиваемых поверхностей:

$$\delta |\Sigma| = -\delta |\Sigma'| = \int_{\gamma} \mathbf{e}_1 \cdot \delta \mathbf{r} d\gamma. \quad (2.4)$$

При вариации первого слагаемого в уравнении (2.1) воспользуемся формулой:

$$\delta \int_{\Omega} z d\Omega = \int_{\Omega} \delta z d\Omega + \int_{\Omega} \nabla z \cdot \delta \mathbf{r} d\Omega = \int_{\Gamma} z \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} d\Gamma, \quad (2.5)$$

где z – заданная координата жидкости и $\delta z = 0$.

При использовании правила неопределенных множителей Лагранжа для учёта наложенного условия несжимаемости жидкости, необходимое условие обращения в нуль δU будет иметь следующий вид:

$$\delta U + c \int_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} d\Gamma = 0. \quad (2.6)$$

Из формулы (2.6) получим вариационную формулировку задачи о равновесии системы:

$$\int_{\Gamma} [\rho g z + c - 2\sigma H] \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r} d\Gamma + \int_{\gamma} [\sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 + (\sigma_0 - \sigma')] \mathbf{e}_1 \cdot \delta \mathbf{r} d\gamma = 0. \quad (2.7)$$

При получении формулировки задачи статики (2.7) применено соотношение $\mathbf{e} \cdot \delta \mathbf{r} = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1) \mathbf{e}_1 \cdot \delta \mathbf{r}$ и из (2.7) следуют условия равновесия гидромеханической системы жидкость–газ–твёрдая стенка сосуда:

$$\rho gz + c - 2\sigma H = 0 \text{ на } \Gamma, \sigma \mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 + (\sigma_0 - \sigma') = 0 \text{ на } \gamma. \quad (2.8)$$

Первое равенство системы уравнений (2.8) играет роль дифференциального уравнения равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости. Введём характерный размер задачи l и запишем данное уравнение в безразмерном:

$$2H' = B_0 z' + C, \quad (2.9)$$

где $H' = Hl$, $B_0 = \rho g l^2 / \sigma$ – число Бонда, которое характеризует соотношение массовой силы и поверхностного натяжения, $z' = z/l$, C – константа, которая зависит от угла смачивания α_0 , числа Бонда B_0 , объёма жидкости и формы сосуда при заданной системе координат. В дальнейшем будем опускать индекс «'» в формулах и наличие безразмерного числа означает безразмерную формулировку задачи.

Во втором уравнении (2.8) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1$ есть косинус угла α_0 , образуемого свободной поверхностью жидкости со стенкой сосуда на ЛТК (см. рис. 2.1). Тогда последнее условие в (2.8) можно переписать в виде: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = \cos \alpha_0 = (\sigma' - \sigma_0) / \sigma$. Для заданной гидромеханической системы угол смачивания α_0 считается известным.

Из дифференциальной геометрии известно, что средняя кривизна поверхности H есть дифференциальное уравнение второго порядка относительно радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\zeta, \eta)$, где ζ и η – криволинейные координаты на этой поверхности. В цилиндрической системе координат $Or\theta z$ получим следующие выражения средней кривизны для осесимметричной поверхности:

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{z_{rr}}{(1 + z_r^2)^{3/2}} + \frac{z_r}{r(1 + z_r^2)^{1/2}} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r z_r}{(1 + z_r^2)^{1/2}} \right], \quad (2.10)$$

где функции z_r и z_{rr} означают первую и вторую производные функции z по координате r .

Для осесимметричной поверхности удобно за параметр ζ принять длину дуги s линии меридиана Γ , отсчитываемого от некоторой точки, и за параметр η – полярный угол θ . Задача о нахождении формы равновесной свободной поверхности преобразуется в решение уравнения линии меридиана Γ в виде $r = r(s)$ и $z = z(s)$. В введённой криволинейной системе координат средняя кривизна имеет вид:

$$\begin{cases} z_r = z_s / r_s \\ z_{rr} = (z_{ss} r_s - r_{ss} z_s) / r_s^3 \Rightarrow 2H = (z_{ss} r_s - r_{ss} z_s) + z_s / r. \\ r_s^2 + z_s^2 = 1 \end{cases} \quad (2.11)$$

При учёте соотношения $r_s r_{ss} + z_s z_{ss} = 0$ имеем следующую систему дифференциальных уравнений, описывающих форму линии меридиана равновесной свободной поверхности Γ :

$$z_{ss} = r_s (B_0 z + C - z_s / r), \quad r_{ss} = -z_s (B_0 z + C - z_s / r). \quad (2.12)$$

Задача о нахождении формы равновесной свободной поверхности может быть сведена к решению данной системы дифференциальных уравнений при граничных условиях на ЛТК и заданном объёме жидкости. Решение рассматриваемой задачи представляет значительные трудности из-за присутствия неизвестной константы C и нелинейности дифференциальных уравнений. Эффективным подходом к решению данной задачи является применение метода Рунге-Кутты 4-го порядка с методом проб и ошибок. Если $B_0 = 0$, т.е. поле массовых сил отсутствует, задача статики капиллярной жидкости преобразуется в задачу об изучении поверхности постоянной средней кривизны. Если при этом и константа $C = 0$, то – к задаче Плато о минимальной площади поверхности. В орбитальных станциях наблюдается сферическая форма капли воды, висящей в воздухе, которая является типичным примером задачи Плато.

2.2. Положение равновесия капиллярной жидкости в коаксиальном цилиндре

Ускорение \mathbf{g} действует параллельно продольной оси симметрии сосуда и использована цилиндрическая система координат $Or\theta z$ (рис. 2.2). Для описания линии меридиана равновесной свободной поверхности применена длина дуги s .

Выбираем r_2 как характерный размер сосуда и запишем дифференциальное уравнение линии меридиана свободной поверхности в безразмерном виде:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r z_r}{(1 + z_r^2)^{1/2}} \right] = B_0 z + C, \quad (2.13)$$

где нижний индекс r означает первую производную функции по r .

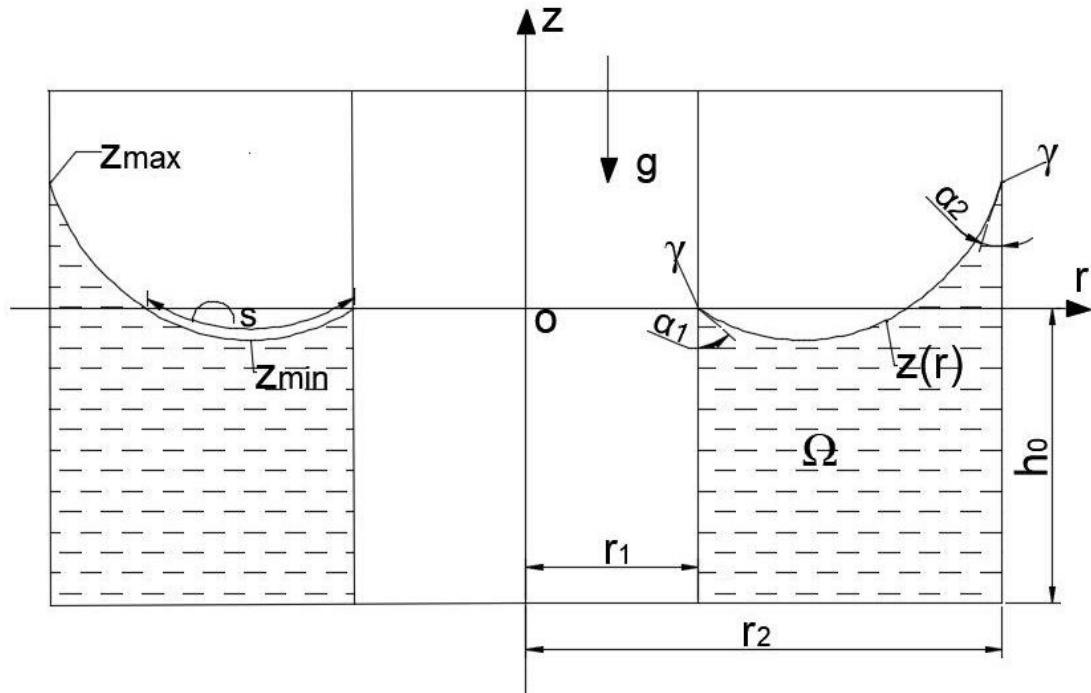


Рис. 2.2. Обозначения параметров жидкости и системы координат:

r_1 и r_2 – радиусы внутренней и внешней стенок сосуда; z_{min} и z_{max} – наименьшая и наибольшая высоты свободной поверхности; $z(r)$ – функция линии меридиана равновесной свободной поверхности; Ω – область, которую занимает жидкость; γ – линия трёхфазного контакта; α_1 и α_2 – углы смачивания жидкости на внутренней и внешней стенках соответственно; h_0 – глубина.

Граничные условия на ЛТК имеют вид:

$$z_r(r_1) = -\text{ctg}(\alpha_1), \quad z_r(r_2) = \text{ctg}(\alpha_2). \quad (2.14)$$

Если свободная поверхность не пересекает дно бака, форма равновесной свободной поверхности жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах не зависит от объёма жидкости и в данной задаче полагаем $z(r_1) = 0$.

При условии $\mathbf{V}_0 = \mathbf{0}$, т.е. поле массовых сил отсутствует, получим упрощенное дифференциальное уравнение второго порядка, решение которого получено эллиптическим интегралом:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r z_r}{(1 + z_r^2)^{1/2}} \right] = C. \quad (2.15)$$

После первого интеграла имеем следующее выражение:

$$\frac{rz_r}{(1+z_r^2)^{1/2}} = \frac{1}{2}Cr^2 + C_1 \quad (2.16)$$

где C_1 – константа, проявляющаяся при интегрировании.

С учётом граничных условий на внутренней и внешней стенках сосуда получим систему уравнений:

$$\frac{r_1 z_r(r_1)}{[1+z_r^2(r_1)]^{1/2}} = \frac{1}{2}Cr_1^2 + C_1, \quad \frac{z_r(1)}{[1+z_r^2(1)]^{1/2}} = \frac{1}{2}C + C_1. \quad (2.17)$$

Отсюда получим выражения констант C и C_1 :

$$C = \frac{2}{1-r_1^2} \left\{ \frac{z_r(1)}{[1+z_r^2(1)]^{1/2}} - \frac{r_1 z_r(r_1)}{[1+z_r^2(r_1)]^{1/2}} \right\} = \frac{2}{1-r_1^2} (r_1 \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2), \quad (2.18)$$

$$C_1 = \frac{z_r(1)}{[1+z_r^2(1)]^{1/2}} - \frac{1}{2}C = -\frac{1}{1-r_1^2} (r_1 \cos \alpha_1 + r_1^2 \cos \alpha_2).$$

Если внутренняя и внешняя стенки сосуда изготовлены из одного и того же материала, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$, тогда $C = 2 \cos \alpha_0 / (1-r_1)$, $C_1 = -r_1 \cos \alpha_0 / (1-r_1)$.

Получим функцию $z(r)$, где $\varepsilon = C_1/C$:

$$z(r) = \int_{r_1}^r \frac{s^2 + 2\varepsilon}{\sqrt{-s^4 + 4s^2(1/C^2 - \varepsilon) - 4\varepsilon^2}} ds, \quad (2.19)$$

Если $r_1 = 0$, т.е. для кругового цилиндра, $C = 2 \cos \alpha_0$, $C_1 = 0$ и форма равновесной свободной поверхности запишется в виде:

$$z(r) = \int_0^r \frac{sC}{\sqrt{4-s^2C}} ds = -\sqrt{4/C^2 - r^2} + C_2,$$

Так как $z(0) = 0$, то $C_2 = 2/C = 1/\cos \alpha_0$. Форма равновесной поверхности представляет собой сферический сегмент с центром $(0, 1/\cos \alpha_0)$ и радиусом $1/\cos \alpha_0$.

При произвольном числе Бонда B_0 дифференциальное уравнение не имеет аналитического или приближённо-аналитического решения и в общем решается численным методом. В данной статье выбран метод Рунге-Кутты 4-го порядка с итерационным процессом определения константы C .

Преобразуем нелинейное дифференциальное уравнение в систему дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающих форму равновесной свободной поверхности жидкости:

$$r_s = u, z_s = v, u_s = -v(B_0 z + C - v/r), v_s = u(B_0 z + C - v/r), \quad (2.20)$$

где нижний индекс s означает первую производную функций по s .

Если внутренняя и внешняя стенки сосуда изготовлены из одного и того же материала, т.е. $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_0$, граничные условия интегрирования функций $r(s)$, $z(s)$, $u(s)$ и $v(s)$ имеют вид:

$$r(0) = r_1, z(0) = 0, u(0) = \sin \alpha_0, v(0) = -\cos \alpha_0, r(s_0) = 1, \alpha(s_0) = \alpha_0, \quad (2.21)$$

где s_0 – длина дуги линии меридиана свободной поверхности.

Заметим, что при постановке задачи статики (2.20–2.21) присутствует предварительно неизвестная константа C . Если число $B_0 = 0$, константа C определяется аналитической формулой $C = 2 \cos \alpha_0 / (1 - r_1)$. Здесь видно, что при заданной системе координат C зависит от угла смачивания α_0 и геометрии сосуда r_1 , и также от числа Бонда B_0 . Схема решения задачи о форме равновесной свободной поверхности жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах приведена в рис. 2.3. На схеме показано, что два итерационного процесса необходимы для определения C и длины дуги s_0 .

Обсуждение результатов. На основе приведенной структурной схемы рис. 2.3 реализован алгоритм в программе MATLAB определения форм равновесной свободной поверхности жидкости в коаксиальном цилиндре. В данной работе исследована осесимметричная задача статики капиллярной жидкости и показана линия меридиана свободной поверхности только в правом сечении сосуда.

Из рис. 2.4 и рис. 2.5 видно, что с уменьшением угла смачивания α_0 и с увеличением радиуса стенки сосуда r_1 константа C увеличивается. За исключением малого радиуса внутренней стенки сосуда r_1 значение константы C также прямо пропорционально числу Бонда B_0 . На рис. 2.6 и рис. 2.7 показаны формы равновесной свободной поверхности.

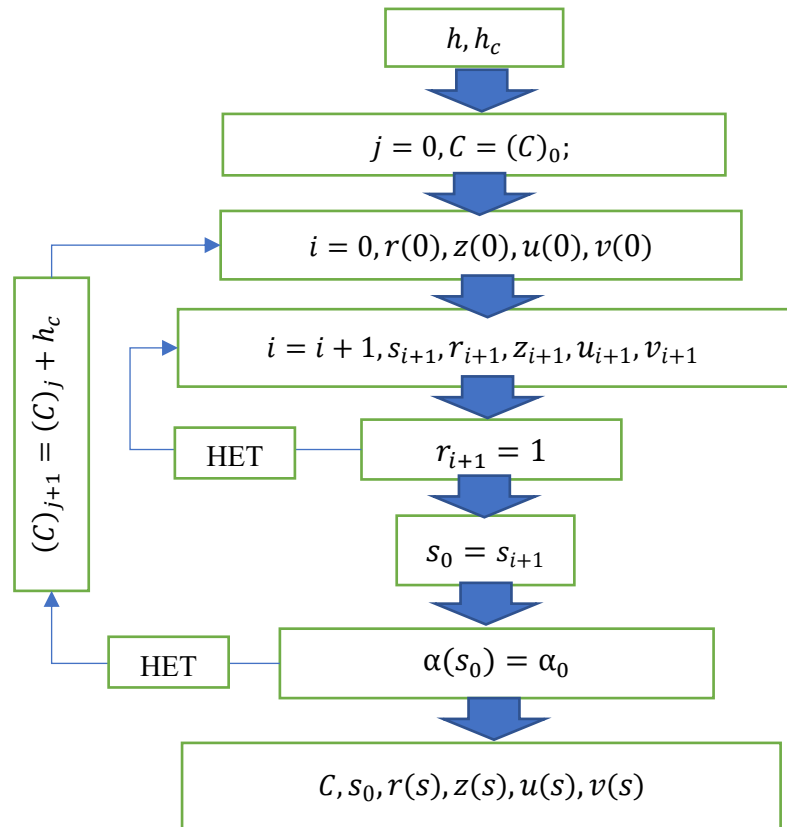


Рис. 2.3. Структурная схема решения системы дифференциальных уравнений.

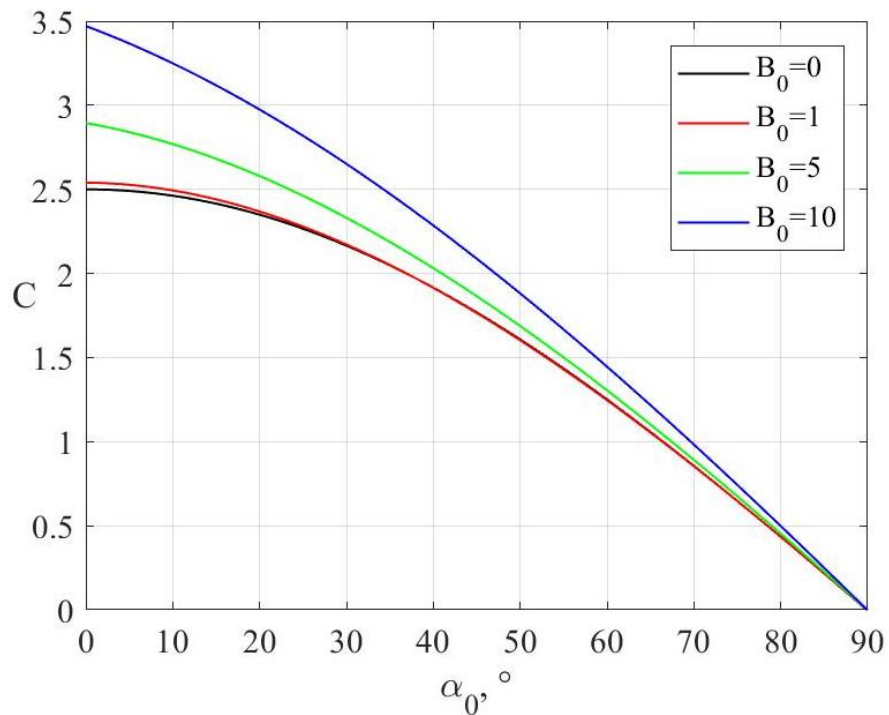


Рис. 2.4. Значения константы C в зависимости от угла смачивания α_0 и числа Бонда B_0 при условии $r_1 = 0.2$.

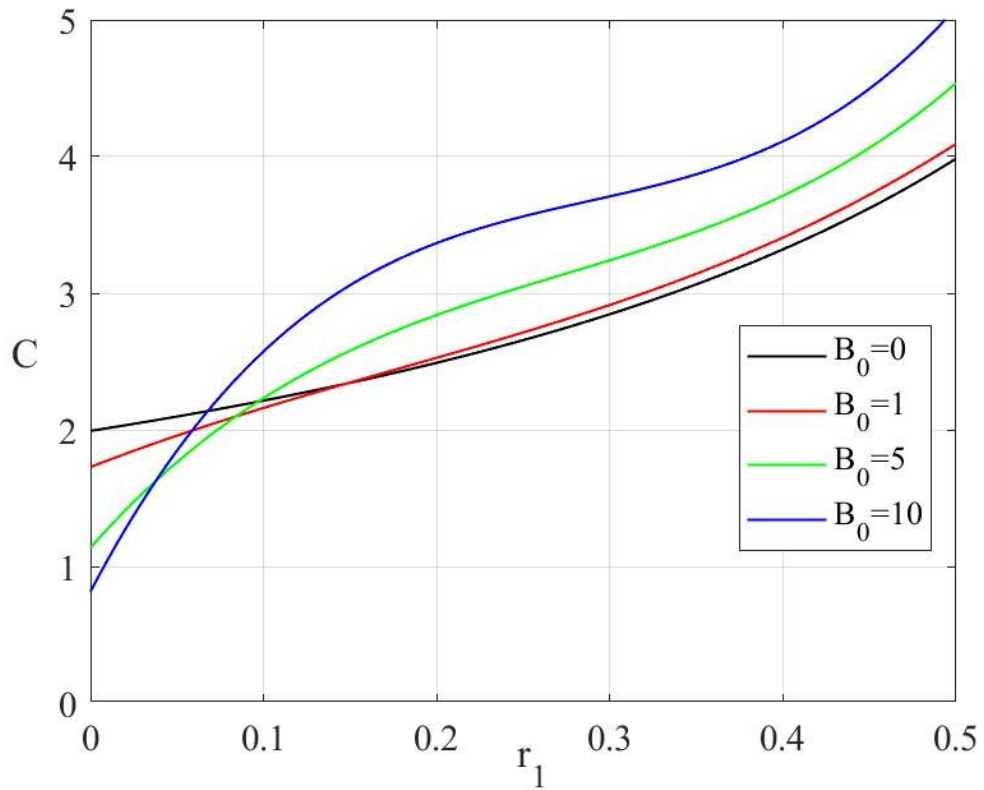


Рис. 2.5. Значения константы C в зависимости от радиуса стенки r_1 и числа Бонда B_0 при условии $\alpha_0 = 5^\circ$.

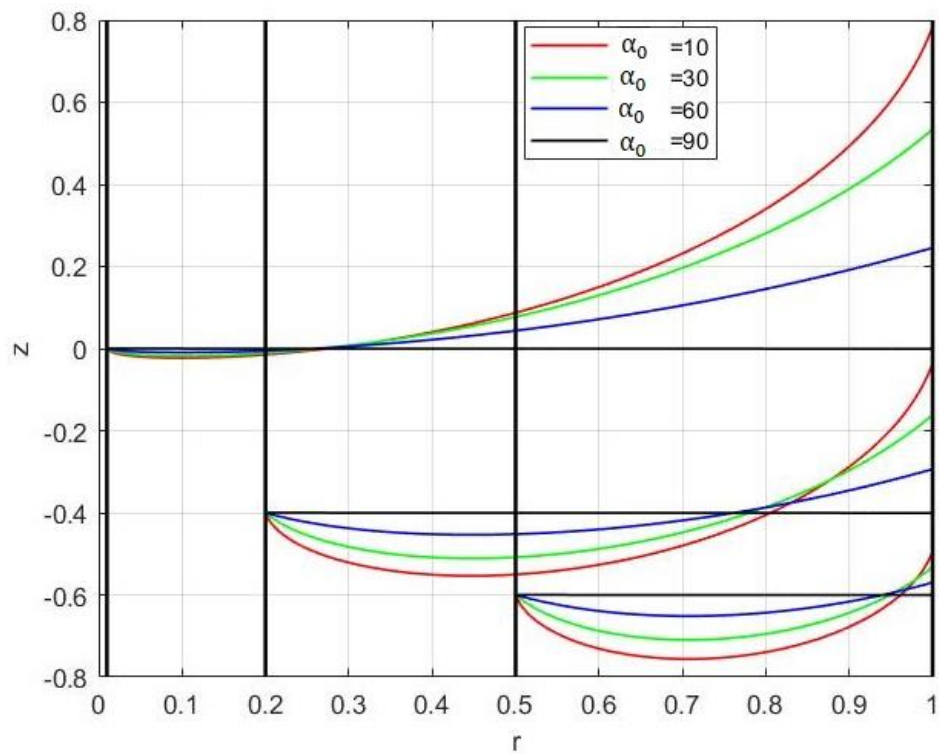


Рис. 2.6. Линии меридиана поверхности жидкости в правом сечении сосуда в зависимости от α_0 и r_1 при $B_0 = 0$.

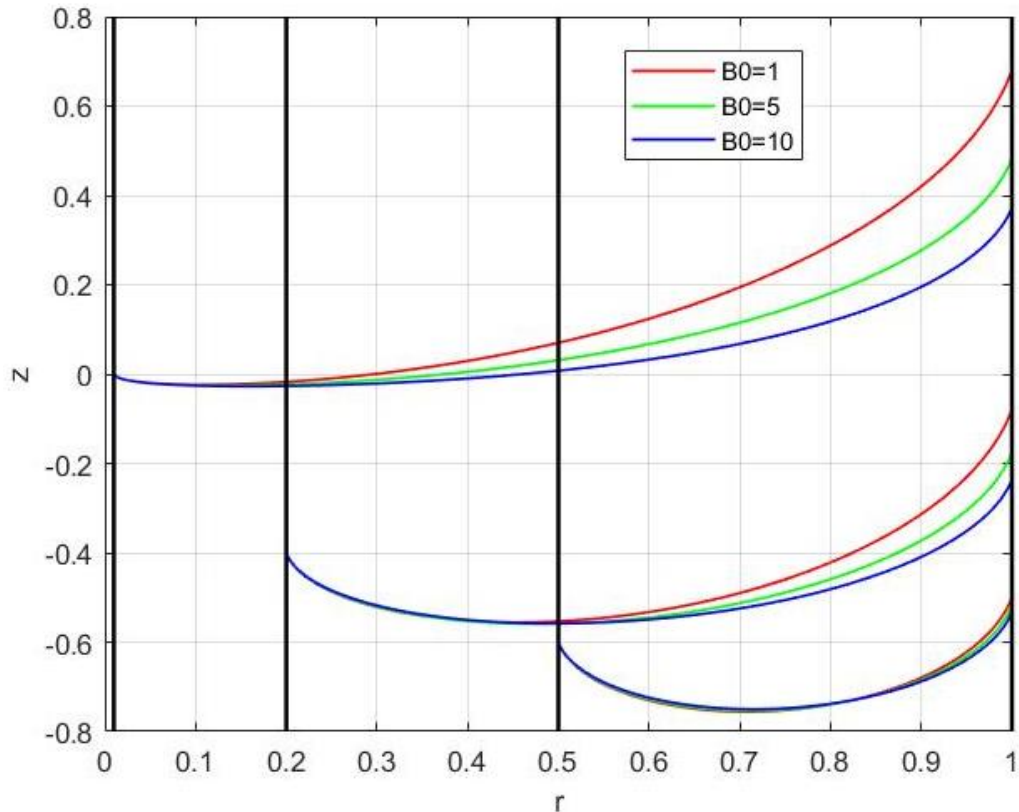


Рис. 2.7. Линии меридиана поверхности жидкости в правом сечении сосуда в зависимости от B_0 и r_1 при $\alpha_0 = 10^\circ$.

2.3. Положение равновесия капиллярной жидкости в тороидальных сосудах

Тороидальный сосуд частично заполнен жидкостью и в дальнейшем исследованы формы и положения равновесия жидкости в сосуде в условиях микрогравитации с учётом сил поверхностного натяжения. Использована цилиндрическая система координат $r\theta z$, ось z совпадает с осью симметрии сосуда и начало системы координат находится в центре тора. Введена переменная s для описания линии меридиана равновесной свободной поверхности, растущая в направлении, оставляющем жидкость справа, а через τ – полярный угол, отсчет которой ведется от вершины тора против часовой стрелки (рис. 2.8). В данной работе радиус окружности тора r_2 выбран как характерный размер задачи и линия меридиана стенки сосуда тора описывается параметрическими уравнениями:

$$z = \cos \tau, \quad r = r_1 - \sin \tau, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi.$$

Одна из ЛТК соответствует $s = 0$, $\tau = \tau_1$, а другая – $s = s_0$, $\tau = \tau_2$, где s_0 – общая длина дуги линии меридиана поверхности Γ .

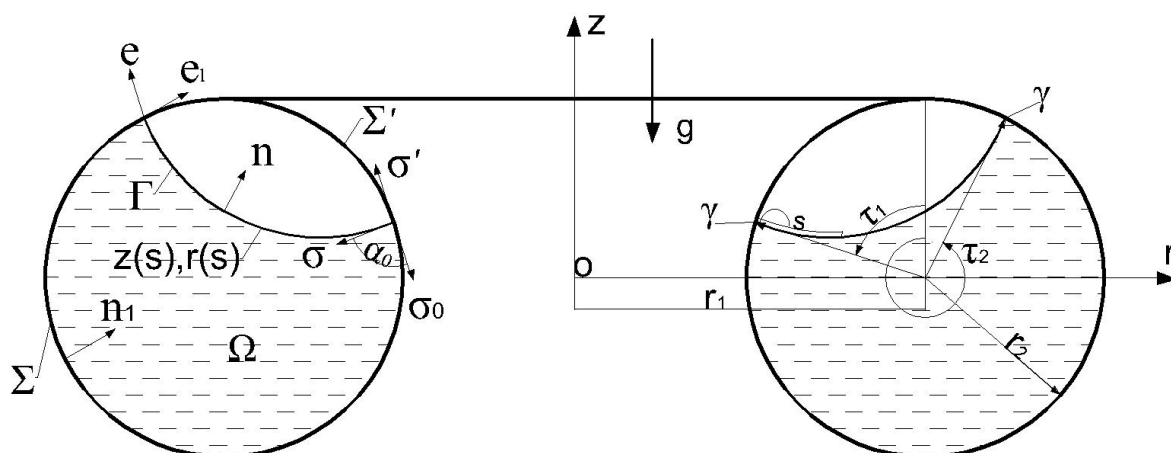


Рис. 2.8. Обозначения параметров жидкости и системы координат

r_1 и r_2 – радиусы осевой окружности и окружности меридиана тора; Γ и Σ – свободная и смачиваемая поверхности жидкости соответственно; Ω – область, которую занимает жидкость; γ – линия трёхфазного контакта; α_0 – угол смачивания жидкости; τ_1 и τ_2 – положения ЛТК на стенке сосуда; $z(s)$ и $r(s)$ – параметрические уравнения линии меридиана поверхности Γ .

Так как равновесная свободная поверхность капиллярной жидкости осесимметрична, форма линии меридиана равновесной свободной поверхности описывается парой параметрических функций $z(s)$ и $r(s)$:

$$\begin{aligned} r'(s) &= u(s), \quad z'(s) = v(s), \\ u'(s) &= -v(s)[B_0 z(s) + C - v(s)/r(s)], \\ v'(s) &= u(s)[B_0 z(s) + C - v(s)/r(s)]. \end{aligned} \quad (2.22)$$

В отличие от форм равновесной свободной поверхности в цилиндрических сосудах, одному и тому же значению r в тороидальных сосудах может быть соответствуют два значения z , т.е. функция $z(r)$, описывающая форму равновесной свободной поверхности в тороидальных сосудах, не однозначна. Именно по данной причине предлагается длина дуги s в виде переменной.

Граничные условия линии меридиана поверхности на ЛТК $s = 0$, $\tau = \tau_1$:

$$\begin{aligned} r(0) &= r_1 - \sin \tau_1, \quad z(0) = \cos \tau_1, \\ u(0) &= -\cos(\alpha_0 + \tau_1), \quad v(0) = -\sin(\alpha_0 + \tau_1). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Граничные условия линии меридиана поверхности на ЛТК $s = s_0$, $\tau = \tau_2$:

$$d(s_0) = [r_1 - r(s_0)]^2 + z(s_0)^2 = 1,$$

$$\alpha(s_0) = \begin{cases} \sin^{-1}[u(s_0)] + \sin^{-1}[z(s_0)] & \text{если } r(s_0) > r_1 \cap v(s_0) > 0 \\ 180 - \sin^{-1}[u(s_0)] + \sin^{-1}[z(s_0)] & \text{если } r(s_0) > r_1 \cap v(s_0) < 0 \\ 180 + \sin^{-1}[u(s_0)] - \sin^{-1}[z(s_0)] & \text{если } r(s_0) < r_1 \cap v(s_0) > 0 \\ -\sin^{-1}[u(s_0)] - \sin^{-1}[z(s_0)] & \text{если } r(s_0) < r_1 \cap v(s_0) < 0 \end{cases} = \alpha_0. \quad (2.24)$$

В отличие от решения задачи о форме равновесной поверхности в коаксиально-цилиндрических сосудах коэффициент заполнения сосуда жидкостью β , равный отношению объёма жидкости к объёму ёмкости тора, оказывает существенное влияние на положение и форму равновесной свободной поверхности жидкости в тороидальных сосудах. Пользуясь формулой для объёма тела вращения, получим дополнительное условие о сохранении объёма жидкости:

$$\frac{1}{\pi r_1} \left[\int_0^{s_0} z r r' ds + \int_{\tau_1}^{\tau_2} (r_1 - \sin \tau) \cos^2 \tau d\tau \right] = \beta. \quad (2.25)$$

В системе дифференциальных уравнений (2.22) с граничными условиями (2.23–2.25) имеются четыре предварительно неизвестные C , s_0 , τ_1 и τ_2 , которые существенно затрудняют решение задачи. После обоснования знаем, что среди четырёх неизвестных независимыми являются только три константы. В данной работе выбираем C , s_0 и τ_1 как независимые неизвестные задачи. А положение линии контакта на внешней стенке сосуда тора τ_2 определено следующим:

$$\tau_2 = \begin{cases} 270 + \arcsin z(s_0) & \text{если } r(s_0) \geq r_1 \\ 360 + \arcsin[r_1 - r(s_0)] & \text{если } r(s_0) < r_1 \end{cases}. \quad (2.26)$$

В данной работе разработан алгоритм решения задачи о форме равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости на основе метода Рунге-Кутты 4-го порядка для уравнения типа $y'(s) = f(s, y)$:

$$y(s_{i+1}) = y(s_i) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),$$

где коэффициенты K_1 , K_2 , K_3 , K_4 имеют следующие выражения:

$$K_1 = hf[s_i, y(s_i)], \quad K_2 = hf[s_i + h/2, y(s_i) + K_1/2], \\ K_3 = hf[s_i + h/2, y(s_i) + K_2/2], \quad K_4 = hf[s_i + h, y(s_i) + K_3].$$

Здесь h означает шаг интегрирования дифференциального уравнения.

На рис. 2.9 приведена логическая схема решения задачи о положении равновесия капиллярной жидкости, также для определения C , длины дуги s_0 и положения линии контакта на внутренней стенке сосуда τ_1 .

Обсуждение результатов. На основе приведенной логической схемы в программе MATLAB реализован алгоритм решения задачи о положении равновесия жидкости в условиях, близких к невесомости. Для осесимметричной задачи равновесная свободная поверхность только показана линия меридиана равновесной свободной поверхности жидкости в правом сечении сосуда.

