

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



ЗОАН КУИ ХИЕУ

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛАСТИН  
ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени  
кандидата технических наук

Научный руководитель:

д.т.н., профессор

Фирсанов Валерий Васильевич

Москва – 2020

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ .....</b>	<b>4</b>
<b>ГЛАВА I. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ.....</b>	<b>13</b>
1.1. Современное состояние исследований пластин и оболочек .....	13
1.2. Проблемы исследования НДС пластин по уточненной теории .....	18
1.3. Выводы к первой главе .....	26
<b>ГЛАВА II. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ.....</b>	<b>27</b>
2.1. Построение уравнений уточненной теории .....	28
2.2. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.....	35
2.3. Алгоритм расчета НДС прямоугольных пластин .....	43
2.4. Параметрические исследования НДС .....	51
2.4.1. Расчет НДС “погранслоя” в зоне жестко защемленного края. Сравнение с данными классической теории. ....	51
2.4.2. Влияние изменяемости толщины.....	59
2.4.3. Влияние характера внешней нагрузки.....	62
2.5. Разложение нагрузки в ряде Фурье .....	64
2.6. Сравнение результатов расчета НДС с данными классической и другим вариантам уточненной теории.....	66
2.7. Прочность сварного соединения прямоугольных пластин на основе уточненной теории .....	68
2.8. Выводы ко второй главе.....	71
<b>ГЛАВА III. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ .....</b>	<b>73</b>
3.1. Построение уравнений уточненной теории .....	73
3.2. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.....	82
3.3. Алгоритм расчета НДС круглых пластин .....	92
3.4. Параметрические исследования НДС .....	100

3.4.1. Расчет НДС “погранслои” в зоне жестко защемленного края. Сравнение с данными классической теории .....	100
3.4.2. Толщина пластины изменяется по квадратичному закону .....	108
3.4.3. Влияние характера внешней нагрузки .....	110
3.5. Сравнение результатов расчета НДС с данными классической и другим вариантам уточненной теории .....	113
3.6. Выводы к третьей главе .....	114
<b>ГЛАВА IV. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ</b>	
<b>КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ .....</b>	<b>115</b>
4.1. Построение уравнений уточненной теории .....	115
4.2. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений .....	120
4.3. Алгоритм расчета НДС круглых пластин .....	130
4.4. Параметрические исследования НДС .....	131
4.4.1. Перепад температуры задается линейной функцией .....	131
4.4.2. Перепад температуры задается функцией по квадратичному закону .....	133
4.4.3. Перепад температуры задается по синусоидальному закону .....	135
4.5. Выводы к четвертой главе .....	137
<b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....</b>	<b>139</b>
<b>СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ .....</b>	<b>141</b>
<b>ЛИТЕРАТУРА .....</b>	<b>142</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность темы диссертации.**

Одним из актуальных путей развития современной авиационной техники является все более широкое применение легких и экономичных тонкостенных конструкций, моделируемых пластинами и оболочками. Современная техника выдвинула в теории пластин и оболочек более сложные проблемы, чем те, которые исследуются классической теорией типа Кирхгофа-Лява, Тимошенко-Рейсснера. Один из аспектов этих проблем заключается в том, что при проектировании различных переходных зон и соединений применяются пластины и оболочки переменной толщины. Поэтому актуальной представляется задача повышения достоверности методов расчета пластин и оболочек переменной толщины за счет учета трехмерности напряженно-деформированного состояния (НДС) в зонах его искажения (зоны крепления, локального нагружения, быстро изменяющихся нагрузок и др.), где имеют место дополнительные по отношению к классической теории НДС типа “погранслои”.

Учет трехмерности НДС в указанных зонах в сочетании с методами механики разрушения позволит оценить трещиностойкость в наиболее нагруженных зонах конструкции и обосновать тип конструкционного материала для его рационального распределения вблизи концентраторов напряжений. В ряде случаев это приводит к повышению уровня НДС в краевых зонах, которые часто оформляются в виде пластин и оболочек переменной толщины.

Здесь возникает также важная задача о расчете НДС пластины при совместном действии механических нагрузок и повышенных температур, так как единственным следствием нагрева будет возникновение дополнительных деформаций, обусловленных всесторонним тепловым расширением. Эти деформации налагаются на упругие и учитываются при формулировке задачи.

При проектировании упругих летательных аппаратов возникает много различных проблем, связанных с обеспечением прочности и долговечности конструкций. Для этого выполняются соответствующие теоретические исследования и расчеты, проводятся необходимые экспериментальные исследования.

Поэтому разработка методов прогнозирования НДС пластин переменной толщины при термомеханическом нагружении, уточняющих результаты классической теории и применяемых на этапах проектирования перспективной техники, представляет собой актуальную проблему.

**Объект диссертационного исследования** — прямоугольные и круглые пластины переменной толщины при механическом и термомеханическом нагружении.

**Предмет исследования** — методы расчета НДС прямоугольных и круглых пластин переменной толщины, позволяющие уточнить результаты классической теории.

**Целью диссертации** является построение математических моделей определения НДС пластин переменной толщины на основе уточненной по отношению к классической типа Кирхгофа - Лява и Тимошенко - Рейсснера теории; исследование НДС прямоугольных и круглых пластин переменной толщины с типовыми краевыми условиями при действии локальных и распределенных нагрузок различной изменчивости; исследование НДС круглой переменной толщины на основе уточненной теории при термомеханическом воздействии.

Для реализации поставленной цели были решены следующие задачи:

1. Построение системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей равновесие прямоугольной пластины переменной толщины, на основе трехмерных уравнений теории упругости в декартовой системе координат. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных

дифференциальных уравнений в перемещениях с соответствующими краевыми условиями. Алгоритм расчета НДС пластины.

2. Параметрические исследования НДС изотропной прямоугольной пластины переменной толщины по уточненной теории, в зависимости от изменяемости толщины и характера нагружения вблизи жестко защемленного края. Сравнение результатов расчета НДС, полученных в диссертационной работе, с данными классической и двум другим вариантам уточненной теорий.

3. Построение системы дифференциальных уравнений в частных производных, описывающей равновесие круглых пластин переменной толщины, на основе трехмерных уравнений теории упругости в безразмерной цилиндрической системе координат. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в перемещениях с соответствующими краевыми условиями. Алгоритм расчета НДС пластины.

4. Параметрические исследования НДС изотропной круглой пластины переменной толщины по уточненной теории, в зависимости от изменяемости толщины и характера нагружения вблизи жестко защемленного края. Сравнение результатов расчета НДС, полученных в диссертационной работе, с данными классической теории.

5. Расчет НДС круглой изотропной пластины переменной толщины под действием распределенной механической нагрузки и повышенной температуры. Результаты расчета НДС пластины в упругой области по уточненной теории в зависимости от величины температуры.

#### **Методы исследования.**

- Вариационный принцип Лагранжа на основе уточненного выражения для полной энергии за счет повышения степени полиномов, аппроксимирующих компоненты НДС по нормальной к срединной поверхности пластины координате;

- Применение тригонометрических рядов для приведения уравнений в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с переменными коэффициентами.

- Метод конечных разностей решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

- Метод матричной прогонки решения систем алгебраических уравнений.

Численные алгоритмы реализованы на алгоритмических языках математических пакетов ЭВМ с использованием встроенных процедур численного интегрирования дифференциальных уравнений и минимизации функций многих переменных.

**Научная новизна** исследования заключается в следующем:

1. Впервые построены двумерные линейные уравнения и граничные условия для определения НДС изотропных прямоугольных и круглых пластин переменной толщины с использованием представления компонентов НДС в виде полиномов по нормальной координате более высокой степени по отношению к классической теории. С помощью вариационного принципа Лагранжа трехмерная проблема приведена к двумерной с согласованным количеством дифференциальных уравнений и краевых условий.

2. Для прямоугольных и круглых пластин, впервые получены системы обыкновенных дифференциальных уравнений в перемещениях с переменными коэффициентами и сформулированы граничные условия для основных типов крепления пластин.

3. Доказано, что по отношению к классической теории пластин, уточненная теория дает возможность получить дополнительные напряжения, соответствующие быстро затухающим от линии искажения самоуравновешенным напряженным состояниям типа “погранслои”.

4. Показано, что для прямоугольных и круглых пластин вблизи зон искажения НДС компоненты напряженного состояния, полученные по уточненной теории, существенно отличаются от соответствующих значений,

определенных по классической теории, не только в части поперечных нормальных и касательных напряжений, но и в части тангенциальных напряжений. Для тангенциальных нормальных напряжений основного (внутреннего) НДС пластины дополнительные слагаемые могут достигать 20-40%, и для поперечных нормальных и касательных напряжений 25-35% от максимальных продольных нормальных напряжений.

5. На основе уточненной теории построены уравнения и граничные условия для определения НДС изотропных круглых пластин при совместном действии распределенной нагрузки и температуры, дан анализ НДС пластины по уточненной теории для нескольких вариантов температуры.

**Достоверность и обоснованность научных положений и результатов** подтверждается корректными математическими формулировками поставленных задач, применением строгих и апробированных математических моделей механики твердого деформируемого тела, а также сравнением результатов расчетов НДС, полученных по разработанной в диссертации уточненной теории с аналогичными данными классической теории.

**Практическая значимость** диссертационной работы заключается в следующем:

1. Предложенные в работе математические модели, методы и алгоритмы расчета позволяют существенно уточнить НДС прямоугольных и круглых изотропных пластин переменной толщины в зонах искажения напряженного состояния (соединения, стыки, зоны действия локальных и быстро изменяющихся нагрузок).

2. Качественный и количественный анализ влияния вида нагружения, геометрических параметров прямоугольных и круглых пластин на их НДС.

3. Доказательство наличия в тонких и менее тонких пластинах переменной толщины поперечных нормальных и касательных напряжений, соизмеримых с максимальными значениями основных нормальных напряжений и существенно



влияющих на оценку прочности и долговечности пластин из изотропных материалов.

4. Разработка алгоритма расчета НДС прямоугольных и круглых пластин, выполняемого с использованием программы для ЭВМ.

5. Результаты, полученные на основе теоретических и численных исследований, могут быть использованы на этапе проектирования при оценке прочности и долговечности конструкций расчетными и экспериментальными методами.

### **Основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту**

1. Математические модели определения НДС пластин переменной толщины, в том числе прямоугольных и круглых пластин, позволяющие существенно уточнить НДС в зонах искажения напряженного состояния.

2. Расчеты НДС прямоугольных и круглых пластин под действием локальных и распределенных нагрузок, основанные на методах конечных разностей и матричной прогонки для решения систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и алгебраических уравнений.

3. Доказательство существования дополнительного быстро затухающего при удалении от жестко защемленного края пластин напряженного состояния типа “погранслоя”, компоненты которого по величине одного порядка с величинами основного (внутреннего) напряженного состояния, определяемого по классической теории.

4. Результаты анализа изменяемости и характера распределения НДС прямоугольных и круглых пластин переменной толщины в зависимости от изменяемости толщины и характера нагрузок.

5. Математические модели определения НДС круглых пластин переменной толщины при совместном действии распределенной механической нагрузки и повышенной температуры, позволяющие существенно уточнить НДС в зоне жестко защемленного края.

**Апробация работы.** Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- XXIII-м, XXIV-м, XXV-м международных симпозиумах «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Московская обл., 2017, 2018, 2019 г.г.

- VI-м, VII-м международных научных семинарах «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». Москва, 2017, 2018 г.г.

- 18-й Международной конференции «Авиация и космонавтика», МАИ. Москва, 2019 г.г.

- Научном семинаре института № 9 «Общеинженерной подготовки», Московского авиационного института, 2020 г.г.

Работа в целом обсуждалась на заседании кафедры № 906, научном семинаре института № 9 «Общеинженерной подготовки» Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 13 научных работ, в том числе 6 работ в изданиях из перечня ВАК РФ, 1 работа в издании из МБД Scopus.

#### **Структура диссертации и аннотация глав.**

Диссертация состоит из введения, четырех глав. Общий объем составляет 155 страниц, 78 рисунков и 5 таблиц. Список используемой литературы содержит 136 наименований.

**Во введении** обосновывается актуальность научных исследований, изложенных в диссертации, а также сформулированы цель и задачи, определена научная новизна, практическая значимость диссертационной работы.

**В первой главе** рассмотрены общие положения о состоянии проблемы пластин и оболочек; приведен обзор литературных источников, посвященных изучению пластин и оболочек в различных аспектах.

**Во второй главе** разработана уточненная математическая модель НДС прямоугольных пластин переменной толщины и построена система дифференциальных уравнений и соответствующие граничные условия. Сформулирована краевая задача, которая с помощью тригонометрических рядов, методов конечных разностей и матричной прогонки сведена к численному интегрированию системы 11-и уравнений с граничными условиями. Методом конечных разностей и матричной прогонки построены решения однородных систем алгебраических уравнений для общего случая деформации прямоугольной пластины переменной толщины. При определении поперечных нормальных и касательных напряжений используется прямое интегрирование уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Приведены примеры расчета НДС прямоугольной изотропной пластины произвольной геометрии в продольном направлении. Получены решения систем дифференциальных уравнений для случаев распределенной и локальной нагрузок типа распределенной постоянной, синусоидальной, параболической нагрузок. Рассматриваются также варианты изменения толщины пластины по линейной и квадратичной функциям. На примере пластины постоянной толщины дано сравнение результатов расчета НДС по разработанной в диссертации уточненной теории с данными классической и других вариантов уточненной теорий.

**В третьей главе** разработана уточненная математическая модель НДС круглых пластин переменной толщины и построена система дифференциальных уравнений и граничных условий. Для изотропных круглых пластин переменной толщины получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях с переменными коэффициентами, содержащая дополнительные члены, учитывающие влияние изменения толщины на НДС пластины. Краевая задача для круглой пластины из системы 11-и дифференциальных уравнений решена методом конечных разностей и матричной прогонки.

Приведены примеры расчета НДС круглых изотропных пластин переменной толщины при различных вариантах внешних нагрузок. Анализируются также случаи изменения толщины пластины по линейной и квадратичной функциям. Предложена методика расчета поперечных нормальных напряжений. Выполнено сравнение результатов расчета по уточненной теории с данными классической теории.

**В четвертой главе** разработана уточненная математическая модель НДС круглых пластин из изотропных материалов при совместном действии механических нагрузок и температур. Рассматривается случай влияния теплового воздействия, приводящего к возникновению дополнительных деформаций, обусловленных всесторонним тепловым расширением. Эти деформации налагаются на упругие и учитываются при формулировке задачи. С помощью вариационного принципа Лагранжа получена система основных уравнений уточненной теории и соответствующие граничные условия с учетом влияния температуры. Система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях с переменными коэффициентами, содержащая дополнительные члены, учитывающие влияние изменения толщины на НДС пластины, решена методом конечных разностей.

Приведен пример расчета НДС круглой пластины переменной толщины по уточненной теории; дан анализ результатов расчета НДС по уточненной теории для нескольких вариантов изменения температуры при одинаковом механическом нагружении.

## ГЛАВА I. ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

В данной главе представлен обзор литературы по теории пластин и оболочек.

### 1.1. Современное состояние исследований пластин и оболочек

Тонкостенные пластины и оболочки являются важнейшими элементами многих современных конструкций объектов машиностроения, в том числе авиационной и ракетно-космической отрасли. Быстрое развитие технологий создания новых материалов позволило использовать их уникальные достоинства в конструкциях, для расчета которых применяется теория пластин и оболочек. Одним из основных воздействий на тонкостенные конструкции является распределенная по поверхности пластины или локализованная на небольших ее участках нагрузка в виде силового или температурного поля. НДС пластины в таких случаях, особенно при значительной локализации внешних воздействий, может существенно влиять на прочность и долговечность конструкций.

Инженерные расчеты тонкостенных элементов конструкций типа пластин и оболочек базируются на результатах классической теории пластин Кирхгофа и классической теории оболочек типа Лява. В основу этих теорий была положена гипотеза о сохранении нормального элемента, которая позволила привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной. Теория пластин и оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа – Лява, была построена в конце XIX века. Краткий очерк развития теории пластин и оболочек можно найти в работах [11, 26, 42, 79, 82].

По мере развития теории оболочек появились обзорные либо посвященные отдельными ее проблемам статьи. Краткие обзоры исследований по расчету пластин и оболочек за различные временные периоды можно найти в работах отечественных [16, 17, 21, 32, 35, 86, 87, 119] и иностранных [126, 127, 129] ученых. Основные положения классической теории представлены также в

следующих монографиях и учебных пособиях: [8, 9, 14, 19-21, 23, 25, 41, 42, 53, 64, 66, 72, 75, 79, 80, 83, 86, 87, 124].

Среди многочисленных публикаций по теории тонких пластин и оболочек выделим следующие: Л.А. Агаловян [1, 2], О.К. Аксентян [3], С.А. Амбарцумян [4-6], В.В. Болотин [12], Д.В. Вайнберг [15], В.В. Васильев [16-19], В.З. Власов [20-22], А.С. Вольмир [23], И.И. Ворович [3, 24-26], А.Л. Гольденвейзер [30-35], Э.И. Григолюк [36], Я.М. Григоренко [37, 38], А.А. Дудченко [48-49], М.С. Корнишин [60], А.И. Лурье [64], Х.М. Муштари [67], В.В. Новожилов [70-72], И.Ф. Образцов [73, 74], В.Ю. Ольшанский [76], В.Н. Паймушин [77-78], В.В. Пикуль [79-80], И.М. Рапопорт [81], С.П. Тимошенко [86], Вал.В. Фирсанов [88-116], Г.З. Шарафутдинов [122], Э. Рейсснер [130-133], Р.М. Naghdi [127] и др.

Основным теоретическим результатам, полученным в классической теории пластин и оболочек, посвящены известные монографии В.З. Власова [20-22], А.Л. Гольденвейзера [30-35], А.И. Лурье [64], В.В. Новожилова [70-72], С.П. Тимошенко [86]. Фундаментальные исследования по нелинейной теории пластин и оболочек принадлежат А.С. Вольмиру [23], А.Н. Данилину [40], М.С. Коршнину [60] и Х.М. Муштари [67].

Наиболее исследованными являются задачи о НДС прямоугольных [16, 23, 30, 38, 64, 72, 86, 88, 94-97, 120] и круглых пластин [9, 14, 33, 47, 59, 86, 86, 105, 107, 114]. Задачам теории анизотропных пластин и оболочек посвящено относительно немного работ [1, 4, 10, 63]. Многослойные пластины и оболочки рассматривались в работах [45, 46]. Контактные задачи рассматривались в работах [14, 85]. Расчет НДС пластин при воздействии температуры представлен в работах [13, 27, 58].

В работе Д.В. Тарлаковского и Г.В. Федотенкова [84] рассматривалось воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим наполнителем. Расчет осесимметричных колебаний оболочек

вращения с жидкостью при произвольных условиях представлен в работе Т.В. Гришаниной [39].

В работах С.Н. Кривошапко и В.Н. Иванова [52, 54, 62] используется систему 20 расчетных уравнений, предложенную А.Л. Гольденвейзером для косоугольной системы криволинейных координат при условии разложения векторов внутренних усилий, моментов и внешней поверхностной нагрузки по осям основного неортогонального триэдра. Представлены методы расчета оболочек неканонической формы.

На всем протяжении развития теории пластин разрабатывались математические направления, которые ведут свое начало в работах выдающихся математиков А. Коши (A. Cauchy), С. Пуассона (S. Poisson). Обзор работ этого направления содержится в статье А.Л. Гольденвейзера [31,35], монографии А.И. Лурье [64], монографии и статьях И.И. Воровича [25, 26].

Статья Васильева В.В [16] носит обзорный характер и посвящена анализу классической теории тонких изотропных пластин. В связи с этим рассматриваются работы Пуассона, Кирхгофа, Томсона и Тэта, в которых была построена классическая теория пластин. Установлено, что причиной появления некорректных решений является предопределенность системы гипотез, при обосновании которых в классических работах по теории пластин были допущены ошибки. Анализируются уточненные теории первого приближения, называемые теориями Тимошенко, Рейсснера или Рейсснера-Миндлина.

Применение в различных отраслях техники композиционных материалов слоистой и волокнистой структуры, а также разработка новых методов расчета пластинчатых конструкций из неоднородных материалов [4, 43, 65, 88] показали неправомерность, в той или иной степени, использования классической теории для этих материалов. Поэтому основные усилия исследователей были направлены на усовершенствование [30-35, 50, 51, 88-90] теорий типа Кирхгофа-Лява и Тимошенко-Рейсснера.

Погрешность классической теории определяется, во-первых, мерой близости абстрактного материала, не допускающего поперечных деформаций, реальному материалу пластины и, во-вторых, предопределенностью задачи, что потребовало введения обобщенной поперечной силы Кирхгофа. Первая оценка погрешности классической теории проведена В.В. Новожиловым и Р.М. Финкельштейном [71], которая основывается на геометрических особенностях оболочки. Х.М. Муштари и К.З. Галимов [67] получили оценку, исходя из физических соображений. Оценка А.Л. Гользенвейзера [31] получена методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости и в отличие от оценки [34, 35] учитывает изменчивость НДС в пластине и оболочке.

Для устранения недостатка, связанного с предопределенностью задачи, необходимо было учесть деформации поперечного сдвига. В связи с этим была разработана сдвиговая теория оболочек типа Тимошенко-Рейсснера [110]. К этому направлению развития теории оболочек принадлежат работы С.А. Амбарцумяна [4, 5], В.З. Власова [20, 21], М.П. Шереметьева [110] и др. Современное изложение сдвиговой теории пластин приведено в статьях В.В. Васильева, С.А. Лурье [17, 18]. В сдвиговой теории поперечные деформации растяжения (сжатия) по-прежнему не учитываются, а для учета поперечных деформаций сдвига используются различные приемы. В результате в сдвиговой теории исчезла погрешность, связанная с обобщенной силой Кирхгофа, но осталась погрешность, определяемая физической моделью материала, а также появляется такой недостаток, как невозможность учета самоуравновешенных составляющих краевых сил.

Разложение перемещений, деформаций и напряжений в ряды по поперечной координате позволяет понизить размерность уравнений теории упругости на единицу. Но это достигается ценой увеличения числа двумерных уравнений до бесконечности, что имеет свои практические неудобства. Поэтому при построении теории пластин и оболочек основное внимание уделяется проблеме редукции бесконечной системы двумерных уравнений к



конечной системе. Характерной особенностью рассматриваемого направления развития теории оболочек является полное удовлетворение закона Гука и геометрии перемещений сплошной среды. Вследствие этого редукция бесконечной системы уравнений к конечной неизбежно входит в противоречие с локальными уравнениями равновесия. Из теорем теории упругости известно, что локальные уравнения равновесия доставляют минимум потенциальной энергии упругого тела, при котором реализуются истинные перемещения [64]. Отсюда следует, что решения редуцированных уравнений могут оказаться близкими к точным только в тех задачах, где нарушения локальных уравнений равновесия незначительны. В противном случае могут иметь место существенные ошибки.

Свыше шестидесяти лет тому назад для построения теории пластин и оболочек стали применять асимптотические методы, приводящие, в конечном итоге, к представлению решения в виде рядов, расположенных по степеням малого параметра - относительной толщины пластины или оболочки.

Асимптотические методы превратились в основной инструмент преобразования уравнений классической теории пластин и оболочек. Асимптотические методы нашли успешное применение в исследованиях А.Л. Гольденвейзера [31 - 33], Э. Рейсснера [130-133], Э.Л. Рейсса [129], А. Грина [126], И.И. Воровича [24], И.М. Рапопорта [81], А.В. Колоса [59], Л.А. Агаловяна [1, 2], С.Н. Кривошапко [61, 62], Б.В. Нерубайло [68, 69], Т. Левински [134], В.Л. Бердичевски [135], Р. Чебакова [136], и других авторов, работы которых можно найти в обзорных докладах [25].

В соответствие с этим методом задача определения НДС пластин и оболочек приводится к построению итерационных процессов, один из которых определяет основное напряженное состояние, а другие итерационные процессы позволяют получить быстро затухающие при удалении от края самоуравновешенные напряженные состояния (НДС типа «погранслои») плоской и антиплоской задач со стандартными условиями.

Анализ сформулированных краевых задач для определения НДС типа «погранслоя» в прямоугольной ортотропной пластине [88] и прямоугольной пластине переменной толщины [94] показал, что их решение сопряжено с математическими трудностями. По этой причине задача о дополнительном (по отношению к классической теории) НДС вблизи защемленного края была решена Вал. В. Фирсановым в вариационной постановке методом Власова-Канторовича с помощью специально построенной полиномиальной аппроксимирующей функции. Далее будем называть это направления вариационно-асимптотического.

В [88] при рассмотрении примера расчета прямоугольной ортотропной пластинки установлено, что дополнительное самоуравновешенное НДС вблизи защемленного края, уточняющее классическую теорию, вносит существенный вклад в общее напряженное состояние. Показано, что максимальные изгибные напряжения уточняются на 21%, поперечные касательные напряжения в 5 раз превосходят соответствующие напряжения классической теории и поперечные нормальные напряжения составляют 22,5% от максимальных изгибных напряжений, это необходимо учитывать при оценке прочности связующего в композиционных материалах.

На современном этапе развития теории пластин и оболочек, когда потребовался учет поперечных деформаций, геометрические представления вошли в противоречие с физической сущностью [24, 25] пластин и оболочек, как трехмерного тела.

## **1.2. Проблемы исследования НДС пластин по уточненной теории**

В сороковых годах Э. Рейсснер [130-133] предложил новую линейную теорию упруго-статического изгиба пластин, представляющую собой качественное усовершенствование теории Киргоффа. Для тонкой пластины постоянной толщины, загруженной нормальными силами переменной интенсивности, при отсутствии массовых сил из вариационного принципа Кастильяно с применением метода неопределенных множителей Лагранжа

получены новые дифференциальные уравнения и соответствующие граничные условия. Существенным достижением этих работ стало построение системы уравнений шестого порядка (за счет учета влияния поперечной деформации сдвига), позволяющей удовлетворить трем граничным условиям.

В работе [130] полученные соотношения уточняются и обобщаются на случай изотропной пластины, а также более подробно, обсуждается применение метода неопределенных множителей Лагранжа для получения соотношений упругости и граничных условий.

Приведем более подробно предположения и процедуру сведения трехмерной задачи теории упругости к двумерной, предложенные Рейсснером. В работе Э. Рейсснера [131] нелинейные уравнения выведены для трехслойной изотропной пластины в предположении, что наружные слои работают только на растяжение - сжатие (мембрана), а средний слой воспринимает только поперечные деформации сдвига и поперечную нормальную деформацию. Показано, что поперечное нормальное напряжение мало по сравнению с другими напряжениями и в окончательных уравнениях полагается равным нулю.

В работе [132] двумерные нелинейные уравнения пластин получены из соответствующих трехмерных нелинейных уравнений движения путем их интегрирования по толщине. Кроме поперечной деформации сдвига учитывается также влияние поперечной инерции вращения и объемных сил. Компоненты вектора перемещения разлагаются в ряд по степеням  $z$  с удержанием в рядах линейных членов. Формулируются пять граничных условий.

Из полученной системы уравнений (нелинейной относительно  $w$ ) как частные случаи получаются уравнения Рейсснера. Линейные уравнения, описывающие осесимметричные колебания круглой пластины постоянной толщины, даны в работе Э. Рейсснера [133]. В.В. Новожилова [71] в предположении, что перемещения  $u$  и  $v$  меняются по линейному закону, а

прогиб  $w$  постоянен по толщине. Пять граничных условий формулируются по Рейсснеру.

Значительное число работ посвящено вопросу выяснения влияния поперечного сдвига и поперечного нормального напряжения на деформированное состояние пластин, лежащих на упругом основании, при изгибе. При этом выяснено, что величина поправок, вносимых теорией Рейсснера, существенно зависит от таких факторов, как способы приложения нагрузки, жесткости основания, геометрических параметров пластины.

Расчет осесимметричных пластин выполнен также в работе В.С. Глазырина [29]. В работе [29] дается общее решение задачи об изгибе неограниченной пластины, лежащей на любом линейно деформируемом однородном основании под действием произвольной осесимметричной нагрузки. Рассмотренные числовые примеры показывают, что результаты, полученные по классической теории и теории Рейсснера, могут значительно различаться.