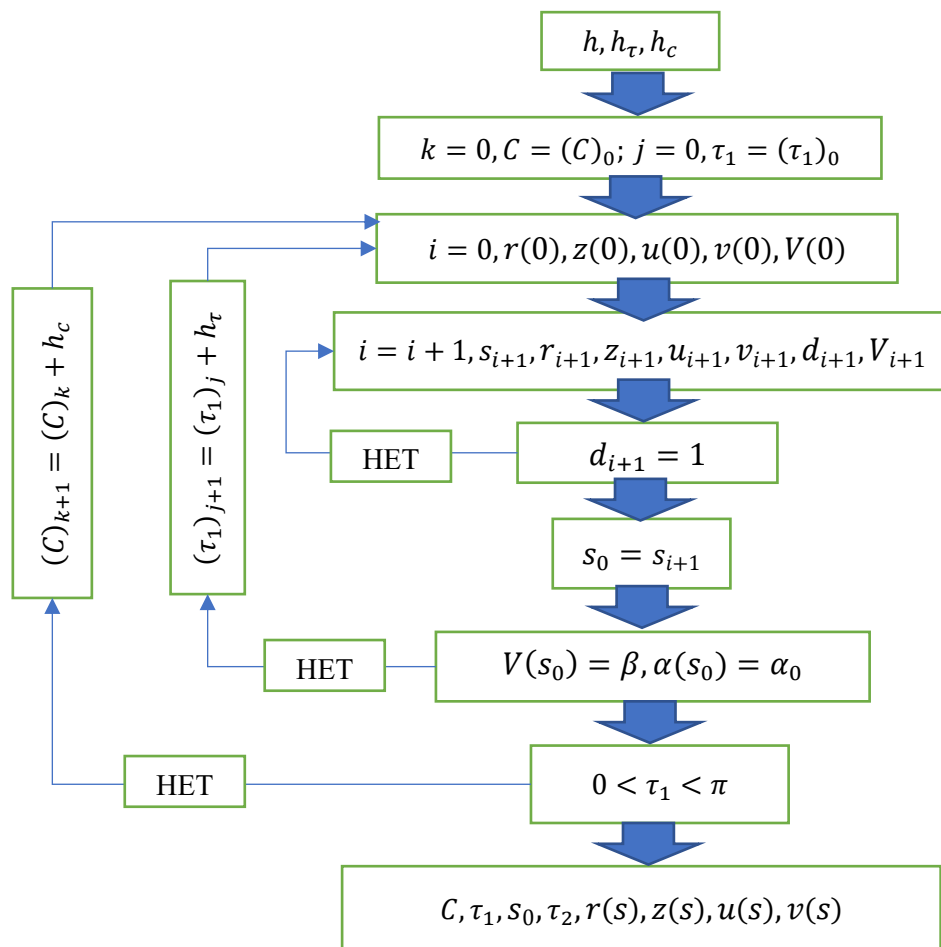


Рис. 2.9. Структурная схема решения системы дифференциальных уравнений.

Основные трудности решения задачи в основном заключаются в определении константы C и положения ЛТК на внутренней стенке сосуда τ_1 , которые зависят от угла смачивания α_0 , объёма жидкости β , числа Бонда B_0 и геометрии сосуда r_1 при заданной системе координат. На рис. 2.10–2.13 приведены значения C и τ_1 для практически важных ситуаций. С увеличением объёма жидкости β константа C

увеличивается за исключением большого числа Бонда B_0 , а значение τ_1 уменьшается. При заданном объёме жидкости повышение угла смачивания α_0 и радиуса внутренней стенки сосуда r_1 уменьшает значение константы C . Эти графики дают рекомендации на выбор начальных значений C и τ_1 при решении задачи о положении жидкости в торе.

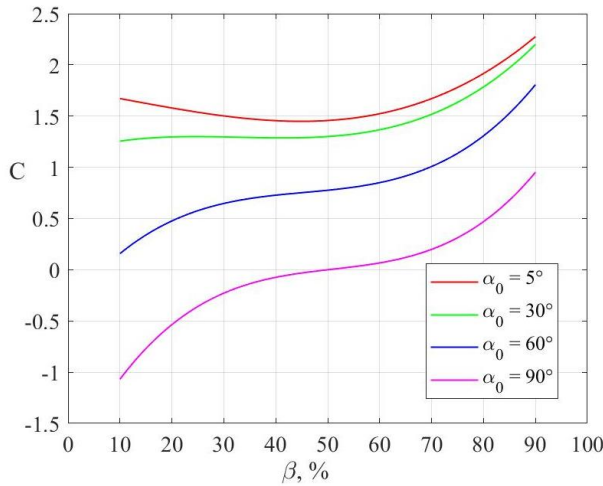


Рис. 2.10. Константа C в зависимости от угла смачивания α_0 и объёма жидкости β при $B_0=1, r_1=2$.

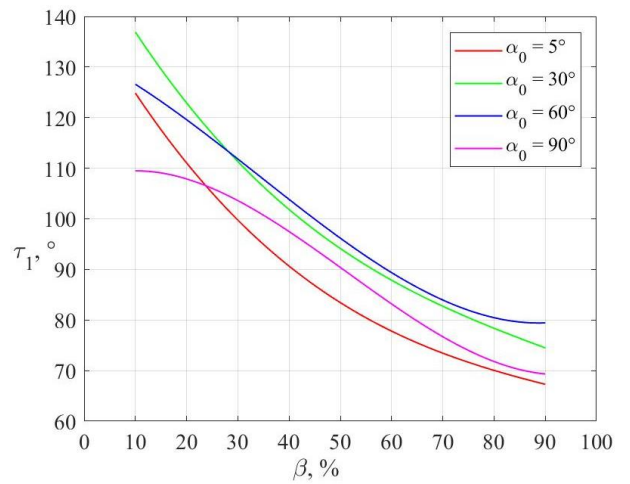


Рис. 2.11. Положение линии контакта τ_1 в зависимости от угла смачивания α_0 и объёма жидкости β при $B_0=1, r_1=2$.

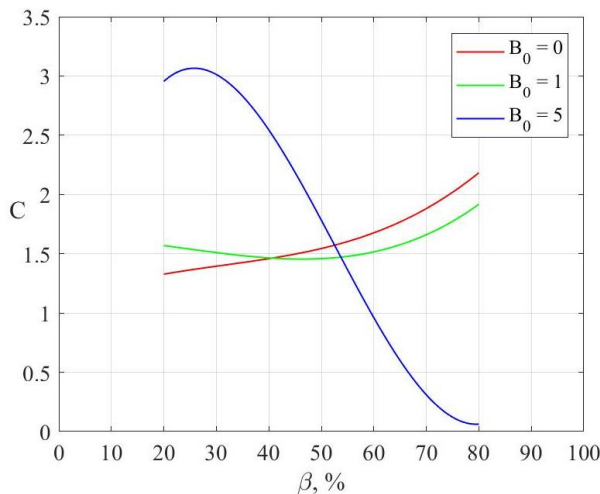


Рис. 2.12. Значение C в зависимости от числа Бонда B_0 и объёма жидкости β при $\alpha_0=5^\circ, r_1=2$.

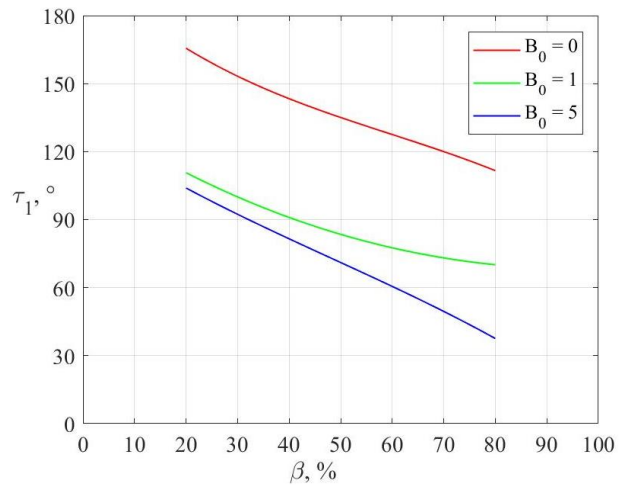


Рис. 2.13. Положение линии контакта τ_1 в зависимости от числа Бонда B_0 и объёма жидкости β при $\alpha_0=5^\circ, r_1=2$.

Линии меридиана поверхности жидкости Γ в зависимости от интенсивности поля массовых сил показаны на рисунках 2.14–2.15. При уменьшении числа Бонда B_0 свободная поверхность более искривлена, и жидкость сосредоточена около внешней стенки тороидального сосуда. Данное явление можно объяснить теоретически: сила поверхностного натяжения занимает доминирующее место в условиях, близких к невесомости, и жидкость стремится занимать положение минимальной потенциальной энергии, т.е. в сторону меньшего радиуса кривизны.

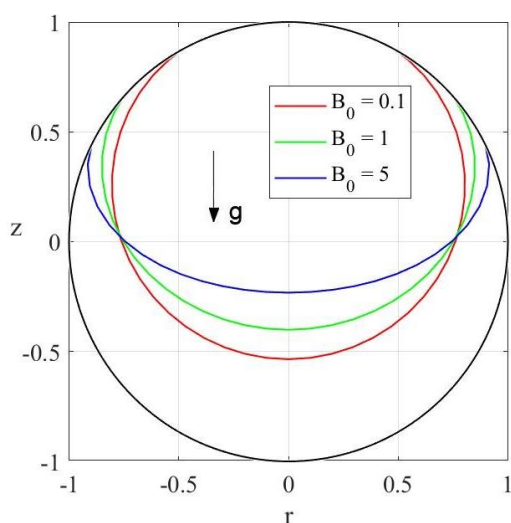


Рис. 2.14. Линии меридиана равновесной свободной поверхности жидкости в сферическом сосуде при $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$.

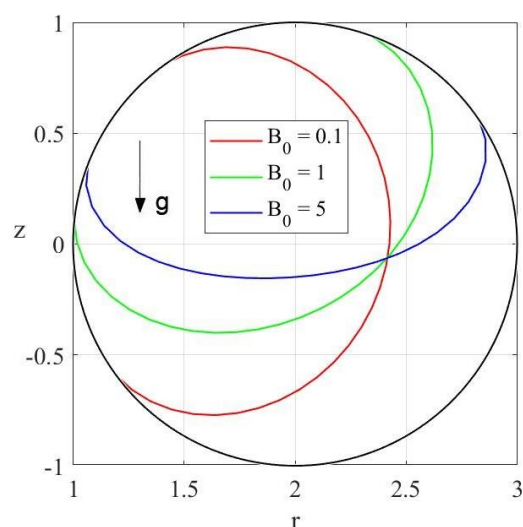


Рис. 2.15. Линии меридиана равновесной свободной поверхности жидкости в правом сечении тора при $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$, $r_1=2$.

Подобное явление наблюдалось в экспериментах в башне невесомости при объёме жидкости до 20% [107]. Но с увеличением размера сосуда изменение ориентации равновесной свободной поверхности проявлялось в большем диапазоне объёма жидкости.

Линии меридиана равновесной свободной жидкости в условиях микрогравитации в зависимости от радиуса осевой окружности r_1 показаны на рис. 2.16. С повышением радиуса r_1 положение ЛТК на внутренней стенке сосуда τ_1

изменяется в сторону увеличения площади смачиваемой поверхности стенки сосуда, а положение ЛТК на внешней стенке сосуда τ_2 мало изменяется.

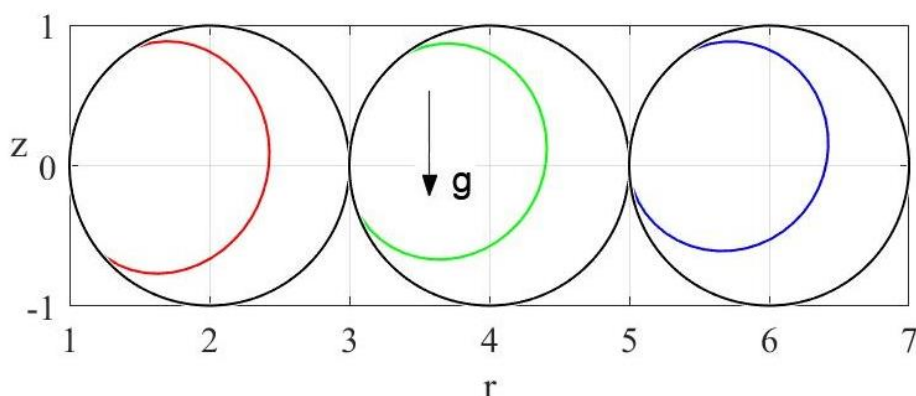


Рис. 2.16. Формы равновесной свободной поверхности в правом сечении тора в зависимости от радиуса $r_1=2, 4, 6$ при условиях $\alpha_0 = 5^\circ$, $\beta = 50\%$, $B_0 = 0.1$.

На рис. 2.17 представлены формы равновесной свободной поверхности в тороидальном сосуде в зависимости от угла смачивания α_0 . Заметим, что с уменьшением α_0 равновесная свободная поверхность жидкости более искривлена, т.е. общая длина дуги s_0 линии меридиана поверхности увеличивается, и ЛТК изменяются в сторону увеличения смачиваемой поверхности стенки сосуда.

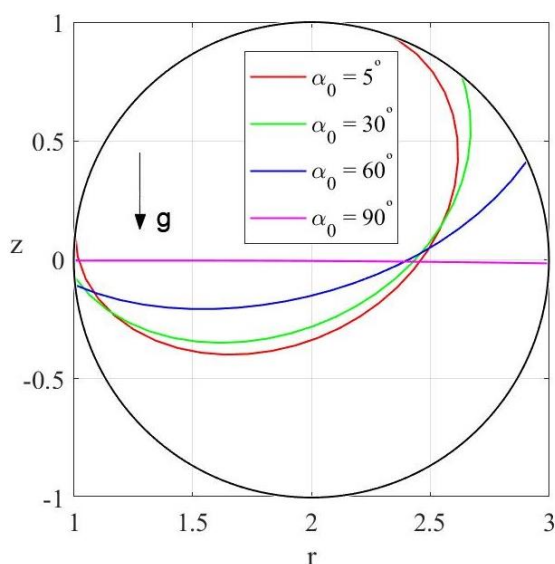


Рис. 2.17. Формы равновесной свободной поверхности в правом сечении тора в зависимости от угла смачивания α_0 при условиях $r_1=2$, $\beta = 50\%$, $B_0 = 1$.

Эволюция формы свободной поверхности в тороидальном сосуде в зависимости от объёма жидкости β показана на рис. 2.18–2.19. Эта одна из

актуальных задач гидромеханики невесомости [1]. Можно делать вывод, что существует объём жидкости, соответствующий $\tau_1 = \pi - \alpha_0$, при котором свободная поверхность плоская не зависимо от числа Бонда B_0 .

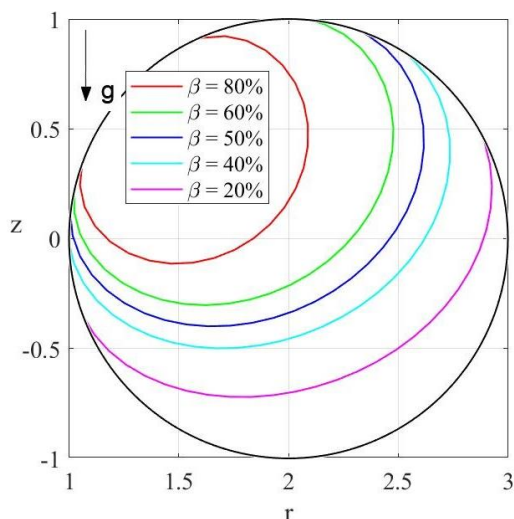


Рис. 2.18. Положения равновесия жидкости в правом сечении тора в зависимости от объёма жидкости β при $\alpha_0 = 5^\circ$, $B_0=1$, $r_1=2$.

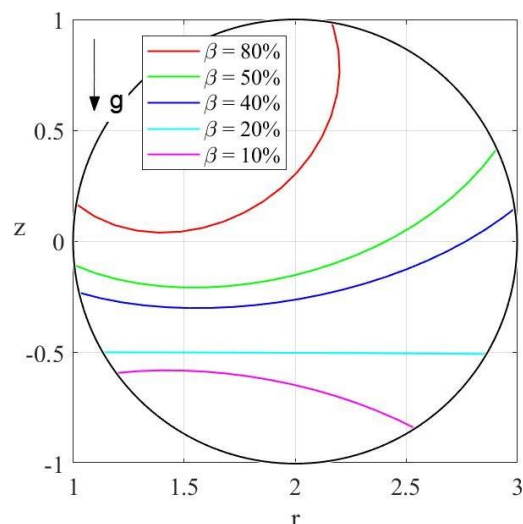


Рис. 2.19. Положения равновесия жидкости в правом сечении тора в зависимости от объёма жидкости β при $\alpha_0 = 60^\circ$, $B_0=1$, $r_1=2$.

2.4. Выводы по главе 2

Во второй главе рассмотрена осесимметричная задача об определении формы и положения равновесия капиллярной жидкости в двухсвязных полостях. Основное внимание в данной главе уделено разработке алгоритмов отыскания форм равновесной свободной поверхности в коаксиально-цилиндрических и тороидальных сосудах. Полученные результаты обобщены в следующем:

- Выведены условия равновесия гидромеханической системы жидкость–газ–твёрдая стенка сосуда в условиях микрогравитации. Полученная вариация потенциальной энергии δU будет необходима для дальнейшего определения потенциальной энергии движущейся жидкости;
- В отличие от форм равновесной свободной поверхности в цилиндрических сосудах, в тороидальных сосудах одному и тому же значению r может быть

соответствуют два значения z , т.е. функция $z(r)$ не однозначна. Для решения данной проблемы предлагается длина дуги s , которая описывает форму равновесной свободной поверхности;

- Если свободная поверхность не пересекает дна бака, форма равновесной свободной поверхности жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах не зависит от объёма жидкости;
- Объём жидкости оказывает существенное влияние на форму и положение равновесия капиллярной жидкости в тороидальных сосудах;
- При уменьшении числа Бонда B_0 равновесная свободная поверхность становится более искривленной и в условиях полной невесомости жидкость сосредоточена около внешней стенки тороидального сосуда. Данное явление можно объяснять теоретически: сила поверхностного натяжения занимает доминирующее место в условиях, близких к невесомости, и жидкость стремится занимать положение минимальной потенциальной энергии, т.е. в сторону меньшего радиуса кривизны. Данное явление экспериментально наблюдалось в экспериментах в башне невесомости [107].

ГЛАВА 3. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В УСЛОВИЯХ МИКРОГРАВИТАЦИИ

Данная глава посвящена исследованию нормальных колебаний идеальной несжимаемой жидкости ограниченного объёма в условиях микрогравитации. Из полученных результатов главы 2 видно, что капиллярный эффект приводит к искривлению равновесной свободной поверхности, представляющей собой невозмущённую границу области жидкости.

При исследовании задачи колебаний жидкости в условиях, близких к невесомости, необходимо учитывать влияние поверхностного натяжения, которое проявляется в граничных условиях на свободной поверхности и ЛТК жидкости. В выражении динамического условия на свободной поверхности содержатся слагаемые, связанные с кривизной свободной поверхности. В условиях микрогравитации граничное условие на ЛТК играет очень важную роль при определении динамических характеристик движения жидкости и в современной литературе уделяют огромное внимание моделированию поведения жидкости вблизи ЛТК. Так как жидкость в данной главе считается идеальной, предположим, что в процессе движения жидкости на стенке сосуда угол смачивания остаётся постоянным.

В данной главе для исследования колебаний жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах применяется метод Ритца. На примере тороидальных сосудов разработан алгоритм на основе МКЭ исследования малых колебаний жидкости с учётом поверхностного натяжения. Разработанная методика определения динамических характеристик колебаний жидкости с учётом капиллярного эффекта пригодна для любого осесимметричного сосуда.

3.1. Постановка задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости

Будем считать, что сосуд неподвижен, равновесная свободная поверхность жидкости ($z = z_0(s)$, $r = r_0(s)$) уже определена, и воспользуемся обозначениями в предыдущей главе для описания положения равновесия жидкости (рис. 3.1). Внешнее силовое поле считаем потенциальным и ускорение \mathbf{g} действует

параллельно продольной оси симметрии сосуда. Использована цилиндрическая система координат $Or\theta z$ и введена длина дуги s для описания формы линии меридиана равновесной свободной поверхности.

Так как жидкость идеальная и несжимаемая, её движение будем задавать полем скоростей $\mathbf{u} = \mathbf{u}(r, \theta, z, t)$ её частиц. И можно ввести потенциал скоростей $\varphi(r, \theta, z, t)$ по формуле $\mathbf{u} = \nabla\varphi$.

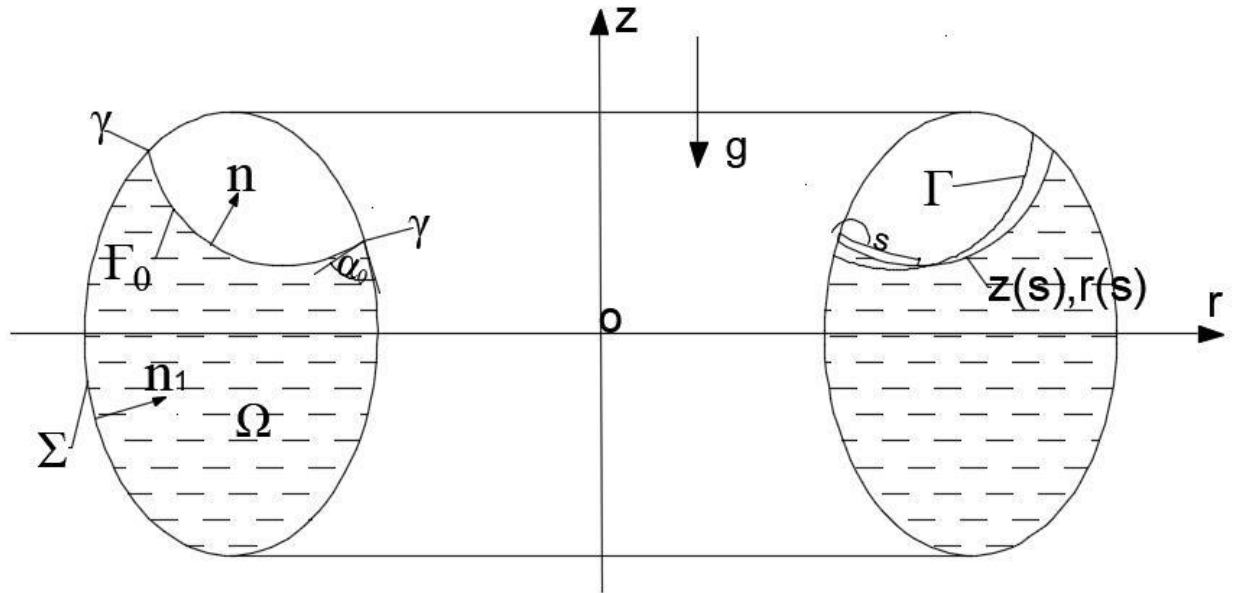


Рис. 3.1. Обозначения параметров жидкости и системы координаты:

γ – линия трёхфазного контакта; α_0 – угол смачивания жидкости; Γ_0 и Γ – равновесная и возмущённая свободная поверхность жидкости соответственно; Σ – смачиваемая поверхность стенки сосуда; Ω – область, которую занимает жидкость; \mathbf{n} и \mathbf{n}_1 – нормали свободной и смачиваемой поверхностей соответственно; s – длина дуги линии меридиана свободной поверхности, отсчитываемая от внутренней стенки; $z_0(s)$ и $r_0(s)$ – параметрические уравнения линии меридиана равновесной свободной поверхности жидкости.

Движение жидкости в сосуде потенциальное и удовлетворяет:

- уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (3.1)$$

- условию непротекания на смачиваемой поверхности стенки сосуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma. \quad (3.2)$$

Форма возмущённой свободной поверхности имеет вид: $F(r, \theta, z, t) = 0$ и допустим, что при малых колебаниях частицы жидкости остаются на свободной поверхности. Полная производная по времени функции F выглядит следующим:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla\varphi \cdot \nabla F = 0. \quad (3.3)$$

В данной задаче уравнением движения служит линеаризованное уравнение Эйлера, из которого вытекает интеграл Коши-Лагранжа:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p - p_{s0}}{\rho} + gz = c(t),$$

где $c(t)$ – произвольная функция времени и её можно считать равной нулю без ограничения общности решения для потенциала скоростей, $p = p_s + p_d$ – полное давление частицы жидкости (p_s – статическое слагаемое давления, p_d – динамическое слагаемое давления), p_{s0} – статическое давление жидкости при $z = 0$, $z = z_s + z_d$ – положение частицы жидкости (z_s – положение частицы жидкости в состоянии равновесия, z_d – проекция вдоль оси z отклонения частицы жидкости от положения равновесия).

Из уравнения Эйлера для покоящейся жидкости определим распределение давления жидкости $p_{s0} - p_s = \rho g z_s$ и запишем интеграл Коши-Лагранжа после исключения статических компонент переменных:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p_d}{\rho} + g z_d = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (3.4)$$

Предположим, что угол смачивания в процессе движения жидкости остаётся постоянным и также имеем условие Дюпре-Юнга: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 = \cos(\alpha_0)$ и $\delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1) = 0$.

Чтобы понимать капиллярную специфику жидкости, проявляющуюся при отсутствии значительных массовых сил, в дальнейшем выведем динамическое условие на свободной поверхности жидкости и граничное условие на ЛТК на основе вариационного принципа Гамильтона–Остроградского. Получающиеся формулы будут полезны для дальнейшей вариационной постановки задачи о малых колебаниях капиллярной жидкости при применении МКЭ.

В параграфе 2.1 получено выражение потенциальной энергии механической системы жидкость–газ–твёрдая стенка с учётом поверхностного натяжения U и её вариации δU . Перепишем первую вариацию потенциальной энергии системы:

$$\delta U = \int_{\Gamma_0} (\rho g z + c - \sigma 2H) h d\Gamma + \sigma \int_{\gamma} [\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1 - \cos \alpha_0] \frac{h}{\sin \alpha_0} d\gamma = 0, \quad (3.5)$$

где $H = (k_1 + k_2)/2$ – средняя кривизна равновесной свободной поверхности Γ_0 , а k_1 и k_2 – главные кривизны равновесной свободной поверхности, $h = \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{r}$ – малая вариация жидкости вдоль нормали свободной поверхности, а $\mathbf{e}_1 \cdot \delta \mathbf{r} = h/\sin \alpha_0$, \mathbf{e}_1 – внешняя нормаль ЛТК в касательной плоскости смачиваемой поверхности стенки.

Из принципа стационарности потенциальной энергии следует, что механическая система находится в состоянии равновесия тогда, когда потенциальная энергия имеет минимальное значение, т.е. $\delta U = 0$. В дальнейшем отсчитываем потенциальную энергию движущейся жидкости от состояния равновесия и проводим вариацию выражения δU :

$$\delta \Pi = \delta^2 U = \int_{\Gamma_0} \left\{ \rho g h r_{0s} - \sigma \left[(k_1^2 + k_2^2) h + \Delta_{\Gamma} h \right] \right\} \delta h d\Gamma + \sigma \int_{\gamma} \left(\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h \right) \delta h d\gamma, \quad (3.6)$$

где r_{0s} – направляющий косинус внешней нормали свободной поверхности с осью z , здесь нижний индекс s означает первую производную функции r_0 по длине дуги

s , $\Delta_{\Gamma} = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{r_{0s}}{r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа–Бельтрами на свободной поверхности,

\mathbf{e} – внешняя нормаль ЛТК в касательной плоскости свободной поверхности, χ – коэффициент описания формы свободной поверхности на ЛТК [2, 38]:

$$\chi = (k_1 \cos \alpha_0 - k_1^{\Sigma}) / \sin \alpha_0 \text{ на } \gamma, \quad (3.7)$$

где k_1^{Σ} – главная кривизна сечения твердой стенки сосуда на ЛТК.

Получим выражение потенциальной энергии из её вариации:

$$\Pi = \frac{1}{2} \rho g \int_{\Gamma_0} h^2 r_{0s} d\Gamma + \frac{1}{2} \sigma \int_{\Gamma_0} \left[\nabla_{\Gamma} h \nabla_{\Gamma} h - (k_1^2 + k_2^2) h^2 \right] d\Gamma + \frac{1}{2} \sigma \int_{\gamma} \chi h^2 d\gamma. \quad (3.8)$$

Запишем потенциальную энергию жидкости в виде: $\Pi = \Pi_g + \Pi_{\sigma} + \Pi_{\gamma}$,

$$\Pi_g = \frac{1}{2} \rho g \int_{\Gamma_0} h^2 r_{0s} d\Gamma, \quad \Pi_{\sigma} = \frac{1}{2} \sigma \int_{\Gamma_0} \left[\nabla_{\Gamma} h \nabla_{\Gamma} h - (k_1^2 + k_2^2) h^2 \right] d\Gamma, \quad \Pi_{\gamma} = \frac{1}{2} \sigma \int_{\gamma} \chi h^2 d\gamma, \quad (3.9)$$

где Π_g – потенциальная энергия, характеризующая работу массовых сил, Π_σ – потенциальная энергия, характеризующая работу силы поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости, Π_γ – потенциальная энергия, характеризующая наложенное условие о сохранении угла смачивания на ЛТК:

Запишем выражение кинетической энергии жидкости и её вариации:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 d\Omega, \quad \delta T = \rho \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \delta \nabla \varphi d\Omega = \rho \int_{\Gamma_0} \varphi \delta \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma = \rho \int_{\Gamma_0} \varphi \frac{\partial \delta h}{\partial t} d\Gamma. \quad (3.10)$$

Согласно вариационному принципу Гамильтона – Остроградского, на действительном движении консервативной системы должно быть [35]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = 0. \quad (3.11)$$

Причём вариация δh должна удовлетворять условиям изохронности:

$$\delta h_{t=t_1} = \delta h_{t=t_2} = 0. \quad (3.12)$$

Подставив вариацию кинетической энергии в формулу Гамильтона – Остроградского (3.11), получим следующее соотношение:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\rho \int_{\Gamma_0} \varphi \frac{\partial \delta h}{\partial t} d\Gamma - \delta \Pi \right) dt = 0. \quad (3.13)$$

Интегрируя первое слагаемое по частям по переменной t в левой части уравнения (3.13) и учитывая условия изохронности для δh (3.12), получим следующее вариационное соотношение:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Gamma_0} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + ghr_{0s} - \frac{\sigma}{\rho} [(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_{\Gamma} h] \right] \delta h d\Gamma + \frac{\sigma}{\rho} \int_{\gamma} \left(\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h \right) \delta h d\gamma \right\} dt = 0. \quad (3.14)$$

Из вариационной формулировки (3.14) следуют динамическое условие на свободной поверхности жидкости и граничное условие на ЛТК:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + ghr_{0s} - \frac{\sigma}{\rho} [(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_{\Gamma} h] = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0 \text{ на } \gamma. \quad (3.16)$$

3.2. Малые колебания капиллярной жидкости в коаксиальном цилиндре

3.2.1. Вывод уравнений и граничных условий

Ускорение g действует параллельно оси коаксиального цилиндра и использована цилиндрическая система координат $Or\theta z$ (рис. 3.2). А линия меридиана равновесной свободной поверхности $z_0(r)$ определена в параграфе 2.2.

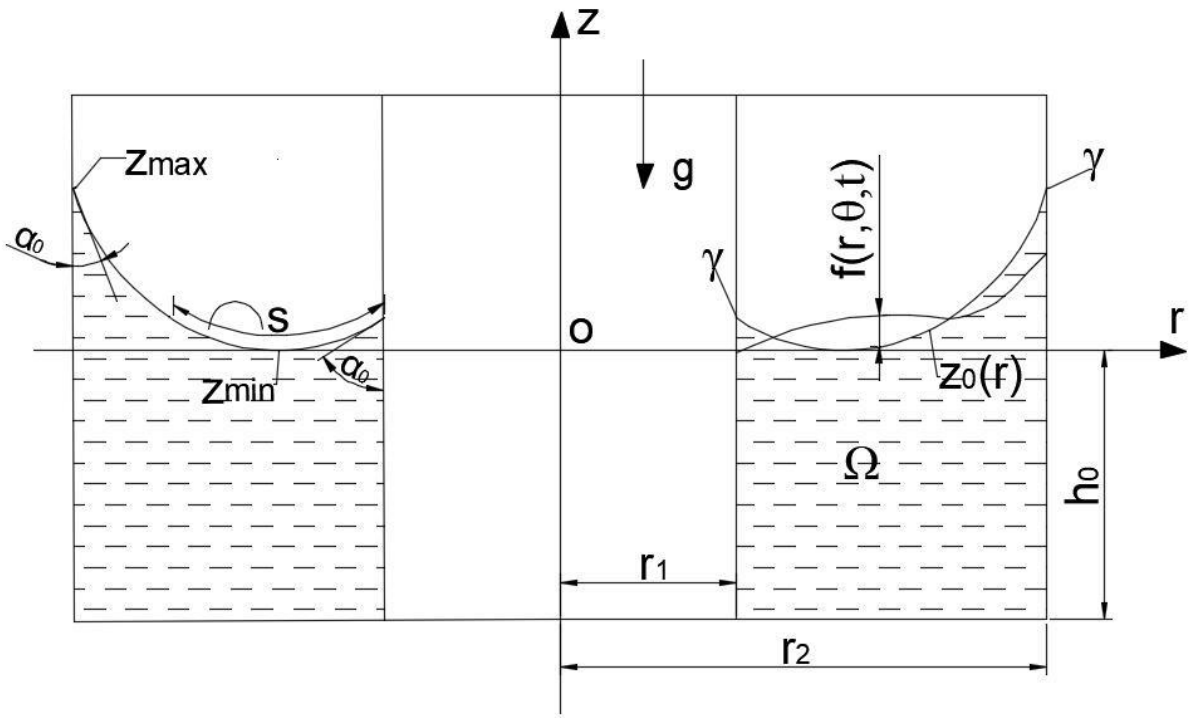


Рис. 3.2. Обозначения параметров жидкости и системы координат:

r_1 и r_2 – радиусы внутренней и внешней стенок сосуда; z_{min} и z_{max} – наименьшая и наибольшая высоты свободной поверхности; $z_0(r)$ – функция линии меридиана равновесной свободной поверхности; Ω – область, которую занимает жидкость; γ – линия трёхфазного контакта; α_0 – угол смачивания жидкости на стенке сосуда; h_0 – глубина жидкости; $f(r, \theta, t)$ – отклонение возмущённой свободной поверхности от равновесной.

Жидкость идеальная и несжимаемая, её движение малое и потенциальное. Движение жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах удовлетворяет:

- уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (3.17)$$

- условию непротекания на смоченной поверхности сосуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_1 \text{ и } r = r_2, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_0. \quad (3.18)$$

Вывод кинематического условия на свободной поверхности жидкости.