Одной из первых работ, направленной на обобщении теории Рейсснера является исследование Гольденвейзера [35], где устанавливается, что поправки, вносимые этой теорией, представляют собой дополнительное напряженное состояние связанное с краевым эффектом нового типа, названным автором "краевым эффектом Рейсснера". Показано, что вследствие принятого Рейсснером линейного закона распределения напряжений по толщине пластины, теория, качественно правильно отображающая картину явления, может дать неверные результаты, особенно вблизи границы.

Постулируя в физически состоятельном направлении полное удовлетворение уравнений равновесия и геометрии сплошной среды, полученные при этом невязки вносятся в уравнения закона Гука для материала с произвольным распределением упругих свойств по толщине. Далее за счет минимизации этих невязок осуществляется корректировка модели материала пластины и оболочки.

Ближайшими предшественниками физически состоятельного направления развития теории пластин и оболочек можно считать С.А. Амбарцумяна [4-6], В.З. Власова [27-30], С.Г. Лехницкого. В работах С.А. Амбарцумяна, завершившего подходы В.З. Власова и С.Г. Лехницкого к построению классической теории оболочек, вывод всех соотношений теории слоистых анизотропных оболочек производится непосредственно из уравнений теории упругости в криволинейной ортогональной системе координат, без привлечения элементов теории поверхностей.

В работах [50, 51], используя методы простых итераций и асимптотического интегрирования Е.М. Зверяевым, была решена проблема построения моделей типа Тимошенко для статических и динамических задач теории пластин и оболочек. При этом асимптотические оценки, сопровождающие простые итерации, дают возможность отбросить второстепенные члены по отношению к главным, оценить скорость сходимости итерационного процесса, доказать асимптотическую сходимость и получить простые модели задач.

В начале семидесятых годов прошлого столетия стали разрабатываться новые направления развития теории пластин и оболочек, в которых учет поперечных деформаций (ими в классической теории пренебрегают) находится в полном соответствии с локальными уравнениями равновесия и сплошности материала. Одно из них в работах В.В. Васильева и С.А. Лурье [17, 18] называется «энергетически согласованным» направлением; другое в работах В.В. Пикуля [79, 80] – «физически состоятельным» направлением развития теории оболочек, объединенных общей концепцией сплошных сред с внутренними связями.

В энергетически согласованном направлении развития теории пластин в работе [17] В.В. Васильевым и С.А. Лурье решена задача сведения трехмерных уравнений теории упругости к двумерным уравнениям теории тонких пластин. Во главу указанного подхода ставится выполнение уравнений равновесия и

граничных условий, полученных с помощью вариационных принципов. При этом искомые перемещения представляются рядами по нормальной координате и формулируются, которые связывают между собой количество слагаемых в разложениях перемещений по тангенциальным и поперечным направлениям. В качестве примера рассматривается задача о пластине, для которой полученное решение хорошо сходится с точным.

В рамках этого направления, которого назовем далее вариационно-полиномиальным в работе [103] построены двумерные уравнения для прямоугольных пластин произвольной геометрии в продольной направлении на основе минимизации энергетического функционала Лагранжа, в котором компоненты искомого НДС аппроксимируются полиномами по нормальной к срединной плоскости координате на одну-две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява. Показано полное соответствие системы двумерных уравнений для прямоугольной пластины произвольной геометрии законам механики сплошной среды, что приводит к повышению точности и эффективности расчетов. В работах [104-107] представлены математические модели НДС прямоугольных и круглых пластин переменной толщины по рассматриваемому направлению уточненной теории.

В работе [89], представлены математические модели НДС цилиндрических оболочек с использованием вариационно-полиномиального подхода. В работе [90] рассматривается круговая цилиндрическая оболочка переменной толщины, изменяющейся по произвольному закону вдоль продольной оси.

В работе [93] на основе вариационно-полиномиального подхода построены двумерные уравнения динамики теории произвольных оболочек и соответствующие граничные условия, позволяющие учитывать поперечные сдвиг и обжатие оболочки. Рассматриваются собственные колебания круговой цилиндрической оболочки. Собственные частоты колебаний определяются методом Бубнова-Галеркина.

Следует отметить работу [114], в которой вариационно-асимптотический метод применяется для уточнения основного НДС круглой пластины с несимметрично изменяющейся переменной толщиной. Дано обобщение известных гипотез Кирхгофа-Лява о неизменяемых нормального к середине плоскости пластины элемента. Результаты расчетов показали, что при наличии незначительной переменности толщины пластины можно существенно повысить прочности и весового совершенства при уменьшении её массы.

В работах [10, 98-101] разработаны уточненные математические модели для исследования НДС и устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов на основании:

- уточнения математической модели подкрепляющего элемента в условиях одностороннего контакта с обшивкой;

- учета влияния технологии изготовления панелей: остаточных температурных напряжений и предварительного натяжения армирующих волокон;

- разработки пакета прикладных программ и реализации процесса многокритериальной оптимизации.

В работе [121] в рамках вариационно-полиномиального подхода представлены результаты исследования флаттера плоских слоистых композиционных панелей, обтекаемых с большими сверхзвуковыми скоростями, на основе уточненной теории пластин. На основе вариационного принципа Гамильтона получены уравнения колебаний панели. Аэродинамические нагрузки определяются с помощью соотношений поршневой теории. Приведены результаты параметрического анализа влияния некоторых конструктивных параметров на критические скорости потока.

В работе [115] построена новая математическая модель НДС изотропной сферической оболочки под действием произвольной нагрузки на основе неклассической теории. На основе вариационно-полиномиального подхода получены система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях и

естественные граничные условия. Анализируется дополнительное напряженное состояние типа “погранслои”.

В работе [116] разработан вариант уточненной теории расчета НДС цилиндрических оболочек из пьезоматериалов. Математическая модель в зоне жестко защемления края оболочек построена на основании применения вариационно-полиномиального подхода к уравнениям трехмерной теории упругости. Получены система уравнений равновесия оболочек и соответствующие краевые условия при действии только электрического поля. Сформулированная краевая задача решается с помощью преобразования Лапласа. В результате установило, что электроупругие состояние оболочек существенно зависит от параметров пьезо-эффекта.

В работах [117, 118] уточняется классическая теория изгиба тонких изотропных пластин Кирхгофа за счет учета физической связи касательных напряжений и сдвиговых деформаций для композиционных материалов, достаточно жестких в плоскости армирования и существенно слабых в поперечном направлении. Применяется подход, состоящий в аппроксимации перемещений в виде степенных рядов по поперечной координате. В результате определяющие уравнения модели содержат все осредненные упругие характеристики пластинки, в том числе и сдвиговые. Показано, что от соотношения этих упругих характеристик зависит уточняющий эффект той или иной модели.

Для развития данного направления в теории пластин и оболочек можно поставить следующие задачи:

- построение уравнений для пластин и оболочек различной геометрии, выполняемых из неоднородных материалов и с помощью которых можно построить уточненные теории расчета НДС, например, треугольных и эллиптических пластин, конических и сферических оболочек и др.;
- количественная оценка результатов расчета в уточненной теории по отношению к классической теории;



- разработка в рамках уточненной теории методов инженерных расчетов типовых конструкций объектов машиностроения, в том числе, авиационно-ракетной отрасли;

- анализ результатов теоретических исследований с целью их использования при разработке справочных материалов для процесса проектирования и оценки прочности конструкций расчетными и экспериментальными методами.

- методы оптимизации геометрических и физических параметров пластин и оболочек при рациональном проектировании зон повышенных напряжений с целью обеспечения.

Таким образом, несмотря на известные достижения в теории и методах расчета пластин, имеется еще ряд нерешенных задач для пластин и пластины переменной толщины. Поэтому исследование на прочность пластин различной геометрии, а также оценка погрешности уточненной теории по сравнению с классической теорией продолжает сохранять свою актуальность.

### **1.3. Выводы к первой главе**

Проведенный краткий анализ публикаций по рассматриваемой тематике позволил сформулировать следующие выводы

1. Представлен обзор литературы по основным направлениям развития теории пластин и оболочек, показана актуальность темы диссертации и намечены основные задачи исследования НДС пластин переменной толщины.

2. В целях создания наиболее рациональных пространственных конструкций, образованных из тонкостенных пластин, необходимо учитывать в расчетах НДС типа “погранслои”. Наиболее достоверными в настоящее время являются уточненные теории. Однако математические модели для их применения в расчетах НДС пластин переменной толщины еще недостаточно изучены.

3. В настоящее время в связи с развитием современных компьютерных технологий для анализа НДС пластин на этапе решения системы дифференциальных уравнений наиболее эффективны численные методы, в частности метод конечных разностей.

4. Методы решения трехмерных задач теории упругости для пластин переменной толщины, в том числе при термомеханическом нагружении, еще недостаточно проработаны.

## ГЛАВА II. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В данной главе представлена уточненная теория расчета НДС прямоугольных пластин, симметричных относительно серединой плоскости и произвольной геометрии в продольном направлении. Уравнения состояния пластины описываются соотношениями трехмерной теории упругости. Искомые перемещения пластины разлагаются по нормальной к середине поверхности пластины координате в полиномы на две степени выше, чем в классической теории типа Киргофа-Лява. Применяя вариационный принцип Лагранжа к уточненному выражению полной энергии пластины, сформулирована краевая задача, уточняющая её НДС в зонах искажения за счет учета напряженного состояния “погранслоя”. Получены дифференциальные уравнения двумерной теории прямоугольной пластины и соответствующие краевые условия.

Одна из особенностей предлагаемой уточненной теории состоит в том, что при определении поперечных нормальных и касательных напряжений используется прямое интегрирование уравнений равновесия трехмерной теории упругости. Для изотропной прямоугольной пластины переменной толщины методом Леви получена система дифференциальных уравнений равновесия в перемещениях с переменными коэффициентами, содержащая дополнительные члены, учитывающие влияние изменения толщины на НДС пластины.

Система уравнений в перемещениях приведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью метода разложения компонентов НДС и нагрузок в тригонометрические ряды по продольной координате. Решение краевой задачи осуществляется методами конечных разностей и матричной прогонки. Приведены результаты параметрических исследований НДС прямоугольных пластин переменной толщины.

## 2.1. Построение уравнений уточненной теории

Прямоугольная пластина рассматривается как трехмерное твердое тело, нагруженная поперечной распределенной нагрузкой  $q(x, y)$  (рис. 1). Обозначив через  $a$ ,  $b$ ,  $2h(x)$  длину, ширину и переменную толщину пластины соответственно, отнесем ее к безразмерной системе координат  $Oxyz$ . Координатные оси  $Ox$ ,  $Oy$  совпадают с главными направлениями срединной поверхности пластины, а ось  $Oz$  направлена по наружной нормали к этой поверхности. Здесь координаты  $x$ ,  $y$ ,  $z$  представляют собой относительные (измеренные в долях 1 м) расстояния по длине, ширине и толщине пластины. Края пластины  $x=0$ ,  $x=a$ ,  $y=0$ ,  $y=b$  могут быть любыми, т.е. свободными, шарнирно опертыми и жестко защемленными.

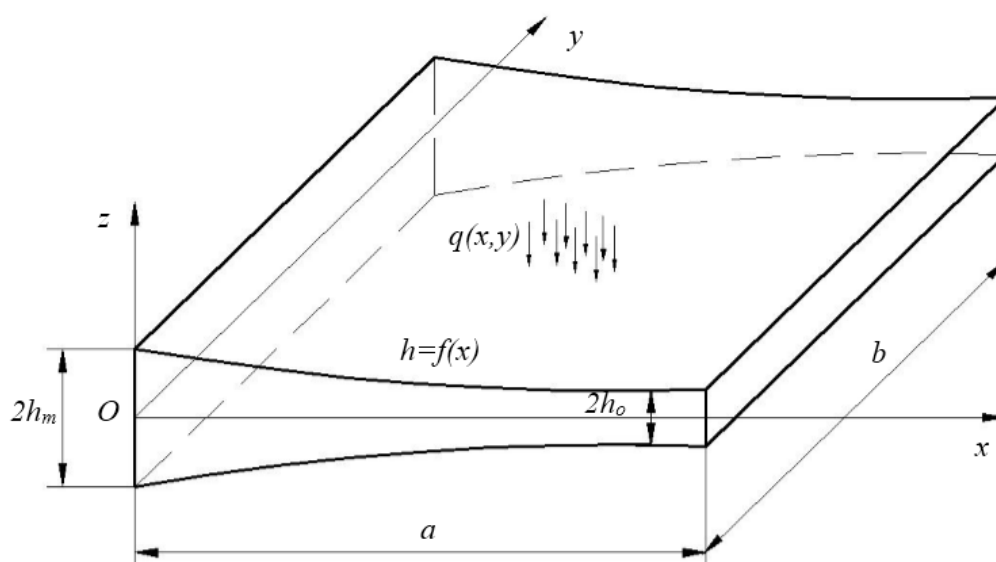


Рис. 2.1. Прямоугольная пластина

Для описания НДС прямоугольной пластины используются уравнения трехмерной задачи теории упругости в триортогональной системе координат. Построим систему дифференциальных двумерных уравнений, зависящих от независимых переменных  $x$ ,  $y$ . Реализуя подход, рассматриваемый в [17, 18], представим перемещения в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned}
U_1(x, y, z) &= u_0(x, y) + u_1(x, y)z + u_2(x, y)\frac{z^2}{2!} + u_3(x, y)\frac{z^3}{3!}, \\
U_2(x, y, z) &= v_0(x, y) + v_1(x, y)z + v_2(x, y)\frac{z^2}{2!} + v_3(x, y)\frac{z^3}{3!}, \\
U_3(x, y, z) &= w_0(x, y) + w_1(x, y)z + w_2(x, y)\frac{z^2}{2!},
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где функции  $U_1(x, y, z)$ ,  $U_2(x, y, z)$ ,  $U_3(x, y, z)$  определяют перемещения пластины по направлениям  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$ . Разложение (2.1) соответствует повышению на два порядка степени полиномов, аппроксимирующих искомые перемещения по нормальной координате, по отношению к классической теории.