Допустим, что выражение возмущённой свободной поверхности $F(r, \theta, z, t)$ имеет следующую формулу:

$$F(r, \theta, z, t) = z_0(r) + f(r, \theta, t) - z = 0. \quad (3.19)$$

В процессе движения жидкости частицы жидкости остаются на свободной поверхности. Полная производная по времени функции F выглядит следующим:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla \varphi \cdot \nabla F = 0,$$

где локальная производная $\partial F / \partial t$, градиент ∇F и градиент потенциала скоростей $\nabla \varphi$ имеют следующие выражения:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \mathbf{e}_z + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta, \quad \nabla F = -\mathbf{e}_z + \left(\frac{dz_0}{dr} + \frac{\partial f}{\partial r} \right) \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (3.20)$$

Потенциал скоростей жидкости φ и поле смещения свободной поверхности f , и их производные по координатам и времени считаем малыми величинами первого порядка. Подставив эти выражения в полную производную функции F и пренебрегая малыми величинами высшего порядка, получим линеаризованное кинематическое условие на свободной поверхности:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dz_0}{dr} = \frac{\partial f}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0. \quad (3.21)$$

Из параграфа 2.2 известно, что при малых числах Бонда B_0 равновесная свободная поверхность сильно искривлена и слагаемое dz_0 / dr имеет большое значение, в этих случаях нужно учитывать влияние искривления поверхности в кинематическом условии движения жидкости. А при больших числах Бонда равновесная свободная поверхность близко к плоской и в этих случаях можно пренебрегаться слагаемыми $\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dz_0}{dr}$. При угле смачивания α_0 , равном 90° , равновесная свободная поверхность жидкости имеет плоскую форму, т.е. $dz_0 / dr = 0$.

При этом внешняя нормаль свободной поверхности \mathbf{n} и единичный орт \mathbf{e}_z оси z совпадают. Тогда кинематическое условие записано в виде: $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t}$.

Вывод динамического условия на свободной поверхности жидкости. В данной задаче отклонение частиц жидкости вдоль оси z имеет вид $z_d = f(r, \theta, t)$ и динамическая составляющая давления p_d жидкости на свободной поверхности определена из условия Лапласа $p_0 - p = 2\sigma H$.

Запишем общую формулировку для определения кривизны поверхности [77]:

$$2H = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla F}{|\nabla F|} \right). \quad (3.22)$$

Функция равновесной свободной поверхности F_s имеет вид:

$$F_s = z_0(r) - z = 0. \quad (3.23)$$

Запишем градиент и модуль градиента функции F_s :

$$\nabla F_s = -\mathbf{e}_z + z_{0r} \mathbf{e}_r, \quad |\nabla F_s| = (1 + z_{0r}^2)^{1/2}. \quad (3.24)$$

Подставив выражения ∇F_s и $|\nabla F_s|$ в (3.22), определим кривизну равновесной свободной поверхности:

$$2H_s = \nabla \cdot \left(\frac{\nabla F_s}{|\nabla F_s|} \right) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{r z_{0r}}{(1 + z_{0r}^2)^{1/2}} \right]. \quad (3.25)$$

Из (3.20) следует модуль градиента возмущённой свободной поверхности:

$$|\nabla F| = (1 + z_{0r}^2 + 2z_{0r} f_r)^{1/2}. \quad (3.26)$$

Подставив ∇F и $|\nabla F|$ в (3.22), получим кривизну возмущённой поверхности:

$$2H = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r z_{0r}}{(1 + z_{0r}^2)^{1/2}} \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r f_r}{(1 + z_{0r}^2)^{3/2}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{f_\theta}{(1 + z_{0r}^2)^{1/2}} \right] = 2H_s + 2H_d, \quad (3.27)$$

где $2H_d$ – изменение кривизны при малом возмущении свободной поверхности, определяющее выражением:

$$2H_d = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r f_r}{(1 + z_{0r}^2)^{3/2}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{f_\theta}{(1 + z_{0r}^2)^{1/2}} \right]. \quad (3.28)$$

Из условия Лапласа следует перепад давления на равновесной и возмущенной свободной поверхности:

$$p_0 - p_s = 2\sigma H_s, \quad p_0 - (p_s + p_d) = 2\sigma(H_s + H_d). \quad (3.29)$$

Запишем динамическое давление, возникающее за счёт изменения кривизны свободной поверхности:

$$p_d = -2\sigma H_d = -\sigma \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{rf_r}{(1+z_{0r}^2)^{3/2}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{f_\theta}{(1+z_{0r}^2)^{1/2}} \right] \right\}. \quad (3.30)$$

Подставив выражения p_d и z_d в интеграл Коши – Лагранжа (3.4), имеем динамическое условие на свободной поверхности жидкости:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + gf - \frac{\sigma}{\rho} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[\frac{rf_r}{(1+z_{0r}^2)^{3/2}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{f_\theta}{(1+z_{0r}^2)^{1/2}} \right] \right\} = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (3.31)$$

Вывод граничного условия на линии трёхфазного контакта. Если жидкость идеальная и стенка сосуда гладкая, при малых колебаниях жидкости угол смачивания считается постоянным. Из данного обоснования поведения жидкости следует граничное условие на линии трёхфазного контакта.

Определим угол, образованный касательной линией поверхности F и продольной осью z [73]:

$$\alpha = \cot^{-1} \left\{ \frac{\partial F}{\partial r} / \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.32)$$

Тогда статический угол смачивания α_s и динамический угол смачивания α_d имеют следующие выражения:

$$\alpha_s = \cot^{-1} \left(\frac{dz_0}{dr} \right), \quad \alpha_d = \cot^{-1} \left\{ \left(\frac{dz_0}{dr} + \frac{\partial f}{\partial r} \right) / \left[1 + \left(\frac{\partial f}{r \partial \theta} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.33)$$

Уравновешивая α_s и α_d , и пренебрегаясь слагаемыми высшего порядка, получим граничное условие на ЛТК:

$$\partial f / \partial r = 0, \text{ при } r = r_1 \text{ и } r = r_2. \quad (3.34)$$

В данной работе радиус внешней стенки коаксиального цилиндра r_2 выбран как характерный размер задачи. Введены также характерные значения для времени и потенциала через определяющие параметры задачи:

$$t^* = \sqrt{\rho r_2^3 / \sigma}, \varphi^* = r_2^2 / t^*.$$

Используя преобразования $x = r_2 x'$, $t = t^* t'$ и $\varphi = \varphi^* \varphi'$, получим безразмерную формулировку задачи колебаний жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах с учётом сил поверхностного натяжения. В дальнейшем опускаем знак « ' » над обозначениями и присутствие безразмерного числа означает безразмерную формулировку задачи:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \text{ в } \Omega, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \text{ при } r = r_1 \text{ и } r = 1, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0 \text{ при } z = -h_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dz_0}{dr} = \frac{\partial f}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B_0 f - \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{r f_r}{(1 + z_{0r}^2)^{3/2}} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{f_\theta}{(1 + z_{0r}^2)^{1/2}} \right] \right\} &= 0 \text{ на } \Gamma_0, \end{aligned} \quad (3.35)$$

Заметим, что слагаемые, связанные с капиллярным эффектом, проявляются в граничных условиях на свободной поверхности и на линии трёхфазного контакта.

3.2.2. Малые колебания жидкости при плоской свободной поверхности

Из результатов параграфа 2.2 следует, что при угле смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$ свободная поверхность жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах имеет плоскую форму независимо от числа Бонда. В этом случае рассматриваемая задача допускает разделение переменных, приводящее к эффективному построению нормальных колебаний жидкости. Получающиеся результаты интересны не только сами по себе, а также демонстрируют общие свойства частот и форм колебаний. При этом они могут быть контрольными для проверки правильности общих приближённых методов, как будет показано в следующем пункте.

В этом случае формулировка задачи (3.35) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} &= 0 \text{ в } \Omega, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \text{ и } \frac{\partial f}{\partial r} = 0 &\text{ при } r = r_1 \text{ и } r = 1, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \text{ при } z = -h_0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial t} &\text{ на } \Gamma_0, \\
\frac{\partial \varphi}{\partial t} + B_0 f - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} \right) &= 0 \text{ на } \Gamma_0.
\end{aligned} \tag{3.36}$$

При решении эволюционной задачи следует задать начальные условия, например, поле смещений и скорость свободной поверхности в начальный момент времени. В данной задаче только исследованы собственные колебания, т.е. спектральные задачи. Решим данную задачу методом разделения переменных и представим потенциал скоростей $\varphi(r, \theta, z, t)$ и поле смещений $f(r, \theta, t)$ в виде произведений функций:

$$\begin{aligned}
\varphi(r, \theta, z, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn}(r) H_m(\theta) Z_{mn}(z) \cos \omega_{mn} t, \\
f(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} R_{mn}(r) H_m(\theta) \sin \omega_{mn} t,
\end{aligned}$$

где $\omega_{mn} = \omega_{mn}^p (\rho r_2^3 / \sigma)^{1/2}$, знак « p » означает размерную переменную.

В силу периодичности функций $H_m(\theta)$, характеризующих волны в окружном направлении сосуда, число m должно быть целым:

$$m = 0, H_m(\theta) = 1; m = 1, 2, \dots, H_m(\theta) = \begin{cases} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{cases}.$$

В инженерной практике часто исследованы асимметричные моды колебаний, т.е. $m = 1$. Данный случай приводит к переменному результирующему давлению в поперечном направлении сосуда и вызывает интерес при анализе стабилизации летательных аппаратов. При этом большое внимание уделяется также колебаниям, отвечающим $m = 0$, в которых переменна вертикальная составляющая давления.

Функции $R_{mn}(r)$ являются линейными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами – уравнениями Бесселя:

$$R_{mn}(r) = J_m(\zeta_{mn}r) - \frac{J'_m(\zeta_{mn})}{Y'_m(\zeta_{mn})} Y_m(\zeta_{mn}r).$$

В этом выражении J_m , Y_m и J'_m , Y'_m – функции Бесселя 1-го и 2-го рода m -го порядка и их первые производные соответственно. ζ_{mn} для разных соотношений r_1/r_2 определены из условия непротекания:

$$J'_m(\zeta_{mn})Y'_m(\zeta_{mn}r_1/r_2) - J'_m(\zeta_{mn}r_1/r_2)Y'_m(\zeta_{mn}) = 0.$$

Таблица 3.1. Первые шесть значений ζ_{mn} при антисимметричной моде $m = 1$

r_1/r_2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
ζ_{11}	1.841	1.804	1.705	1.582	1.462	1.355	1.262	1.182	1.113
ζ_{12}	5.331	5.137	4.961	5.137	5.659	6.565	8.041	10.592	15.778
ζ_{13}	8.536	8.199	8.433	9.308	10.683	12.706	15.801	21.004	31.451
ζ_{14}	11.706	11.359	12.165	13.684	15.848	18.943	23.624	31.456	47.147
ζ_{15}	14.864	14.634	15.993	18.116	21.049	25.203	31.462	41.918	62.849
ζ_{16}	18.016	17.986	19.862	22.571	26.264	31.472	39.307	52.384	78.554

Таблица 3.2. Первые шесть значений ζ_{mn} при осесимметричной моде $m = 0$

r_1/r_2	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
ζ_{01}	3.832	3.941	4.236	4.706	5.391	6.393	7.930	10.522	15.738
ζ_{02}	7.016	7.331	8.055	9.104	10.558	12.625	15.747	20.969	31.431
ζ_{03}	10.174	10.748	11.927	13.553	15.767	18.889	23.588	31.433	47.134
ζ_{04}	13.324	14.189	15.821	18.020	20.988	25.162	31.436	41.901	62.839
ζ_{05}	16.471	17.643	19.727	22.495	26.216	31.440	39.286	52.370	78.546
ζ_{06}	19.616	21.107	23.640	26.974	31.446	37.719	47.137	62.840	94.253

Функции $Z_{mn}(z)$ выражаются через гиперболические функции:

$$Z_{mn}(z) = \cosh[\zeta_{mn}(z + h_0)] / \cosh(\zeta_{mn}h_0).$$

Исключение f в динамическом условии на свободной поверхности с помощью кинематического соотношения приводит к решению задачи на определение собственных частот:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + B_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial z^3} = 0.$$

Подставив выражение потенциала скоростей жидкости φ в данное условие, получим аналитическую формулу квадратов собственных частот, которая согласуется с результатами Н.Д. Копачевского [27]:

$$\omega_{mn}^2 = (B_0 \zeta_{mn} + \zeta_{mn}^3) \tanh(\zeta_{mn} h_0).$$

При малых глубинах h_0 справедлива приближённая формула:

$$\omega_{mn}^2 = (B_0 \zeta_{mn}^2 + \zeta_{mn}^4) h_0,$$

т.е. квадрат собственных частот линейно зависит от глубины.

Для больших глубин h_0 :

$$\omega_{mn}^2 = B_0 \zeta_{mn} + \zeta_{mn}^3,$$

т.е. собственные частоты не зависят от глубины и переходят в частоты для бесконечно глубокой жидкости. Это объясняется тем, что колебания происходят в приповерхностном слое и экспоненциально затухают в глубину жидкости.

3.2.3. Малые колебания жидкости при произвольной форме свободной поверхности

В работе только исследованы асимметричные моды колебаний, т.е. $m=1$. Потенциал скоростей жидкости $\varphi(r, \theta, z, t)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и условию непротекания, поле смещений $f(r, \theta, t)$ выполняет граничное условие на ЛТК. Представим решения задачи в виде ряда функций Бесселя:

$$\varphi(r, z, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r, z) \cos \theta \cos \omega_n t, \quad f(r, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) \cos \theta \cos \omega_n t$$

$$\text{где } \varphi_n(r, z) = p_{n1} A(\zeta_1 r) B(\zeta_1 z) + \dots + p_{nN} A(\zeta_N r) B(\zeta_N z) = \sum_{j=1}^N p_{nj} A(\zeta_j r) B(\zeta_j z),$$

$$f_n(r) = q_{n1} A(\zeta_1 r) + q_{n2} A(\zeta_2 r) + \dots + q_{nN} A(\zeta_N r) = \sum_{j=1}^N q_{nj} A(\zeta_j r)$$

Функции $A(\zeta_j r)$ и $B(\zeta_j z)$ выглядят следующими:

$$A(\zeta_j r) = J_1(\zeta_j r) - \frac{J_1'(\zeta_j)}{Y_1'(\zeta_j)} Y_1(\zeta_j r), \quad B(\zeta_j z) = \frac{\cosh[\zeta_j(z + h_0)]}{\cosh(\zeta_j h_0)}, \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

В этих функциях $J_1(\zeta_j r)$, $Y_1(\zeta_j r)$ и $J_1'(\zeta_j)$, $Y_1'(\zeta_j)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го рода первого порядка и их первые производные соответственно. И числа ζ_n для разных соотношений радиусов r_1/r_2 приведены в таблице 3.1.

Подставим выражения потенциала скоростей и поля смещений в кинематическое и динамическое условия (3.35):

$$\begin{aligned} \omega_n \sum_{j=1}^N q_{nj} A(\zeta_j r) &= \sum_{j=1}^N p_{nj} C(\zeta_j r), \\ B_0 \sum_{j=1}^N q_{nj} A(\zeta_j r) + \sum_{j=1}^N q_{nj} D(\zeta_j r) &= \omega_n \sum_{j=1}^N p_{nj} A(\zeta_j r) B(\zeta_j z_0(r)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Функции $C(\zeta_j r)$ и $D(\zeta_j r)$ имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} C(\zeta_j r) &= \zeta_j \left[A(\zeta_j r) B'(\zeta_j z_0(r)) - z_{0r} A'(\zeta_j r) B(\zeta_j z_0(r)) \right], \\ D(\zeta_j r) &= \frac{\zeta_j^2 A(\zeta_j r)}{(1 + z_{0r}^2)^{3/2}} + \frac{3z_{0r} z_{0rr} \zeta_j A'(\zeta_j r)}{(1 + z_{0r}^2)^{5/2}} + \frac{z_{0r}^2 A(\zeta_j r)}{r^2 (1 + z_{0r}^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Умножим полученные уравнения на функцию $rA(\zeta_i r)$, где $i = 1, 2, \dots, N$, и проинтегрируем в диапазоне $[r_1, 1]$. На основе свойства ортогональности функций Бесселя получим систему $2N$ уравнений относительно коэффициентов $p_{n1}, p_{n2}, \dots, p_{nN}$ и $q_{n1}, q_{n2}, \dots, q_{nN}$:

$$\begin{aligned} \omega_n q_{ni} \int_{r_1}^1 r A^2(\zeta_i r) dr &= \sum_{j=1}^N p_{nj} \int_{r_1}^1 r A(\zeta_i r) C(\zeta_j r) dr, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ B_0 q_{ni} \int_{r_1}^1 r A^2(\zeta_i r) dr + \sum_{j=1}^N q_{nj} \int_{r_1}^1 r A(\zeta_i r) D(\zeta_j r) dr - \omega_n \sum_{j=1}^N p_{nj} \int_{r_1}^1 r A(\zeta_i r) A(\zeta_j r) B(\zeta_j z_0(r)) dr &= 0. \end{aligned}$$

Разделив уравнения на $\int_{r_1}^1 r A^2(\zeta_i r) dr$, получим систему уравнений, состоящую из $2N$ уравнений:

$$\omega_n q_{ni} = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} p_{nj}, \quad B_0 q_{ni} + \sum_{j=1}^N \beta_{ij} q_{nj} - \omega_n \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} p_{nj} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.39)$$

где коэффициенты α_{ij} , β_{ij} и γ_{ij} определяются выражениями:

$$\alpha_{ij} = \frac{\int_{r_1}^1 rA(\zeta_i r)C(\zeta_j r)dr}{\int_{r_1}^1 rA^2(\zeta_i r)dr}, \quad \beta_{ij} = \frac{\int_{r_1}^1 rA(\zeta_i r)D(\zeta_j r)dr}{\int_{r_1}^1 rA^2(\zeta_i r)dr},$$

$$\gamma_{ij} = \frac{\int_{r_1}^1 rA(\zeta_i r)A(\zeta_j r)B(\zeta_j z_0(r))dr}{\int_{r_1}^1 rA^2(\zeta_i r)dr}.$$
(3.40)

Исключив коэффициенты q , получим задачу на собственные частоты и формы колебаний капиллярной жидкости в матричном виде:

$$(B_0 \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\alpha}) \cdot \mathbf{P}_n = \lambda_n \boldsymbol{\gamma} \cdot \mathbf{P}_n,$$

$$\text{где } \lambda_n = \omega_n^2, \quad \mathbf{P}_n = [p_{n1} \quad p_{n2} \quad \cdots \quad p_{nN}]^T, \quad (3.41)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{N1} & \cdots & \alpha_{NN} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{N1} & \cdots & \beta_{NN} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{N1} & \cdots & \gamma_{NN} \end{bmatrix}.$$

При решении данной обобщённой задачи на собственные значения можно получить собственные частоты ω_n и соответственные собственные векторы \mathbf{P}_n . В дальнейшем определим коэффициенты поля смещения f свободной поверхности:

$$\mathbf{Q}_n = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{P}_n, \quad \text{где } \mathbf{Q}_n = [q_{n1} \quad q_{n2} \quad \cdots \quad q_{nN}]^T. \quad (3.42)$$

Если $\alpha_0 = 90^\circ$, то равновесная свободная поверхность плоская:

$$z_0(r) = z_{0r} = z_{0rr} = 0,$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \zeta_i \tanh(\zeta_i h_0), & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \beta_{ij} = \begin{cases} \zeta_i^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}, \quad \gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

и собственные частоты: $\omega_n^2 = (B_0 \zeta_n + \zeta_n^3) \tanh(\zeta_n h_0)$, которые согласуются с аналитическими результатами. При полной невесомости $B_0 = 0$ собственные частоты колебаний жидкости определяются силами поверхностного натяжения на свободной поверхности жидкости и равна $\zeta_n^3 \tanh(\zeta_n h_0)$.

3.2.4. Обсуждение результатов

Реализована программа в MATLAB на основе приведённой методики решения задачи колебаний жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах в условиях, близких к невесомости. Определены собственные частоты и формы

колебаний капиллярной жидкости при различных практически важных ситуациях, которые приведены на рисунках 3.3–3.6.

На рис. 3.3. показаны собственные частоты в зависимости от углов смачивания в условиях полной невесомости. Получены аналитические значения собственных частот при угле смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$ и на графике подчеркнуты красными звёздами. Из рис. 3.3. видно, что численные значения очень хорошо согласуются с аналитическими. На рисунке также приведены экспериментальные результаты при угле смачивания, близком к нулю [90] и обозначены чёрной линией со звёздами. Форма равновесной свободной поверхности при угле смачивания $\alpha_0 = 10^\circ$ мало отличается от формы свободной поверхности при угле смачивания $\alpha_0 = 0^\circ$. В данной работе проведены расчёты о собственных колебаниях капиллярной жидкости и на рис. 3.3. видно, что численные значения близки к экспериментальным. Тогда доказывається достоверность разработанного алгоритма в данной работе для исследований малых колебаний капиллярной жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах.

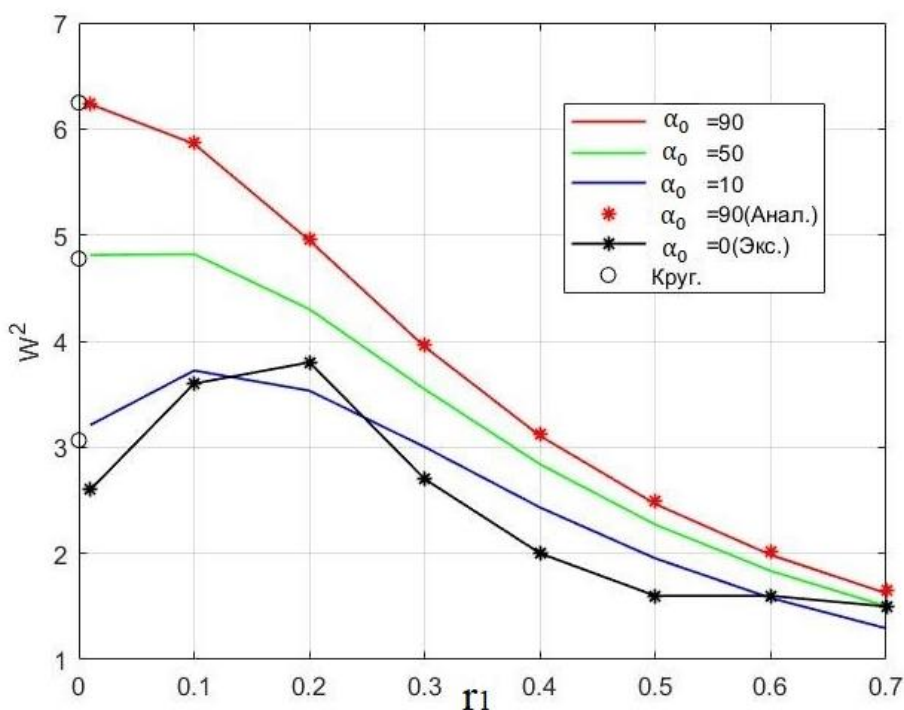


Рис. 3.3. Квадраты собственных частот ω_1^2 в зависимости от радиуса внутренней стенки сосуда r_1 при разных углах смачивания α_0 и глубине жидкости $H = 2$.

Из исследований следует, что при заданном объёме жидкости равновесная свободная поверхность более искривлена с уменьшением угла смачивания и собственные частоты колебаний капиллярной жидкости также уменьшаются. Это значит, что при заданном объёме жидкости в сосуде собственные частоты обратно пропорциональны площади свободной поверхности.

На рис. 3.4. показана зависимость собственных частот колебаний капиллярной жидкости от числа Бонда и радиуса внутренней стенки коаксиального цилиндра. Если число Бонда $B_0 > 5$ и радиус внутренней стенки коаксиального цилиндра $r_1 > 0.2$, угол смачивания мало влияет на собственные частоты колебания и в этих условиях можно оценить собственные частоты по аналитической формулы, полученной при угле смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$.

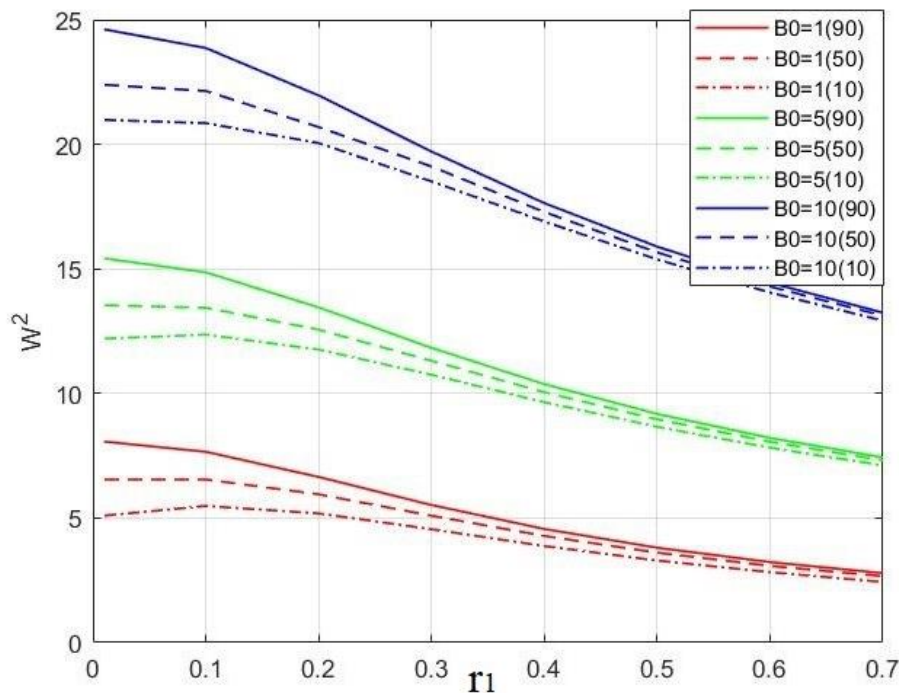


Рис. 3.4. Квадраты собственных частот ω_1^2 в зависимости от радиуса внутренней стенки сосуда r_1 и числа Бонда B_0 при глубине жидкости $H = 2$.

На рис. 3.5. видно, что с увеличением глубины жидкости собственные частоты увеличиваются и приближаются к предельным значениям. Это соответствует полученным результатам для тяжёлой жидкости, что при большой глубине жидкости можно пренебречь влиянием дна сосуда на собственные частоты. Рис. 3.6

показывает собственную форму основного тона колебаний жидкости при $B_0 = 0$. Красная сплошная линия описывает форму равновесной свободной поверхности, а пунктир означает собственную форму колебаний основного тона $n=1$.

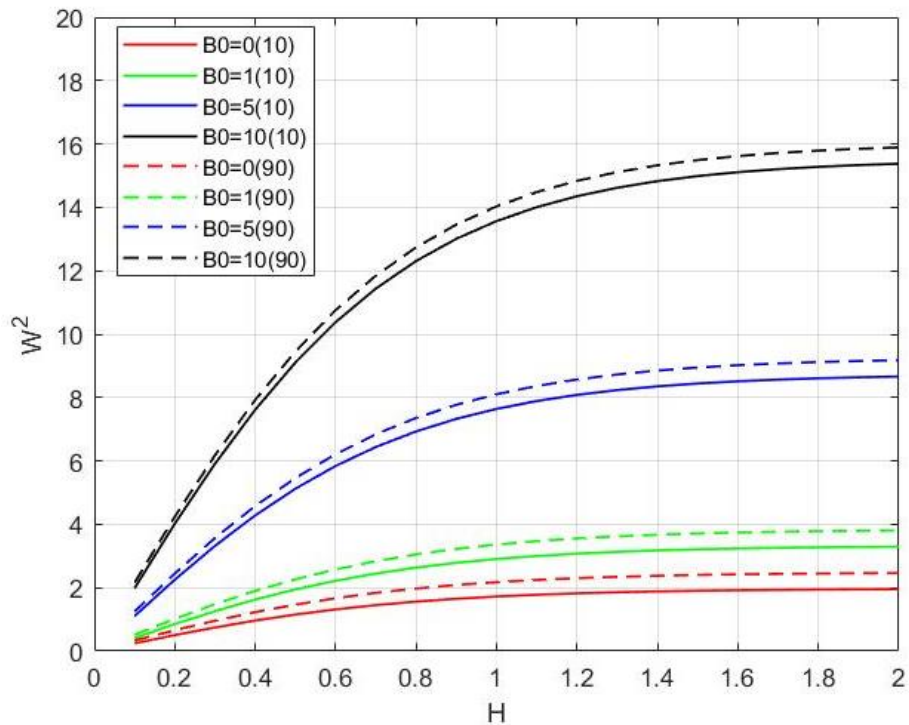


Рис. 3.5. Квадраты собственных частот ω_1^2 в зависимости от глубины жидкости H и числа Бонда B_0 при $r_1 = 0.5$.

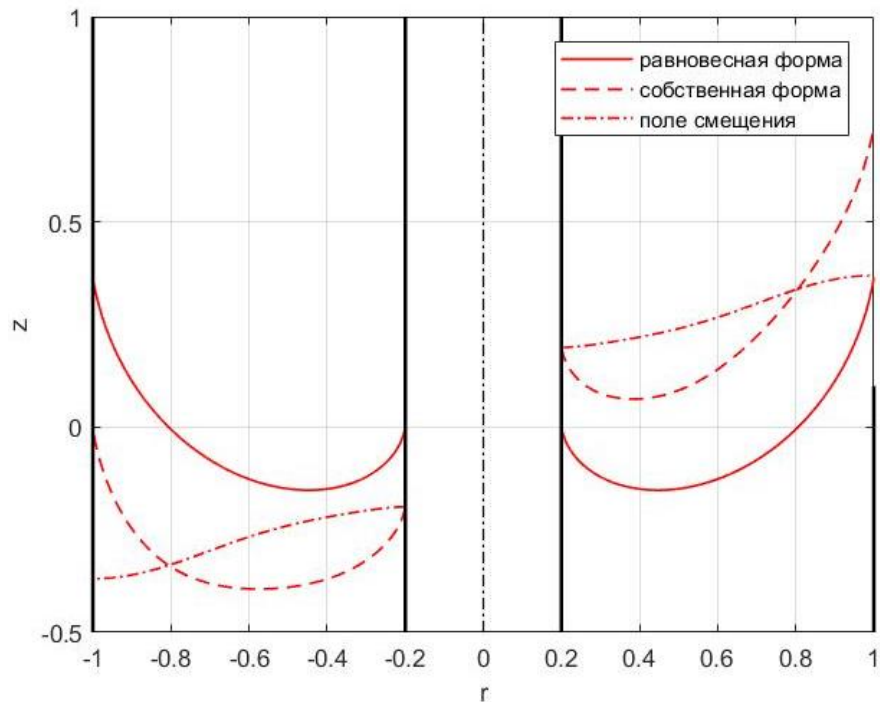


Рис. 3.6. Собственная форма колебаний жидкости при $B_0 = 0$, $\alpha_0 = 10^\circ$, $H = 2$.

3.3. Малые колебания капиллярной жидкости в тороидальных сосудах

3.3.1. Вывод уравнений и граничных условий

Ускорение g действует параллельно оси симметрии сосуда и начало цилиндрической системы координат $zr\theta$ находится в центре тора. На свободной поверхности жидкости Γ_0 введена криволинейная система координат $hs\theta$, где координатная линия h направлена по внешней нормали, s означает длину дуги линии меридиана свободной поверхности и полярный угол θ направлен против часовой стрелки вдоль положительной оси z . При этом равновесная свободная поверхность Γ_0 имеет уравнение $h = 0$.

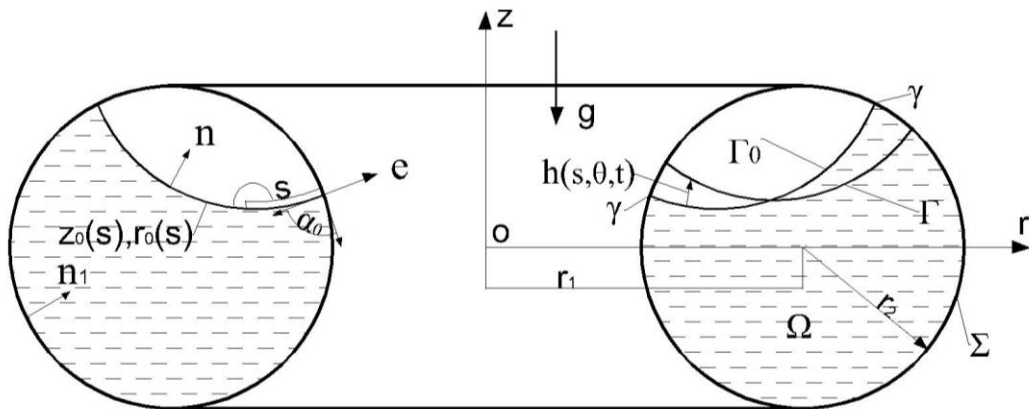


Рис. 3.7. Обозначения параметров жидкости и системы координат:

r_1 и r_2 – радиусы осевой окружности и окружности меридиана тороидального сосуда; γ – линия трёхфазного контакта; α_0 – угол смачивания жидкости; e – внешняя нормаль линии трёхфазного контакта в касательной плоскости свободной поверхности; $h(s, \theta, t)$ – отклонение возмущённой поверхности Γ от равновесной Γ_0 по внешней нормали; n и n_1 – нормали свободной и смоченной поверхностей соответственно; Σ – смачиваемая поверхность стенки сосуда; Ω – область, которую занимает жидкость; $z_0(s)$ и $r_0(s)$ – параметрические функции формы линии меридиана равновесной свободной поверхности Γ_0 .

Жидкость идеальная и несжимаемая, ее движение малое и потенциальное. Движение жидкости в тороидальных сосудах удовлетворяет:

- уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \text{ в } \Omega. \quad (3.43)$$

- условию непротекания на смачиваемой поверхности сосуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma. \quad (3.44)$$

Допустим, что выражение возмущённой свободной поверхности $F(s, \theta, h, t)$ имеет вид $F(s, \theta, h, t) = h(s, \theta, t) - h$ и запишем кинематическое условие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0. \quad (3.45)$$

Проекция отклонения возмущённой свободной поверхности вдоль оси z вычисляется по следующей формуле $z_d = h(r, \theta, t) \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z$, где $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_z = r_{0s}$ – направляющий косинус внешней нормали свободной поверхности с осью z . Динамическая составляющая давления p_d жидкости на свободной поверхности определена из условия Лапласа:

$$p_0 - p_s = \sigma(k_1 + k_2),$$

$$p_0 - p = \sigma \left\{ (k_1 + k_2) + \left[(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h \right] \right\}.$$

В этих выражениях k_1 и k_2 означают главные кривизны равновесной свободной поверхности и определены по соотношениям:

$$k_1 = r_{0s} z_{0ss} - r_{0ss} z_{0s}, \quad k_2 = z_{0s} / r_{0s},$$

где нижние индексы s и ss означают первую и вторую производные функций $z_0(s)$

и $r_0(s)$ по длине дуги s соответственно; $\Delta_\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{r_{0s}}{r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа-

Бельтрами на криволинейной системе координат поверхности Γ_0 .

Получена выражение динамической составляющей давления $p_d = p - p_s$:

$$p_d = -\sigma \left[(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h \right].$$

Динамическое условие на свободной поверхности приобретает вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + ghr_{0s} - \frac{\sigma}{\rho} \left[(k_1^2 + k_2^2)h + \Delta_\Gamma h \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (3.46)$$

Так как в процессе плескания жидкости угол смачивания остаётся постоянным, т.е. $\delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_1) = 0$, получим граничное условие на ЛТК:

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0 \text{ на } \gamma, \text{ где } \chi = \frac{k_1 \cos \alpha_0 - k_1^\Sigma}{\sin \alpha_0}. \quad (3.47)$$

В этом выражении \mathbf{e} – внешняя нормаль ЛТК в касательной плоскости свободной поверхности, k_1^Σ – кривизна поперечного сечения стенки сосуда на ЛТК.

В данной работе радиус окружности меридиана стенки тора r_2 выбран как характерный размер задачи и введены характерные значения для времени и потенциала через определяющие параметры задачи:

$$t^* = \sqrt{\rho r_2^3 / \sigma}, \varphi^* = r_2^2 / t^*.$$

Используя преобразования $x = r_2 x'$, $t = t^* t'$ и $\varphi = \varphi^* \varphi'$, получим безразмерную формулировку задачи малых колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения в торах. В дальнейшем опускаем знак « ' » над обозначениями и присутствие безразмерного числа означает безразмерную формулировку задачи.

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B_0 h r_{0s} - \left[(k_1^2 + k_2^2) h + \Delta_\Gamma h \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0 \text{ на } \gamma. \end{aligned} \quad (3.48)$$

3.3.2. Вариационная формулировка задачи

Решения задачи $\varphi(r, z, \theta, t)$ и $h(s, \theta, t)$ можно представить в виде:

$$\varphi(r, z, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r, z, \theta) \cos \omega_n t, \quad h(s, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s, \theta) \sin \omega_n t,$$

где $\omega_n = \omega_n^p (\rho r_2^3 / \sigma)^{1/2}$, а ω_n и ω_n^p – безразмерная и размерная частота.

После исключения переменной времени задача (3.48) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_n = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = \omega_n h_n \text{ на } \Gamma_0, \\ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n - \Delta_\Gamma h_n - \omega_n \varphi_n = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n = 0 \text{ на } \gamma. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Запишем вариационную формулировку задачи методом Галёркина:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \varphi_n \delta \varphi_n d\Omega - \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Sigma - \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} - \omega_n h_n \right) \delta \varphi_n d\Gamma_0 + \\ \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n - \Delta_\Gamma h_n - \omega_n \varphi_n \right\} \delta h_n d\Gamma_0 + \int_{\gamma} \left(\frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n \right) \delta h_n d\gamma = 0. \end{aligned}$$

Используя интегрирование по частям

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta \varphi_n \delta \varphi_n d\Omega &= \int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Sigma + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \delta \varphi_n d\Gamma_0 - \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \delta \nabla \varphi_n d\Omega, \\ - \int_{\Gamma_0} \Delta_{\Gamma} h_n \delta h_n d\Gamma_0 &= - \int_{\gamma} \frac{\partial h_n}{\partial e} \delta h_n d\gamma + \int_{\Gamma_0} \nabla_{\Gamma} h_n \delta \nabla_{\Gamma} h_n d\Gamma_0, \end{aligned}$$

получим формулировку задачи (3.49) в вариационном виде: $\delta I_1 = 0$, где I_1 – функционал, определяемый выражением

$$I_1 = \int_{\Gamma_0} \left\{ [B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2)] h_n^2 + \nabla_{\Gamma} h_n \nabla_{\Gamma} h_n \right\} d\Gamma_0 + \chi \int_{\gamma} h_n^2 d\gamma - \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n d\Omega. \quad (3.50)$$

Функционал I_1 тоже легко получить при использовании уравнения Лагранжа 2-го рода, связанного с кинетической T и потенциальной Π энергией малых колебаний капиллярной жидкости:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0.$$

Кинетическая энергия T и потенциальная энергия Π уже известные из параграфа 2.1:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} (\nabla \varphi)^2 d\Omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \mu_n \dot{q}_n^2, \\ \Pi &= \frac{1}{2} \rho g \int_{\Gamma_0} h^2 \frac{\partial z}{\partial n} d\Gamma - \frac{1}{2} \sigma \int_{\Gamma_0} [(k_1^2 + k_2^2) h + \Delta_{\Gamma} h] h d\Gamma + \frac{1}{2} \sigma \int_{\gamma} \left(\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h \right) h d\gamma \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (g \eta_n + \sigma \kappa_n) q_n^2. \end{aligned}$$

В этих уравнениях q_n – обобщённая координата, μ_n – обобщённая масса жидкости, η_n и κ_n – обобщённые коэффициенты жёсткости:

$$\begin{aligned} q_n &= \sin(\omega_n t), \quad \mu_n = \rho \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \nabla \varphi_n d\Omega, \\ \eta_n &= \rho \int_{\Gamma_0} h_n^2 r_{0s} d\Gamma, \quad \kappa_n = \int_{\Gamma_0} \left[(\nabla_{\Gamma} h_n)^2 - (k_1^2 + k_2^2) h_n^2 \right] d\Gamma + \chi \int_{\gamma} h_n^2 d\gamma. \end{aligned}$$

Подставив выражения кинетической и потенциальной энергии в уравнение Лагранжа 2-го рода и преобразуя полученное уравнение в безразмерный вид, получим один и тот же вид функционала I_1 как (3.50).

В выражении функционала I_1 есть слагаемое $\nabla_{\Gamma} h_n$, которое представляет собой вторую производную потенциала скоростей жидкости φ_n и вызывает

трудность при решении задачи колебаний капиллярной жидкости. Удобно рассматривать поле скоростей жидкости $\partial\varphi_n/\partial n$ на свободной поверхности как расчётную функцию в данной задаче и введена вспомогательная задача Неймана для создания связи между потенциалом скоростей жидкости φ_n и $\partial\varphi_n/\partial n$. В дальнейшем увидим, что данный подход позволит использовать линейные треугольные элементы при применении МКЭ.

Запишем общую формулировку задачи Неймана:

$$\Delta\varphi_n = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} = f \text{ на } \Gamma_0, \quad (3.51)$$

В этой формулировке задачи f представляет собой заданную функцию.

Используя вариационный метод Галёркина, задача Неймана имеет вид:

$$\int_{\Omega} \Delta\varphi_n \delta\varphi_n d\Omega - \int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \delta\varphi_n d\Sigma - \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial n} - f \right) \delta\varphi_n d\Gamma_0 = 0$$

Таким образом получена задача Неймана в виде вариации функционала:

$$\delta I_2 = 0, \text{ где } I_2 = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \varphi_n d\Gamma_0 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla\varphi_n \nabla\varphi_n d\Omega. \quad (3.52)$$

Ограничимся в статье решениями, отвечающими функциям $\cos(m\theta)$:

$$\varphi_n(r, z, \theta) = \Phi(r, z) \cos(m\theta), \quad h_n(s, \theta) = H(s) \cos(m\theta).$$

Полярный угол θ отсчитывается от оси Ox и в этих выражениях имеются два индекса: номер тона n и число волн в окружном направлении m . Практическое значение имеет основной тон при асимметричных колебаниях жидкости $m = 1$. Данный случай приводит к переменному давлению в поперечном направлении сосуда, которое необходимо учитывать при анализе динамики и систем стабилизации летательных аппаратов.

При заданном значении m можно преобразовать осесимметричную задачу в следующем виде: $\delta I_1 = 0$ и $\delta I_2 = 0$,

$$\begin{aligned}
\text{где } I_1 = \int_{\Gamma_0} & \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right] \right\} r ds \\
& + \left[\chi r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right]_{\gamma} - \omega_n^2 \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{m^2 \Phi^2}{r^2} \right] r dr dz, \quad (3.53) \\
I_2 = \int_{\Gamma_0} & \frac{\partial \Phi}{\partial n} \Phi r ds - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{m^2 \Phi^2}{r^2} \right] r dr dz.
\end{aligned}$$

3.3.3. Разработка алгоритма решения задачи

Приведенная вариационная формулировка задачи в предыдущем пункте пригодна для применения МКЭ. Для дискретизации области жидкости в правом сечении тороидального сосуда выбраны линейные треугольные элементы, как показаны на рис. 3.7.

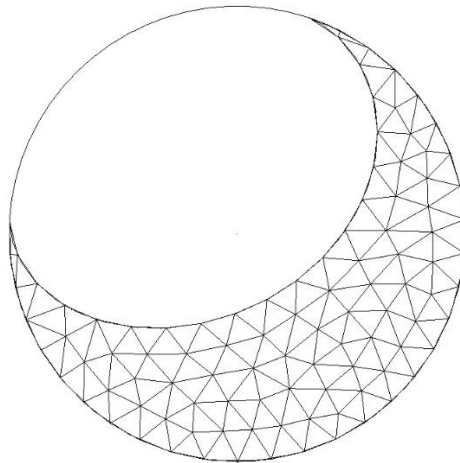


Рис. 3.7. Схема аппроксимации области жидкости линейными треугольными элементами

Представим функции $(\Phi)_i$ и $(\partial \Phi / \partial n)_i$ в i -ом элементе линии на свободной поверхности Γ_0 по их узловым значениям данного элемента [19, 66]:

$$(\Phi)_i = \sum_{j=1}^u \Phi_{ij} M_j, \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_i = \sum_{j=1}^u \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{ij} M_j,$$

где u – количество элементов линии на Γ_0 , M_j – функция формы j -го узла элемента, Φ_{ij} и $(\partial \Phi / \partial n)_{ij}$ – j -ое узловое значение функции Φ и $\partial \Phi / \partial n$ в i -ом элементе.

Для линейного элемента линии $u = 2$, функции формы элемента представляют собой полиномы первого порядка в переменной $\xi \in [-1, 1]$:

$$\xi = \frac{2s - (s_1 + s_2)}{s_2 - s_1}, \quad M_1 = \frac{1}{2}(1 - \xi), \quad M_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi),$$

где s_1 и s_2 – длины дуги начального и конечного узлов элемента линии.

Функция $(\Phi)_i$ в i -ом элементе треугольника в области жидкости Ω имеет вид:

$$(\Phi)_i = \sum_{j=1}^v \Phi_{ij} N_j,$$

где v – количество элементов треугольника в области, занимаемой жидкостью, N_j – функция формы j -го узла элемента треугольника, Φ_{ij} – j -ое узловое значение функции Φ в i -ом элементе треугольника.

Для треугольного элемента первого порядка $v = 3$ и функции формы элемента представлены в системе координат L_1, L_2 и $L_3 \in [0, 1]$, которые связаны с координатами r и z следующими соотношениями:

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix},$$

и функции формы просто L -координаты: $N_i = L_i, i = 1, 2, 3$.

Подставив эти функции в функционал I_2 (3.53)

$$I_2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^u \sum_{k=1}^u \Phi_{ij} \int_{\Gamma_{0i}} M_j M_k r ds \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)_{ik} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^v \sum_{k=1}^v \Phi_{ij} \int_{\Omega_i} \left[\frac{\partial N_j}{\partial r} \frac{\partial N_k}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_k}{\partial z} + \frac{m^2 N_j N_k}{r^2} \right] r dr dz \Phi_{ik},$$

получим функционал I_2 в матричном виде:

$$I_2 = \sum_{i=1}^p \Phi_u^T \mathbf{B}_i \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \Phi_i^T \mathbf{A}_i \Phi_i = \Phi_1^T \mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \frac{1}{2} \Phi^T \mathbf{A} \Phi.$$

Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} задачи составлены из следующих матриц элемента:

$$\mathbf{A}_i = [A_{jk}^i] \text{ и } A_{jk}^i = \int_{\Omega_i} \left[\frac{\partial N_j}{\partial r} \frac{\partial N_k}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_k}{\partial z} + \frac{m^2 N_j N_k}{r^2} \right] r dr dz,$$

$$\mathbf{B}_i = [B_{jk}^i] \text{ и } B_{jk}^i = \int_{\Gamma_{0i}} M_j M_k r ds.$$

А матрицы $\Phi_1, \partial \Phi / \partial \mathbf{n}$ и Φ задачи составлены из следующих матриц элемента:

$$\Phi_{ii}^T = (\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \dots, \Phi_{iu}), \quad \Phi_i^T = (\Phi_{i1}, \Phi_{i2}, \dots, \Phi_{iv}),$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)_i^T = \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{i1}, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{i2}, \dots, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)_{iu} \right).$$

Здесь Γ_{0i} и Ω_i – i -й элемент на свободной поверхности Γ_0 и области жидкости Ω соответственно.

Интеграл функций в элементе линии Γ_{0i} и в треугольном элементе Ω_i вычислен численным интегрированием по формулам Гаусса:

$$\int_{s_1}^{s_2} f(s) ds = \frac{s_2 - s_1}{2} \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \frac{s_2 - s_1}{2} \sum_{i=1}^P \alpha_i f(\xi_i),$$

$$\iint_{\Delta} f(r, z) dr dz = \Delta \iint f(L_1, L_2) dL_1 dL_2 = \Delta \sum_{i=1}^P \alpha_i f(L_{1i}, L_{2i}).$$

В этом выражении Δ означает площадь треугольного элемента.

Для численного интегрирования функций в элементе линии $P = 6$ имеем следующие значения координат точек ξ_i и весовых коэффициентов α_i [19]:

ξ_i	-0.932469	-0.661209	-0.238619	0.238619	0.661209	0.932469
α_i	0.171324	0.360762	0.467914	0.467914	0.360762	0.171324

Для численного интегрирования функций в треугольнике $P = 7$ имеем значения координат точек L_{1i}, L_{2i} и весовых коэффициентов α_i [66]:

L_{1i}	0.101287	0.797427	0.101287	0.470142	0.470142	0.059716	0.333333
L_{2i}	0.101287	0.101287	0.797427	0.059716	0.470142	0.470142	0.333333
α_i	0.125939	0.125939	0.125939	0.132394	0.132394	0.132394	0.225

Заметим, что в подынтегральную функцию A_{jk}^i входят члены, связанные с производной функций формы N_i по координатам r и z . Выражаем производную функции формы по координатам L_1, L_2 через матрицу Якоби:

$$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial r} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial L_1}{\partial r} & \frac{\partial L_2}{\partial r} \\ \frac{\partial L_1}{\partial z} & \frac{\partial L_2}{\partial z} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{array} \right\}.$$

При составлении матриц задач $\Phi_1, \partial \Phi / \partial \mathbf{n}$ и Φ следует поставить узловые значения функций на свободной поверхности в первые строки:

$$\Phi_1^T = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n_f}), \quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)^T = \left(\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)_1, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)_2, \dots, \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)_{n_f} \right),$$

$$\Phi^T = (\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_{n_f}, \dots, \Phi_{n_g}) = (\Phi_1^T, \Phi_2^T).$$

Здесь n_f – общее количество узлов на свободной поверхности Γ_0 , а n_g – общее количество узлов в области жидкости Ω .

Матрица \mathbf{B} имеет размерность $n_f \times n_f$ и матрица \mathbf{A} может быть записана в виде:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix},$$

где \mathbf{A}_1 в размерности $n_f \times n_f$, \mathbf{A}_2 в размерности $n_f \times (n_g - n_f)$, \mathbf{A}_3 в размерности $(n_g - n_f) \times n_f$ и \mathbf{A}_4 в размерности $(n_g - n_f) \times (n_g - n_f)$.

Выполнив вариацию функционала $\delta I_2 = 0$

$$\delta I_2 = \delta \Phi_1^T \left(\mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \mathbf{A}_1 \Phi_1 - \mathbf{A}_2 \Phi_2 \right) - \delta \Phi_2^T (\mathbf{A}_3 \Phi_1 + \mathbf{A}_4 \Phi_2) = 0,$$

получим следующую систему уравнений относительно матриц Φ_1 и Φ_2 :

$$\mathbf{A}_1 \Phi_1 + \mathbf{A}_2 \Phi_2 = \mathbf{B} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}, \quad \mathbf{A}_3 \Phi_1 + \mathbf{A}_4 \Phi_2 = 0.$$

Решая системы по способу Крамера, получаем Φ_1, Φ_2 через $\partial \Phi / \partial \mathbf{n}$:

$$\Phi_1 = \mathbf{A}_5^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}, \quad \Phi_2 = -\mathbf{A}_6 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}},$$

где $\mathbf{A}_5 = \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3)$, $\mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_5^{-1}$.

Аналогично преобразуем функционал I_1 (3.53) в матричной форме:

$$\Pi_1 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)^T (B_0 \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} - \omega_n^2 (\Phi_1^T, \Phi_2^T) \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что перед матрицей \mathbf{B}_2 имеется знак минус и эта матрица связана с кривизной равновесной свободной поверхности. Тогда видно, что сильная искривленность свободной поверхности приводит к неустойчивости положения равновесия капиллярной жидкости в сосуде. Матрица \mathbf{B}_4 описывает форму свободной поверхности и стенки сосуда на ЛТК. Это означает, что в условиях,

близких к невесомости, геометрия сосуда также сильно влияет на устойчивость положения равновесия жидкости в сосуде.

Матрицы \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{B}_3 и \mathbf{B}_4 имеют размерность $n_f \times n_f$ и составлены из матриц \mathbf{B}_{1i} , \mathbf{B}_{2i} , \mathbf{B}_{3i} и \mathbf{B}_{4i} соответственно, δ_{jk} – символ Кронекера,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{1i} &= [\mathbf{B}_{jk}^{1i}] \text{ и } B_{jk}^{1i} = \int_{\Gamma_{0i}} r_{0s} M_j M_k r ds, \\ \mathbf{B}_{2i} &= [\mathbf{B}_{jk}^{2i}] \text{ и } B_{jk}^{2i} = \int_{\Gamma_{0i}} (k_1^2 + k_2^2) M_j M_k r ds, \\ \mathbf{B}_{3i} &= [\mathbf{B}_{jk}^{3i}] \text{ и } B_{jk}^{3i} = \int_{\Gamma_{0i}} \left[\frac{\partial M_j}{\partial s} \frac{\partial M_k}{\partial s} + \frac{m^2 M_j M_k}{r^2} \right] r ds, \\ \mathbf{B}_{4i} &= [\mathbf{B}_{jk}^{4i}] \text{ и } B_{jk}^{4i} = (\chi r)_\gamma \delta_{jk}.\end{aligned}$$

Исключив Φ_1 , Φ_2 в I_1 через $\partial\Phi/\partial\mathbf{n}$, функционал I_1 выглядит следующим:

$$\begin{aligned}I_1 &= \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} \right)^T (\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}}, \\ \text{где } \mathbf{K} &= B_0 \mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2 + \mathbf{B}_3 + \mathbf{B}_4, \\ \mathbf{M} &= (\mathbf{A}_5^{-1})^T \mathbf{A}_1 \mathbf{A}_5^{-1} - (\mathbf{A}_5^{-1})^T \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_6 - \mathbf{A}_6^T \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_5^{-1} + \mathbf{A}_6^T \mathbf{A}_4 \mathbf{A}_6.\end{aligned}$$

При составлении матрицы \mathbf{M} применяется метод статической конденсации [93] и получена задача, степени свободы которой совпадают с количеством узлов на свободной поверхности. При больших силах тяготения равновесная свободная поверхность плоская и перпендикулярная к направлению ускорения, элементы матрицы \mathbf{B}_2 , связанные с кривизной поверхности, близки к нулю и матрицы \mathbf{B}_3 и \mathbf{B}_4 , характеризующие воздействие поверхностного натяжения, пренебрежимо малы по сравнению со слагаемым $B_0 \mathbf{B}_1$. В этих условиях разработанный алгоритм в диссертации преобразован в алгоритм решения краевой задачи на собственные значения колебаний жидкости при больших числах Бонда [10].

Из вариации $\delta I_1 = 0$ получена задача на определение собственных частот и форм колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения:

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{n}} = 0.$$

Алгоритм решения задачи колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения заключается в следующем:

1) разработка алгоритмов отыскания форм равновесной свободной поверхности жидкости в условиях микрогравитации, получение функций $z_0(s)$, $r_0(s)$, $r_{0s}(s)$, $k_1(s)$, $k_2(s)$ в зависимости от длины дуги s и коэффициента χ описания формы свободной поверхности и стенки сосуда на линии трёхфазного контакта;

2) создание геометрической модели области, занимаемой жидкостью, в программе PARTRAN и реализация дискретизации области жидкости линейными треугольными элементами;

3) экспортирование файлов, содержащих информацию треугольных элементов и разработка программы извлечения необходимой информации для модального анализа капиллярной жидкости в MATLAB;

4) составление матриц **A**, **B**, **V**₁, **V**₂, **V**₃ и **V**₄ с применением численного интегрирования функций по методу Гаусса;

5) определение собственных частот и форм колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения по приведенным формулам в данной работе.

В предыдущих обсуждениях данного параграфа использовано предположение о сохранении угла смачивания на ЛТК. В некоторых случаях наблюдается неподвижная ЛТК в процессе движения капиллярной жидкости. Например, жидкость пересекает кольцевые ребра или полностью заполняет сосуды с открытым выходом. Рассмотрим собственные колебания капиллярной жидкости при неподвижной ЛТК.

Так как ЛТК неподвижна, исключим строки и столбцы, соответствующие узлам на линии контакта. Имеем следующее уравнение:

$$\left(\mathbf{K}' - \omega_n^2 \mathbf{M}'\right) \frac{\partial \Phi'}{\partial \mathbf{n}} = 0,$$

где матрицы **K'** и **M'** имеют порядок $(n_f - 2) \times (n_f - 2)$, а $\partial \Phi' / \partial \mathbf{n} - (n_f - 2) \times 1$.

Аналогично определены собственные частоты и формы колебаний капиллярной жидкости при заземлённой ЛТК.

3.3.4. Обсуждение результатов

А) *достоверность и сходимость алгоритма.* В литературе отсутствуют данные о колебаниях жидкости в тороидальных сосудах в условиях микрогравитации, достоверность и сходимость предложенного алгоритма на основе МКЭ проведена в примере сферического сосуда.

При объёме жидкости $\beta=50\%$ и угле смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$ свободная поверхность жидкости в сферическом сосуде плоская и перпендикулярна ускорению не зависимо от числа Бонда. Из таблицы 3.3 следует, что полученная частота основного тона ω_1^* хорошо сходится с результатами в литературе [69]. В таблице 3.3 и на рис. 3.8–3.9 показаны расчётные значения собственной частоты первого тона колебаний жидкости по разработанному алгоритму и численные результаты в работе F.T. Dodge [76]. Заметим, что в большем диапазоне объёмов жидкости имеется хорошее совпадение численных результатов соискателя и в литературе. Можно сделать вывод о том, что разработанный алгоритм на основе МКЭ в данной работе пригоден для исследования малых колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения в любом осесимметричном сосуде.

Таблица 3.3. Проверка достоверности алгоритма в примере сферического сосуда,

где $\omega_1^* = \omega_1/\sqrt{B_0}$ и β – объём жидкости,

	$B_0 = 1, \alpha_0 = 5^\circ$			$B_0 = 2, \alpha_0 = 5^\circ$			$B_0 = 1000, \alpha_0 = 90^\circ$
β	25%	50%	78%	25%	50%	78%	50%
ω_1^*	1.06	1.13	1.24	1.07	1.13	1.24	1.56
ω_1^* в литературе	1.15	1.19	1.42	1.05	1.11	1.35	1.54
	[76]						[69]

В таблицах 3.4 и 3.5 показаны собственные частоты первого тона колебаний жидкости в сфере с увеличением степени дискретизации, характеризуемой числом узлов конечных элементов на свободной поверхности n_f . На рис. 3.10–3.12 заметим, что с увеличением числа узлов конечных элементов на свободной поверхности наблюдается приближение расчётных значений к некоторым предельным числам.

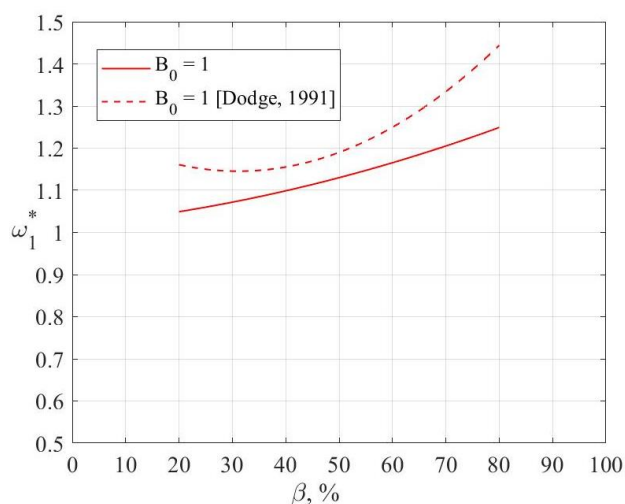


Рис. 3.8. Собственная частота колебаний жидкости в сфере при $\alpha_0 = 5^\circ$, $B_0 = 1$.

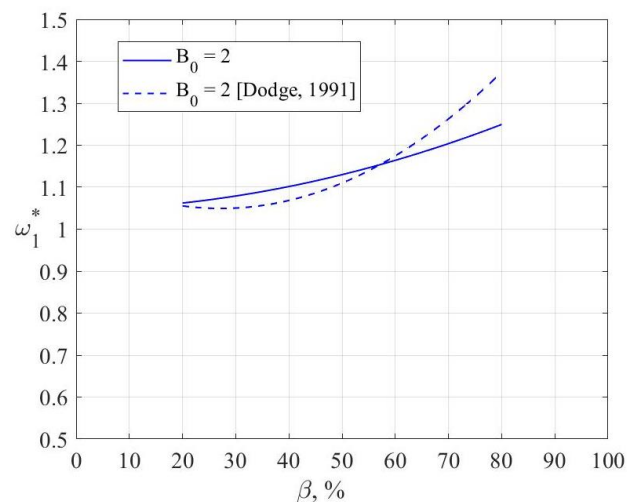


Рис. 3.9. Собственная частота колебаний жидкости в сфере при $\alpha_0 = 5^\circ$, $B_0 = 2$.

Полсе анализа численных расчётов по разработанному алгоритму, можно делать вывод о том, что данный алгоритм на основе МКЭ сходится с увеличением степени дискретизации области жидкости.

Таблица 3.4. Проверка сходимости алгоритма с увеличением степени дискретизации при $B_0 = 1$, $\alpha_0 = 5^\circ$

$\beta = 25 \%$		$\beta = 50 \%$		$\beta = 78 \%$	
n_f	ω_1^*	n_f	ω_1^*	n_f	ω_1^*
13	1.071	9	1.165	9	1.346
16	1.068	12	1.142	11	1.300
20	1.066	14	1.136	15	1.258
32	1.063	17	1.130	18	1.245

Таблица 3.5. Проверка сходимости алгоритма с увеличением степени дискретизации при $B_0 = 2$, $\alpha_0 = 5^\circ$

$\beta = 25 \%$		$\beta = 50 \%$		$\beta = 78 \%$	
n_f	ω_1^*	n_f	ω_1^*	n_f	ω_1^*
12	1.079	8	1.175	8	1.336
15	1.074	11	1.149	11	1.274
19	1.072	12	1.144	14	1.249
29	1.069	16	1.135	17	1.237

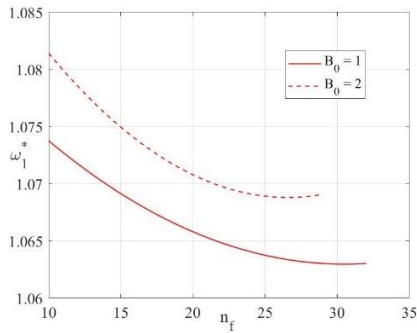


Рис. 3.10. Собственная частота в зависимости от числа узлов n_f при $\beta = 25\%$.

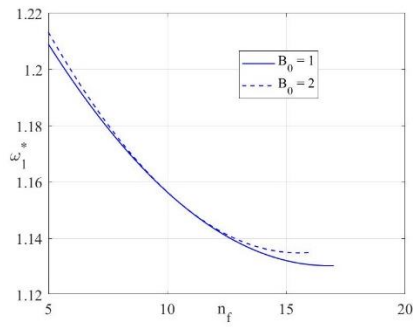


Рис. 3.11. Собственная частота в зависимости от числа узлов n_f при $\beta = 50\%$.

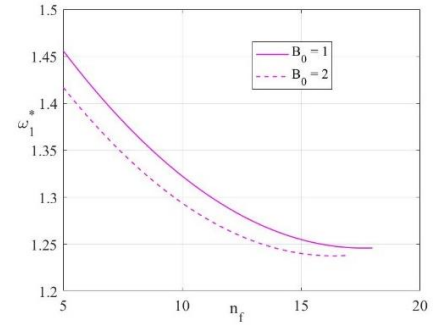


Рис. 3.12. Собственная частота в зависимости от числа узлов n_f при $\beta = 78\%$.

Б) асимметричная мода ($m = 1$) колебаний с сохранением угла смачивания.

В таблице 3.6 и на рис. 3.13 приведены собственные частоты первого тона колебаний жидкости ω_1^* и с повышением числа Бонда B_0 значения частот увеличиваются.

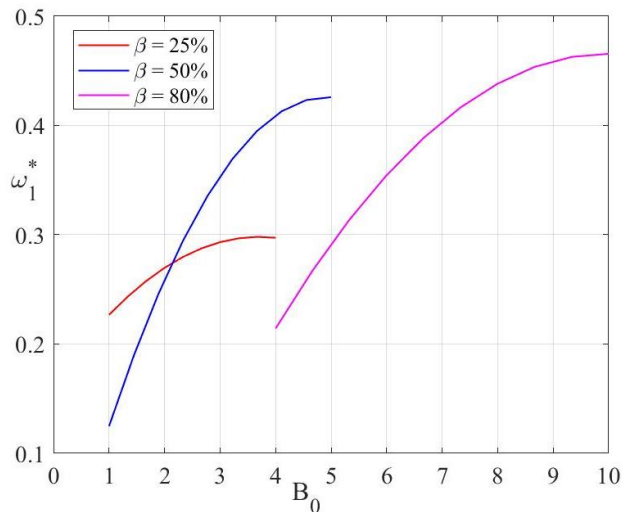


Рис. 3.13. Собственная частота ω_1^* в зависимости числа Бонда B_0 для различных объёмов жидкости β при $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$.

Также заметим, что для заданного объёма жидкости наблюдается тенденция приближения собственной частоты к предельным значениям, которые получены в наземных условиях [97].

Таблица 3.6. Собственная частота основного тона ω_1^* при $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$.

$\beta \backslash B_0$	1	2	3	4	5	6	8	10	1000	[97]
20%	0.226	0.272	0.291	0.298	-	-	-	-	0.321	0.290
50%	0.100	0.303	0.366	0.391	0.409	0.419	-	-	0.469	0.475
80%	-	-	-	0.214	0.291	0.356	0.437	0.466	0.620	0.637

Рис. 3.14 показывает собственную форму $h(s)$ первых четырёх тонов ($n = 1, 2, 3, 4$), линия $h = 0$ означает положение равновесия жидкости.

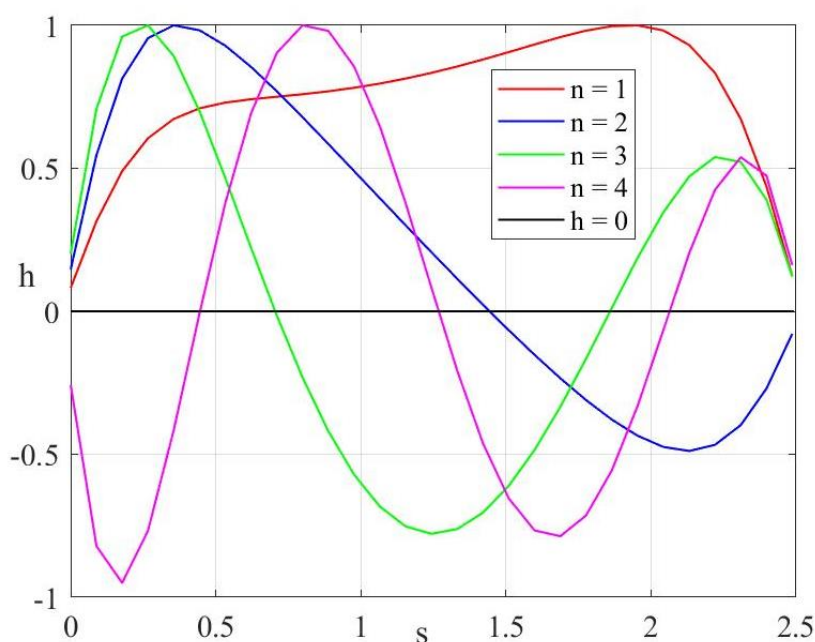
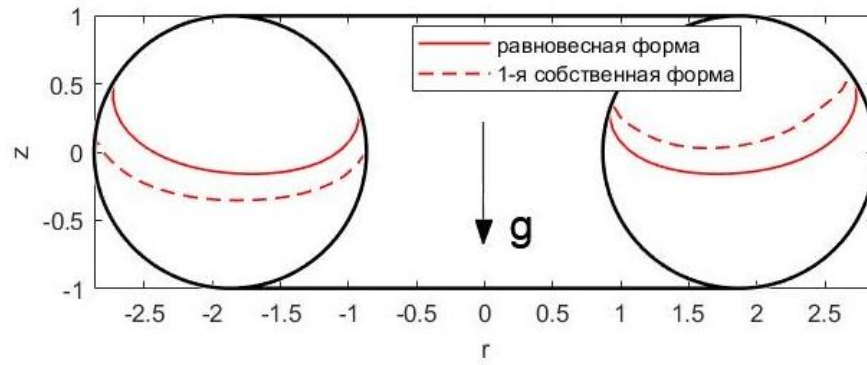
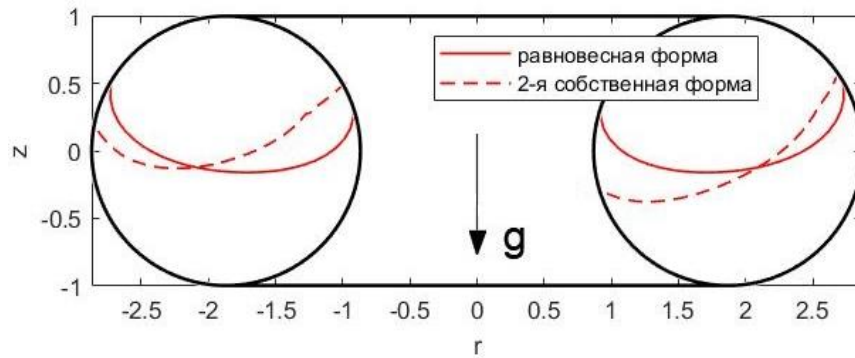


Рис. 3.14. Собственные формы первых четырёх тонов колебаний жидкости в тороидальном сосуде в условиях $r_1 = 1.87$, $\beta = 50\%$, $B_0 = 5$, $\alpha_0 = 5^\circ$.