Геометрические уравнения трехмерной теории упругости имеют вид

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \partial U_1 / \partial x, \quad \varepsilon_y = \partial U_2 / \partial y, \quad \gamma_{xy} = \partial U_1 / \partial y + \partial U_2 / \partial x, \\
\gamma_{xz} &= \partial U_1 / \partial z + \partial U_3 / \partial x, \quad \gamma_{yz} = \partial U_2 / \partial z + \partial U_3 / \partial y, \quad \varepsilon_z = \partial U_3 / \partial z.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Подставляя (2.1) в (2.2), получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x} \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_y = \sum_{i=0}^3 \frac{\partial v_i}{\partial y} \frac{z^i}{i!}, \quad \gamma_{xy} = \sum_{i=0}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_z = w_1 + w_2 z, \\
\gamma_{xz} &= \left( u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) + \left( u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x} \right) z + \left( u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial x} \right) \frac{z^2}{2!}, \\
\gamma_{yz} &= \left( v_1 + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \left( v_2 + \frac{\partial w_1}{\partial y} \right) z + \left( v_3 + \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) \frac{z^2}{2!}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Физические уравнения трехмерной теории упругости для пластины записываются в виде [72]

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= (2G_0 + \lambda)\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, \quad \sigma_y = \lambda\varepsilon_x + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_y + \lambda\varepsilon_z, \\
\sigma_z &= \lambda\varepsilon_x + \lambda\varepsilon_y + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_z, \quad \tau_{xy} = G_0\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G_0\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G_0\gamma_{yz},
\end{aligned} \tag{2.4}$$

где коэффициенты  $G_0$ ,  $\lambda$  представляют собой упругие постоянные изотропного материала пластины

$$G_0 = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad \lambda = \frac{\mu E}{2(1 + \mu)(1 - 2\mu)}.$$

Сформулируем вариационную постановку задачи [72]. Запишем условие минимума энергетического функционала Лагранжа

$$\delta U - \delta A = 0. \quad (2.5)$$

где вариация потенциальной энергии деформации  $\delta U$  находится как

$$\delta U = \iiint (\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dx dy dz$$

и  $\delta A$  - вариация работы внешней нагрузки, определяемая по формуле

$$\delta A = \iint q(x, y) \delta \left[ w_0(x, y) + w_1(x, y)h + w_2(x, y) \frac{h^2}{2} \right] dx dy.$$

Подставляя в формулу (2.5) разложения для деформаций (2.3) и вводя в рассмотрение обобщенные внутренние силовые факторы, получим равенства

$$\begin{aligned} \delta U - \delta A = & \int_0^a \int_0^b \int_{-h}^h \left[ \sigma_x \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial x} z + \frac{\partial \delta u_2}{\partial x} \frac{z^2}{2!} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial x} \frac{z^3}{3!} \right) + \right. \\ & + \sigma_y \left( \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_1}{\partial y} z + \frac{\partial \delta v_2}{\partial y} \frac{z^2}{2!} + \frac{\partial \delta v_3}{\partial y} \frac{z^3}{3!} \right) + \sigma_z (\delta w_1 + \delta w_2 z) + \\ & + \tau_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial y} z + \frac{\partial \delta u_2}{\partial y} \frac{z^2}{2!} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial y} \frac{z^3}{3!} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_1}{\partial x} z + \frac{\partial \delta v_2}{\partial x} \frac{z^2}{2!} + \frac{\partial \delta v_3}{\partial x} \frac{z^3}{3!} \right) + \\ & + \tau_{yz} \left( \delta v_1 + \delta v_2 z + \delta v_3 \frac{z^2}{2!} + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_1}{\partial y} z + \frac{\partial \delta w_2}{\partial y} \frac{z^2}{2!} \right) + \\ & + \tau_{xz} \left( \delta u_1 + \delta u_2 z + \delta u_3 \frac{z^2}{2!} + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x} + \frac{\partial \delta w_1}{\partial x} z + \frac{\partial \delta w_2}{\partial x} \frac{z^2}{2!} \right) - \\ & \left. - (q \delta w_0 + qh \delta w_1 + q \frac{h^2}{2} \delta w_2) \right] dx dy dz = \\ = & \int_0^a \int_0^b \left[ N_x \frac{\partial \delta u_0}{\partial x} + M_x^1 \frac{\partial \delta u_1}{\partial x} + M_x^2 \frac{\partial \delta u_2}{\partial x} + M_x^3 \frac{\partial \delta u_3}{\partial x} + \right. \\ & + N_y \frac{\partial \delta v_0}{\partial y} + M_y^1 \frac{\partial \delta v_1}{\partial y} + M_y^2 \frac{\partial \delta v_2}{\partial y} + M_y^3 \frac{\partial \delta v_3}{\partial y} + \\ & + H_z^1 \delta w_1 + H_z^2 \delta w_2 + \\ & + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial x} \right) + M_{xy}^1 \left( \frac{\partial \delta u_1}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_1}{\partial x} \right) + M_{xy}^2 \left( \frac{\partial \delta u_2}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_2}{\partial x} \right) + \\ & + M_{xy}^3 \left( \frac{\partial \delta u_3}{\partial y} + \frac{\partial \delta v_3}{\partial x} \right) + Q_{yz} \left( \delta v_1 + \frac{\partial \delta w_0}{\partial y} \right) + M_{yz}^1 \left( \delta v_2 + \frac{\partial \delta w_1}{\partial y} \right) + M_{yz}^2 \left( \delta v_3 + \frac{\partial \delta w_2}{\partial y} \right) + \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$+Q_{zx}(\delta u_1 + \frac{\partial \delta w_0}{\partial x}) + M_{zx}^1(\delta u_2 + \frac{\partial \delta w_1}{\partial x}) + M_{zx}^2(\delta u_3 + \frac{\partial \delta w_2}{\partial x}) \Big] dx dy = 0.$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$(N_x, N_y, N_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}) = \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) dz,$$

$$(M_x^i, M_y^i, M_{xy}^i, M_{xz}^i, M_{yz}^i) = \int_{-h}^{+h} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}) \frac{z^i}{i!} dz,$$

$$(H_{xz}^i, H_{yz}^i, H_z^i) = \int_{-h}^{+h} (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, \quad p_z^i = qh^i / i!, \quad i = 1, 2, 3,$$

где  $N_x, N_y, N_{xy}, Q_{xz}, Q_{yz}, M_x^i, M_y^i, M_{xy}^i, M_{xz}^i, M_{yz}^i, H_{xz}^i, H_{yz}^i, H_z^i$  - обобщенные внутренние силовые факторы, физическая интерпретация которых в трехмерной системе координат дана в работах [17,18].

Следует отметить, что восемь из тринадцати внутренних силовых факторов, а именно  $N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy}$ , аналогичны соответствующим силовым факторам, принятым в классической теории тонких пластин в общем случае нагружения, когда рассматривается изгиб пластины и её плоское напряженное состояние.

Интегрируя (2.6) по частям, после преобразований получим

$$\begin{aligned} \delta U - \delta A = & \left[ \int_0^b (N_x \delta u_0) \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u_0 dx dy \right] + \\ & + \left[ \int_0^b (M_x^1 \delta u_1) \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_x^1}{\partial x} \delta u_1 dx dy \right] + \left[ \int_0^b (M_x^2 \delta u_1) \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_x^2}{\partial x} \delta u_2 dx dy \right] \\ & + \left[ \int_0^b (M_x^3 \delta u_1) \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_x^3}{\partial x} \delta u_3 dx dy \right] + \left[ \int_0^a (N_y \delta v_0) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v_0 dx dy \right] + \\ & + \left[ \int_0^a (M_y^1 \delta v_1) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_y^1}{\partial y} \delta v_1 dx dy \right] + \left[ \int_0^a (M_y^2 \delta v_2) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_y^2}{\partial y} \delta v_2 dx dy \right] + \\ & + \left[ \int_0^a (M_y^3 \delta v_3) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_y^3}{\partial y} \delta v_3 dx dy \right] + H_z^1 \delta w_1 + H_z^2 \delta w_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \int_0^a (N_{xy} \delta u_0) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u_0 dx dy \right] + \left[ \int_0^b (N_{xy} \delta v_0) \Big|_{y=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta v_0 dx dy \right] + \\
& + \left[ \int_0^a (M_{xy}^1 \delta u_1) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_{xy}^1}{\partial y} \delta u_1 dx dy \right] + \left[ \int_0^b (M_{xy}^1 \delta v_1) \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_{xy}^1}{\partial x} \delta v_1 dx dy \right] + \\
& + \left[ \int_0^a (M_{xy}^2 \delta u_2) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_{xy}^2}{\partial y} \delta u_2 dx dy \right] + \left[ \int_0^b (M_{xy}^2 \delta v_2) \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_{xy}^2}{\partial x} \delta v_2 dx dy \right] + \\
& + \left[ \int_0^a (M_{xy}^3 \delta u_3) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_{xy}^3}{\partial y} \delta u_3 dx dy \right] + \left[ \int_0^b (M_{xy}^3 \delta v_3) \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_{xy}^3}{\partial x} \delta v_3 dx dy \right] + \\
& \quad + \int_0^a \int_0^b H_{yz}^1 \delta v_1 dx dy + \int_0^a \int_0^b M_{yz}^1 \delta v_2 dx dy + \int_0^a \int_0^b M_{yz}^2 \delta v_3 dx dy + \tag{2.7} \\
& \quad + \int_0^a \int_0^b H_{xz}^1 \delta u_1 dx dy + \int_0^a \int_0^b M_{xz}^1 \delta u_2 dx dy + \int_0^a \int_0^b M_{xz}^2 \delta u_3 dx dy + \\
& + \left[ \int_0^a (Q_{yz} \delta w_0) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \delta w_0 dx dy \right] + \left[ \int_0^a (M_{yz}^1 \delta w_1) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_{yz}^1}{\partial y} \delta w_1 dx dy \right] + \\
& + \left[ \int_0^a (Q_{yz} \delta w_0) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} \delta w_0 dx dy \right] + \left[ \int_0^a (M_{yz}^1 \delta w_1) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_{yz}^1}{\partial y} \delta w_1 dx dy \right] + \\
& + \left[ \int_0^a (M_{yz}^2 \delta w_2) \Big|_{y=0}^{y=b} dx - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_{yz}^2}{\partial y} \delta w_2 dx dy \right] + \left[ \int_0^a (Q_{xz} \delta w_0) \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \delta w_0 dx dy \right] + \\
& + \left[ \int_0^a (M_{xz}^1 \delta w_1) \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_{xz}^1}{\partial x} \delta w_1 dx dy \right] + \left[ \int_0^a (M_{xz}^2 \delta w_2) \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \frac{\partial M_{xz}^2}{\partial x} \delta w_2 dx dy \right].
\end{aligned}$$

Раскрывая условие (2.7), находим

$$\begin{aligned}
\delta U - \delta A = & \int_0^b (N_x \delta u_0) \Big|_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^b (M_x^1 \delta u_1) \Big|_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^b (M_x^2 \delta u_1) \Big|_{x=0}^{x=a} dy + \\
& \int_0^b (M_x^3 \delta u_1) \Big|_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a (N_y \delta v_0) \Big|_{y=0}^{y=b} dx + \int_0^a (M_y^1 \delta v_1) \Big|_{y=0}^{y=b} dx + \int_0^a (M_y^2 \delta v_2) \Big|_{y=0}^{y=b} dx + \\
& + \int_0^a (M_y^3 \delta v_3) \Big|_{y=0}^{y=b} dx + \int_0^a (N_{xy} \delta u_0) \Big|_{y=0}^{y=b} dx + \int_0^a (N_{xy} \delta v_0) \Big|_{y=0}^{x=a} dy + \int_0^a (M_{xy}^1 \delta u_1) \Big|_{y=0}^{y=b} dx + \\
& + \int_0^b (M_{xy}^1 \delta v_1) \Big|_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a (M_{xy}^2 \delta u_2) \Big|_{y=0}^{y=b} dx + \int_0^b (M_{xy}^2 \delta v_2) \Big|_{x=0}^{x=a} dy + \int_0^a (M_{xy}^3 \delta u_3) \Big|_{y=0}^{y=b} dx +
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \int_0^b (M_{xy}^3 \delta v_3) \Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 dx dy - \\
& - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial M_x^1}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^1}{\partial y} - H_{xz}^1 \right) \delta u_1 dx dy - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial M_x^2}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^2}{\partial y} - H_{xz}^2 \right) \delta u_2 dx dy - \\
& - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial M_x^3}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^3}{\partial y} - H_{xz}^3 \right) \delta u_3 dx dy - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \right) \delta v_0 dx dy - \\
& - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial M_y^1}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^1}{\partial x} - H_{yz}^1 \right) \delta v_1 dx dy - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial M_y^2}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^2}{\partial x} - H_{yz}^2 \right) \delta v_2 dx dy - \\
& - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial M_y^3}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^3}{\partial x} - H_{yz}^3 \right) \delta v_3 dx dy - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} - p_z^0 \right) \delta w_0 dx dy - \\
& - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial M_{xz}^1}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^1}{\partial y} - H_z^1 - p_z^1 \right) \delta w_1 dx dy - \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\partial M_{xz}^2}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^2}{\partial y} - H_z^2 - p_z^2 \right) \delta w_2 dx dy.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Приравнявая нулю выражения, стоящие перед независимыми вариациями перемещений в выражении (2.8), получим 11 нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно обобщенных усилий, представляющих собой систему головных уравнений уточненной теории прямоугольных пластин переменной толщины

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \\
& \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0, \\
& \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{xy}}{\partial y} = p_z^0, \\
& \frac{\partial M_x^i}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial y} - H_{xz}^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
& \frac{\partial M_y^i}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}^i}{\partial x} - H_{yz}^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \\
& \frac{\partial M_{xz}^1}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^1}{\partial y} - H_z^1 = p_z^1, \\
& \frac{\partial M_{xz}^2}{\partial x} + \frac{\partial M_{yz}^2}{\partial y} - H_z^2 = p_z^2.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Таким образом, 11 уравнений (2.9) представляют собой полную систему двумерных уравнений, содержащих 11 обобщенных перемещений  $u_i, v_i, w_k$ ,  $i = \overline{0..3}; k = \overline{0..2}$ . С помощью соотношений (2.1), (2.3), (2.4), (2.6) уравнения (2.9) могут быть выражены через искомые перемещения  $u_i, v_i, w_k$  и тогда будут иметь 22-й порядок.

*Определение краевых условий.*

В силу произвольности возможных перемещений условие (2.8) выполняется лишь в случае равенства нулю каждого из входящих в него слагаемых, т.е. в случае равенства нулю выражений, стоящих в круглых скобках, либо составляющих возможных перемещений. В результате для каждого края пластины, совпадающего с координатными линиями, находятся 11 граничных условий.

Сформулируем граничные условия на краях пластины, воспользовавшись стандартными краевыми условиями трехмерной теории упругости [72].

Соответствующие граничные условия представляются в следующем виде:

на краях  $x = 0, x = a$

$$\begin{aligned} N_x &= \overline{N}_x \vee u_0 = \overline{u}_0, N_{xy} = \overline{N}_{xy} \vee v_0 = \overline{v}_0, Q_{xz} = \overline{Q}_{xz} \vee w_0 = \overline{w}_0, \\ M_x^i &= \overline{M}_x^i \vee u_i = \overline{u}_i, M_{xy}^i = \overline{M}_{xy}^i \vee v_i = \overline{v}_i, i = 1, 2, 3, \\ M_{xz}^i &= \overline{M}_{xz}^i \vee w_i = \overline{w}_i, i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.10)$$

на краях  $y = 0, y = b$

$$\begin{aligned} N_{xy} &= \overline{N}_{xy} \vee u_0 = \overline{u}_0, N_y = \overline{N}_y \vee v_0 = \overline{v}_0, Q_{yz} = \overline{Q}_{yz} \vee w_0 = \overline{w}_0, \\ M_{xy}^i &= \overline{M}_{xy}^i \vee u_i = \overline{u}_i, M_y^i = \overline{M}_y^i \vee v_i = \overline{v}_i, i = 1, 2, 3, \\ M_{yz}^i &= \overline{M}_{yz}^i \vee w_i = \overline{w}_i, i = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.11)$$

где верхней чертой обозначены значения внешних силовых факторов, действующих по боковым граням пластины.

Очевидно, что краевые условия (2.10), (2.11) охватывают все разнообразие возможных условий закрепления пластины, а их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений (2.9).

*Алгоритм решения задачи.* Из уравнений (2.9) с учетом выражений (2.1), (2.2), (2.3), (2.6) находим систему дифференциальных уравнений в частных производных 22-го порядка относительно 11 обобщенных перемещений  $u_i, v_i, w_k, i = \overline{0..3}; k = \overline{0..2}$ . Решение полученной системы уравнений содержит неизвестные постоянные интегрирования, которые определяются из краевых условий (2.10), (2.11).

Подстановкой найденных перемещений в формулы (2.3) находятся деформации прямоугольной пластины. С помощью соотношений (2.4) получим выражения тангенциальных напряжений пластины. Интегрированием по толщине пластины в интервале от  $-h$  до  $z$ , из трехмерных уравнений равновесия находим выражения поперечных напряжений

$$\tau_{xz} = -\int_{-h}^z \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz, \tau_{yz} = -\int_{-h}^z \left( \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \right) dz, \sigma_z = -\int_{-h}^z \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dz.$$

При этом удовлетворяются уравнения равновесия теории упругости во всех внутренних точках пластины и выполняются граничные условия на всей поверхности пластины.

## 2.2. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Поставляя выражения (2.3) в (2.4), получим

$$\sigma_x = (2G_0 + \lambda) \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \lambda (w_1 + w_2 z),$$

$$\sigma_y = \lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) + (2G_0 + \lambda) \frac{\partial}{\partial y} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \lambda (w_1 + w_2 z),$$

$$\sigma_z = \lambda \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!}) + \lambda \frac{\partial}{\partial y} (v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!}) + (2G_0 + \lambda)(w_1 + w_2 z), \quad (2.12)$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{2} G_0 \left[ \frac{\partial}{\partial y} (u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!}) + \frac{\partial}{\partial x} (v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!}) \right],$$

$$\tau_{xz} = \frac{1}{2} G_0 \left[ (u_1 + u_2 z + u_3 \frac{z^2}{2!}) + \frac{\partial}{\partial x} (w_0 + w_1 z + w_2 \frac{z^2}{2!}) \right],$$

$$\tau_{yz} = \frac{1}{2} G_0 \left[ (v_1 + v_2 z + v_3 \frac{z^2}{2!}) + \frac{\partial}{\partial y} (w_0 + w_1 z + w_2 \frac{z^2}{2!}) \right].$$

Подставляя (2.12) в (2.9) и полагая пластину изотропной, получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & (K_l^{u00} + K_l^{u011} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_l^{u022} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) u_0 + K_l^{v012} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v_0 + K_l^{w01} \frac{\partial}{\partial x} w_0 + \\ & + (K_l^{u10} + K_l^{u111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_l^{u122} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) u_1 + K_l^{v112} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v_1 + K_l^{w11} \frac{\partial}{\partial x} w_1 + \\ & + (K_l^{u20} + K_l^{u211} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_l^{u222} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) u_2 + K_l^{v212} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v_2 + K_l^{w21} \frac{\partial}{\partial x} w_2 + \\ & + (K_l^{u30} + K_l^{u311} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_l^{u322} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) u_3 + K_l^{v312} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} v_3 + K_l^{q13p0} \cdot q_{13p} + K_l^{q13m0} \cdot q_{13m} = 0, \\ & K_i^{u012} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_0 + (K_i^{v00} + K_i^{v011} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_i^{v022} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) v_0 + K_i^{w02} \frac{\partial}{\partial y} w_0 + \\ & + K_i^{u112} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_1 + (K_i^{v10} + K_i^{v111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_i^{v122} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) v_1 + K_i^{w12} \frac{\partial}{\partial y} w_1 + \\ & + K_i^{u212} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_2 + (K_i^{v20} + K_i^{v211} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_i^{v222} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) v_2 + K_i^{w22} \frac{\partial}{\partial y} w_2 + \\ & + K_i^{u312} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u_3 + (K_i^{v30} + K_i^{v311} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_i^{v322} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) v_3 + K_i^{q23p0} \cdot q_{23p} + K_i^{q23m0} \cdot q_{23m} = 0, \\ & K_j^{u01} \frac{\partial}{\partial x} u_0 + K_j^{v02} \frac{\partial}{\partial y} v_0 + (K_j^{w00} + K_j^{w011} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_j^{w022} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) w_0 + \\ & + K_j^{u11} \frac{\partial}{\partial x} u_1 + K_j^{v12} \frac{\partial}{\partial y} v_1 + (K_j^{w10} + K_j^{w111} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_j^{w122} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) w_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +K_j^{u21} \frac{\partial}{\partial x} u_2 + K_j^{v22} \frac{\partial}{\partial y} v_2 + (K_j^{w20} + K_j^{w211} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_j^{w222} \frac{\partial^2}{\partial y^2}) w_2 + \\
& +K_j^{u31} \frac{\partial}{\partial x} u_3 + K_j^{v32} \frac{\partial}{\partial y} v_3 + K_j^{q33p0} \cdot q_{33p} + K_j^{q33m0} \cdot q_{33m} = 0. \quad (2.13)
\end{aligned}$$

где  $l=1,2,3,4$ ;  $i=5,6,7,8$ ;  $j=9,10,11$ . Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
K_1^{u00} &= 0, K_1^{u011} = -\frac{2Eh}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_1^{u022} = \frac{Eh}{1+\mu}, K_1^{v012} = -\frac{Eh}{-1+\mu}, K_1^{w01} = 0, \\
K_1^{u10} &= 0, K_1^{u111} = 0, K_1^{u122} = 0, K_1^{v112} = 0, K_1^{w11} = -\frac{2Eh\mu}{(1+\mu)(-1+\mu)}, \\
K_1^{u20} &= 0, K_1^{u211} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_1^{u222} = \frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_1^{v212} = -\frac{1}{6} \frac{Eh^3}{-1+\mu}, K_1^{w21} = 0, \\
K_1^{u30} &= 0, K_1^{u311} = 0, K_1^{u322} = 0, K_1^{v312} \frac{\partial^2}{\partial xy} v_3 = 0, K_1^{q13p0} = 1, K_1^{q13m0} = -1, \\
K_2^{u00} &= 0, K_2^{u011} = 0, K_2^{u022} = 0, K_2^{v012} = 0, K_2^{w01} = -\frac{Eh}{1+\mu}, \\
K_2^{u10} &= -\frac{Eh}{1+\mu}, K_2^{u111} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_2^{u122} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_2^{v112} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{-1+\mu}, \\
K_2^{w11} &= 0, K_2^{u20} = 0, K_2^{u211} = 0, K_2^{u222} = 0, K_2^{v212} = 0, K_2^{w21} = -\frac{1}{6} \frac{Eh^3(5\mu-1)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, \\
K_2^{u30} &= -\frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_2^{u311} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_2^{u322} = \frac{1}{30} \frac{Eh^5}{1+\mu}, K_2^{v312} = -\frac{1}{30} \frac{Eh^5}{-1+\mu}, \\
& K_2^{q13p0} = h, K_2^{q13m0} = h, \\
K_3^{u00} &= 0, K_3^{u011} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_3^{u022} = \frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_3^{v012} = -\frac{1}{6} \frac{Eh^3}{-1+\mu}, K_3^{w01} = 0, \\
K_3^{u10} &= 0, K_3^{u111} = 0, K_3^{u122} = 0, K_3^{v112} = 0, K_3^{w11} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(-1+2\mu)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, \\
K_3^{u20} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_3^{u211} = -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_3^{u222} = \frac{1}{20} \frac{Eh^5}{1+\mu}, K_3^{v212} = -\frac{1}{20} \frac{Eh^5}{-1+\mu}, \\
K_3^{w21} &= 0, K_3^{u30} = 0, K_3^{u311} = 0, K_3^{u322} = 0, K_3^{v312} = 0, K_3^{q13p0} = \frac{1}{2} h^2, K_3^{q13m0} = -\frac{1}{2} h^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_4^{u00} = 0, K_4^{u011} = 0, K_4^{u022} = 0, K_4^{v012} = 0, K_4^{w01} = -\frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, \\
& K_4^{u10} = -\frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_4^{u111} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_4^{u122} = \frac{1}{30} \frac{Eh^5}{1+\mu}, K_4^{v112} = -\frac{1}{30} \frac{Eh^5}{-1+\mu}, \\
& K_4^{w11} = 0, K_4^{u20} = 0, K_4^{u211} = 0, K_4^{u222} = 0, K_4^{v212} = 0, K_4^{w21} = -\frac{1}{60} \frac{Eh^5(-3+7\mu)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, \\
& K_4^{u30} = -\frac{1}{20} \frac{Eh^5}{1+\mu}, K_4^{u311} = -\frac{1}{126} \frac{Eh^7}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_4^{u322} = \frac{1}{252} \frac{Eh^7}{1+\mu}, \\
& K_4^{v312} = -\frac{1}{252} \frac{Eh^7}{-1+\mu}, K_4^{q13p0} = \frac{1}{6} h^3, K_4^{q13m0} = \frac{1}{6} h^3, \\
& K_5^{u012} = -\frac{Eh}{-1+\mu}, K_5^{v00} = 0, K_5^{v011} = \frac{Eh}{1+\mu}, K_5^{v022} = -\frac{2Eh}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_5^{w02} = 0, \\
& K_5^{u112} = 0, K_5^{v10} = 0, K_5^{v111} = 0, K_5^{v122} = 0, K_5^{w12} = -\frac{2Eh\mu}{(1+\mu)(-1+\mu)}, \\
& K_5^{u212} = -\frac{1}{6} \frac{Eh^3}{-1+\mu}, K_5^{v20} = 0, K_5^{v211} = \frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_5^{v222} = -\frac{1}{3} \frac{2Eh^3}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_5^{w22} = 0, \\
& K_5^{u312} = 0, K_5^{v30} = 0, K_5^{v311} = 0, K_5^{v322} = 0, K_5^{q23p0} = 0, K_5^{q23m0} = 0, \\
& K_6^{u012} = 0, K_6^{v00} = 0, K_6^{v011} = 0, K_6^{v022} = 0, K_6^{w02} = \frac{Eh}{1+\mu}, \\
& K_6^{u112} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{-1+\mu}, K_6^{v10} = -\frac{Eh}{1+\mu}, K_6^{v111} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_6^{v122} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{(1+\mu)(-1+\mu)}, \\
& K_6^{w12} = 0, K_6^{u212} = 0, K_6^{v20} = 0, K_6^{v211} = 0, K_6^{v222} = 0, K_6^{w22} = -\frac{1}{6} \frac{Eh^3(-1+5\mu)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, \\
& K_6^{u312} = -\frac{1}{30} \frac{Eh^5}{-1+\mu}, K_6^{v30} = -\frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_6^{v311} = \frac{1}{30} \frac{Eh^5}{1+\mu}, K_6^{v322} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{(1+\mu)(-1+\mu)}, \\
& K_6^{q23p0} = h, K_6^{q23m0} = h, \\
& K_7^{u012} = -\frac{1}{6} \frac{Eh^3}{-1+\mu}, K_7^{v00} = 0, K_7^{v011} = \frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_7^{v022} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_7^{w02} = 0, \\
& K_7^{u112} = 0, K_7^{v10} = 0, K_7^{v111} = 0, K_7^{v122} = 0, K_7^{w12} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(-1+2\mu)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, \\
& K_7^{u212} = -\frac{1}{20} \frac{Eh^5}{-1+\mu}, K_7^{v20} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_7^{v211} = \frac{1}{20} \frac{Eh^5}{1+\mu}, K_7^{v222} = -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{(1+\mu)(-1+\mu)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_7^{w22} &= 0, K_7^{u312} = 0, K_7^{v30} = 0, K_7^{v311} = 0, K_7^{v322} = 0, K_6^{q23p0} = \frac{1}{2}h^2, K_6^{q23m0} = -\frac{1}{2}h^2, \\
K_8^{u012} &= 0, K_8^{v00} = 0, K_8^{v011} = 0, K_8^{v022} = 0, K_8^{w02} = -\frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, \\
K_8^{u112} &= -\frac{1}{30} \frac{Eh^5}{-1+\mu}, K_8^{v10} = -\frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_8^{v111} = \frac{1}{30} \frac{Eh^5}{1+\mu}, K_8^{v122} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{(1+\mu)(-1+\mu)}, \\
K_8^{w12} &= 0, K_8^{u212} = 0, K_8^{v20} = 0, K_8^{v211} = 0, K_8^{v222} = 0, K_8^{w22} = -\frac{1}{60} \frac{Eh^5(-3+7\mu)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, \\
K_8^{u312} &= -\frac{1}{252} \frac{Eh^7}{-1+\mu}, K_8^{v30} = -\frac{1}{20} \frac{Eh^5}{1+\mu}, K_8^{v311} = \frac{1}{252} \frac{Eh^7}{1+\mu}, \\
K_8^{v322} &= -\frac{1}{126} \frac{Eh^7}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_8^{q23p0} = \frac{1}{6}h^3, K_8^{q23m0} = \frac{1}{6}h^3, \\
K_9^{u01} &= 0, K_9^{v02} = 0, K_9^{w00} = 0, K_9^{w011} = \frac{Eh}{1+\mu}, K_9^{w022} = \frac{Eh}{1+\mu}, \\
K_9^{u11} &= \frac{Eh}{1+\mu}, K_9^{v12} = \frac{Eh}{1+\mu}, K_9^{w10} = 0, K_9^{w111} = 0, K_9^{w122} = 0, \\
K_9^{u21} &= 0, K_9^{v22} = 0, K_9^{w20} = 0, K_9^{w211} = \frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_9^{w222} = \frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, \\
K_9^{u31} &= \frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_9^{v32} = \frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_9^{q33p0} = 1, K_9^{q33m0} = -1, \\
K_{10}^{u01} &= \frac{2Eh\mu}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_{10}^{v02} = \frac{2Eh\mu}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_{10}^{w00} = 0, K_{10}^{w011} = 0, K_{10}^{w022} = 0, \\
K_{10}^{u11} &= 0, K_{10}^{v12} = 0, K_{10}^{w10} = \frac{-2Eh^7}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_{10}^{w111} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_{10}^{w122} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1+\mu}, \\
K_{10}^{u21} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3(-1+2\mu)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_{10}^{v22} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3(-1+2\mu)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_{10}^{w20} = 0, K_{10}^{w211} = 0, K_{10}^{w222} = 0, \\
K_{10}^{u31} &= 0, K_{10}^{v32} = 0, K_{10}^{q33p0} = h, K_{10}^{q33m0} = h, \\
K_{11}^{u01} &= 0, K_{11}^{v02} = 0, K_{11}^{w00} = 0, K_{11}^{w011} = \frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, K_{11}^{w022} = \frac{1}{6} \frac{Eh^3}{1+\mu}, \\
K_{11}^{u11} &= \frac{1}{6} \frac{Eh^3(-1+5\mu)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_{11}^{v12} = \frac{1}{6} \frac{Eh^3(-1+5\mu)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_{11}^{w10} = 0, K_{11}^{w111} = 0, K_{11}^{w122} = 0,
\end{aligned}$$