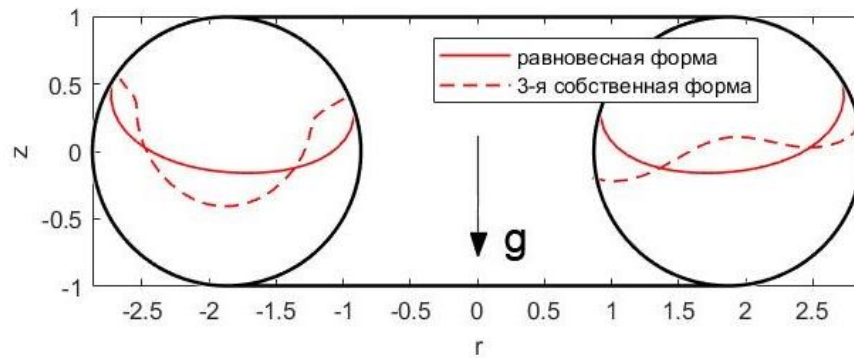
На рис. 3.15 показаны собственные формы первых четырёх тонов колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения и здесь показано поперечное сечение тороидального сосуда. Равновесная свободная поверхность характеризуется сплошной линией, а пунктир показывает собственную форму. Количество узлов пересечения равновесной и собственной формы каждого тона колебаний жидкости сходится с экспериментальными результатами колебаний тяжёлой жидкости [97].



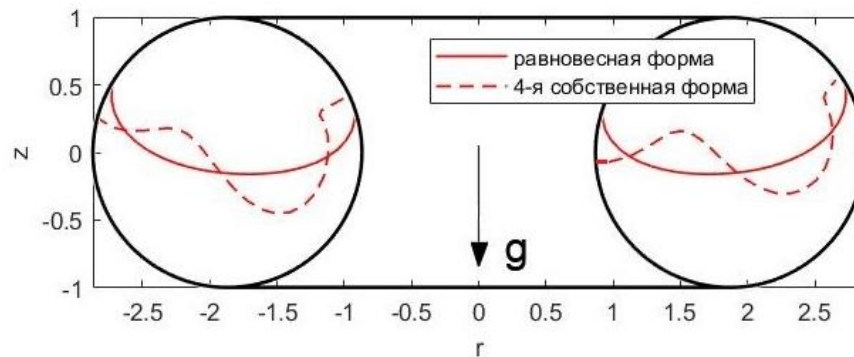
(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 3.15. Собственные формы колебаний жидкости при $r_1 = 1.87$, $\beta = 50\%$, $B_0 = 5$, $\alpha_0 = 5^\circ$, где а – $n=1$, б – $n=2$, в – $n=3$, г – $n=4$.

В). *асимметричная мода ($m = 1$) колебаний с неподвижной ЛТК.*
 Полученные значения частот первого тона ω_1^* приведены в таблице 3.7 и сравнение собственных частот при сохранении угла смачивания (α_0) и заземленной ЛТК (γ) показано на рис. 3.16. На рис. 3.17 показаны собственные формы колебаний жидкости при заземленной ЛТК.

Таблица 3.7. Собственная частота 1-го тона ω_1^* колебаний при $r_1 = 1.87$, $\alpha_0 = 5^\circ$

$\beta \backslash B_0$	1	2	3	4	5	6	8	10
20%	0.265	0.297	0.310	0.315	-	-	-	-
50%	0.202	0.344	0.395	0.415	0.428	0.439	-	-
80%	-	-	-	0.290	0.361	0.414	0.475	0.516

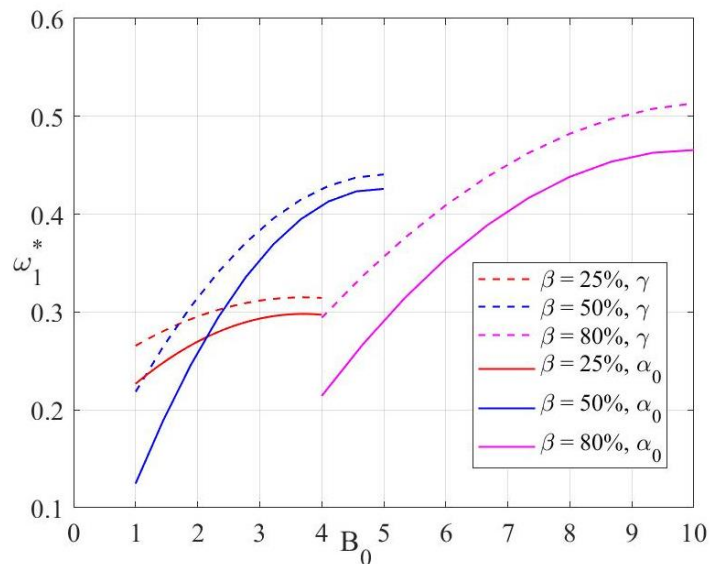
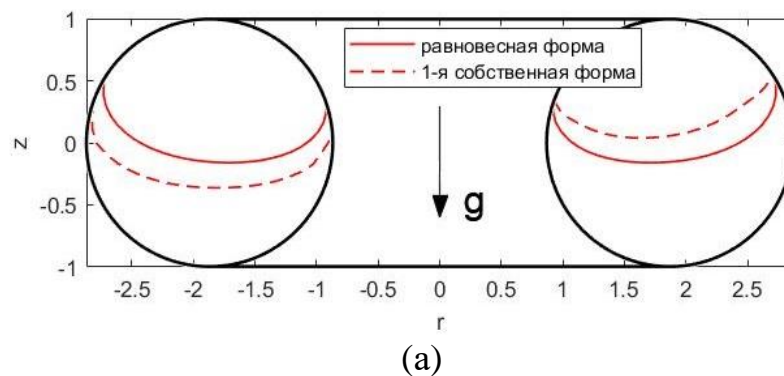


Рис. 3.16. Частоты при сохранении угла смачивания и неподвижной ЛТК.



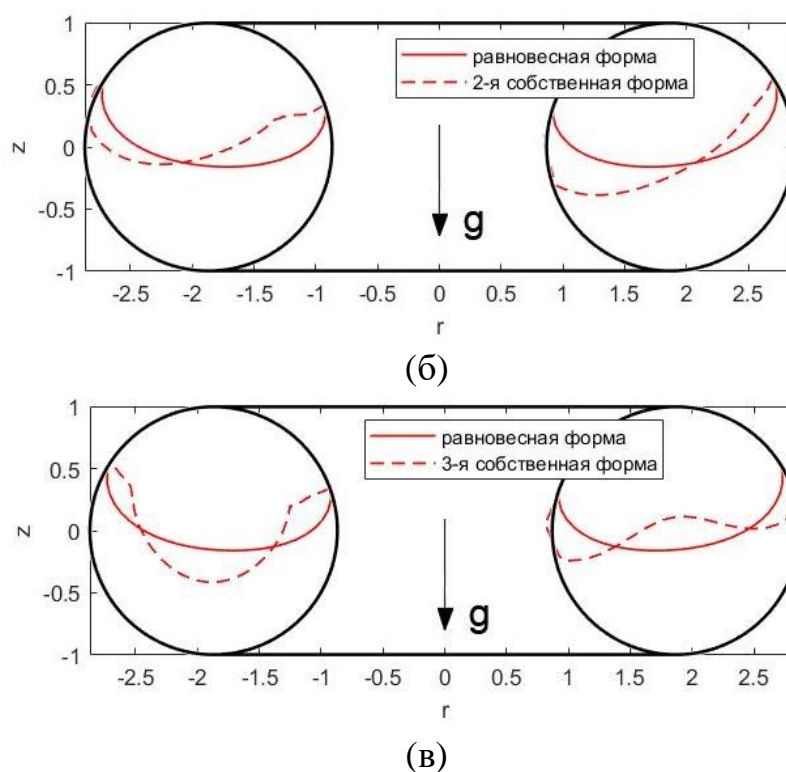


Рис. 3.19. Собственные формы колебаний жидкости с неподвижной ЛТК при $r_1 = 1.87$, $\beta = 50\%$, $B_0 = 5$, $\alpha_0 = 5^\circ$, , где а – $n = 1$, б – $n = 2$, в – $n = 3$.

3.4. Выводы по главе 3

В третьей главе рассмотрены малые колебания капиллярной жидкости в двухсвязных полостях. Основное внимание уделено определению собственных частот и форм малых колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения и проведены численные расчёты в коаксиально-цилиндрических и тороидальных сосудах. Полученные результаты обобщены в следующем:

- Выведены граничные условия на свободной поверхности и на ЛТК, которые чётко отражают капиллярную специфику в исследовании задач малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации. Получены выражения потенциальной энергии, характеризующей работу сил поверхностного натяжения на свободной поверхности и на ЛТК. Получающиеся формулы будут необходимы для разработке механического аналога колебаний капиллярной жидкости, и для оценки диссипации энергии вблизи ЛТК;
- Из полученных результатов колебаний жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах следует, что равновесная свободная поверхность

более искривлена с уменьшением угла смачивания α_0 и искривление свободной поверхности понижает собственные частоты колебаний жидкости. Если число Бонда $B_0 > 5$ и радиус внутренней стенки коаксиального цилиндра $r_1 > 0.2$, угол смачивания α_0 мало влияет на собственные частоты колебания. В этих условиях можно оценить собственные частоты по аналитической формуле, полученной при угле смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$;

- Разработанный алгоритм на основе МКЭ для определения собственных частот и форм малых колебаний капиллярной жидкости пригоден для любого осесимметричного сосуда. Данный алгоритм также легко модифицирован при изменении граничного условия на ЛТК, поведение которой до сих пор исследовано не до конца. Проверка достоверности и сходимости алгоритма проведена на примере сферического сосуда;
- В тороидальных сосудах с повышением числа Бонда B_0 значения собственных частот увеличиваются и количество узлов пересечения равновесной и собственной форм колебаний капиллярной жидкости сходится с экспериментальными результатами тяжёлой жидкости;
- Собственная частота колебаний жидкости с неподвижной ЛТК больше, чем её значение при постоянном угле смачивания, так как защемление ЛТК увеличивает жёсткость системы.

ГЛАВА 4. МЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛОГ И КОЭФФИЦИЕНТ ЗАТУХАНИЯ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ЖИДКОСТИ

В четвёртой главе исследовано моделирование малых движений жидкости в условиях микрогравитации механическим аналогом и обоснованы механизмы диссипации энергии малых колебаний маловязкой жидкости с учётом капиллярного эффекта.

Для моделирования движения жидкости в сосудах часто использованы маятниковые модели или осцилляторы типа масса–пружина при разработке систем управления летательных аппаратов. В условиях микрогравитации необходимо учитывать влияние капиллярного эффекта на динамику жидкости и в данной работе применена спиральная пружина, учитывающая действие сил поверхностного натяжения на свободной поверхности и на ЛТК.

Экспериментальные данные исследования затухания колебаний жидкости дают значения декремента больше, чем расчёты только с использованием теории погранслоя на стенке сосуда. Этот факт говорит о том, что рассеяние энергии колебаний происходит не только в погранслое, но также имеют место и другие явления, к примеру, из-за смачивания и растекания жидкости на стенке сосуда возможна диссипация энергии вблизи ЛТК.

4.1. Механический аналог свободных колебаний капиллярной жидкости

4.1.1. Свободные колебания капиллярной жидкости в неподвижном баке

Ускорение g действует параллельно оси симметрии сосуда и начало цилиндрической системы координат $zr\theta$ находится в центре тора. На свободной поверхности жидкости Γ_0 введена криволинейная система координат $hs\theta$, где координатная линия h направлена по внешней нормали, s означает длину дуги линии меридиана свободной поверхности и полярный угол θ направлен против часовой стрелки вдоль положительной оси z . При этом равновесная свободная поверхность Γ_0 имеет уравнение $h = 0$. Допустим, что жидкость идеальная и совершает потенциальное движение.

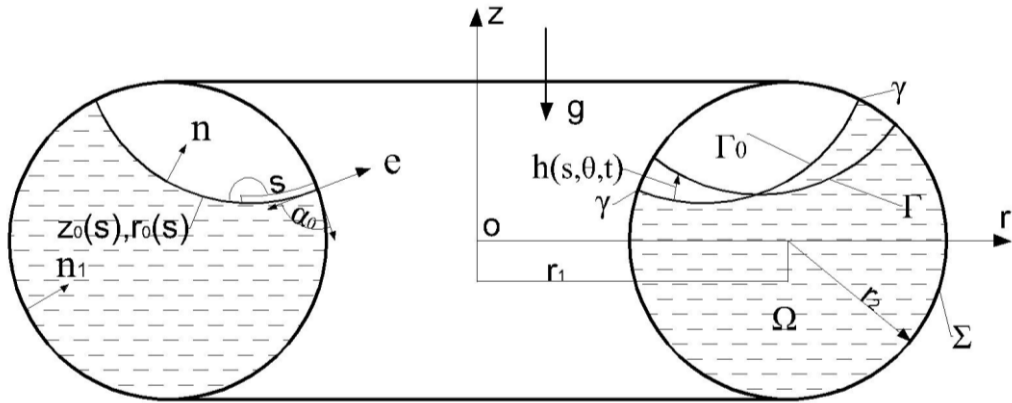


Рис. 4.1. Обозначения параметров жидкости и системы координат:

r_1 и r_2 – радиусы осевой окружности и окружности меридиана тороидального сосуда; γ – линия трёхфазного контакта; α_0 – угол смачивания жидкости; \mathbf{e} – внешняя нормаль линии трёхфазного контакта в касательной плоскости свободной поверхности; $h(s, \theta, t)$ – отклонение возмущённой поверхности Γ от равновесной Γ_0 по внешней нормали; \mathbf{n} и \mathbf{n}_1 – нормали свободной и смоченной поверхностей соответственно; Σ – смачиваемая поверхность стенки сосуда; Ω – область, которую занимает жидкость; $z_0(s)$ и $r_0(s)$ – параметрические функции формы линии меридиана равновесной свободной поверхности Γ_0 .

Введём радиус окружности меридиана r_2 как характерный размер задачи, также плотность жидкости ρ , ускорение g и коэффициент поверхностного натяжения σ как определяющие параметры задачи. Запишем безразмерную формулировку задачи о малых колебаниях жидкости с учётом капиллярного эффекта:

$$\Delta\varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + B_0 h \mathbf{m} \cdot \mathbf{e}_3 - \left[(k_1^2 + k_2^2) h + \Delta_\Gamma h \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0 \text{ на } \gamma,$$

В формулировке задачи $\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = r_{0s}$ – направляющий косинус внешней нормали поверхности Γ_0 с осью z ; k_1 и k_2 – главные кривизны свободной поверхности Γ_0 ; $\Delta_\Gamma = \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{r_{0s}}{r} \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа-Бельтрами на поверхности Γ_0 ; $\chi = (k_1 \cos \alpha_0 - k_1^\Sigma) / \sin \alpha_0$ – коэффициент описания формы

свободной поверхности жидкости и стенки сосуда на ЛТК, k_1^Σ – кривизна поперечного сечения стенки сосуда на ЛТК.

Потенциал скоростей жидкости $\varphi(x, y, z, t)$ и поле смещения свободной поверхности $h(x, y, t)$ представим в виде:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x, y, z) \dot{s}_n(t), \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(x, y) s_n(t),$$

где $s_n(t)$ – обобщённая координата движения жидкости.

Для определения функций φ_n и h_n имеем следующую краевую задачу колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_n = 0 \text{ в } \Omega, \quad B_0 h_n r_{0s} - \left[(k_1^2 + k_2^2) h_n + \Delta_\Gamma h_n \right] = \omega_n^2 \varphi_n \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = h_n \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n = 0 \text{ на } \gamma, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где ω_n^2 – квадрат безразмерной собственной частоты.

Если число волн в окружном направлении сосуда $m = 1$, колебания жидкости асимметричные, т.е. $\varphi_n(x, y, z) = \Phi_n(r, z) \cos \theta$ и $h_n(x, y) = H_n(r) \cos \theta$. Данный случай приводит к переменному давлению в поперечном направлении сосуда и имеет практическое значение при анализе систем стабилизации летательных аппаратов.

Используя полученный потенциал скоростей жидкостей φ , получим гидродинамическую силу, действующую от жидкости на стенку сосуда. Из уравнений гидродинамики [38] следует гидродинамическая сила в виде:

$$\mathbf{F} = -\rho \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{V}}{dt} d\Omega, \quad (4.3)$$

где $\mathbf{V} = \nabla \varphi$ – скорость жидкости.

Скорость жидкости \mathbf{V} выражается через φ и преобразуем \mathbf{F} в виде:

$$\mathbf{F} = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \ddot{s}_n \mathbf{e}_1, \quad (4.4)$$

где λ_n – обобщённый коэффициент гидродинамической силы:

$$\lambda_n = \rho \int_{\Omega} \nabla \varphi_n d\Omega = \rho \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} x d\Gamma_0 = \rho \pi \int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r^2 ds. \quad (4.5)$$

Перепишем кинетическую энергию и потенциальную энергию малых движений жидкости в неподвижном сосуде, полученные в параграфе 3.1:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \mu_n \dot{s}_n^2, \quad \Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (g\eta_n + \sigma\kappa_n) s_n^2. \quad (4.6)$$

В этих выражениях μ_n – присоединённая масса жидкости, а η_n и κ_n – коэффициенты жёсткости, связанные с действием массовых сил и поверхностного натяжения соответственно:

$$\begin{aligned} \mu_n &= \rho \int_{\Omega} \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_n d\Omega = \rho \int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0 = \rho \pi \int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds, \\ \eta_n &= \rho \int_{\Gamma_0} h_n^2 r_{0s} d\Gamma_0 = \rho \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right)^2 r_{0s} d\Gamma_0 = \rho \pi \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \right)^2 r_{0s} r ds, \\ \kappa_n &= \int_{\Gamma_0} \left[(\nabla_{\Gamma} h_n)^2 - (k_1^2 + k_2^2) h_n^2 \right] d\Gamma_0 + \chi \int_{\gamma} h_n^2 d\gamma = \\ &= \int_{\Gamma_0} \left[\left(\nabla_{\Gamma} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right)^2 - (k_1^2 + k_2^2) \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right)^2 \right] d\Gamma_0 + \chi \int_{\gamma} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right)^2 d\gamma = \\ &= \pi \left\{ \int_{\Gamma_0} \left[\left(\nabla_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \right)^2 - (k_1^2 + k_2^2) \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \right)^2 \right] r ds + \left[\chi r \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \right)^2 \right]_{\gamma} \right\}. \end{aligned}$$

Допустим, что в круговом цилиндре радиусом r_0 жидкость с углом смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$ совершает малые колебания в условиях микрогравитации. При исследовании задач статики капиллярной жидкости нам уже известно, что в цилиндрических сосудах при угле смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$ свободная поверхность плоская независимо от числа Бонда B_0 , т.е. $r_{0s} = 1$ и $k_1 = k_2 = \chi = 0$. Потенциальная энергия жидкости глубиной H имеет аналитическое выражение:

$$\Pi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left[\rho g \int_{\Gamma_0} h_n^2 d\Gamma_0 + \sigma \int_{\Gamma_0} (\nabla_{\Gamma} h_n)^2 d\Gamma_0 \right] s_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \mu_n \frac{\xi_n}{r_0} \left(g + \frac{\sigma}{\rho} \frac{\xi_n^2}{r_0^2} \right) \tanh(\xi_n H) s_n^2. \quad (4.7)$$

Первые два ξ_n имеют следующие значения: $\xi_1 = 1.84$, $\xi_2 = 5.33$.

Из приведенного текста следует, что малые движения жидкости в неподвижном сосуде могут быть описаны с помощью набора коэффициентов λ_n , μ_n , η_n , κ_n и обобщённой координаты $s_n(t)$. Это наводит на мысль о том, что жидкость с

распределёнными параметрами может быть заменена механической системой с сосредоточенными параметрами.

4.1.2. Определение параметров механического аналога

Для точного воспроизведения сил, действующих на стенку сосуда от жидкости, в данной работе предложен механический аналог в виде маятника со спиральной пружиной (рис. 4.2). Действие массовых сил учитывается бесконечной системой параллельных маятников и добавлена спиральная пружина для моделирования сил поверхностного натяжения.

Скорость маятника \mathbf{V}_n в неподвижном сосуде записана в виде:

$$\mathbf{V}_n = l_n \dot{\alpha}_n \mathbf{e}_1, \quad n = 1, 2, \dots, \infty,$$

где l_n и $\alpha_n(t)$ – длина стержня маятника и обобщённая координата колебаний n -го маятника (см. рис. 4.2).

Инерционная сила маятника определяется соотношением:

$$\mathbf{F}_m = -\sum_{n=1}^{\infty} m_n \frac{d\mathbf{V}_n}{dt} = -\sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n \ddot{\alpha}_n \mathbf{e}_1. \quad (4.8)$$

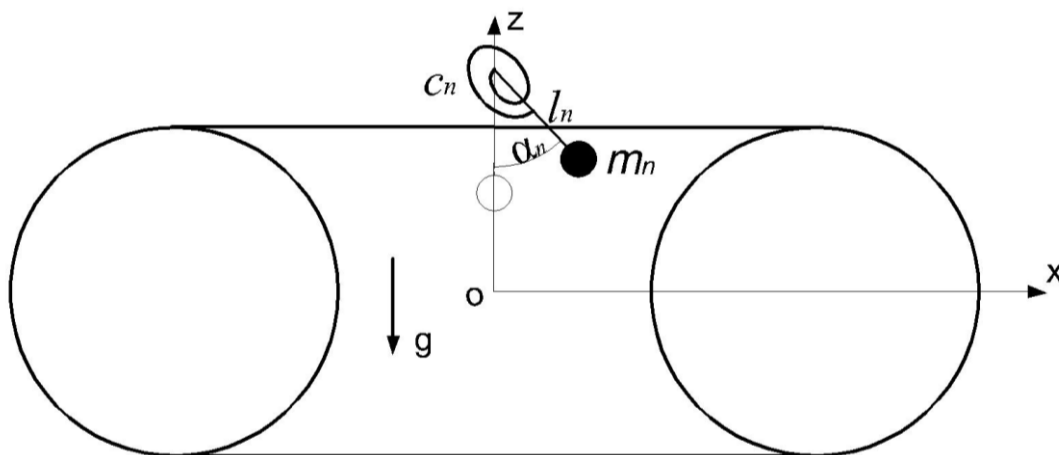


Рис. 4.2. Обозначения параметров маятниковой модели со спиральной пружиной.

Запишем кинетическую энергию и потенциальную энергию малого движения механического аналога в неподвижном сосуде:

$$T_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} m_n l_n^2 \dot{\alpha}_n^2, \quad \Pi_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (m_n g l_n + c_n) \alpha_n^2. \quad (4.9)$$

Параметры механического аналога определены из принципов равенства по силе, кинетической энергии, собственным частотам колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения и маятника со спиральной пружиной.

Масса маятника m_n определена по следующему подходу: инерционная сила механического аналога \mathbf{F}_M и кинетическая энергия T_M равны гидродинамической силе \mathbf{F} и кинетической энергии жидкости T соответственно:

$$\begin{cases} m_n l_n \ddot{\alpha}_n = \lambda_n \ddot{s}_n \\ \frac{1}{2} m_n l_n^2 \dot{\alpha}_n^2 = \frac{1}{2} \mu_n \dot{s}_n^2 \end{cases} \Rightarrow m_n = \frac{\lambda_n^2}{\mu_n}, \frac{s_n}{l_n \alpha_n} = \frac{\lambda_n}{\mu_n}, n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (4.10)$$

Используя уравнение Лагранжа 2-го рода, запишем уравнения о малых колебаниях капиллярной жидкости и маятника со спиральной пружиной:

$$\begin{aligned} \ddot{s}_n + \omega_n^2 s_n = 0, \quad \ddot{\alpha}_n + \omega_{mn}^2 \alpha_n = 0, \\ \text{где } \omega_n^2 = \frac{\eta_n}{\mu_n} \left(g + \sigma \frac{\kappa_n}{\eta_n} \right), \quad \omega_{mn}^2 = \frac{1}{l_n} \left(g + \frac{c_n}{m_n l_n} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Квадрат собственной частоты маятниковой модели ω_{mn}^2 равен квадрату собственной частоты соответствующего тона колебаний жидкости ω_n^2 и получены выражения длины маятника l_n и жёсткости спиральной пружины c_n :

$$l_n = \mu_n / \eta_n, \quad c_n = \sigma m_n l_n \kappa_n / \eta_n. \quad (4.12)$$

Допустим, что в круговом цилиндре радиусом r_0 жидкость с углом смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$ совершает малые колебания и потенциал скоростей $\Phi_n(r, z)$ имеет аналитическое выражение в виде:

$$\Phi_n(r, z) = J_1(\xi_n r / r_0) \frac{\cosh[\xi_n (z / r_0 + H)]}{\cosh(\xi_n H)}.$$

Масса маятника m_n , длина стержня l_n и жёсткость спиральной пружины c_n , определяемые по формулам (4.10) и (4.12), имеют аналитические формулы:

$$m_n = \frac{\lambda_n^2}{\mu_n} = \rho\pi \frac{\left(\int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} r^2 dr \right)^2}{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} r dr} = \rho\pi r_0^3 \frac{2 \tanh(\xi_n H)}{\xi_n (\xi_n^2 - 1)},$$

$$l_n = \frac{\mu_n}{\eta_n} = \frac{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} r dr}{\int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial z} \right)^2 r dr} = \frac{r_0}{\xi_n \tanh(\xi_n H)},$$

$$c_n = \sigma m_n l_n \frac{\kappa_n}{\eta_n} = \sigma m_n l_n \frac{\int_{\Gamma_0} \frac{\partial^3 \Phi_n}{\partial z^3} \frac{\partial \Phi_n}{\partial z} r dr}{\rho \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial z} \right)^2 r dr} = \sigma \pi r_0^2 \frac{2}{\xi_n^2 - 1}.$$

Выражения массы маятника m_n и длины стержня l_n совпадают с результатами К.С. Колесникова при больших силах тяготения [25] и это доказывает правильность разработанного алгоритма. Физический смысл слагаемого $\sigma \pi r_0^2$ заключается в том, что оно означает поверхностную энергию свободной поверхности жидкости. Также заметим, что с увеличением номера n тона колебаний капиллярной жидкости жёсткость спиральной пружины c_n уменьшается.

Введём характерные значения для времени и потенциала через определяющие параметры задачи: $t^* = (r_2^3/\sigma)^{1/2}$, $\varphi^* = r_2^2/t^*$. Применяя преобразования $x^p = r_2 x$, $t^p = t^* t$ и $\varphi^p = \varphi^* \varphi$, параметры механического аналога колебаний капиллярной жидкости записаны в безразмерном виде:

$$m_n = \pi \frac{\left(\int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r^2 ds \right)^2}{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds}, \quad l_n = \frac{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds}{\int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r_0 ds},$$

$$c_n = \frac{\int_{\Gamma_0} \left[\left(\nabla_{\Gamma} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \right)^2 - (k_1^2 + k_2^2) \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \right)^2 \right] ds + \left[\chi r \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \right)^2 \right]_{\gamma}}{\int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r_0 ds}. \quad (4.13)$$

Также получим размерные значения параметров маятников со спиральной пружиной, где знак « p » означает размерную величину:

$$m_n^p = \rho r_2^3 m_n, \quad l_n^p = r_2 l_n, \quad c_n^p = \sigma r_2^2 c_n. \quad (4.14)$$

Приведённый подход определения длины стержня маятника l_n и жёсткости спиральной пружины c_n чётко иллюстрирует физическую картину колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения. Следует отметить, что коэффициенты жёсткости η_n и κ_n , связанные с действием массовых сил и поверхностного натяжения соответственно, сильно зависят от форм равновесной свободной поверхности жидкости.

Здесь приведен другой подход определения безразмерных l_n и c_n , удобный для инженерной практики:

$$\frac{1}{l_n} \left(B_0 + \frac{c_n}{m_n l_n} \right) = \omega_n^{\wedge 2} (B_0 + 1) \Rightarrow l_n = \frac{1}{\omega_n^{*2}} \text{ и } c_n = \frac{m_n}{\omega_n^{*2}}. \quad (4.15)$$

где $\omega_n^{\wedge 2} = \omega_n^2 / (B_0 + 1)$, а квадрат собственной частоты ω_n^2 уже определен при решении задачи на собственные колебания капиллярной жидкости.

Таким образом, выражения всех параметров механического аналога получены и полностью определены из значений ω_n^2 , λ_n , μ_n . Среди них обобщённый коэффициент гидродинамической силы λ_n и приведённая масса μ_n зависят от функций Φ_n и $\partial\Phi_n/\partial n$ на свободной поверхности, и эти функции вместе с квадратом собственной частоты ω_n^2 были получены при решении задачи на собственные частоты и формы колебаний капиллярной жидкости.

Алгоритм определения параметров механического аналога малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации с учётом сил поверхностного натяжения заключается в следующем:

1) разработка алгоритмов отыскания форм равновесной свободной поверхности жидкости в условиях микрогравитации, получение функций $z_0(s)$, $r_0(s)$, $r_{0s}(s)$, $k_1(s)$, $k_2(s)$ в зависимости от длины дуги s и коэффициента χ описания формы свободной поверхности и стенки сосуда на линии трёхфазного контакта;

2) создание геометрической модели области, занимаемой жидкостью, в программе PARTRAN и реализация дискретизации области жидкости линейными треугольными элементами;

3) экспортирование файлов, содержащих информацию треугольных элементов и разработка программы извлечения необходимой информации для модального анализа капиллярной жидкости в MATLAB;

4) определение собственных частот ω_n и форм колебаний $\Phi_n, \partial\Phi_n/\partial n$ жидкости с учётом сил поверхностного натяжения;

5) получение параметров маятников со спиральной пружиной по приведённым в данной работе формулам.

4.1.3. Обсуждение результатов

Отметим, что в данной работе исследованы только асимметричные колебания ($\cos\theta$). В литературе отсутствуют данные о колебаниях капиллярной жидкости в тороидальных сосудах, достоверность разработанного алгоритма по определению параметров механического аналога проведена в примере сферического сосуда в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Проверка достоверности алгоритма в случае сферического сосуда, где $m = \beta 4\pi/3$ – масса жидкости и β – объём жидкости.

	$\beta, \%$	ω_1^2		m_1/m		l_1		c_1	
			[76]		[76]		[76]		[76]
$B_0 = 1,$ $\alpha_0 = 5^\circ$	25	0.566	0.667	0.564	0.210	1.768	1.498	1.059	0.330
	50	0.638	0.706	0.387	0.200	1.567	1.416	1.270	0.593
	78	0.775	1.013	0.168	0.130	1.290	0.988	0.743	0.419
$B_0 = 2,$ $\alpha_0 = 5^\circ$	25	0.762	0.738	0.648	0.308	1.313	1.356	0.755	0.437
	50	0.858	0.816	0.415	0.250	1.165	1.226	1.012	0.642
	78	1.020	1.221	0.175	0.168	0.981	0.820	0.587	0.450
$B_0 = \infty,$ $\alpha_0 = 5^\circ,$ [105]	25	1.299		0.745		0.770		0.601	
	50	1.573		0.580		0.636		0.772	
	78	2.193		0.350		0.456		0.521	

По сравнению с численными значениями в работе [76] видно, что квадрат собственных частот ω_1^2 и длина стержня маятника l_1 имеют хорошее совпадение за исключением случая большого объёма жидкости β . Но масса колеблющейся

жидкости m_1 и жёсткость спиральной пружины c_1 заметно отличаются от результатов в работе [76]. После анализа выражения жёсткости спиральной пружины c_n видно, что разница между значениями c_1 возникает в основном из разницы между массами m_1 . В таблице 4.1 также приведены экспериментальные результаты параметров механического аналога жидкости в наземных условиях ($g=g_0$) [105].

Так как в условиях микрогравитации равновесная свободная поверхность жидкости искривлена и больше жидкости смачиваема на твердой стенке сосуда, меньше жидкости колеблется, т.е. с уменьшением числа Бонда B_0 значение m_1 также уменьшается. Но в работе [76] масса колеблющейся жидкости слишком мала, одной из основных причин может быть является не точное моделирование поведения жидкости вблизи ЛТК. Результаты, полученные по приведенным алгоритмам в данной диссертации, более достоверны.

В тороидальном сосуде больше жидкости участвует в колебаниях при объёме жидкости $\beta = 40\% \sim 90\%$ [97]. В таблицах 4.2 и 4.3 приведены параметры механического аналога малых колебаний жидкости в тороидальных сосудах в условиях микрогравитации. На рис. 4.3. приведены параметры механического аналога малых колебаний капиллярной жидкости в тороидальных сосудах.

С увеличением числа Бонда B_0 квадрат собственной частоты ω_1^2 и масса колеблющейся жидкости основного тона m_1 повышается, а длина стержня l_1 и жёсткость спиральной пружины c_1 уменьшаются. Эти параметры приближаются к значениям, экспериментально полученным в наземных условиях [97].

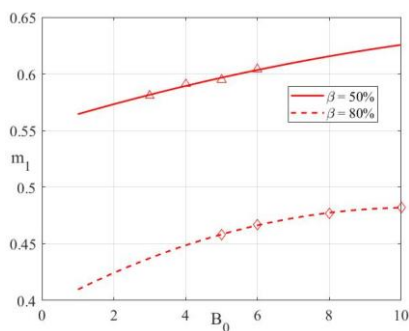
После преобразования этих параметров в размерные имеется следующее соотношение, характеризующее воздействие массовой силы и силы поверхностного натяжения, $m_1^p g l_1^p / c_1^p = B_0$. Данное соотношение означает, что восстанавливающее воздействие силы поверхностного натяжения проявляется только при малых числах Бондах.

Таблица 4.2. Параметры механического аналога колебаний жидкости в тороидальных сосудах при $\beta = 50\%$, $r_1 = 1.868$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $m = 18.436$,

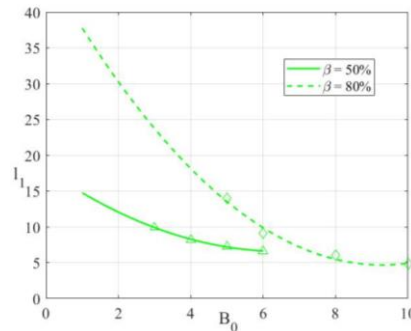
B_0	ω_1^2	m_1/m	l_1	c_1
3	0.101	0.581	9.916	106.2
4	0.122	0.591	8.205	89.41
5	0.138	0.595	7.245	79.46
6	0.151	0.604	6.606	73.60
∞ , [97]	0.226	0.643	4.425	52.45

Таблица 4.3. Параметры механического аналога колебаний жидкости в тороидальных сосудах при $\beta = 80\%$, $r_1 = 1.868$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $m = 29.498$,

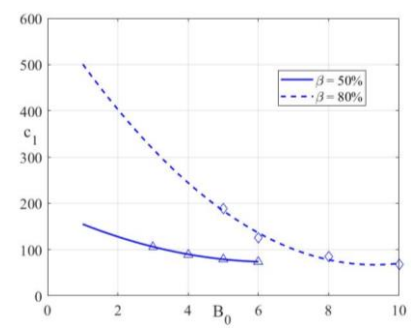
B_0	ω_1^2	m_1/m	l_1	c_1
5	0.072	0.458	13.93	189.2
6	0.110	0.467	9.085	125.9
8	0.167	0.477	5.983	84.66
10	0.210	0.482	4.769	68.18
∞ , [97]	0.406	0.625	2.463	45.66



(a)



(б)



(в)

Рис. 4.3. Масса маятника m_1 (а), длина стрержня l_1 (б) и жёсткость спиральной пружины c_1 (в) колебаний жидкости в тороидальных сосудах.