$$K_{11}^{u21} = 0, K_{11}^{v22} = 0, K_{11}^{w20} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_{11}^{w211} = \frac{1}{20} \frac{Eh^5}{1+\mu}, K_{11}^{w222} = \frac{1}{20} \frac{Eh^5}{1+\mu},$$

$$K_{11}^{u31} = \frac{1}{60} \frac{Eh^5(-3+7\mu)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_{11}^{v32} = \frac{1}{60} \frac{Eh^5(-3+7\mu)}{(1+\mu)(-1+\mu)}, K_{11}^{q33p0} = \frac{1}{2} h^2, K_{11}^{q33m0} = -\frac{1}{2} h^2.$$

Краевые условия (2.10), (2.11) можно представить в следующем виде:

на краях  $x = 0, x = a$

$$u_0 = \bar{u}_0 \vee -\frac{1}{3} \frac{Eh}{\mu^2 - 1} (h^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + h^2 \mu \frac{\partial v_2}{\partial y} + 6 \frac{\partial u_0}{\partial x} + 6\mu \frac{\partial v_0}{\partial y} + 6\mu w_1) = \bar{N}_x,$$

$$v_0 = \bar{v}_0 \vee \frac{1}{6} \frac{Eh}{\mu + 1} (h^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + h^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + 6 \frac{\partial u_0}{\partial y} + 6 \frac{\partial v_0}{\partial x}) = \bar{N}_{xy},$$

$$w_0 = \bar{w}_0 \vee \frac{1}{6} \frac{Eh}{\mu + 1} (h^2 u_3 + h^2 \frac{\partial w_2}{\partial x} + 6u_1 + 6 \frac{\partial w_0}{\partial x}) = \bar{Q}_{xz},$$

$$u_1 = \bar{u}_1 \vee -\frac{1}{15} \frac{Eh^3}{\mu^2 - 1} (h^2 \frac{\partial u_3}{\partial x} + h^2 \mu \frac{\partial v_3}{\partial y} + 10 \frac{\partial u_1}{\partial x} + 10\mu \frac{\partial v_1}{\partial y} + 10\mu w_2) = \bar{M}_x^1,$$

$$u_2 = \bar{u}_2 \vee -\frac{1}{30} \frac{Eh^3}{\mu^2 - 1} (3h^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + 3h^2 \mu \frac{\partial v_2}{\partial y} + 10 \frac{\partial u_0}{\partial x} + 10\mu \frac{\partial v_0}{\partial y} + 10\mu w_1) = \bar{M}_x^2,$$

$$u_3 = \bar{u}_3 \vee -\frac{1}{630} \frac{Eh^5}{\mu^2 - 1} (5h^2 \frac{\partial u_3}{\partial x} + 5h^2 \mu \frac{\partial v_3}{\partial y} + 42 \frac{\partial u_1}{\partial x} + 42\mu \frac{\partial v_1}{\partial y} + 42\mu w_2) = \bar{M}_x^3,$$

$$v_1 = \bar{v}_1 \vee \frac{1}{30} \frac{Eh^3}{\mu + 1} (h^2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + h^2 \frac{\partial v_3}{\partial x} + 10 \frac{\partial u_1}{\partial y} + 10 \frac{\partial v_1}{\partial x}) = \bar{M}_{xy}^1,$$

$$v_2 = \bar{v}_2 \vee \frac{1}{60} \frac{Eh^3}{\mu + 1} (3h^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + 3h^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + 10 \frac{\partial u_0}{\partial y} + 10 \frac{\partial v_0}{\partial x}) = \bar{M}_{xy}^2,$$

$$v_3 = \bar{v}_3 \vee \frac{1}{1260} \frac{Eh^5}{\mu + 1} (5h^2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + 5h^2 \frac{\partial v_3}{\partial x} + 42 \frac{\partial u_1}{\partial y} + 42 \frac{\partial v_1}{\partial x}) = \bar{M}_{xy}^3,$$

$$w_1 = \bar{w}_1 \vee \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{\mu + 1} (u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x}) = \bar{M}_{xz}^1,$$

$$w_2 = \bar{w}_2 \vee \frac{1}{60} \frac{Eh^3}{\mu + 1} (3h^2 u_3 + 3h^2 \frac{\partial w_2}{\partial x} + 10u_1 + 10 \frac{\partial w_0}{\partial x}) = \bar{M}_{xz}^2;$$

на краях  $y = 0, y = b$



$$\begin{aligned}
u_0 = \bar{u}_0 &\vee \frac{1}{6} \frac{Eh}{\mu+1} (h^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + h^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + 6 \frac{\partial u_0}{\partial y} + 6 \frac{\partial v_0}{\partial x}) = \bar{N}_{xy}, \\
v_0 = \bar{v}_0 &\vee -\frac{1}{3} \frac{Eh}{\mu^2-1} (h^2 \mu \frac{\partial u_2}{\partial x} + h^2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + 6\mu \frac{\partial u_0}{\partial x} + 6 \frac{\partial v_0}{\partial y} + 6\mu w_1) = \bar{N}_y, \\
w_0 = \bar{w}_0 &\vee \frac{1}{6} \frac{Eh}{\mu+1} (h^2 v_3 + h^2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + 6v_1 + 6 \frac{\partial w_0}{\partial y}) = \bar{Q}_{yz}, \\
u_1 = \bar{u}_1 &\vee \frac{1}{30} \frac{Eh^3}{\mu+1} (h^3 \frac{\partial u_3}{\partial y} + h^2 \frac{\partial v_3}{\partial x} + 10 \frac{\partial u_1}{\partial y} + 10 \frac{\partial v_1}{\partial x}) = \bar{M}_{xy}^1, \\
u_2 = \bar{u}_2 &\vee \frac{1}{60} \frac{Eh^3}{\mu+1} (3h^2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + 3h^2 \frac{\partial v_2}{\partial x} + 10 \frac{\partial u_0}{\partial y} + 10 \frac{\partial v_0}{\partial x}) = \bar{M}_{xy}^2, \\
u_3 = \bar{u}_3 &\vee \frac{1}{1260} \frac{Eh^5}{\mu+1} (5h^2 \frac{\partial u_3}{\partial y} + 5h^2 \frac{\partial v_3}{\partial x} + 42 \frac{\partial u_1}{\partial y} + 42 \frac{\partial v_1}{\partial x}) = \bar{M}_{xy}^3, \\
v_1 = \bar{v}_1 &\vee -\frac{1}{15} \frac{Eh^3}{\mu^2-1} (h^2 \mu \frac{\partial u_3}{\partial x} + h^2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + 10\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} + 10 \frac{\partial v_1}{\partial y} + 10\mu w_2) = \bar{M}_y^1, \\
v_2 = \bar{v}_2 &\vee -\frac{1}{30} \frac{Eh^3}{\mu^2-1} (3h^2 \mu \frac{\partial u_2}{\partial x} + 3h^2 \frac{\partial v_2}{\partial y} + 10\mu \frac{\partial u_0}{\partial x} + 10 \frac{\partial v_0}{\partial y} + 10\mu w_1) = \bar{M}_y^2, \\
v_3 = \bar{v}_3 &\vee -\frac{1}{630} \frac{Eh^5}{\mu^2-1} (5h^2 \mu \frac{\partial u_3}{\partial x} + 5h^2 \frac{\partial v_3}{\partial y} + 42\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} + 42 \frac{\partial v_1}{\partial y} + 42\mu w_2) = \bar{M}_y^3, \\
w_1 = \bar{w}_1 &\vee \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{\mu+1} (v_2 + \frac{\partial w_1}{\partial y}) = \bar{M}_{yz}^1, \\
w_2 = \bar{w}_2 &\vee \frac{1}{60} \frac{Eh^3}{\mu+1} (3h^3 v_3 + 3h^2 \frac{\partial w_2}{\partial y} + 10v_1 + 10 \frac{\partial w_0}{\partial y}) = \bar{M}_{yz}^2.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

С помощью равенств (2.14), (2.15) можно сформулировать граничные условия для типовых условий закрепления пластины в следующем виде:

свободный край

$$\begin{aligned}
x=0, \quad x=a: \bar{N}_x = \bar{N}_{xy} = \bar{M}_x^i = \bar{M}_{xy}^i = \bar{Q}_{xz} = \bar{M}_{xz}^j = 0, \quad i=1,2,3, j=1,2, \\
y=0, \quad y=b: \bar{N}_y = \bar{N}_{xy} = \bar{M}_y^i = \bar{M}_{xy}^i = \bar{Q}_{yz} = \bar{M}_{yz}^j = 0, \quad i=1,2,3, j=1,2;
\end{aligned} \tag{2.16a}$$

шарнирно опертый край

$$x=0, \quad x=a: \bar{N}_x = \bar{N}_{xy} = \bar{M}_x^i = \bar{M}_{xy}^i = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2,$$

или  $\bar{N}_x = \bar{M}_x^i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2,$

$$y=0, \quad y=b: \bar{N}_y = \bar{N}_{xy} = \bar{M}_y^i = \bar{M}_{xy}^i = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2, \quad (2.16\text{а})$$

$$\text{или } \bar{N}_y = \bar{M}_y^i = u_0 = u_i = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2;$$

жестко заземленный край

$$x=0, \quad x=a: u_0 = u_i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2,$$

$$\text{или } u_0 = u_i = \bar{N}_{xy} = \bar{M}_{xy}^i = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2,$$

$$y=0, \quad y=b: u_0 = u_i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2, \quad (2.16\text{в})$$

$$\text{или } v_0 = v_i = \bar{N}_{xy} = \bar{M}_{xy}^i = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2.$$

Далее полагаем, что пластина на рис. 2.1 имеет шарнирные опоры на краях  $y=0, y=b$ . Тогда представим внешнюю нагрузку и перемещения рядами по тригонометрическим функциям следующего вида:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(x) \sin(\psi_m y), \quad u_i(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{im}(x) \sin(\psi_m y), \quad (2.17)$$

$$v_i(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} V_{im}(x) \cos(\psi_m y), \quad w_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{jm}(x) \sin(\psi_m y), \quad i = \overline{0,3}, \quad j = \overline{0,2},$$

где  $\psi_m = m\pi / b$ .

После подстановки разложений (2.17) в уравнения (2.13) и граничные условия (2.14), (2.15), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $U_{im}, V_{im}, W_{jm}, i = \overline{0,3}, j = \overline{0,2}, m = 1, 2, 3, \dots$  и соответствующие краевые условия. В результате система дифференциальных уравнений равновесия (2.13) представляется как

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^3 \left( K_l^{us0} + K_l^{us11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi_m^2 K_l^{us22} \right) U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi_m K_l^{vs12} \frac{d}{dx} V_{sm}(x) + \\ & + K_l^{w01} \frac{d}{dx} W_{0m}(x) + K_l^{w11} \frac{d}{dx} W_{1m}(x) + K_l^{w21} \frac{d}{dx} W_{2m}(x) = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, \\ & \sum_{s=0}^3 \psi_m K_p^{us12} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) + \sum_{s=0}^3 \left( K_p^{vs0} + K_p^{vs11} \frac{d^2}{dx^2} - \psi_m^2 K_p^{vs22} \right) V_{sm}(x) - \\ & + K_p^{w02} \psi_m W_{0m}(x) + K_p^{w12} \psi_m W_{1m}(x) + K_p^{w22} \psi_m W_{2m}(x) = 0, \quad p = 5, 6, 7, 8, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^3 K_j^{us1} \frac{d}{dx} U_{sm}(x) - \sum_{s=0}^3 \psi_m K_j^{vs2} V_{sm}(x) + \left( K_j^{w00} + K_j^{w011} \frac{d^2}{dx^2} - \right. \\ & \left. - \psi_m^2 K_j^{w022} \right) W_{0m}(x) + \left( K_j^{w10} + K_j^{w111} \frac{d^2}{dx^2} - \psi_m^2 K_j^{w122} \right) W_{1m}(x) + \\ & + \left( K_j^{w20} + K_j^{w211} \frac{d^2}{dx^2} - \psi_m^2 K_j^{w222} \right) W_{2m}(x) = K_j^{q33} Q_m, \quad j = 9, 10, 11. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $K$  с верхними и нижними индексами обозначают переменные величины, зависящие от геометрических параметров и упругих постоянных изотропного материала пластины. В отличие от уравнений теории пластин постоянной толщины в системе уравнений (2.18) имеют место дополнительные слагаемые, учитывающие влияние изменения толщины на НДС пластины.