4.2. Механический аналог вынужденных колебаний капиллярной жидкости

4.2.1. Уравнения движения жидкости в подвижном баке

Рассмотрим движущийся сосуд, частично заполненный капиллярной жидкостью. Введём неподвижную систему координат $Oxyz$ и связанную с фиксированной точкой сосуда $Ox'y'z'$ (рис. 4.4). При этом ось Oz направлена противоположно вектору ускорения \mathbf{g} .

Запишем абсолютную скорость частицы жидкости в подвижном баке:

$$\mathbf{V} = \dot{u}_x \mathbf{e}_1 + \dot{\vartheta}_y \mathbf{e}_2 \times \mathbf{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \nabla \varphi_n \dot{s}_n \text{ в } \Omega, \quad (4.16)$$

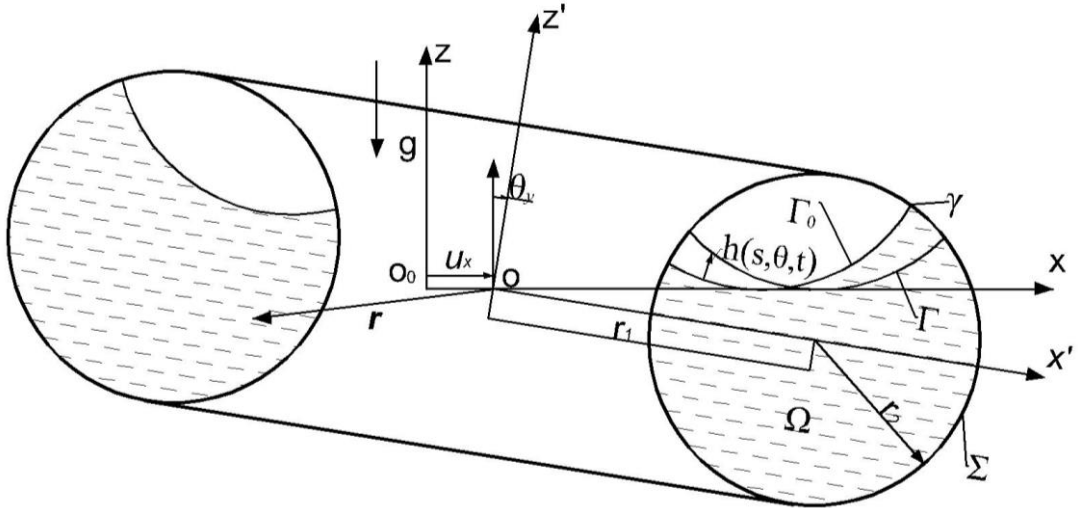


Рис. 4.4. Обозначения параметров жидкости и системы координат:

γ – линия трёхфазного контакта; Γ_0 и Γ – равновесная и возмущённая свободная поверхность жидкости; Σ – смачиваемая поверхность стенки; Ω – область, которую занимает жидкость; h – поле смещения частиц жидкости на свободной поверхности; u_x – малое смещение полюса O сосуда; ϑ_y – малый поворот системы координат сосуда относительно полюса O .

Получим кинетическую энергию системы жидкости в области Ω :

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega} \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} d\Omega = \frac{1}{2} m \dot{u}_x^2 + \frac{1}{2} J \dot{\vartheta}_y^2 + m z_c \dot{u}_x \dot{\vartheta}_y + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \mu_n \dot{s}_n^2 + \lambda_n \dot{u}_x + \lambda_{On} \dot{\vartheta}_y \right) \dot{s}_n. \quad (4.17)$$

В этом выражении m и z_c – суммарная масса и центр массы жидкости, J – присоединённый момент инерции жидкости, μ_n – присоединённая масса жидкости, λ_n и λ_{On} – коэффициенты гидродинамической силы и её момента:

$$m = \rho \int_{\Omega} d\Omega, \quad J = \rho \int_{\Gamma_0 + \Sigma} \psi_y \frac{\partial \psi_y}{\partial n} dS, \quad z_c = \rho \int_{\Omega} z d\Omega / m, \quad \mu_n = \rho \int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0,$$

$$\lambda_n = \rho \int_{\Omega} \mathbf{e}_1 \cdot \nabla \varphi_n d\Omega = \rho \int_{\Gamma_0} x \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0, \quad \lambda_{On} = \rho \int_{\Gamma_0} \psi_y \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0.$$

В этих соотношениях введена функция ψ_y , которая представляет собой потенциал Стокса–Жуковского и определяется следующим образом:

$$\Delta\psi_y = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\psi_y}{\partial n} = \mathbf{r} \times \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 \text{ на } \Gamma_0 \text{ и } \Sigma. \quad (4.18)$$

Для осесимметричного сосуда $\psi_y = -\cos\theta\psi(r, z)$ и задача об определении функции $\psi(r, z)$ заключается в следующем:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = rn_z - zn_r \text{ на } \Gamma \text{ и } \Sigma. \quad (4.19)$$

В дальнейшем определим потенциальную энергию в подвижном баке.

Потенциальная энергия жидкости, покрытой жёсткой крышкой, имеет следующий вид;

$$\Pi^* = \rho g \int_{\Omega} z (\cos\vartheta_y - 1) d\Omega = -\frac{1}{2} \rho g \vartheta_y^2 \int_{\Omega} z d\Omega = -mgz_c \vartheta_y^2. \quad (4.20)$$

Потенциальная энергия жидкости, обусловленная поворотом свободной поверхности, выглядит следующим образом:

$$\Pi^{**} = -\frac{1}{2} \rho g \vartheta_y^2 \int_{\Gamma} \frac{x^2}{r_{0s}} d\Gamma. \quad (4.21)$$

А потенциальная энергия колеблющейся жидкости относительно положения равновесия после поворота запишется в виде:

$$\Pi^{***} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \rho g \int_{\Gamma} (h_n^2 r_{0s} s_n^2 - 2x\vartheta_y h_n s_n + x^2 \vartheta_y^2 / r_{0s}) d\Gamma + \frac{1}{2} \sigma s_n^2 \left[\int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} h_n \cdot \nabla_{\Gamma} h_n - (k_1^2 + k_2^2) h_n^2) d\Gamma + \chi \int_{\Gamma} h_n^2 d\Gamma \right] \right\}. \quad (4.22)$$

Тогда можно получить потенциальную энергию системы жидкости в подвижном баке:

$$\Pi = \Pi^* + \Pi^{**} + \Pi^{***} = -\frac{1}{2} mgz_c \vartheta_y^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[-g \vartheta_y \lambda_n s_n + \frac{1}{2} (g\eta_n + \sigma\kappa_n) s_n^2 \right]. \quad (4.23)$$

В этом выражении η_n и κ_n характеризуют действие массовых сил и сил поверхностного натяжения соответственно и определены в формуле (4.6).

Динамические характеристики жидкости требуются для разработки математических моделей движения летательных аппаратов с учётом подвижности

жидкого топлива в баках. Используя уравнение Лагранжа 2-го рода, получим гидродинамическую силу F_x и её момент M_y , действующие на стенку сосуда:

$$F_x = -m\ddot{u}_x - mz_c\ddot{\vartheta}_y - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \ddot{s}_n, \quad (4.24)$$

$$M_y = -mz_c\ddot{u}_x - J\ddot{\vartheta}_y + mgz_c\vartheta_y - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda_{On} \ddot{s}_n - g\lambda_n s_n \right),$$

и уравнения движения капиллярной жидкости в подвижном баке:

$$\ddot{u}_x + \lambda_{On}/\lambda_n \ddot{\vartheta}_y - g\vartheta_y + \mu_n/\lambda_n \left(\ddot{s}_n + \omega_n^2 s_n \right) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (4.25)$$

Для капиллярной жидкости квадрат собственной частоты колебаний имеет вид $\omega_n^2 = g\eta_n/\mu_n + \sigma\kappa_n/\mu_n$.

4.2.2. Уравнения движения маятниковой модели в подвижном баке

Для точного воспроизведения сил, действующих на стенку сосуда от жидкости, в данной работе предложен механический аналог в виде маятника со спиральной пружиной (рис. 4.5). Действие массовых сил учитывается бесконечной системой параллельных маятников и добавлена спиральная пружина для моделирования сил поверхностного натяжения.

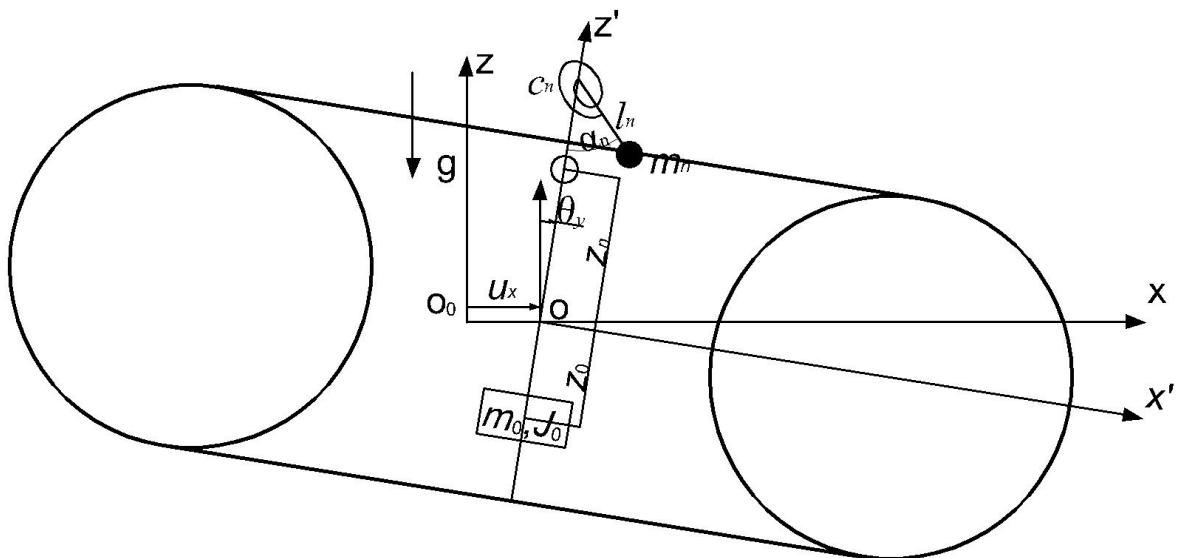


Рис. 4.5. Основные обозначения параметров маятниковой модели со спиральной пружиной в подвижном баке.

Запишем абсолютную скорость неподвижного груза и маятников:

$$\mathbf{V}_0 = \left(\dot{u}_x + \dot{\vartheta}_y z_0 \right) \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{V}_n = \left(\dot{u}_x + \dot{\vartheta}_y z_n + l_n \dot{\alpha}_n \right) \mathbf{e}_1. \quad (4.26)$$

Кинетическая энергия маятниковой модели имеет вид:

$$\begin{aligned} T_M &= \frac{1}{2} m_0 \mathbf{V}_0 \cdot \mathbf{V}_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} m_n \mathbf{V}_n \cdot \mathbf{V}_n + \frac{1}{2} J_0 \dot{\vartheta}_y^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n \right) \dot{u}_x^2 + \frac{1}{2} \left(m_0 z_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n^2 + J_0 \right) \dot{\vartheta}_y^2 + \\ &\quad \left(m_0 z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n \right) \dot{u}_x \dot{\vartheta}_y + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} m_n l_n^2 \dot{\alpha}_n^2 + m_n l_n \dot{u}_x \dot{\alpha}_n + m_n l_n z_n \dot{\vartheta}_y \dot{\alpha}_n \right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Определим потенциальную энергию маятниковой модели со спиральной пружиной в подвижном баке.

Запишем потенциальную энергию затвердевшей маятниковой модели:

$$\Pi^{*M} = -\frac{1}{2} \left(m_0 z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n \right) g \vartheta_y^2. \quad (4.28)$$

Потенциальная энергия, обусловленная поворотом маятников, имеет следующий вид:

$$\Pi^{**M} = -\frac{1}{2} m_n g l_n \vartheta_y^2. \quad (4.29)$$

Потенциальная энергия колебаний маятников со спиральной пружиной:

$$\Pi^{***M} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[m_n g l_n (\alpha_n - \vartheta_y)^2 + c_n \alpha_n^2 \right]. \quad (4.30)$$

Тогда получим потенциальную энергию маятниковой модели со спиральной пружиной в подвижном баке:

$$\begin{aligned} \Pi^M &= \Pi^{*M} + \Pi^{**M} + \Pi^{***M} \\ &= -\frac{1}{2} \left(m_0 z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n \right) g \vartheta_y^2 - \sum_{n=1}^{\infty} m_n g l_n \alpha_n \vartheta_y + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (m_n g l_n + c_n) \alpha_n^2. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Используя уравнение Лагранжа 2-го рода, запишем инерционную силу F_{xM} и её момент M_{yM} , действующие на стенку сосуда от маятниковой модели:

$$\begin{aligned}
F_{xM} &= -\left(m_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n\right) \ddot{u}_x - \left(m_0 z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n\right) \ddot{\vartheta}_y - \sum_{n=1}^{\infty} m_n l_n \ddot{\alpha}_n, \\
M_{yM} &= -\left(m_0 z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n\right) \ddot{u}_x - \left(m_0 z_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n^2 + J_0\right) \ddot{\vartheta}_y + \\
&\quad \left(m_0 z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n\right) g \vartheta_y - \sum_{n=1}^{\infty} \left(m_n l_n z_n \ddot{\alpha}_n - m_n l_n g \alpha_n\right),
\end{aligned} \tag{4.32}$$

и уравнения движения маятниковой модели со спиральной пружиной в подвижном баке:

$$\ddot{u}_x + z_n \ddot{\vartheta}_y - g \vartheta_y + l_n \left(\ddot{\alpha}_n + \omega_{mn}^2 \alpha_n\right) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \tag{4.33}$$

Для маятника со спиральной пружиной квадрат собственной частоты колебаний имеет вид:

$$\omega_{mn}^2 = g \frac{1}{l_n} + \frac{c_n}{m_n l_n^2}. \tag{4.34}$$

По сравнению уравнений движения маятниковой модели со спиральной пружиной и уравнений движения системы жидкости в подвижном баке, получим параметры эквивалентного механического аналога малых колебаний жидкости в подвижном баке. После обоснования этих уравнений утверждено, что параметры эквивалентного механического аналога малых колебаний жидкости не зависят от внешнего возбуждения сосуда.

Запишем эти параметры для осесимметричного сосуда в безразмерном виде:

$$\begin{aligned}
m_n &= \frac{\lambda_n^2}{\mu_n} = \pi \frac{\left(\int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r^2 ds\right)^2}{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} ds}, \quad z_n = \frac{\lambda_{0n}}{\lambda_n} = -\frac{\int_{\Gamma_0} \psi \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds}{\int_{\Gamma_0} \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r^2 ds}, \\
l_n &= \frac{1}{\omega_n^2} = \frac{B_0 + 1}{\omega_n^2}, \quad c_n = \frac{m_n}{\omega_n^2} = m_n \frac{B_0 + 1}{\omega_n^2}, \quad m_0 = m - \sum_{n=1}^{\infty} m_n, \\
z_0 &= \left(m z_c - \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n\right) / m_0, \quad J_0 = J - m_0 z_0^2 - \sum_{n=1}^{\infty} m_n z_n^2.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Для получения их размерных значений используем следующие соотношения:

$$m_n^p = \rho r_2^3 m_n, \quad l_n^p = r_2 l_n, \quad c_n^p = \sigma r_2^2 c_n, \quad z_n^p = r_2 z_n, \quad m_0^p = \rho r_2^3 m_0, \quad z_0^p = r_2 z_0, \quad J_0^p = \rho r_2^5 J_0. \tag{4.36}$$

Из выше приведённого текста разработан алгоритм определения параметров эквивалентной маятниковой модели со спиральной пружиной малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации в плоскости Oxz . Если возмущающее движение сосуда происходит в плоскости Oyz , нужно только изменять знак перед слагаемыми, связанными с второй производной углового смещения $\vartheta_y(t)$ [34].

4.2.3. Определение потенциала Стокса-Жуковского

Определение функции ψ представляет собой задачу Неймана:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = rn_z - zn_r \text{ на } \Gamma_0 + \Sigma. \quad (4.37)$$

Вариационная формулировка задачи выглядит следующим образом:

$$-\int_{\Omega} \Delta \psi \delta \psi d\Omega + \int_{\Gamma_0 + \Sigma} \left[\frac{\partial \psi}{\partial n} - (rn_z - zn_r) \right] \delta \psi d\Gamma_0 = 0. \quad (4.38)$$

Можно преобразовать данную задачу в виде:

$$\delta I_3 = 0, \text{ где } I_3 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 + \frac{\psi^2}{r^2} \right] r dr dz - \int_{\Gamma_0 + \Sigma} \psi (rn_z - zn_r) r ds. \quad (4.39)$$

Для решения потенциала Жуковского также применяется метод конечных элементов. Функции $(\psi)_i$ в i -ом элементе на меридиане поверхности Γ_0 и Σ , и в сечении области жидкости Ω представим по их узловым значениям:

$$(\psi)_i = \sum_{j=1}^u \psi_{ij} M_j \text{ на } \Gamma_0 \text{ и } \Sigma, \quad (\psi)_i = \sum_{j=1}^v \psi_{ij} N_j \text{ на } \Omega, \quad (4.40)$$

где M_j и N_j – функции формы j -го узла элемента линии и треугольника соответственно, ψ_{ij} – j -ое узловое значение функции ψ в i -ом элементе.

Подставив эти функции в функционал I_3

$$I_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \sum_{j=1}^v \sum_{k=1}^v \psi_{ij} \int_{\Omega_i} \left[\frac{\partial N_j}{\partial r} \frac{\partial N_k}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_k}{\partial z} + \frac{N_j N_k}{r^2} \right] r dr dz \psi_{ik} - \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^u \psi_{ij} \int_{(\Gamma_0 + \Sigma)_i} M_j (rn_z - zn_r) r ds, \quad (4.41)$$

получим функционал I_3 в матричном виде:

$$I_3 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^q \Psi_i^T \mathbf{A}_i \Psi_i - \sum_{i=1}^p \Psi_i^T \mathbf{F}_i = \frac{1}{2} \Psi^T \mathbf{A} \Psi - \Psi_1^T \mathbf{F}. \quad (4.42)$$

Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{F} задачи составлены из следующих матриц элемента:

$$\mathbf{A}_i = [A_{jk}^i] \text{ и } A_{jk}^i = \int_{\Omega_i} \left[\frac{\partial N_j}{\partial r} \frac{\partial N_k}{\partial r} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial N_k}{\partial z} + \frac{N_j N_k}{r^2} \right] r dr dz,$$

$$\mathbf{F}_i^T = (F_{1i}^i, F_{2i}^i, \dots, F_{ui}^i) \text{ и } F_j^i = \int_{\Gamma_{0i}} M_j (rn_z - zn_r) r ds.$$

А матрицы Ψ_1 и Ψ задачи составлены из следующих матриц элемента:

$$\Psi_{ii}^T = (\Psi_{i1}, \Psi_{i2}, \dots, \Psi_{iu}), \quad \Psi_i^T = (\Psi_{i1}, \Psi_{i2}, \dots, \Psi_{iv}).$$

При составлении матриц задач Ψ_1 и Ψ следует поставить узловые значения функций на свободной и смачиваемой поверхности в первые строки:

$$\Psi_1^T = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{n_l}), \quad \Psi^T = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{n_l}, \dots, \Psi_{n_g}) = (\Psi_1^T, \Psi_2^T).$$

Здесь n_l – общее количество узлов на линии меридиане поверхности Γ_0 и Σ , а n_g – общее количество узлов в сечении области жидкости Ω . матрица \mathbf{F} имеет размерность $n_l \times 1$ и матрица \mathbf{A} может быть записана в виде:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 \\ \mathbf{A}_3 & \mathbf{A}_4 \end{pmatrix}, \quad (4.43)$$

где \mathbf{A}_1 имеет размерность $n_l \times n_l$, \mathbf{A}_2 в размерности $n_l \times (n_g - n_l)$, \mathbf{A}_3 в размерности $(n_g - n_l) \times n_l$ и \mathbf{A}_4 в размерности $(n_g - n_l) \times (n_g - n_l)$.

Выполнив вариацию функционала $\delta I_3 = 0$

$$\delta I_3 = \delta \Psi_1^T (\mathbf{A}_1 \Psi_1 + \mathbf{A}_2 \Psi_2 - \mathbf{F}) + \delta \Psi_2^T (\mathbf{A}_3 \Psi_1 + \mathbf{A}_4 \Psi_2) = 0, \quad (4.44)$$

получим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{A}_1 \Psi_1 + \mathbf{A}_2 \Psi_2 = \mathbf{F}, \quad \mathbf{A}_3 \Psi_1 + \mathbf{A}_4 \Psi_2 = 0. \quad (4.45)$$

После решения системы уравнений можно определить Ψ_1, Ψ_2 :

$$\Psi_1 = \mathbf{A}_5^{-1} \mathbf{F}, \quad \Psi_2 = -\mathbf{A}_6 \mathbf{F}, \quad (4.46)$$

где $\mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3$, $\mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_4^{-1} \mathbf{A}_3 \mathbf{A}_5^{-1}$.

Следует отметить, чтобы проводить разделение \mathbf{A} на подматрицы, как указаны в работе, нужно поставить узловые значения функции на свободной и смачиваемой поверхности в первые строки матрицы-столбца функции.

4.2.4. Обсуждение результатов

На рис. 4.6. показаны зависимости основных гидродинамических коэффициентов тороидального сосуда от числа Бонда B_0 и объёма жидкости β . Параметры механического аналога колебаний капиллярной жидкости в тороидальных сосудах приведены в таблицах 4.4 – 4.7. Заметим, что маятник основного тона z_1 находится близко к дну сосуда независимо от объёма жидкости β . Подобное явление наблюдалось в исследовании малых колебаний жидкости в сферических сосудах [105], в которых маятник весит в центре сферы в любом объёме жидкости. В экспериментальной работе [97] полученное положение осцилляторов типа массы-пружины также находится близко к дну сосуда.

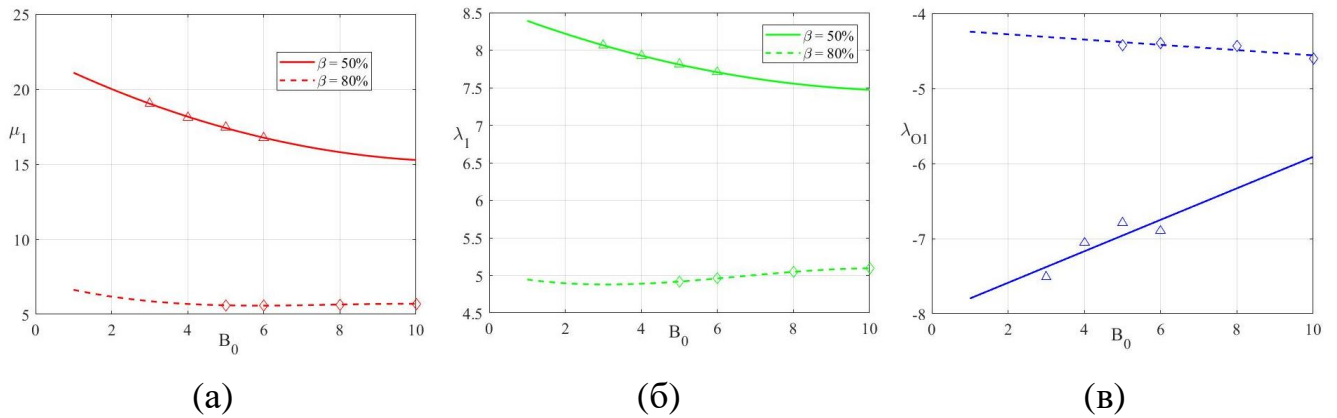


Рис. 4.6. Коэффициент присоединённой массы жидкости μ_1 (а), коэффициент гидродинамической силы λ_1 (б) и её момента λ_{O1} (в).

Таблица 4.4. Параметры механического аналога колебаний жидкости в тороидальных сосудах при $\beta = 50\%$, $r_1 = 1.868$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $m = 18.436$,

B_0	ω_n^2	m_1/m	l_1	c_1
3	0.101	0.581	9.916	106.2
4	0.122	0.591	8.205	89.41
5	0.138	0.595	7.245	79.46
6	0.151	0.604	6.606	73.60
∞ , [97]	0.226	0.643	4.425	52.45

Таблица 4.5. Параметры механического аналога колебаний жидкости в тороидальных сосудах при $\beta = 50\%$, $r_1 = 1.868$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $m = 18.436$,

B_0	z_1	z_0	m_0/m	I_0
3	-0.936	0.324	0.419	33.94
4	-0.915	0.306	0.409	33.22
5	-0.872	0.246	0.405	32.87
6	-0.897	0.321	0.396	32.90

Таблица 4.6. Параметры механического аналога колебаний жидкости в тороидальных сосудах при $\beta = 80\%$, $r_1 = 1.868$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $m = 29.498$,

B_0	ω_n^2	m_1/m	l_1	c_1
5	0.072	0.458	13.93	189.2
6	0.110	0.467	9.085	125.9
8	0.167	0.477	5.983	84.66
10	0.210	0.482	4.769	68.18
∞ , [97]	0.406	0.625	2.463	45.66

Таблица 4.7. Параметры механического аналога колебаний жидкости в тороидальных сосудах при условиях $\beta = 80\%$, $r_1 = 1.868$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $m = 29.498$,

B_0	z_1	z_0	m_0/m	I_0
5	-0.901	0.469	0.542	44.66
6	-0.889	0.481	0.533	44.13
8	-0.862	0.479	0.523	43.76

4.3. Обоснование диссипации энергии колебаний маловязкой жидкости

До сих пор только исследованы колебания идеальной жидкости в слабых гравитационных полях. Все компоненты жидкого топлива обладают в той или иной степени вязкостью. Учёт вязкости жидкости обычно приводит к сложной гидродинамической задаче. Однако для баков с гладкими стенками коэффициенты демпфирования могут определяться по приближённой методике с использованием решения потенциального течения идеальной жидкости. В общем диссипация энергии происходит в пограничном слое стенки сосуда, в основной массе жидкости, на свободной поверхности с присутствием ПАВ и вблизи ЛТК из-за

смачивания и растекания жидкости на стенке. Последние два механизма связаны с капиллярным эффектом.

При слабом затухании логарифмический декремент колебаний жидкости δ_n связан с энергией ΔE_n , рассеиваемой за период, и полной энергией E_n приближённым соотношением:

$$\delta_n = \ln \frac{A_n^i}{A_n^{i+1}} = \ln \frac{\sqrt{E_n + \Delta E_n}}{\sqrt{E_n}} \approx \frac{\Delta E_n}{2E_n}, \quad (4.47)$$

где A_n^i и A_n^{i+1} – амплитуда n -го тона колебаний жидкости i -го и $(i+1)$ -го периода соответственно.

При этом имеется следующее соотношение между логарифмическим декрементом δ_n и коэффициентом демпфирования ε_n :

$$\delta_n = \ln \frac{A_n^i}{A_n^{i+1}} = \ln \frac{e^{-\varepsilon_n t}}{e^{-\varepsilon_n (t+T_n)}} = \varepsilon_n T_n = \varepsilon_n \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_n^2 - \varepsilon_n^2}} \approx 2\pi \frac{\varepsilon_n}{\omega_n}. \quad (4.48)$$

Здесь T_n – условный период затухающих колебаний маловязкой жидкости.

В дальнейшем приведены оценки коэффициентов демпфирования для каждого механизма диссипации энергии.

4.3.1. Диссипация энергии в погранслое вблизи стенки сосуда

Из теоретических исследований [33] следует, что диссипация энергии колебаний жидкости в гладком сосуде происходит в основном в пристеночном слое стенки, характерная толщина которого в порядке $\sqrt{2\nu/\omega_n}$, где ν – кинематический коэффициент вязкости и ω_n – собственная частота колебаний жидкости. На главе 3 уже исследовано влияние изменения интенсивности гравитационного поля на собственную частоту и с уменьшением интенсивности гравитационного поля собственная частота уменьшается. Например, для основного тона колебаний воды глубиной 1 м в круговом цилиндре радиусом 1 м собственная частота в наземных условиях $\omega_1 = 4,2 \text{ с}^{-1}$ и характерная толщина пограничного слоя стенки равна 0.7 мм, а при полной невесомости с углом смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$ собственная частота $\omega_1 = 0,021 \text{ с}^{-1}$ и характерная толщина пограничного слоя стенки равна 10 мм. Для этих

двух важных предельных случаев характерная толщина пограничного слоя стенки пренебрежимо мала по сравнению с характерными размерами сосуда.

Диссипативные силы можно определить как для пластинки, совершающей гармонические колебания в маловязкой жидкости в своей плоскости, и при этом принять за распределение скоростей жидкости на стенках соответствующее распределение поля скоростей для идеальной жидкости вблизи смачиваемой поверхности стенки. Диссипативная сила, действующая на единицу площади смоченной поверхности стенки сосуда, имеет следующий вид [33]:

$$F_{\tau n}^{\Sigma} = -\rho \sqrt{\frac{\omega_n \nu}{2}} V_{\tau n}^{\Sigma}, \quad (4.49)$$

где ρ и $V_{\tau n}^{\Sigma}$ – плотность жидкости и касательная составляющая скорости жидкости на стенках, соответствующей n -у тону колебаний:

$$V_{\tau n}^{\Sigma} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \dot{s}_n \text{ на } \Sigma, \quad s_n = A_n \sin(\omega_n t + \beta_n).$$

Здесь потенциал скоростей φ_n определяется при решении задачи малых колебаний жидкости, а A_n и β_n определены из начальных условий.

Пусть скорость $V_{\tau n}^{\Sigma}$ известна, диссипация энергии колебаний жидкости может быть определена как работа диссипативных сил за период:

$$\Delta E_n^{\Sigma} = \rho \sqrt{\frac{\omega_n \nu}{2}} \int_{\Sigma} \int_0^{T_n} (V_{\tau n}^{\Sigma})^2 dt d\Sigma = \rho \pi A_n^2 \omega_n \sqrt{\frac{\omega_n \nu}{2}} \int_{\Sigma} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \right)^2 d\Sigma. \quad (4.50)$$

Определим полную энергию системы жидкости:

$$E = T + \Pi = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma_0} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} + gh^2 r_{0s} - \frac{\sigma}{\rho} 2H'h \right) d\Gamma_0 = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma_0} \left(\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} - h \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) d\Gamma_0. \quad (4.51)$$

Так как φ и h имеют следующие выражения:

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \dot{s}_n, \quad h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n s_n, \quad h_n = \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \text{ на } \Gamma_0,$$

$$\int_{\Gamma_0} \varphi_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial n} d\Gamma_0 = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \int_{\Gamma_0} \varphi_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} d\Gamma_0, & i = j \end{cases}$$

получим полную энергию n -го тона колебаний системы жидкости:

$$\begin{aligned}
E_n &= \frac{1}{2} \rho A_n^2 \omega_n^2 \int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0 \left[\cos^2(\omega_n t + \beta_n) + \sin^2(\omega_n t + \beta_n) \right] \\
&= \frac{1}{2} \rho A_n^2 \omega_n^2 \int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0.
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Тогда определим выражение декремента вблизи стенки сосуда δ_n^Σ :

$$\delta_n^\Sigma = \frac{\Delta E_n^\Sigma}{2E_n} = \pi \sqrt{\frac{v}{2\omega_n}} \frac{\int_\Sigma \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \right)^2 d\Sigma}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0}. \tag{4.53}$$

Введём характерный размер задачи l и применяем преобразование $x = lx'$ в δ_n^Σ . Получим безразмерный δ_n^Σ , опуская знак «'» над безразмерными величинами:

$$\delta_n^\Sigma = \frac{\pi}{\sqrt{2\text{Re}_n}} \frac{\int_\Sigma \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \right)^2 d\Sigma}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0}, \tag{4.54}$$

где $\text{Re}_n = \omega_n l^2 / v$ – критерий Рейнольдса и присутствие Re_n означает, что все функции в интегралах (4.54) безразмерные.

4.3.2. Диссипация энергии в основной массе жидкости

Запишем энергию рассеивания, приходящуюся на единицу объёма и времени [52]:

$$F_n^\Omega = \rho v \kappa(\mathbf{V}_n), \text{ где } \mathbf{V}_n = V_{nx} \mathbf{e}_1 + V_{ny} \mathbf{e}_2 + V_{nz} \mathbf{e}_3. \tag{4.55}$$

Функция $\kappa(\mathbf{V}_n)$ имеет следующее соотношение:

$$\kappa(\mathbf{V}_n) = 2 \left(\frac{\partial V_{nx}}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V_{ny}}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V_{nz}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{ny}}{\partial x} + \frac{\partial V_{nx}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{nz}}{\partial y} + \frac{\partial V_{ny}}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{nx}}{\partial z} + \frac{\partial V_{nz}}{\partial x} \right)^2.$$

Допустим, что поле скоростей жидкости с малой вязкостью в основной массе жидкости мало отличается от поля скоростей жидкости без учёта вязкости. И можно записать функцию $\kappa(\mathbf{V}_n)$ через потенциал скоростей идеальной жидкости:

$$\kappa \left(\nabla \varphi_n \dot{s}_n \right) = \left(\dot{s}_n \right)^2 \left[2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y \partial z} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial z} \right)^2 \right].$$

Определим диссипацию энергии колебаний жидкости в основном объёме:

$$\Delta E_n^\Omega = \rho v \int_\Omega \int_0^{T_n} \kappa \left(\nabla \varphi_n \dot{s}_n \right) dt d\Omega = \rho \pi A_n^2 \omega_n v \int_\Omega \kappa(\nabla \varphi_n) d\Omega. \quad (4.56)$$

Здесь функция $\kappa(\nabla \varphi_n)$ имеет следующий вид:

$$\kappa(\nabla \varphi_n) = \left[2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y \partial z} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial z} \right)^2 \right]. \quad (4.57)$$

Тогда получим выражение декремента в основной массе жидкости δ_n^Ω :

$$\delta_n^\Omega = \frac{\Delta E_n^\Omega}{2E_n} = \frac{\pi v \int_\Omega \kappa(\nabla \varphi_n) d\Omega}{\omega_n \int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0}. \quad (4.58)$$

Аналогично δ_n^Σ , запишем выражение δ_n^Ω в безразмерном виде:

$$\delta_n^\Omega = \frac{\pi \int_\Omega \kappa(\nabla \varphi_n) d\Omega}{\text{Re}_n \int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0}. \quad (4.59)$$

Заметим, что логарифмический декремент в основной массе жидкости δ_n^Ω обратно пропорционален безразмерному параметру Re_n , а значение декремента δ_n^Σ вблизи стенки сосуда – корню Re_n . При большом числе Re_n можно пренебречь диссипацией энергии в основной массе жидкости, а при малом параметре Re_n , например, в случае малых собственных частот ω_n или малого размера сосуда l или большого коэффициента вязкости ν , нужно учитывать влияние диссипации энергии в основной массе жидкости на затухание колебаний жидкости.

4.3.3. Диссипация энергии на загрязнённой свободной поверхности

Поверхностное натяжение весьма чувствительны к примесям и загрязнениям, подающим на свободные поверхности, и особенно к наличию в них ПАВ. Обычно с увеличением концентрации ПАВ поверхностное натяжение уменьшается и после достижения определённой концентрации ПАВ поверхностное натяжение больше не изменяется. При колебаниях свободной поверхности жидкости возникает градиент концентрации ПАВ, вследствие которого градиент поверхностного натяжения вызывает перенос вещества вдоль поверхности. В результате в погранслое свободной поверхности происходит диссипация энергии.

Допустим, что касательная составляющая скорости $u_{\tau n}$ частицы жидкости на свободной поверхности пропорциональна касательной составляющей скорости идеальной жидкости, можно определить относительную скорость жидкости в погранслое свободной поверхности:

$$V_{\tau n}^{\Gamma} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \dot{s}_n - u_{\tau n} = (1 - C_{\Gamma}) \frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \dot{s}_n, \quad (4.60)$$

где C_{Γ} – коэффициент пропорциональности скоростей, определяемый по методике в статье Майлса [98].

Определим диссипативную силу, действующую на единицу площади свободной поверхности:

$$F_{\tau n}^{\Gamma} = -\rho \sqrt{\frac{\omega_n v}{2}} V_{\tau n}^{\Gamma}, \quad (4.61)$$

и диссипация энергии колебаний жидкости вблизи свободной поверхности определена по следующему выражению:

$$\Delta E_n^{\Gamma} = \rho \sqrt{\frac{\omega_n v}{2}} \int_{\Gamma_0} \int_0^{T_n} (V_{\tau n}^{\Gamma})^2 dt d\Gamma_0 = \rho \pi A_n^2 \omega_n \sqrt{\frac{\omega_n v}{2}} \int_{\Gamma_0} (1 - C_{\Gamma})^2 \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \right)^2 d\Gamma_0. \quad (4.62)$$

Получим выражение декремента вблизи свободной поверхности δ_n^{Γ} :

$$\delta_n^{\Gamma} = \frac{\Delta E_n^{\Gamma}}{2E_n} = \pi \sqrt{\frac{v}{2\omega_n}} \frac{\int_{\Gamma_0} (1 - C_{\Gamma})^2 \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \right)^2 d\Gamma_0}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0}. \quad (4.63)$$

Аналогично δ_n^{Σ} , запишем выражение δ_n^{Γ} в безразмерном виде:

$$\delta_n^{\Gamma} = \frac{\pi}{\sqrt{2\text{Re}_n}} \frac{\int_{\Gamma_0} (1 - C_{\Gamma})^2 \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \right)^2 d\Gamma_0}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0}. \quad (4.64)$$

При $C_{\Gamma} = 0$, т.е. свободная поверхность рассматривается как не растянутая плёнка, логарифмический декремент вблизи свободной поверхности δ_n^{Γ} имеет один и тот же порядок с значением декремента вблизи стенки сосуда δ_n^{Σ} :

$$\delta_n^\Gamma = \frac{\pi}{\sqrt{2 \operatorname{Re}_n}} \frac{\int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \right)^2 d\Gamma_0}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0}. \quad (4.65)$$

При $C_\Gamma = 1$, т.е. свободная поверхность чиста и на ней нет ПАВ, можно пренебречь влиянием поверхностного слоя вихревого движения жидкости на свободной поверхности и $\delta_n^\Gamma = 0$.

4.3.4. Диссипация энергии вблизи линии трёхфазного контакта

В процессе колебаний жидкости динамический угол смачивания часто отличается от статического и из условия Дюпре-Юнга известно, что при изменении угла смачивания возникают касательные трения на линии трёхфазного контакта.

Допустим, что касательное трение, действующее на единицу длины линии контакта, пропорционально скорости жидкости на стенке сосуда [5]:

$$F_{\tau n}^\gamma = -\mu_\gamma V_{\tau n}^\gamma \text{ на } \gamma, \quad V_{\tau n}^\gamma = \frac{1}{\sin \alpha_0} \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \cdot s_n, \quad (4.66)$$

где μ_γ – введённый параметр, имеющий размерность динамического коэффициента вязкости, а α_0 – статический угол смачивания.

Определим диссипацию энергии колебаний жидкости на ЛТК за период:

$$\Delta E_n^\gamma = \mu_\gamma \int_0^{T_n} \int_\gamma (V_{\tau n}^\gamma)^2 dt d\gamma = \mu_\gamma \frac{\pi A_n^2 \omega_n}{\sin^2 \alpha_0} \int_\gamma \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right)^2 d\gamma. \quad (4.67)$$

Получим выражение декремента на линии трёхфазного контакта δ_n^γ :

$$\delta_n^\gamma = \frac{\Delta E_n^\gamma}{2E_n} = \frac{\pi \mu_\gamma}{\rho \omega_n \sin^2 \alpha_0} \frac{\int_\gamma \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right)^2 d\gamma}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0}. \quad (4.68)$$

Аналогично δ_n^Σ , запишем выражение δ_n^γ в безразмерном виде:

$$\delta_n^\gamma = \frac{\pi}{\operatorname{Re}_n^* \sin^2 \alpha_0} \frac{\int_\gamma \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial n} \right)^2 d\gamma}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0}, \quad \text{где } \operatorname{Re}_n^* = \frac{\rho \omega_n l^2}{\mu_\gamma}. \quad (4.69)$$

Для реального жидкого топлива в баках угол смачивания α_0 порядка 5° и из формулы δ_n^γ следует, что вблизи ЛТК может быть возникает заметная диссипация энергии колебаний жидкости. Для оценки значения δ_n^γ предложен алгоритм на основе МКЭ в следующем параграфе.

На основе предыдущих обоснований механизмов диссипации энергии движения маловязкой жидкости получим декремент колебаний жидкости δ_n :

$$\delta_n = \delta_n^\Sigma + \delta_n^\Omega + \delta_n^\Gamma + \delta_n^\gamma, \quad (4.70)$$

где δ_n^Σ , δ_n^Ω , δ_n^Γ и δ_n^γ – логарифмические декременты вблизи стенки сосуда, в основной массе жидкости, на загрязненной свободной поверхности и на линии трёхфазного контакта соответственно:

$$\begin{aligned} \delta_n^\Sigma &= \frac{\pi}{\sqrt{2\text{Re}_n}} \frac{\int_\Sigma \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \right)^2 d\Sigma}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0} \text{ на } \Sigma, \delta_n^\Omega = \frac{\pi}{\text{Re}_n} \frac{\int_\Omega \kappa(\nabla \varphi_n) d\Omega}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0} \text{ в } \Omega, \\ \delta_n^\Gamma &= \frac{\pi}{\sqrt{2\text{Re}_n}} \frac{\int_{\Gamma_0} (1-C_\Gamma)^2 \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \right)^2 d\Gamma_0}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0} \text{ на } \Gamma, \delta_n^\gamma = \frac{\pi}{\text{Re}_n^* \sin^2 \alpha_0} \frac{\int_\gamma \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial \tau} \right)^2 d\gamma}{\int_{\Gamma_0} \varphi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial n} d\Gamma_0} \text{ на } \gamma \end{aligned} \quad (4.71)$$

где $\text{Re}_n = \omega_n l^2 / \nu$ и $\text{Re}_n^* = \rho \omega_n l^2 / \mu_\gamma$ – введённые безразмерные параметры, C_Γ – коэффициент пропорциональности скоростей частицы на свободной поверхности жидкости, $\kappa(\nabla \varphi_n)$ характеризует рассеяние энергии на единицу объёма жидкости:

$$\kappa(\nabla \varphi_n) = 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial z^2} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial y} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial y \partial z} \right)^2 + 4 \left(\frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x \partial z} \right)^2.$$

Для асимметричных колебаний (4.71) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_n^\Sigma &= \frac{\pi}{\sqrt{2\text{Re}_n}} \frac{\int_\Sigma \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} \right)^2 r d\tau}{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds} \text{ на } \Sigma, \delta_n^\Omega = \frac{\pi}{\text{Re}_n} \frac{\int_\Omega \kappa(\nabla \Phi_n) r dr dz}{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds} \text{ в } \Omega, \\ \delta_n^\Gamma &= \frac{\pi}{\sqrt{2\text{Re}_n}} \frac{\int_{\Gamma_0} (1-C_\Gamma)^2 \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} \right)^2 r ds}{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds} \text{ на } \Gamma_0, \delta_n^\gamma = \frac{\pi}{\text{Re}_n^* \sin^2 \alpha_0} \frac{\left[r \left(\frac{\partial \Phi_n}{\partial \tau} \right)^2 \right]_\gamma}{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial n} r ds} \text{ на } \gamma. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Заметим, что коэффициент демпфирования малых колебаний жидкого топлива в гладких сосудах определен из функций поля скоростей жидкости на свободной поверхности $\partial\Phi_n/\partial n$ и потенциала скоростей жидкости Φ_n , которые вместе с собственными частотами ω_n получены при решении задачи малых колебаний жидкости с учётом сил поверхностного натяжения.

В дальнейшем приведен другой подход определения δ_n , более удобный для инженерной практики [34]:

$$\delta_n = \sqrt{2}\delta_n^\Sigma = \frac{\pi}{\sqrt{\text{Re}_n}} \frac{\int_\Sigma \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial\tau}\right)^2 r d\tau}{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial\Phi_n}{\partial n} r ds}. \quad (4.73)$$

Для учёта влияния вязкости жидкости необходимо добавить линейный демпфер (рис. 4.7) в маятниковой модели со спиральной пружиной, разработанной в первых двух параграфах данной главы.

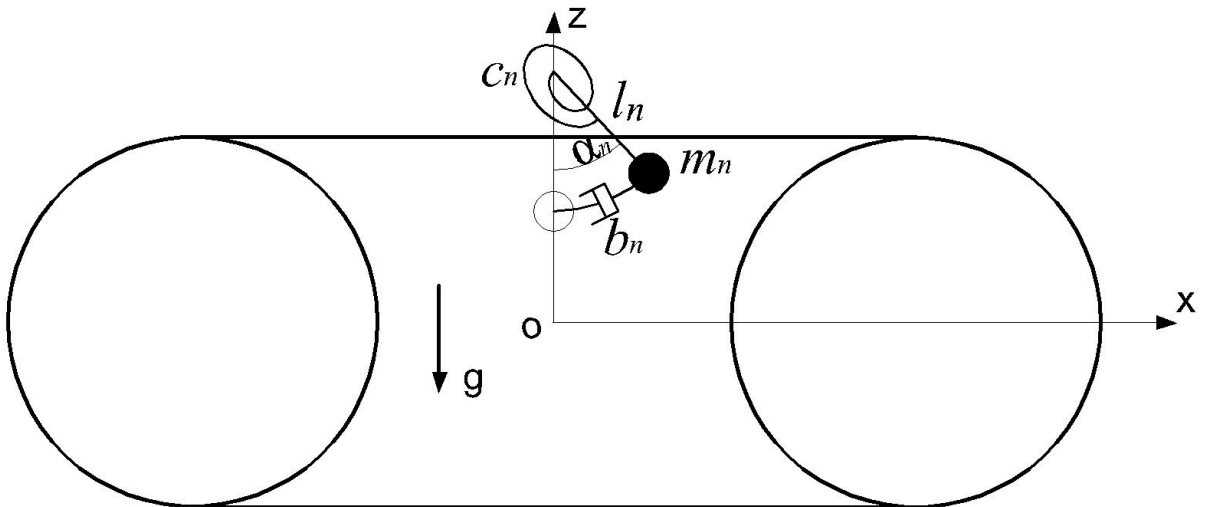


Рис. 4.7. Обозначение параметров механического аналога колебаний маловязкой жидкости с учётом капиллярного эффекта.

Сразу запишем диссипативный коэффициент демпфера b_n :

$$b_n = m_n \omega_n \delta_n / \pi = \frac{m_n \omega_n}{\sqrt{\text{Re}_n}} \frac{\int_\Sigma \left(\frac{\partial\Phi_n}{\partial\tau}\right)^2 r d\tau}{\int_{\Gamma_0} \Phi_n \frac{\partial\Phi_n}{\partial n} r ds}. \quad (4.74)$$

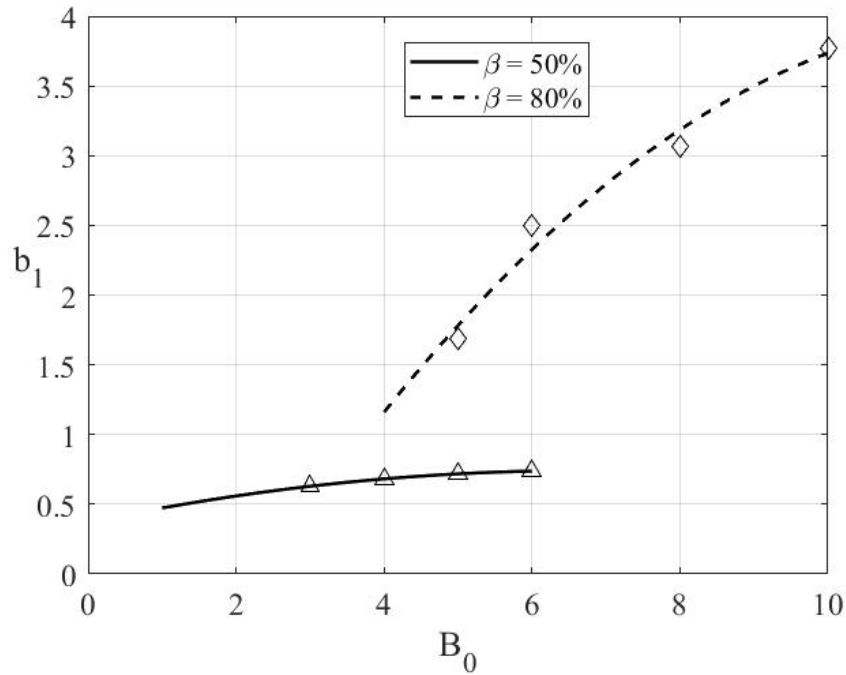


Рис. 4.8. Диссипативный коэффициент демпфера b_1 в зависимости от числа Бонда и объема жидкости.

Диссипативный коэффициент демпфера в зависимости от числа Бонда и объёма жидкости приведён на рис. 4.8. Диссипация энергии в основном происходит в пограничном слое стенки сосуда, близком к ЛТК [113]. Из качественного анализа выражения b_1 следует, что его значение пропорционально $r_\gamma \sqrt{\omega_n}$, где r_γ означает радиус круга ЛТК. С увеличением числа Бонда B_0 частота колебаний ω_n повышается и r_γ также сильно увеличивается при объеме жидкости $\beta = 80\%$. В условиях микрогравитации декремент колебаний жидкости δ_n заметно увеличивается за счет уменьшения собственной частоты в выражении $Re_n = \omega_n l^2 / \nu$ и в этом заключается особенность исследования диссипации энергии колебаний маловязкой жидкости в слабых гравитационных полях.

4.4. Оценка коэффициента затухания колебаний жидкости вблизи линии трёхфазного контакта

Ускорение g действует параллельно оси симметрии сосуда и начало цилиндрической системы координат $zr\theta$ находится в центре тора (рис. 4.9). На свободной поверхности жидкости Γ_0 введена криволинейная система координат $hs\theta$, где координатная линия h направлена по внешней нормали, s означает длину

дуги линии меридиана свободной поверхности и полярный угол θ направлен против часовой стрелки вдоль положительной оси z . При этом равновесная свободная поверхность Γ_0 имеет уравнение $h = 0$.

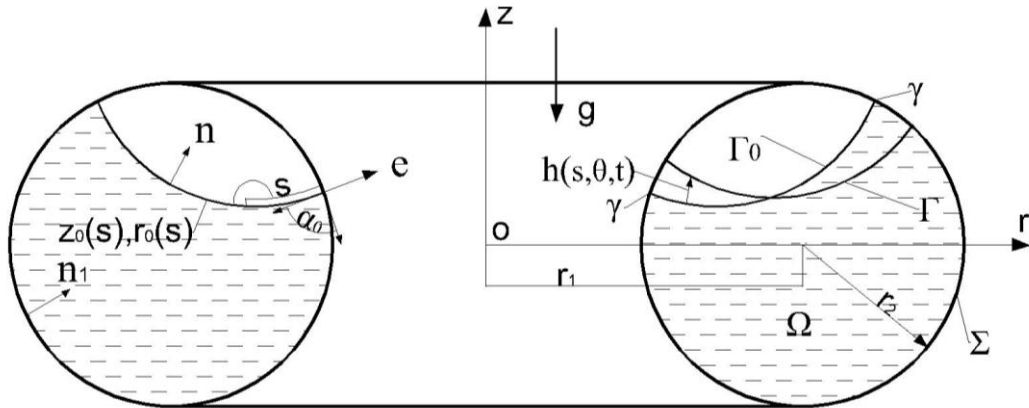


Рис. 4.9. Основные параметры жидкости и системы координат:

r_1 и r_2 – радиусы осевой окружности и окружности меридиана тороидального сосуда; γ – линия трёхфазного контакта; α_0 – угол смачивания жидкости; e – внешняя нормаль линии трёхфазного контакта в касательной плоскости свободной поверхности; $h(s, \theta, t)$ – отклонение возмущённой поверхности Γ от равновесной Γ_0 по внешней нормали; n и n_1 – нормали свободной и смоченной поверхностей соответственно; Σ – смачиваемая поверхность стенки сосуда; Ω – область, которую занимает жидкость; $z_0(s)$ и $r_0(s)$ – параметрические функции формы линии меридиана равновесной свободной поверхности Γ_0 .

Жидкость идеальная и несжимаемая, ее движение малое и потенциальное. Форма равновесной свободной поверхности уже определена ($z = z_0(s)$ и $r = r_0(s)$). Малые колебания жидкости в сосудах удовлетворяют:

- уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \text{ в } \Omega, \quad (4.75)$$

- условию непротекания на смоченной поверхности сосуда

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma. \quad (4.76)$$

Допустим, что форма возмущённой свободной поверхности $F(s, \theta, h, t)$ имеет вид $F(s, \theta, h, t) = h(s, \theta, t) - h$ и запишем кинематическое условие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0. \quad (4.77)$$

Чтобы учитывать граничное условие на ЛТК с учётом диссипации энергии в процессе плескания жидкости, в дальнейшем выведем динамическое условие на свободной поверхности жидкости и граничное условие на ЛТК на основе принципа Гамильтона–Остроградского для неконсервативной системы.

Допустим, что на линии контакта проявляются касательные напряжения трения, пропорциональные скорости жидкости на стенках сосуда:

$$F_\tau = -\mu_\gamma \frac{\partial h}{\partial t} \frac{1}{\sin \alpha_0}.$$

Определим работу напряжений трения на линии трёхфазного контакта на поле возможных перемещений $\delta h / \sin \alpha_0$:

$$\delta Q = \int_\gamma F_\tau \frac{\delta h}{\sin \alpha_0} d\gamma = - \int_\gamma \frac{\mu_\gamma}{\sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t} \delta h d\gamma.$$

Используя вариационный принцип Гамильтона – Остроградского для неконсервативной системы [11], имеем следующее соотношение:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta Q dt.$$

В этом соотношении кинетическая энергия T и потенциальная энергия Π малых движений жидкости с учётом сил поверхностного натяжения имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} \rho \int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi d\Omega = \frac{1}{2} \rho \int_{\Gamma_0} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \rho g \int_{\Gamma_0} h^2 r_{0s} d\Gamma + \frac{1}{2} \sigma \int_{\Gamma_0} \left[\nabla_\Gamma h \nabla_\Gamma h - (k_1^2 + k_2^2) h^2 \right] d\Gamma + \frac{1}{2} \sigma \int_\gamma \chi h^2 d\gamma.$$

Здесь r_{0s} – направляющий косинус внешней нормали свободной поверхности с осью z , k_1 и k_2 – кривизны свободной поверхности Γ_0 , $\chi = (k_1 \cos \alpha_0 - k_1^\Sigma) / \sin \alpha_0$ – коэффициент описания формы поверхности Γ_0 и стенки сосуда на ЛТК, k_1^Σ – кривизна поперечного сечения стенки сосуда на ЛТК.

Причем вариация δh на свободной поверхности и на линии трёхфазного контакта должна удовлетворять условиям изохронности:

$$\delta h_{t=t_1} = \delta h_{t=t_2} = 0.$$

Подставив вариации потенциальной энергии и кинетической энергии в формулу Гамильтона – Остроградского, получим следующее соотношение:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\rho \int_{\Gamma_0} \varphi \frac{\partial \delta h}{\partial t} d\Gamma - \delta \Pi \right) dt = - \int_{t_1}^{t_2} \delta Q dt.$$

Интегрируя первое слагаемое по частям по t в левой части уравнения и учитывая выражение $\delta \Pi$ и δQ , получим следующее вариационное соотношение:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \int_{\Gamma_0} \left[\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \frac{\partial z}{\partial n} h - \sigma \left[(k_1^2 + k_2^2) h + \Delta_\Gamma h \right] \right] \delta h d\Gamma + \sigma \int_\gamma \left[\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h + \frac{\mu_\gamma}{\sigma \sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t} \right] \delta h d\gamma \right\} dt = 0.$$

Таким образом, получены динамическое условие на свободной поверхности и граничное условие на ЛТК малых колебаний капиллярной жидкости:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + g \frac{\partial z}{\partial n} h - \frac{\sigma}{\rho} \left[(k_1^2 + k_2^2) h + \Delta_\Gamma h \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0. \quad (4.78)$$

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h + \frac{\mu_\gamma}{\sigma \sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \text{ на } \gamma. \quad (4.79)$$

Из условия (4.79) на ЛТК получены два важных предельных случая:

1). $\mu_\gamma = 0$, т.е. имеем условие о сохранении угла смачивания [2, 44]:

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = 0 \text{ на } \gamma. \quad (4.80)$$

2). $\mu_\gamma \rightarrow \infty$, т.е. имеется условие неподвижной ЛТК:

$$h = 0 \text{ на } \gamma. \quad (4.81)$$

В монографиях Б.И. Рабиновича и Г.Н. Микишева [34, 47] систематическое рассогласование экспериментальных и теоретических значений коэффициента затухания составляет $\sqrt{2}$ раза. По рассуждениям в монографии [5] показано, что неучёт эффектов вблизи линии трёхфазного контакта является одной из основных причин рассогласования. Полученное граничное условие (4.79) даёт физическое объяснение данного рассогласования и его частный случай совпадает с предложенным граничным условием колебаний жидкости с углом смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$ в цилиндрических сосудах [85]. В дальнейших расчётах увидим, что применение условия (4.79) приводит к получению комплексной частоты колебаний,

вещественная часть которой есть коэффициент затухания за счёт диссипации энергии вблизи ЛТК.

Ниже приведен другой подход выведения граничного условия (4.79) на основе метода возмущений равновесной свободной поверхности (см. рис. 4.10).

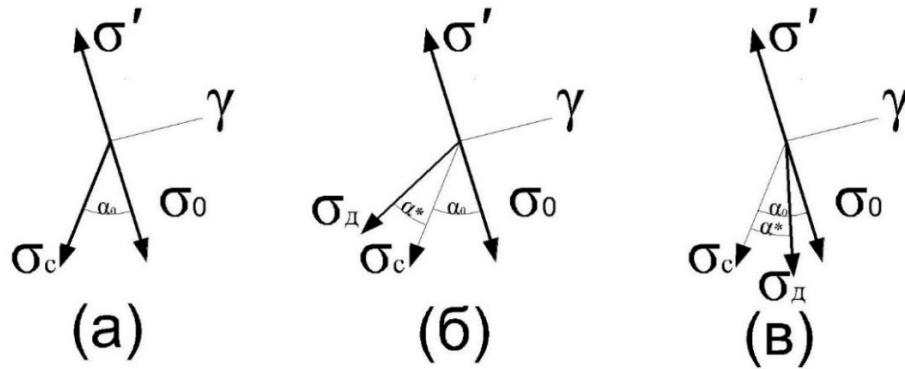


Рис. 4.10. Схема изменения угла смачивания жидкости: (а) – равновесие, (б) – жидкость движется в сторону газа, (в) – движется от стороны газа, где σ_0 и σ' – поверхностное натяжение разделов жидкости–стенки и газа–стенки, σ_c и σ_d – статическое и динамическое поверхностное натяжение раздела жидкости–газа.

Так как масса ЛТК пренебрежимо мала, в процессе колебаний жидкости движущаяся сила σ^* , вызванная отличием динамического угла смачивания от статического, уравнивается касательными напряжениями трения F_τ :

$$F_\tau + \sigma^* = 0.$$

А движущаяся сила σ^* определяется выражением:

$$\sigma^* = \sigma \cos \alpha_0 - \sigma \cos(\alpha_0 + \alpha^*) = \sigma \alpha^* \sin \alpha_0,$$

где α^* – изменение угла смачивания в процессе движения жидкости и величина малости 1-го порядка.

Установим соотношение между изменением угла смачивания и скоростью движения линии трёхфазного контакта:

$$\alpha^* = \frac{\mu_\gamma}{\sigma \sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t}.$$

На основе метода малых возмущений равновесной свободной поверхности [2, 38–39], имеем соотношение о изменении угла смачивания:

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h = -\alpha^*.$$

Таким образом, получим граничное условие на ЛТК как (4.79):

$$\frac{\partial h}{\partial e} + \chi h + \frac{\mu_\gamma}{\sigma \sin^2 \alpha_0} \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \text{ на } \gamma.$$

В дальнейшем введём характерные значения для времени и потенциала через определяющие параметры задачи:

$$t^* = \sqrt{\rho r_2^3 / \sigma}, \varphi^* = r_2^2 / t^*.$$

Используя преобразования $x = r_2 x'$, $t = t^* t'$ и $\varphi = \varphi^* \varphi'$, получим безразмерную формулировку задачи малых колебаний капиллярной жидкости с учётом диссипации энергии на ЛТК:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial t} \text{ на } \Gamma_0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + B_0 h r_{0s} - \left[(k_1^2 + k_2^2) h + \Delta_\Gamma h \right] = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial h}{\partial e} + \chi h + C_a \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \text{ на } \gamma. \end{aligned} \quad (4.82)$$

В (4.82) опускали знак « ' » над обозначениями и кроме числа Бонда B_0 введено еще безразмерное число C_a , которое характеризует соотношение силы вязкости и поверхностного натяжения. C_a называется числом капиллярности и в данной работе определяется следующим выражением:

$$C_a = \frac{\mu_\gamma}{\sin^2 \alpha_0 \sqrt{\rho l \sigma}} = \frac{\sqrt{\rho l^3 \omega_n^2 / \sigma}}{\rho l^2 \omega_n \sin^2 \alpha_0 / \mu_\gamma} = \frac{\omega_n^*}{\text{Re}_n^* \sin^2 \alpha_0}.$$

Здесь $\omega_n^* = \omega_n (\rho r_2^3 / \sigma)^{1/2}$ и $\text{Re}_n^* = \rho \omega_n r_2^2 / \mu_\gamma$ – безразмерная собственная частота и критерий Рейнольдса для исследований колебаний капиллярной жидкости с учётом диссипации энергии вблизи ЛТК.

Решения задачи $\varphi(r, z, \theta, t)$ и $h(s, \theta, t)$ можно представить в виде:

$$\varphi(r, z, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(r, z, \theta) e^{\Omega_n t}, \quad h(s, \theta, t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(s, \theta) e^{\Omega_n t},$$

где $\Omega_n = -\varepsilon_n + i\omega_n$ – комплексная частота колебаний жидкости, а ε_n – коэффициент затухания за счёт диссипации энергии на ЛТК.

После исключения переменной времени получена задача о малых колебаниях жидкости с учётом капиллярного эффекта:

$$\Delta\varphi_n = 0 \text{ в } \Omega, \quad \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} = 0 \text{ на } \Sigma, \quad \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} = \Omega_n h_n \text{ на } \Gamma_0, \quad (4.83)$$

$$\left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n - \Delta_\Gamma h_n - \Omega_n \varphi_n = 0 \text{ на } \Gamma_0, \quad \frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n + C_a \Omega_n h_n = 0 \text{ на } \gamma.$$

Запишем вариационную формулировку задачи в виде:

$$\begin{aligned} & -\int_{\Omega} \Delta\varphi_n \delta\varphi_n d\Omega + \int_{\Gamma_0} \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial n} - \Omega_n h_n \right) \delta\varphi_n d\Gamma_0 + \int_{\gamma} \left(\frac{\partial h_n}{\partial e} + \chi h_n + C_a \Omega_n h_n \right) \delta h_n d\gamma + \\ & \int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \delta\varphi_n d\Sigma + \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n - \Delta_\Gamma h_n - \Omega_n \varphi_n \right\} \delta h_n d\Gamma_0 = 0. \end{aligned} \quad (4.84)$$

Применяя интегрирование по частям для $\Delta\varphi_n$ и $\Delta_\Gamma h_n$

$$\begin{aligned} & -\int_{\Gamma_0} \Delta_\Gamma h_n \delta h_n d\Gamma_0 = -\int_{\gamma} \frac{\partial h_n}{\partial e} \delta h_n d\gamma + \int_{\Gamma_0} \nabla_\Gamma h_n \delta \nabla_\Gamma h_n d\Gamma_0, \\ & -\int_{\Omega} \Delta\varphi_n \delta\varphi_n d\Omega = -\int_{\Sigma} \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \delta\varphi_n d\Sigma - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \delta\varphi_n d\Gamma_0 + \int_{\Omega} \nabla\varphi_n \delta \nabla\varphi_n d\Omega, \end{aligned}$$

получим формулировку задачи в вариационном виде: $\delta I_4 = 0$, где I_4 – функционал, определяемый выражением

$$\begin{aligned} I_4 = \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] h_n^2 + \nabla_\Gamma h_n \nabla_\Gamma h_n \right\} d\Gamma_0 + \chi \int_{\gamma} h_n^2 d\gamma + \\ C_a \Omega_n \int_{\gamma} h_n^2 d\gamma + \int_{\Omega} \nabla\varphi_n \nabla\varphi_n d\Omega. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Используя кинематическое условие на свободной поверхности жидкости, функционал I_4 приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} I_4 = \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \right)^2 + \nabla_\Gamma \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \right) \nabla_\Gamma \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \right) \right\} d\Gamma_0 + \\ \chi \int_{\gamma} \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \right)^2 d\gamma + \Omega_n \int_{\gamma} C_a \left(\frac{\partial\varphi_n}{\partial n} \right)^2 d\gamma + \Omega_n^2 \int_{\Omega} \nabla\varphi_n \nabla\varphi_n d\Omega. \end{aligned} \quad (4.86)$$

В данной работе только исследованы решения, отвечающими $\cos(m\theta)$:

$$\varphi_n(r, z, \theta) = \Phi(r, z) \cos(m\theta), \quad h_n(s, \theta) = H(s) \cos(m\theta).$$

Получим задачу малых колебаний капиллярной жидкости с учётом диссипации энергии вблизи ЛТК:

$$\delta I_4 = 0,$$

$$I_4 = \int_{\Gamma_0} \left\{ \left[B_0 r_{0s} - (k_1^2 + k_2^2) \right] \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 + \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right) \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right] \right\} r ds + \quad (4.87)$$

$$\left[\chi r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right]_{\gamma} + \Omega_n \left[C_a r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right)^2 \right]_{\gamma} + \Omega_n^2 \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 + \frac{m^2 \Phi^2}{r^2} \right] r dr dz.$$

Проводится дискретизация области, занимаемой жидкостью, в правом сечении тороидального сосуда треугольными элементами. Потенциал I_4 имеет следующую матричную форму:

$$I_4 = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \right)^T (\Omega_n^2 \mathbf{M} + \Omega_n \mathbf{C} + \mathbf{K}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}}, \quad (4.88)$$

где матрицы жёсткости \mathbf{K} и инерции \mathbf{M} получены как для задач колебаний идеальной капиллярной жидкости в пункте 3.3.3, а матрица вязкости \mathbf{C} составлена из матриц \mathbf{C}_i , δ_{jk} – символ Кронекера,

$$\mathbf{C}_i = [C_{jk}^i] \text{ и } C_{jk}^i = (C_a r)_{\gamma} \delta_{jk}. \quad (4.89)$$

Из $\delta I_4 = 0$ получим задачу на определение собственных частот и форм колебаний капиллярной жидкости с учётом диссипации энергии вблизи ЛТК:

$$(\Omega_n^2 \mathbf{M} + \Omega_n \mathbf{C} + \mathbf{K}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (4.90)$$

Для решения задачи о собственных значениях 2-го порядка полагаем $\partial \Phi / \partial \mathbf{n}$ и $\Omega_n \partial \Phi / \partial \mathbf{n}$ как переменные и введено вспомогательное соотношение:

$$(\Omega_n \mathbf{M} - \Omega_n \mathbf{M}) \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = 0. \quad (4.91)$$

Преобразуем уравнения (4.90–4.91) в виде:

$$(\Omega_n \mathbf{S} + \mathbf{T}) \mathbf{X} = 0,$$

$$\text{где } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}, \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{K} \\ -\mathbf{M} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{Bmatrix} \Omega_n \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \end{Bmatrix}. \quad (4.92)$$

Матрицы \mathbf{S} и \mathbf{T} имеют порядок $2n_f \times 2n_f$, а вектор–столбец \mathbf{X} имеет порядок $2n_f \times 1$, где n_f – количество узлов на свободной поверхности. После решения данной

обобщённой собственной задачи получим $2n_f$ собственных значений Ω_n ($n=1, 2, \dots, 2n_f$), которые представляют собой комплексные числа. Вещественная часть комплексной частоты ε_n означает коэффициент затухания за счёт диссипации энергии на линии трёхфазного контакта, а мнимая часть ω_n – собственная частота колебаний жидкости с учётом капиллярного эффекта.