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.18) с переменными коэффициентами, в ряде случаев, не может быть решена с помощью преобразования Лапласа. Поэтому для решения указанной системы предлагается использовать метод конечных разностей, который имеет ряд преимуществ по сравнению с другими методами. Во – первых, он позволяет решать систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами; во – вторых, достаточно мелкая разбивка пластины в ее краевой зоне дает возможность учесть дополнительные НДС типа “пограничный слой”; в – третьих, правые части системы уравнений (2.18), соответствующие нагрузочным членам, могут представлять собой не только аналитические функции, но и функции ступенчатого вида и иметь точки разрыва [9,10].

### 2.3. Алгоритм расчета НДС прямоугольных пластин

В качестве примера рассматривается прямоугольная пластина, жестко защемленная по двум краям. Тогда граничные условия на краях  $x = 0$ ,  $x = a$ :

$$u_0 = u_i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2.$$

Уравнения (2.18) решаются конечно-разностным методом [7, 57, 115]. Производные 1-го и 2-го порядков аппроксимируются с помощью отношения центральных разностей со 2-м порядком аппроксимации

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2s} + O(s^2); \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{s^2} + O(s^2).$$

Из уравнений (2.18) получим следующую конечно-разностную систему:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^3 \left( K_l^{un0} u_n^i + K_l^{un11} \frac{u_n^{i+1} - 2u_n^i + u_n^{i-1}}{s^2} - \psi_m^2 K_l^{un22} u_n^i \right) - \sum_{n=0}^3 \psi_m K_l^{vn12} \frac{v_n^{i+1} - v_n^{i-1}}{2s} + \\ & + K_l^{w01} \frac{w_0^{i+1} - w_0^{i-1}}{2s} + K_l^{w11} \frac{w_1^{i+1} - w_1^{i-1}}{2s} + K_l^{w21} \frac{w_2^{i+1} - w_2^{i-1}}{2s} = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, \\ & \sum_{n=0}^3 \psi_m K_p^{un12} \frac{u_n^{i+1} - u_n^{i-1}}{2s} + \sum_{n=0}^3 \left( K_p^{vn0} v_n^i + K_p^{vn11} \frac{v_n^{i+1} - 2v_n^i + v_n^{i-1}}{s^2} - \psi_m^2 K_p^{vn22} v_n^i \right) - \\ & + K_p^{w02} \psi_m w_0^i + K_p^{w12} \psi_m w_1^i + K_p^{w22} \psi_m w_2^i = 0, \quad p = 5, 6, 7, 8, \\ & \sum_{n=0}^3 K_j^{un1} \frac{u_n^{i+1} - u_n^{i-1}}{2s} - \sum_{n=0}^3 \psi_m K_j^{vs2} v_n^i + \left( K_j^{w00} w_0^i + K_j^{w011} \frac{w_0^{i+1} - 2w_0^i + w_0^{i-1}}{s^2} - \right. \\ & \left. - \psi_m^2 K_j^{w022} w_0^i \right) + \left( K_j^{w10} w_1^i + K_j^{w111} \frac{w_1^{i+1} - 2w_1^i + w_1^{i-1}}{s^2} - \psi_m^2 K_j^{w122} w_1^i \right) + \\ & + \left( K_j^{w20} w_2^i + K_j^{w211} \frac{w_2^{i+1} - 2w_2^i + w_2^{i-1}}{s^2} - \psi_m^2 K_j^{w222} w_2^i \right) = K_j^{q33} Q_m, \quad j = \overline{9, 11}, \quad i = \overline{1, (N_0 - 1)}, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где  $(N_0 + 1)$ ,  $s$  - соответственно число узлов и шаг конечно-разностной схемы.

После простых преобразований системы (2.19) находим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^3 \frac{K_l^{un11}}{s^2} u_n^{i-1} + \sum_{n=0}^3 \frac{\psi K_l^{vn12}}{2s} v_n^{i-1} - \frac{K_l^{w01}}{2s} w_0^{i-1} - \frac{K_l^{w11}}{2s} w_1^{i-1} - \frac{K_l^{w21}}{2s} w_2^{i-1} + \\ & \sum_{n=0}^3 \left( K_l^{un0} - \frac{2K_l^{un11}}{s^2} - \psi_m^2 K_l^{un22} \right) u_n^i + \sum_{n=0}^3 \frac{K_l^{un11}}{s^2} u_n^{i+1} - \sum_{s=0}^3 \frac{\psi K_l^{vn12}}{2s} v_n^{i+1} + \\ & + \frac{K_l^{w01}}{2s} w_0^{i+1} + \frac{K_l^{w11}}{2s} w_1^{i+1} + \frac{K_l^{w21}}{2s} w_2^{i+1} = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4, \\ & \sum_{n=0}^3 \frac{-\psi K_p^{un12}}{2s} u_n^{i-1} + \sum_{n=0}^3 \frac{K_p^{vn11}}{s^2} v_n^{i-1} + \sum_{n=0}^3 \left( K_p^{vn0} - \frac{2K_p^{vn11}}{s^2} - \psi_m^2 K_p^{vn22} \right) v_n^i + K_p^{w02} \psi_m w_0^i + \\ & + K_p^{w12} \psi_m w_1^i + K_p^{w22} \psi_m w_2^i + \sum_{n=0}^3 \frac{\psi_m K_p^{un12}}{2s} u_n^{i+1} + \sum_{n=0}^3 \frac{K_p^{vn11}}{s^2} v_n^{i+1} = 0, \quad p = 5, 6, 7, 8, \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^3 \frac{-K_j^{un1}}{2s} u_n^{i-1} + \frac{K_j^{w011}}{s^2} w_0^{i-1} + \frac{K_j^{w111}}{s^2} w_1^{i-1} + \frac{K_j^{w211}}{s^2} w_2^{i-1} + \sum_{n=0}^3 \psi_m K_j^{vs2} v_n^i - \sum_{n=0}^3 \psi_m K_j^{vs2} v_n^i + \\
& + \left( K_j^{w00} - \frac{2K_j^{w011}}{s^2} - \psi_m^2 K_j^{w022} \right) w_0^i + \left( K_j^{w10} - \frac{2K_j^{w111}}{s^2} - \psi_m^2 K_j^{w122} \right) w_1^i + \\
& + \left( K_j^{w20} - \frac{2K_j^{w211}}{s^2} - \psi_m^2 K_j^{w222} \right) w_2^i + \sum_{n=0}^3 \frac{K_j^{un1}}{2s} u_n^{i+1} + \frac{K_j^{w011}}{s^2} w_0^{i+1} + \\
& + \frac{K_j^{w111}}{s^2} w_1^{i+1} + \frac{K_j^{w211}}{s^2} w_2^{i+1} = K_j^{q33} Q_m, \quad j = \overline{9,11}, \quad i = \overline{1, (N_0 - 1)}.
\end{aligned}$$

Система уравнений (2.20) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Она имеет одиннадцати-диагональную матрицу, которую можно представить следующей системой векторно-матричных уравнений:

$$\begin{aligned}
A_i X_{i-1} + B_i X_i + C_i X_{i+1} &= F_i, \quad i = \overline{1, (N_0 - 1)}, \\
A_1 &= C_{N_0-1} = \Theta.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Здесь  $\Theta$  - нулевая матрица размером  $11 \times 11$ ;  $F_i$  - векторы правых частей

$$F_i = \left[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, K_9^{q33} q_{33}, K_{10}^{q33} q_{33}, K_{11}^{q33} q_{33} \right]^T;$$

$X_i$  - векторы искоемых перемещений

$$X_i = \left[ u_0^i, v_0^i, w_0^i, u_1^i, v_1^i, w_1^i, u_2^i, v_2^i, w_2^i, u_3^i, v_3^i \right]^T;$$

$A_i, B_i, C_i$  - квадратные матрицы коэффициентов размером  $11 \times 11$ , определяемые следующим образом:

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,11} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{11,1} & A_{11,2} & A_{11,3} & \dots & A_{11,11} \end{bmatrix}; \quad B_i = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & \dots & B_{1,11} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \dots & B_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{11,1} & B_{11,2} & B_{11,3} & \dots & B_{11,11} \end{bmatrix};$$

$$C_i = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & \dots & C_{1,11} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & \dots & C_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{11,1} & C_{11,2} & C_{11,3} & \dots & C_{11,11} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты матриц определяются равенствами