В программе MATLAB реализован предложенный алгоритм и получены коэффициенты демпфирования ε_1 и собственные частоты колебаний основного тона. На рис. 4.11–4.12 показаны их зависимости от числа капиллярности Ca , числа Бонда B_0 и объёма жидкости β .

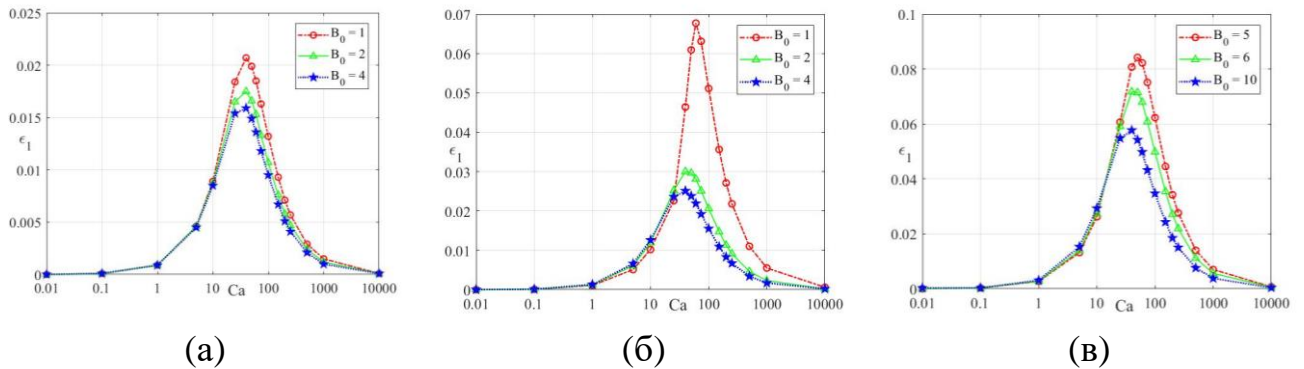


Рис. 4.11. Коэффициент затухания основного тона ε_1 в зависимости от числа капиллярности Ca и числа Бонда B_0 , (а) – $\beta = 20\%$, (б) – 50% и (в) – 80% .

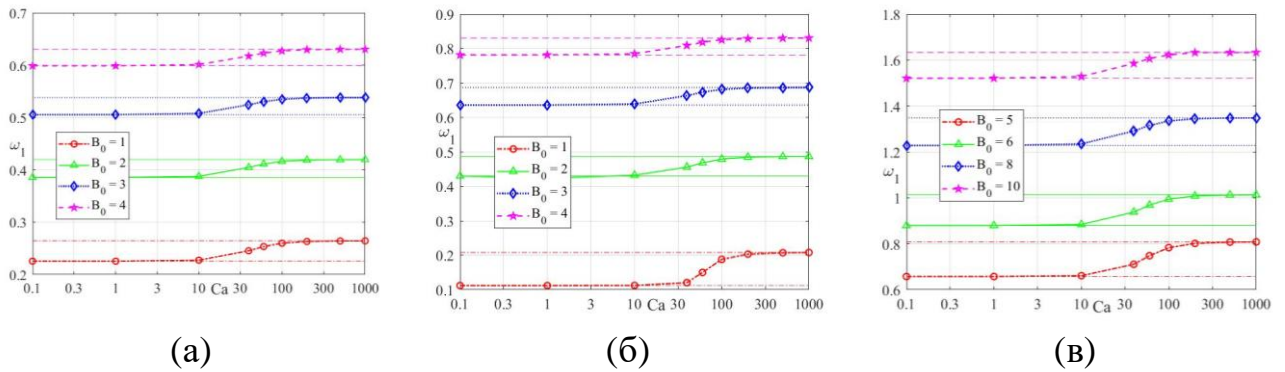


Рис. 4.12. Собственная частота основного тона ω_1 в зависимости от числа капиллярности Ca и числа Бонда B_0 , (а) – $\beta = 20\%$, (б) – 50% и (в) – 80% .

Из рис. 4.11 следует, что при числе капиллярности Ca от 10 до 100 вблизи линии трёхфазного контакта происходит заметная диссипация энергии колебаний жидкости. Коэффициент затухания ε_1 имеет один порядок как коэффициент затухания в погранслое около стенки сосуда. Жидкие компоненты топлива имеет

угол смачивания порядка 5° , поэтому число капиллярности C_a жидкости может быть находится в этом диапазоне хотя при большом критерии Рейнольдса Re_n^* .

На рис. 4.12 видно, что собственная частота ω_1 при C_a в диапазоне от 10 до 100 монотонно увеличивается с повышением числа капиллярности. При $C_a \rightarrow 0$ собственная частота приближается к численным значениям частоты колебаний жидкости, полученным при условии о сохранении угла смачивания α_0 , а при $C_a \rightarrow \infty$ частота ω_1 близка к результатам при неподвижной ЛТК γ .

4.5. Выводы по главе 4

В четвёртой главе разработан механический аналог малых колебаний жидкости в условиях микрогравитации. Подробно обоснованы механизмы диссипации энергии колебаний маловязкой жидкости с учётом капиллярного эффекта. Полученные результаты обобщены в следующем:

- Разработан механический аналог малых колебаний жидкости в слабых гравитационных полях. Получена интегральная формула жёсткости спиральной пружины для моделирования воздействия поверхностного натяжения. Для колебаний капиллярной жидкости в круговом цилиндре радиусом r_0 с углом смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$ получена аналитическая формула жёсткости пружины c_n : $c_n = 2\sigma\pi r_0^2 / (\xi_n^2 - 1)$, где $\sigma\pi r_0^2$ означает поверхностную энергию свободной поверхности жидкости;
- С уменьшением числа Бонда B_0 масса маятника m_1 основного тона колебаний жидкости уменьшается, так как больше жидкости смачивается на твердой стенке сосуда и меньше жидкости колеблется.
- Предложен механизм диссипации энергии вблизи ЛТК и разработан алгоритм определения коэффициента демпфирования вблизи ЛТК на основе МКЭ. Диссипация энергии вблизи ЛТК возникает за счёт отличия динамического угла смачивания от статического в процессе плескания жидкости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе систематически исследовано поведение жидкости в двухсвязных полостях в условиях микрогравитации и разработан алгоритм определения динамических характеристик колебаний жидкого топлива на основе МКЭ. Получены следующие результаты:

- В отличие от форм равновесной свободной поверхности в цилиндрических сосудах, в тороидальных сосудах одному и тому же значению r может быть соответствуют два значения z , т.е. функция $z(r)$ не однозначна. Для решения данной проблемы предлагаются длина дуги s для описания формы равновесной свободной поверхности и полярный угол τ для описания формы окружности меридиана стенки сосуда тора, которые существенно упрощают процесс определение положения равновесия жидкости в торах;
- При уменьшении числа Бонда B_0 свободная поверхность более искривлена и в условиях полной невесомости жидкость сосредоточена около внешней стенки тороидального сосуда. Данное явление можно объяснять теоретически: в условиях, близких к невесомости, жидкость стремится занимать положение минимальной потенциальной энергии, т.е. в сторону меньшего радиуса кривизны. Подобное явление экспериментально наблюдалось в башне невесомости [107];
- Из полученных результатов колебаний жидкости в коаксиально-цилиндрических сосудах следует, что равновесная свободная поверхность более искривлена с уменьшением угла смачивания α_0 и искривление свободной поверхности понижает собственные частоты колебаний жидкости. Заметим, что при заданном объёме жидкости в сосуде собственные частоты колебаний капиллярной жидкости обратно пропорциональны площади свободной поверхности;
- В тороидальных сосудах с повышением числа Бонда B_0 значения собственных частот увеличиваются и количество узлов пересечения равновесной поверхности и собственной формы каждого тона колебаний

капиллярной жидкости сходится с экспериментальными результатами тяжёлой жидкости в наземных условиях;

- Разработан механический аналог малых колебаний жидкости в слабых гравитационных полях. Получена интегральная формула жёсткости спиральной пружины для моделирования воздействия поверхностного натяжения. Для колебаний капиллярной жидкости в круговом цилиндре радиусом r_0 с углом смачивания $\alpha_0 = 90^\circ$ получена аналитическая формула жёсткости пружины c_n : $c_n = 2\pi r_0^2 / (\xi_n^2 - 1)$, где $2\pi r_0^2$ означает поверхностную энергию свободной поверхности жидкости;
- С уменьшением числа Бонда B_0 масса колеблющейся жидкости основного тона m_1 уменьшается, а длина стержня l_1 и жёсткость спиральной пружины c_1 увеличиваются. Так как с уменьшением числа Бонда B_0 равновесная свободная поверхность жидкости более искривлена и больше жидкости смачиваема на твердой стенке сосуда, меньше жидкости колеблется.
- Предложен механизм диссипации энергии вблизи ЛТК и разработан алгоритм определения коэффициента демпфирования вблизи ЛТК на основе МКЭ. В процессе движения жидкости движущаяся сила поверхностного натяжения, вызванная отличием динамического угла смачивания от статического, уравнивается касательными напряжениями трения вблизи ЛТК;
- Разработанный алгоритм на основе МКЭ на определение динамических характеристик малых колебаний капиллярной жидкости пригоден для любого осесимметричного сосуда. При этом данный алгоритм легко модифицирован при изменении граничных условий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авдудевский В.С., Полежаев В.И. Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости. М.: Наука, 1982. 288 с.
2. Бабский В.Г., Копачевский Н.Д., Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидромеханика невесомости. Под ред. А.Д. Мышкиса. М.: Наука, 1976. 504 с.
3. Барняк М.Я. Приближённые методы решения задач статики и динамики жидкости в условиях, близких к невесомости. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Киев. 1971. 174 с.
4. Беляева М.А., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Гидростатика в слабых силовых полях // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: ВЦ АН СССР. 1968. С. 5–68.
5. Богоряд Е.Д. Динамика вязкой жидкости со свободной поверхностью. Томск: Издательство Томского университета, 1980. 101 с.
6. Будник А.М., Полевилов В.К. Осесимметричные формы равновесия жидкости в тороидальном сосуде при невесомости // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1986. № 6. С. 154–156.
7. Бужинский В.А. Уравнения возмущённого движения ракеты как тонкостенной конструкции с жидкостью // Прикладная математика и механика. 2009. Т. 73. Вып. 6. С. 959–964.
8. Бужинский В.А. Динамика и устойчивость движения ракет. Королев: Издательство ФГУП ЦНИИмаш, 2017. 270 с.
9. Бужинский В.А., Новоселецкий Д.В. О стабилизации движения верхних ступеней ракет-носителей при собственной динамической их неустойчивости // Космонавтика и ракетостроение. 2017. № 4 (97). С. 84–91.
10. Бужинский В.А. Колебания жидкости в цилиндрических баках с продольными демпфирующими перегородками // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 1. С. 9–21.
11. Бужинский В.А., Петряхин Д.А., Соломонов Е.В. Колебания в жидкости пластин с ребрами жесткости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2022. № 1. С. 39–46.

12. Вильке В.Г. Теоретическая механика. СПб.: Лань, 2003. 304 с.
13. Газиев Э.Л. Задачи статики, устойчивости и малых колебаний гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Симферополь. 2014. 231 с.
14. Гиббс Дж.В. Термодинамические работы. Л.: Гостехиздат, 1950. 492 с.
15. Досаев М.З., Самсонов В.А. Особенности динамики систем с упругими элементами и сухим трением // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. № 4. С. 426–435. DOI: [10.31857/S0032823521040056](https://doi.org/10.31857/S0032823521040056).
16. Досаев М.З., Климина Л.А., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Плоскопараллельное движение робота-змеи при наличии анизотропного сухого трения и единственного управляющего сигнала // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022. № 5. С. 152–161. DOI: [10.31857/S0002338822050067](https://doi.org/10.31857/S0002338822050067).
17. Железный Б.В., Никифоров А.Г. О напряжениях в зоне линии смачивания и динамическом сопротивлении мениска // Прикладная механика и техническая физика. 1978. № 4. С. 116–123.
18. Жуковский Н.Е. О движении твёрдого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Полное собрание сочинений. Т. 3. Гидродинамика. Москва – Ленинград: Главная редакция авиационной литературы, 1936. С. 21–186.
19. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. Под ред. Б.Е. Победри. М.: Мир, 1975. 542 с.
20. Калининченко В.А. Регуляризация гравитационных баротропных волн в двухслойной жидкости // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2019. № 6. С. 25–37.
21. Калининченко В.А. Подавление интенсивных колебаний жидкости слоем плавающих частиц // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2020. № 6. С. 85–97.
22. Калининченко В.А. Эксперименты по подавлению интенсивных колебаний жидкости плавающей пластиной // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2021. № 6. С. 74–83.

23. Колесников К.С. Об особенностях свойств одной маятниковой системы // Прикладная механика и математика. 1962. № 4. С. 2618–2624.
24. Колесников К.С. Колебания жидкости в цилиндрическом сосуде: методическое пособие по курсу «Динамика изделий». М.: МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1964. 98 с.
25. Колесников К.С. Динамика ракет. М.: Машиностроение, 2003. 520 с.
26. Копачевский Н.Д. О малых колебаниях идеальной жидкости в сосуде в условиях, близких к невесомости // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: ВЦ АН СССР, 1968. С. 98–134.
27. Копачевский Н.Д., Морозовская Н.Н. Определение первой частоты колебаний идеальной жидкости в цилиндрическом сосуде в слабом гравитационном поле // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: ВЦ АН СССР, 1968. С. 135–151.
28. Копачевский Н.Д. О влиянии капиллярных сил на частоты колебаний идеальной жидкости в малозаполненном сферическом сосуде // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1969. Т. 9. № 6. С. 1347 – 1356.
29. Копачевский Н.Д., Темкин Л.А., Темкина В.С. О колебаниях капли жидкости, расположенной на плоскости, в условиях невесомости // Математическая физика и функциональный анализ. Харьков: ФТИНТ АН СССР, 1969. Вып. 1. С. 37–48.
30. Копачевский Н.Д. Гидродинамика в слабых гравитационных полях. О плоских колебаниях идеальной жидкости в прямоугольном канале // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1972. № 5. С. 3–13.
31. Копачевский Н.Д. Колебания жидкости в условиях невесомости: Специальный курс лекций. Симферополь: б.и., 2013. 44 с.
32. Ламб. Г. Гидродинамика. Под. ред. Н.А. Слѣзкина. Москва – Ленинград: ГИТТЛ, 1947. 929 с.
33. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. 5-е изд., стереот. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 736 с.

34. Микишев Г.Н. Экспериментальные методы в динамике космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1978. 247 с.
35. Моисеев Н.Н., Румянцев В.В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М.: Наука, 1965. 440 с.
36. Моисеев Н.Н., Петров А.А. Численные методы расчёта собственных частот колебаний ограниченного объёма жидкости. М.: ВЦ АН СССР, 1966. 272 с.
37. Мурти Т.С. Сейсмические морские волны ЦУНАМИ. Под ред. А.В. Некрасова. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 446 с.
38. Мышкис А.Д., Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Копачевский Н.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. Методы решения задачи гидромеханики для условий невесомости. Под ред. А.Д. Мышкиса. Киев: Наукова Думка, 1992. 592 с.
39. Мышкис А.Д., Слобожанин Л.А., Тюпцов А.Д. О малых возмущениях равновесной поверхности капиллярной жидкости // Прикладная математика и механика. 1975. Т. 39. № 4. С. 695–702.
40. Нариманов Г.С. О движении твёрдого тела, полость которого частично заполнена жидкостью // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 1. С. 21–38.
41. Остроградский М.В. Мемуар о распространении волн в цилиндрическом бассейне // Избранные труды. Под ред. В.И. Смирнова. Л.: Издательство АН СССР, 1958. С. 111–130.
42. Охоцимский Д.Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 1. С. 3–20.
43. Пожалостин А.А., Гончаров Д.А. Свободные осесимметричные колебания двухслойной жидкости с упругим разделителем между слоями при наличии сил поверхностного натяжения // Инженерный журнал: наука и инновации. 2013. Вып. 12.
44. Полевиков В.К. О методах численного моделирования равновесных капиллярных поверхностей // Дифференциальные уравнения. 1999. Т. 35. № 7. С. 975–981.

45. Пономарева М.А., Шрагер Г.Р., Якутенок В.А. Использование уравнения Дюпре-Юнга для решения задачи о растекании жидкости при ограниченном смачивания // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2008. № 1 (2). С. 90–96.
46. Рабинович Б.И. Об уравнениях возмущённого движения твёрдого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью // Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20. № 1. С. 39–50.
47. Рабинович Б.И. Введение в динамику ракет-носителей и космических аппаратов. М.: Машиностроение, 1975. 416 с.
48. Романов А.С., Семиколонов А.В. Форма плёнки частично смачивающей жидкости при стекании со смоченной поверхности // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2015. № 5. С. 88–99. DOI: [10.18698/1812-3368-2015-5-88-99](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2015-5-88-99).
49. Романов А.С., Семиколонов А.В. Форма свободной поверхности жидкости, находящейся в равновесии со своей смачивающей плёнкой // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. 2016. № 1. С. 122–133. DOI: [10.18698/1812-3368-2016-1-122-133](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2016-1-122-133).
50. Румянцев В.В. О движении и устойчивости твёрдого тела с ротором и жидкостями, обладающими поверхностным натяжением // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: ВЦ АН СССР, 1968. С. 222–249.
51. Самсонов В.А. О некоторых задачах минимума в теории устойчивости движения тела с жидкостью // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: ВЦ АН СССР, 1968. С. 250–268.
52. Слёзкин Н.А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. 521 с.
53. Слобожанин Л.А. Задачи устойчивости равновесия жидкости, возникающие в вопросах космической технологии // Гидромеханика и теплообмен в невесомости. М.: Наука, 1982. С. 9–24.

54. Слобожанин Л.А. Гидростатика при слабой гравитации. Форма и устойчивость свободной поверхности. Автореф. дис. ... докт. физ.-мат. наук. Новосибирск. 1988. 32 с.
55. Сычёв В.В. Сложные термодинамические системы. 4-е изд. М.: Энергоатомиздат, 1986. 208с.
- 56. Темнов А.Н., Шкапов П.М., Юй Чжаокай. Механический аналог колебаний маловязкой жидкости с учётом капиллярного эффекта // Труды МАИ. 2023. № 129.**
57. Черноусько Ф.Л. Движение твёрдого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость. М.: ВЦ АН СССР, 1968. 232 с.
58. Черноусько Ф.Л. Задача о равновесии жидкости, подверженной действию сил тяжести поверхностного натяжения // Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости. М.: ВЦ АН СССР, 1968. С. 69–97.
59. Черноусько Ф.Л. Управление плоскими движениями тела при помощи подвижной массы // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85. № 4. С. 414–425.
60. Черноусько Ф.Л. Об использовании нескольких подвижных масс для переориентации тела // Доклады РАН. Физика, технические науки. 2022. Т. 503. С. 52–56.
- 61. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Исследование равновесной свободной поверхности капиллярной жидкости в тороидальном сосуде // Инженерный журнал: наука и инновации. 2021. Вып. 3. С. 1–11. DOI: [10.18698/2308-6033-2021-3-2060](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2021-3-2060).**
- 62. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Равновесие и колебания свободной поверхности жидкого топлива в коаксиально-цилиндрических сосудах в условиях микрогравитации // Инженерный журнал: наука и инновации. 2021. Вып. 8. С. 1–15. DOI: [10.18698/2308-6033-2021-8-2099](https://doi.org/10.18698/2308-6033-2021-8-2099).**
- 63. Юй Чжаокай. Волновые движения жидкого топлива в тороидальных сосудах с учётом силы поверхностного натяжения // Вестник Томского**

- государственного университета. Математика и механика. 2022. № 78. С. 151–165. DOI: [10.17223/19988621/78/12](https://doi.org/10.17223/19988621/78/12).
64. Юй Чжаокай, Темнов А.Н. Механический аналог малых колебаний жидкости в условиях, близких к невесомости // Труды МАИ. 2022. № 126. DOI: [10.34759/trd-2022-126-05](https://doi.org/10.34759/trd-2022-126-05).
65. Abramson H.N. The dynamic behavior of liquids in moving containers. NASA SP-106, 1966. 467 p.
66. Bathe K.J. Finite element procedures. 2nd ed. Waterton, 2014. 1065 p.
67. Brakke K.A. The Surface Evolver // Experimental Mathematics. 1992. No. 1-2. P. 141–165. DOI: [10.1080/10586458.1992.10504253](https://doi.org/10.1080/10586458.1992.10504253).
68. Case K.M., Parkinson W.C. Damping of surface waves in an incompressible liquid // Journal of Fluid Mechanics. 1957. Vol. 2. No. 2. P. 172–184.
69. Chu W. Low-gravity fuel sloshing in an arbitrary axisymmetric rigid tank // ASME. Journal of Applied Mechanics. 1970. Vol. 37. No. 3. P. 828–837. DOI: [10.1115/1.3408616](https://doi.org/10.1115/1.3408616).
70. ComFLOW. URL: <https://www.math.rug.nl/~veldman/comflow/comflow.html>.
71. Concus P., Grane G.E., Satterlee H.M. Small amplitude lateral sloshing in a cylindrical tank with a hemispherical bottom under low gravitational conditions. NASA CR-54700, 1967. 127 p.
72. Concus P., Grane G.E., Satterlee H.M. Small amplitude lateral sloshing in a spheroidal containers under low gravitational conditions. NASA CR-72500, 1969. 137 p.
73. Dodge F.T., Garza L.R. Experimental and theoretical studies of liquid sloshing at simulated low gravity // ASME. Journal of Applied Mechanics. 1967. Vol. 34. No. 3. P. 555–562. DOI: [10.1115/1.3607743](https://doi.org/10.1115/1.3607743).
74. Dodge F.T., Garza L.R. Simulated low-gravity sloshing in spherical, ellipsoidal, and cylindrical tanks // Journal of Spacecraft and Rockets. 1970. Vol. 7. No. 2. P. 204–206. DOI: [10.2514/3.29900](https://doi.org/10.2514/3.29900).

75. Dodge F.T., Kana D.D. Dynamics of liquid sloshing in upright and inverted bladdered tanks // *Journal of fluids engineering*. 1987. Vol. 109. No. 1. P. 58–63. DOI: [10.1115/1.3242617](https://doi.org/10.1115/1.3242617).
76. Dodge F.T., Green S.T., Kana D.D. Fluid management technology: liquid slosh dynamics and control. NASA CR-189107, 1991. 198 p.
77. Dodge F.T. The new "Dynamic behavior of liquids in moving containers". NASA SP-106, 2000. 202 p.
78. Dosaev M. Interaction between internal and external friction in rotation of vane with viscous filling // *Applied Mathematical Modelling*. 2019. No. 68. P. 21–28. DOI: [10.1016/j.apm.2018.11.002](https://doi.org/10.1016/j.apm.2018.11.002).
79. Dosaev M., Samconov V., Hwang S. Construction of control algorithm in the problem of the planar motion of a friction-powered robot with a flywheel and an eccentric weight // *Applied Mathematical Modelling*. 2021. No. 89. P. 1517–1527. DOI: [10.1016/j.apm.2020.08.022](https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.08.022).
80. El-Kamali M., Schotte J.-S., Ohayon R. Computation of the equilibrium position of a liquid with surface tension inside a tank of complex geometry and extension to sloshing dynamic cases // *Computational mechanics*. 2010. No. 46. P. 169–184. DOI: [10.1007/s00466-010-0489-x](https://doi.org/10.1007/s00466-010-0489-x).
81. El-Kamali M., Schotte J.-S., Ohayon R. Three-dimensional modal analysis of sloshing under surface tension // *International journal for numerical methods in fluids*. 2011. No. 65. P. 87–105. DOI: [10.1002/flid.2457](https://doi.org/10.1002/flid.2457).
82. Guyan R.J. Reduction of stiffness and mass matrices // *AIAA Journal*. 1965. Vol. 3. No. 2. P. 380–380. DOI: [10.2514/3.2874](https://doi.org/10.2514/3.2874).
83. Helder J.A. Sloshing SloshSat FLEVO: numerical simulation of coupled solid-liquid dynamics in micro-gravity. Master's thesis. Groningen, 2005. 87 p.
84. Henderson D.M., Miles J.W. Surface-wave damping in a circular cylinder with a fixed contact line // *Journal of Fluid Mechanics*. 1994. Vol. 275. P. 285–299. DOI: [10.1017/S0022112094002363](https://doi.org/10.1017/S0022112094002363).
85. Hocking L.M. The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // *Journal of Fluid Mechanics*. 1987. Vol. 179. P. 253–266. DOI: [10.1017/S0022112087001514](https://doi.org/10.1017/S0022112087001514).

86. Ibrahim R.A. Liquid sloshing dynamics: theory and applications. 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. 948 p.
87. Jiang Z., Wu Z., Liu C. et al. Liquid-gas interface analysis of propellant tank based on Surface Evolver (in Chinese) // Chinese Journal of Space Science. 2020. Vol. 40. No. 6. P. 1066–1073.
88. Keulegan G.H., Carpenter L.H. Forces on cylinders and plates in an oscillating fluid // Journal of Research of the National Bureau of Standards. 1958. Vol. 60. No. 5. P. 423–440.
89. Keulegan G.H. Energy dissipation in standing waves in rectangular basins // Journal of Fluid Mechanics. 1959. Vol. 6. P. 33–50. DOI: [10.1017/S0022112059000489](https://doi.org/10.1017/S0022112059000489).
90. Labus T. Natural frequency of liquids in annular cylinders under low gravitational conditions. NASA TN D-5412, 1969. 28 p.
91. Li Q., Ma X., Wang T. Equivalent mechanical modal for liquid sloshing during draining // Acta Astronautica. 2022. Vol. 68. Issues 1-2. P. 91–100. DOI: [10.1016/j.actaastro.2010.06.052](https://doi.org/10.1016/j.actaastro.2010.06.052).
92. Li Q., Ma X., Wang T. Equivalent mechanical modal for liquid sloshing in non-axisymmetric tanks (in Chinese) // Journal of Astronautics. 2011. Vol. 32. No. 2. P. 242–249.
93. Li J., Lin H., Li K. et al. Liquid sloshing in partially filled capsule storage tank undergoing gravity reduction to low/micro-gravity condition // Microgravity Science and Technology. 2020. Vol. 32. P. 587–596. DOI: [10.1007/s12217-020-09801-3](https://doi.org/10.1007/s12217-020-09801-3).
94. Li J., Lin H., Li K. et al. Dynamic behavior in a storage tank in reduced gravity using dynamic contact angle method // Microgravity Science and Technology. 2020. Vol. 32. P. 1039–1048. DOI: [10.1007/s12217-020-09831-x](https://doi.org/10.1007/s12217-020-09831-x).
95. Li Y., Ye Z., Li L. Surface Evolver calculation of free liquid surface configuration under microgravity (in Chinese) // Journal of Northeastern University. Natural Science. 2016. Vol. 37. No. 9. P. 1364–1368.
96. Liu F., Yue B., Tang Y., Deng M. 3DOF-rigid-pendulum analogy for nonlinear liquid slosh in spherical propellant tanks // Journal of Sound and Vibration. 2019. Vol. 460. DOI: [10.1016/j.jsv.2019.114907](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2019.114907).

97. Meserole J.S., Fortini A. Slosh dynamics in a toroidal tank // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 1987. Vol. 24. No. 6. P. 523–531. DOI: [10.2514/3.25948](https://doi.org/10.2514/3.25948).
98. Miles J.W. Surface-wave damping in closed basins // *Proceedings of the Royal Society of London*. 1967. Vol. 297. Issue 1451. P. 459–475. DOI: [10.1098/rspa.1967.0081](https://doi.org/10.1098/rspa.1967.0081).
99. Miles J.W. The capillary boundary layer for standing waves // *Journal of Fluid Mechanics*. 1991. Vol. 222. P. 197–205. DOI: [10.1017/S0022112091001052](https://doi.org/10.1017/S0022112091001052).
100. Miras T., Schotte J.-S., Ohayon R. Energy approach for static and linearized dynamic studies of elastic structures containing incompressible liquids with capillarity: a theoretical formulation // *Computational mechanics*. 2012. No. 50. P. 729–741. DOI: [10.1007/s00466-012-0786-7](https://doi.org/10.1007/s00466-012-0786-7).
101. Myshkis A.D., Babskii V.G., Kopachevskii N.D. et al. *Low-gravity fluid mechanics: mathematical theory of capillary phenomena*. Springer, 1987. 601 p.
102. Saksono P., Peric D. On finite element modelling of surface tension. Variational formulation and applications – part I: quasistatic problems // *Computational mechanics*. 2006. No. 38. P. 265–281. DOI: [10.1007/s00466-005-0747-5](https://doi.org/10.1007/s00466-005-0747-5).
103. Saksono P., Peric D. On finite element modelling of surface tension. Variational formulation and applications – part II: Dynamic problems // *Computational mechanics*. 2006. No. 38. P. 251–263. DOI: [10.1007/s00466-005-0745-7](https://doi.org/10.1007/s00466-005-0745-7).
104. Siekmann J., Scheideler W., Tietze P. Static meniscus configurations in propellant tanks under reduced gravity // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 1981. Vol. 28. No. 1. P. 103–116.
105. Sumner I.E. Experimentally determined pendulum analogy of liquid sloshing in spherical and oblate-spheroidal tanks. NASA TN-2737, 1965. 34 p.
106. Surface Evolver – Fluid Interface Tool (SE-FIT). URL: <https://www.se-fit.com>.
107. Symons P. Zero-gravity equilibrium configuration of liquid-vapor interface in toroidal tanks. NASA TN D-6076, 1970. 24 p.
108. Tang Y., Yue B. Simulation of large-amplitude three-dimensional liquid sloshing in spherical tanks // *AIAA Journal*. 2017. Vol. 55. No. 6. P. 2052–2059. DOI: [10.2514/1.J055798](https://doi.org/10.2514/1.J055798).

109. Tang Y., Yue B., Yan Y. Improved method for implementing contact angle condition in simulation of liquid sloshing under microgravity // *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2019. No. 89. P. 123–142. DOI: [10.1002/flid.4685](https://doi.org/10.1002/flid.4685).
110. Utsumi M. The meniscus and sloshing of a liquid in an axisymmetric container at low-gravity // *JSME international journal*. 1990. Vol. 33. No. 3. P. 346–356. DOI: [10.1299/jsmec1988.33.346](https://doi.org/10.1299/jsmec1988.33.346).
111. Utsumi M. Low-gravity propellant slosh analysis using spherical coordinates // *Journal of Fluids and Structures*. 1998. Vol. 12. No. 1. P. 57–83. DOI: [10.1006/jfls.1997.0125](https://doi.org/10.1006/jfls.1997.0125).
112. Utsumi M. A mechanical model for low-gravity sloshing in an axisymmetric tank // *ASME. Journal of Applied Mechanics*. 2004. Vol. 71. No. 5. P. 724–730. DOI: [10.1115/1.1794700](https://doi.org/10.1115/1.1794700).
113. Utsumi M. Viscous damping ration of low-gravity sloshing in arbitrary axisymmetric tanks // *Journal of Spacecraft and Rockets*. 2013. Vol. 50. No. 4. P. 807–815. DOI: [10.2514/1.A3226](https://doi.org/10.2514/1.A3226).
114. Utsumi M. Slosh damping caused by friction work due to contact angle hysteresis // *AIAA Journal*. 2017. Vol. 55. No. 1. P. 1–9. DOI: [10.2514/1.J055238](https://doi.org/10.2514/1.J055238).
115. Veldman A.E.P., Gerrits J., Luppens R. et al. The numerical simulation of liquid sloshing on board spacecraft // *Journal of computational physics*. 2007. Vol. 224. P. 82–99. DOI: [10.1016/j.jcp.2006.12.020](https://doi.org/10.1016/j.jcp.2006.12.020).
116. Wang T., Miao N., Li J. Liquid sloshing equivalent mechanical model during rendezvous and docking (in Chinese) // *Aerospace Control and Application*. 2015. Vol. 41. No. 3. P. 1–7.
117. Wang W., Li J., Wang T. Modal analysis of liquid sloshing with different contact line boundary conditions using FEM // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 317. Issues 3-5. P. 739–759. DOI: [10.1016/j.jsv.2008.03.070](https://doi.org/10.1016/j.jsv.2008.03.070).
118. Wang W. Study on liquid sloshing with small amplitude considering capillary effect (in Chinese). Dissertation for the degree of Doctor of Engineering. Beijing: Tsinghua University, 2008. 141 p.

119. Wang Y., Chang X. Numerical simulation of three-dimensional gas-liquid equilibrium interfaces in the propellant tank under microgravity condition (in Chinese) // Journal of rocket propulsion. 2007. Vol. 33. No. 3. P. 31–35.
120. Wang Z., Deng Z. Sloshing of liquid in spherical tank at low-gravity environments (in Chinese) // Chinese Journal of Space Science. 1985. Vol. 5. No. 4. P. 294–302.
121. Wang Z., Deng Z. On the sloshing of liquid in a partially filled rectangular tank under low-gravity condition (in Chinese) // Journal of Tsinghua University. 1986. Vol. 26. No. 3. P. 1–9.
122. Wang Z., Liu Y. Liquid-filled system dynamics. Beijing: Science Press, 2002. 387 p.
123. Wu W., Yue B. An analytical method for studying the sloshing properties of liquid in cylindrical tank under low gravity environment (in Chinese) // Journal of Astronautics. 2014. Vol. 35. No. 4. P. 397–403.
124. Xi R., Qu C. Research on satellite liquid sloshing dynamics in microgravity environment (in Chinese) // Spacecraft Engineering. 1997. Vol. 6. No. 1. P. 18–26.
125. Yan Y., Deng Y., Song X. et al. Liquid-vapor interface configuration of the axis-symmetrical tanks with curved walls // Microgravity Science and Technology. 2022. Vol. 34. DOI: [10.1007/s12217-022-09984-x](https://doi.org/10.1007/s12217-022-09984-x).
126. Yang D., Yue B., Zhu L. et al. Solving shapes of hydrostatic surface in rectangular and revolving symmetrical tanks under microgravity using shooting method (in Chinese) // Chinese Journal of Space Science. Vol. 32. No. 1. P. 85–91.
127. Yue B., Wu W., Yan Y. Modeling and coupling dynamics of the spacecraft with multiple propellant tanks // AIAA Journal. 2016. Vol. 54. No. 11. P. 3608–3618. DOI: [10.2514/1.J055110](https://doi.org/10.2514/1.J055110).
128. Yue B., Yu J., Wu W. Rigid and liquid coupling dynamics and hybrid control of spacecraft with multiple propellant tanks (in Chinese) // Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics. 2017. Vol. 49. No. 2. P. 390–396. URL: <http://lxxb.cstam.org.cn/CN/10.6052/0459-1879-16-342>.