$$\begin{aligned}
A_{1,1} &= \frac{K_1^{u011}}{s^2}, A_{1,2} = \frac{K_1^{v012}\psi_m}{2s}, A_{1,3} = -\frac{K_1^{w01}}{2s}, A_{1,4} = \frac{K_1^{u111}}{s^2}, A_{1,5} = \frac{K_1^{v112}\psi_m}{2s}, A_{1,6} = -\frac{K_1^{w11}}{2s}, \\
A_{1,7} &= \frac{K_1^{u211}}{s^2}, A_{1,8} = \frac{K_1^{v212}\psi_m}{2s}, A_{1,9} = -\frac{K_1^{w21}}{2s}, A_{1,10} = \frac{K_1^{u311}}{s^2}, A_{1,11} = \frac{K_1^{v312}\psi_m}{2s}, \\
A_{2,1} &= \frac{K_2^{u011}}{s^2}, A_{2,2} = \frac{K_2^{v012}\psi_m}{2s}, A_{2,3} = -\frac{K_2^{w01}}{2s}, A_{2,4} = \frac{K_2^{u111}}{s^2}, A_{2,5} = \frac{K_2^{v112}\psi_m}{2s}, A_{2,6} = -\frac{K_2^{w11}}{2s}, \\
A_{2,7} &= \frac{K_2^{u211}}{s^2}, A_{2,8} = \frac{K_2^{v212}\psi_m}{2s}, A_{2,9} = -\frac{K_2^{w21}}{2s}, A_{2,10} = \frac{K_2^{u311}}{s^2}, A_{2,11} = \frac{K_2^{v312}\psi_m}{2s}, \\
A_{3,1} &= \frac{K_3^{u011}}{s^2}, A_{3,2} = \frac{K_3^{v012}\psi_m}{2s}, A_{3,3} = -\frac{K_3^{w01}}{2s}, A_{3,4} = \frac{K_3^{u111}}{s^2}, A_{3,5} = \frac{K_3^{v112}\psi_m}{2s}, A_{3,6} = -\frac{K_3^{w11}}{2s}, \\
A_{3,7} &= \frac{K_3^{u211}}{s^2}, A_{3,8} = \frac{K_3^{v212}\psi_m}{2s}, A_{3,9} = -\frac{K_3^{w21}}{2s}, A_{3,10} = \frac{K_3^{u311}}{s^2}, A_{3,11} = \frac{K_3^{v312}\psi_m}{2s}, \\
A_{4,1} &= \frac{K_4^{u011}}{s^2}, A_{4,2} = \frac{K_4^{v012}\psi_m}{2s}, A_{4,3} = -\frac{K_4^{w01}}{2s}, A_{4,4} = \frac{K_4^{u111}}{s^2}, A_{4,5} = \frac{K_4^{v112}\psi_m}{2s}, A_{4,6} = -\frac{K_4^{w11}}{2s}, \\
A_{4,7} &= \frac{K_4^{u211}}{s^2}, A_{4,8} = \frac{K_4^{v212}\psi_m}{2s}, A_{4,9} = -\frac{K_4^{w21}}{2s}, A_{4,10} = \frac{K_4^{u311}}{s^2}, A_{4,11} = \frac{K_4^{v312}\psi_m}{2s}, \\
A_{5,1} &= -\frac{K_5^{u012}\psi_m}{2s}, A_{5,2} = \frac{K_5^{v011}}{s^2}, A_{5,3} = 0, A_{5,4} = -\frac{K_5^{u112}\psi_m}{2s}, A_{5,5} = \frac{K_5^{v111}}{s^2}, A_{5,6} = 0, \\
A_{5,7} &= -\frac{K_5^{u212}\psi_m}{2s}, A_{5,8} = \frac{K_5^{v211}}{s^2}, A_{5,9} = 0, A_{5,10} = -\frac{K_5^{u312}\psi_m}{2s}, A_{5,11} = \frac{K_5^{v311}}{s^2}, \\
A_{6,1} &= -\frac{K_6^{u012}\psi_m}{2s}, A_{6,2} = \frac{K_6^{v011}}{s^2}, A_{6,3} = 0, A_{6,4} = -\frac{K_6^{u112}\psi_m}{2s}, A_{6,5} = \frac{K_6^{v111}}{s^2}, A_{6,6} = 0, \\
A_{6,7} &= -\frac{K_6^{u212}\psi_m}{2s}, A_{6,8} = \frac{K_6^{v211}}{s^2}, A_{6,9} = 0, A_{6,10} = -\frac{K_6^{u312}\psi_m}{2s}, A_{6,11} = \frac{K_6^{v311}}{s^2}, \\
A_{7,1} &= -\frac{K_7^{u012}\psi_m}{2s}, A_{7,2} = \frac{K_7^{v011}}{s^2}, A_{7,3} = 0, A_{7,4} = -\frac{K_7^{u112}\psi_m}{2s}, A_{7,5} = \frac{K_7^{v111}}{s^2}, A_{7,6} = 0, \\
A_{7,7} &= -\frac{K_7^{u212}\psi_m}{2s}, A_{7,8} = \frac{K_7^{v211}}{s^2}, A_{7,9} = 0, A_{7,10} = -\frac{K_7^{u312}\psi_m}{2s}, A_{7,11} = \frac{K_7^{v311}}{s^2}, \\
A_{8,1} &= -\frac{K_8^{u012}\psi_m}{2s}, A_{8,2} = \frac{K_8^{v011}}{s^2}, A_{8,3} = 0, A_{8,4} = -\frac{K_8^{u112}\psi_m}{2s}, A_{8,5} = \frac{K_8^{v111}}{s^2}, A_{8,6} = 0, \\
A_{8,7} &= -\frac{K_8^{u212}\psi_m}{2s}, A_{8,8} = \frac{K_8^{v211}}{s^2}, A_{8,9} = 0, A_{8,10} = -\frac{K_8^{u312}\psi_m}{2s}, A_{8,11} = \frac{K_8^{v311}}{s^2}, \\
A_{9,1} &= -\frac{K_9^{u01}}{2s}, A_{9,2} = 0, A_{9,3} = \frac{K_9^{w011}}{s^2}, A_{9,4} = -\frac{K_9^{u11}}{2s}, A_{9,5} = 0, A_{9,6} = \frac{K_9^{w11}}{s^2}, \\
A_{9,7} &= -\frac{K_9^{u21}}{2s}, A_{9,8} = 0, A_{9,9} = \frac{K_9^{w211}}{s^2}, A_{9,10} = -\frac{K_9^{u31}}{2s}, A_{9,11} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{10,1} &= -\frac{K_{10}^{u01}}{2s}, A_{10,2} = 0, A_{10,3} = \frac{K_{10}^{w011}}{s^2}, A_{10,4} = -\frac{K_{10}^{u11}}{2s}, A_{10,5} = 0, A_{10,6} = \frac{K_{10}^{w111}}{s^2}, \\
A_{10,7} &= -\frac{K_{10}^{u21}}{2s}, A_{10,8} = 0, A_{10,9} = \frac{K_{10}^{w211}}{s^2}, A_{10,10} = -\frac{K_{10}^{u31}}{2s}, A_{10,11} = 0, \\
A_{11,1} &= -\frac{K_{11}^{u01}}{2s}, A_{11,2} = 0, A_{11,3} = \frac{K_{11}^{w011}}{s^2}, A_{11,4} = -\frac{K_{11}^{u11}}{2s}, A_{11,5} = 0, A_{11,6} = \frac{K_{11}^{w111}}{s^2}, \\
A_{11,7} &= -\frac{K_{11}^{u21}}{2s}, A_{11,8} = 0, A_{11,9} = \frac{K_{11}^{w211}}{s^2}, A_{11,10} = -\frac{K_{11}^{u31}}{2s}, A_{11,11} = 0; \\
B_{1,1} &= -\frac{2K_1^{u011}}{s^2} - K_1^{u022}\psi_m^2 + K_1^{u00}, B_{1,2} = 0, B_{1,3} = 0, B_{1,4} = -\frac{2K_1^{u111}}{s^2} - K_1^{u122}\psi_m^2 + K_1^{u10}, B_{1,5} = 0, B_{1,6} = 0, \\
B_{1,7} &= -\frac{2K_1^{u211}}{s^2} - K_1^{u222}\psi_m^2 + K_1^{u20}, B_{1,8} = 0, B_{1,9} = 0, B_{1,10} = -\frac{2K_1^{u311}}{s^2} - K_1^{u322}\psi_m^2 + K_1^{u30}, B_{1,11} = 0, \\
B_{2,1} &= -\frac{2K_2^{u011}}{s^2} - K_2^{u022}\psi_m^2 + K_2^{u00}, B_{2,2} = 0, B_{2,3} = 0, B_{2,4} = -\frac{2K_2^{u111}}{s^2} - K_2^{u122}\psi_m^2 + K_2^{u10}, B_{2,5} = 0, B_{2,6} = 0, \\
B_{2,7} &= -\frac{2K_2^{u211}}{s^2} - K_2^{u222}\psi_m^2 + K_2^{u20}, B_{2,8} = 0, B_{2,9} = 0, B_{2,10} = -\frac{2K_2^{u311}}{s^2} - K_2^{u322}\psi_m^2 + K_2^{u30}, B_{2,11} = 0, \\
B_{3,1} &= -\frac{2K_3^{u011}}{s^2} - K_3^{u022}\psi_m^2 + K_3^{u00}, B_{3,2} = 0, B_{3,3} = 0, B_{3,4} = -\frac{2K_3^{u111}}{s^2} - K_3^{u122}\psi_m^2 + K_3^{u10}, B_{3,5} = 0, B_{3,6} = 0, \\
B_{3,7} &= -\frac{2K_3^{u211}}{s^2} - K_3^{u222}\psi_m^2 + K_3^{u20}, B_{3,8} = 0, B_{3,9} = 0, B_{3,10} = -\frac{2K_3^{u311}}{s^2} - K_3^{u322}\psi_m^2 + K_3^{u30}, B_{3,11} = 0, \\
B_{4,1} &= -\frac{2K_4^{u011}}{s^2} - K_4^{u022}\psi_m^2 + K_4^{u00}, B_{4,2} = 0, B_{4,3} = 0, B_{4,4} = -\frac{2K_4^{u111}}{s^2} - K_4^{u122}\psi_m^2 + K_4^{u10}, B_{4,5} = 0, B_{4,6} = 0, \\
B_{4,7} &= -\frac{2K_4^{u211}}{s^2} - K_4^{u222}\psi_m^2 + K_4^{u20}, B_{4,8} = 0, B_{4,9} = 0, B_{4,10} = -\frac{2K_4^{u311}}{s^2} - K_4^{u322}\psi_m^2 + K_4^{u30}, B_{4,11} = 0, \\
B_{5,1} &= -K_5^{v022}\psi_m^2, B_{5,2} = -\frac{2K_5^{v011}}{s^2} + K_5^{v00}, B_{5,3} = K_5^{w02}\psi_m, B_{5,4} = 0, B_{5,5} = K_5^{v10} - \frac{2K_5^{v111}}{s^2} - K_5^{v122}\psi_m^2, \\
B_{5,6} &= K_5^{w12}\psi_m, B_{5,7} = 0, B_{5,8} = -\frac{2K_5^{v211}}{s^2} - K_5^{v222}\psi_m^2 + K_5^{v20}, B_{5,9} = K_5^{w22}\psi_m, B_{5,10} = 0, \\
B_{5,11} &= -\frac{2K_5^{v311}}{s^2} - K_5^{v322}\psi_m^2 + K_5^{v30}, \\
B_{6,1} &= 0, B_{6,2} = -\frac{2K_6^{v011}}{s^2} - K_6^{v022}\psi_m^2 + K_6^{v00}, B_{6,3} = K_6^{w02}\psi_m, B_{6,4} = 0, B_{6,5} = K_6^{v10} - \frac{2K_6^{v111}}{s^2} - K_6^{v122}\psi_m^2, \\
B_{6,6} &= K_6^{w12}\psi_m, B_{6,7} = 0, B_{6,8} = -\frac{2K_6^{v211}}{s^2} - K_6^{v222}\psi_m^2 + K_6^{v20}, B_{6,9} = K_6^{w22}\psi_m, B_{6,10} = 0, \\
B_{6,11} &= -\frac{2K_6^{v311}}{s^2} - K_6^{v322}\psi_m^2 + K_6^{v30}, \\
B_{7,1} &= 0, B_{7,2} = -\frac{2K_7^{v011}}{s^2} - K_7^{v022}\psi_m^2 + K_7^{v00}, B_{7,3} = K_7^{w02}\psi_m, B_{7,4} = 0, B_{7,5} = K_7^{v10} - \frac{2K_7^{v111}}{s^2} - K_7^{v122}\psi_m^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{7,6} &= K_7^{w12} \psi_m, B_{7,7} = 0, B_{7,8} = -\frac{2K_7^{v211}}{s^2} - K_7^{v222} \psi_m^2 + K_7^{v20}, B_{7,9} = K_7^{w22} \psi_m, B_{7,10} = 0, \\
B_{7,11} &= -\frac{2K_7^{v311}}{s^2} - K_7^{v322} \psi_m^2 + K_7^{v30}, \\
B_{8,1} &= 0, B_{8,2} = -\frac{2K_8^{v011}}{s^2} - K_8^{v022} \psi_m^2 + K_8^{v00}, B_{8,3} = K_8^{w02} \psi_m, B_{8,4} = 0, B_{8,5} = K_8^{v10} - \frac{2K_8^{v111}}{s^2} - K_8^{v122} \psi_m^2, \\
B_{8,6} &= K_8^{w12} \psi_m, B_{8,7} = 0, B_{8,8} = -\frac{2K_8^{v211}}{s^2} - K_8^{v222} \psi_m^2 + K_8^{v20}, B_{8,9} = K_8^{w22} \psi_m, \\
B_{8,10} &= 0, B_{8,11} = -\frac{2K_8^{v311}}{s^2} - K_8^{v322} \psi_m^2 + K_8^{v30}, \\
B_{9,1} &= 0, B_{9,2} = -K_9^{v02} \psi_m, B_{9,3} = -\frac{2K_9^{w011}}{s^2} - K_9^{w022} \psi_m^2 + K_9^{w00}, B_{9,4} = 0, B_{9,5} = K_9^{v12} \psi_m, \\
B_{9,6} &= -\frac{2K_9^{w111}}{s^2} - K_9^{w122} \psi_m^2 + K_9^{w10}, B_{9,7} = 0, B_{9,8} = -K_9^{v22} \psi_m, \\
B_{9,9} &= -\frac{2K_9^{w211}}{s^2} - K_9^{w222} \psi_m^2 + K_9^{w20}, B_{9,10} = 0, B_{9,11} = -K_9^{v32} \psi_m, \\
B_{10,1} &= 0, B_{10,2} = -K_{10}^{v02} \psi_m, B_{10,3} = -\frac{2K_{10}^{w011}}{s^2} - K_{10}^{w022} \psi_m^2 + K_{10}^{w00}, B_{10,4} = 0, B_{10,5} = K_{10}^{v12} \psi_m, \\
B_{10,6} &= -\frac{2K_{10}^{w111}}{s^2} - K_{10}^{w122} \psi_m^2 + K_{10}^{w10}, B_{10,7} = 0, B_{10,8} = -K_{10}^{v22} \psi_m, \\
B_{10,9} &= \frac{-2K_{10}^{w211}}{s^2} - K_{10}^{w222} \psi_m^2 + K_{10}^{w20}, B_{10,10} = 0, B_{10,11} = -K_{10}^{v32} \psi_m, \\
B_{11,1} &= 0, B_{11,2} = -K_{11}^{v02} \psi_m, B_{11,3} = -\frac{2K_{11}^{w011}}{s^2} - K_{11}^{w022} \psi_m^2 + K_{11}^{w00}, B_{11,4} = 0, B_{11,5} = K_{11}^{v12} \psi_m, \\
B_{11,6} &= -\frac{2K_{11}^{w111}}{s^2} - K_{11}^{w122} \psi_m^2 + K_{11}^{w10}, B_{11,7} = 0, B_{11,8} = -K_{11}^{v22} \psi_m, \\
B_{11,9} &= \frac{-2K_{11}^{w211}}{s^2} - K_{11}^{w222} \psi_m^2 + K_{11}^{w20}, B_{11,10} = 0, B_{11,11} = -K_{11}^{v32} \psi_m; \\
C_{1,1} &= \frac{K_1^{u011}}{s^2}, C_{1,2} = -\frac{K_1^{v012} \psi_m}{2s}, C_{1,3} = \frac{K_1^{w01}}{2s}, C_{1,4} = \frac{K_1^{u111}}{s^2}, C_{1,5} = -\frac{K_1^{v112} \psi_m}{2s}, C_{1,6} = \frac{K_1^{w11}}{2s}, \\
C_{1,7} &= \frac{K_1^{u211}}{s^2}, C_{1,8} = -\frac{K_1^{v212} \psi_m}{2s}, C_{1,9} = \frac{K_1^{w21}}{2s}, C_{1,10} = \frac{K_1^{u311}}{s^2}, C_{1,11} = -\frac{K_1^{v312} \psi_m}{2s} \\
C_{2,1} &= \frac{K_2^{u011}}{s^2}, C_{2,2} = -\frac{K_2^{v012} \psi_m}{2s}, C_{2,3} = \frac{K_2^{w01}}{2s}, C_{2,4} = \frac{K_2^{u111}}{s^2}, C_{2,5} = -\frac{K_2^{v112} \psi_m}{2s}, C_{2,6} = \frac{K_2^{w11}}{2s}, \\
C_{2,7} &= \frac{K_2^{u211}}{s^2}, C_{2,8} = -\frac{K_2^{v212} \psi_m}{2s}, C_{2,9} = \frac{K_2^{w21}}{2s}, C_{2,10} = \frac{K_2^{u311}}{s^2}, C_{2,11} = -\frac{K_2^{v312} \psi_m}{2s} \\
C_{3,1} &= \frac{K_3^{u011}}{s^2}, C_{3,2} = -\frac{K_3^{v012} \psi_m}{2s}, C_{3,3} = \frac{K_3^{w01}}{2s}, C_{3,4} = \frac{K_3^{u111}}{s^2}, C_{3,5} = -\frac{K_3^{v112} \psi_m}{2s}, C_{3,6} = \frac{K_3^{w11}}{2s}, \\
C_{3,7} &= \frac{K_3^{u211}}{s^2}, C_{3,8} = -\frac{K_3^{v212} \psi_m}{2s}, C_{3,9} = \frac{K_3^{w21}}{2s}, C_{3,10} = \frac{K_3^{u311}}{s^2}, C_{3,11} = -\frac{K_3^{v312} \psi_m}{2s}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
C_{4,1} &= \frac{K_4^{u011}}{s^2}, C_{4,2} = -\frac{K_4^{v012}\psi_m}{2s}, C_{4,3} = \frac{K_4^{w01}}{2s}, C_{4,4} = \frac{K_4^{u111}}{s^2}, C_{4,5} = -\frac{K_4^{v112}\psi_m}{2s}, C_{4,6} = \frac{K_4^{w11}}{2s}, \\
C_{4,7} &= \frac{K_4^{u211}}{s^2}, C_{4,8} = -\frac{K_4^{v212}\psi_m}{2s}, C_{4,9} = \frac{K_4^{w21}}{2s}, C_{4,10} = \frac{K_4^{u311}}{s^2}, C_{4,11} = -\frac{K_4^{v312}\psi_m}{2s} \\
C_{5,1} &= \frac{K_5^{u012}\psi_m}{2s}, C_{5,2} = \frac{K_5^{v011}}{s^2}, C_{5,3} = 0, C_{5,4} = \frac{K_5^{u112}\psi_m}{2s}, C_{5,5} = \frac{K_5^{v111}}{s^2}, C_{5,6} = 0, \\
C_{5,7} &= \frac{K_5^{u212}\psi_m}{2s}, C_{5,8} = \frac{K_5^{v211}}{s^2}, C_{5,9} = 0, C_{5,10} = \frac{K_5^{u312}\psi_m}{2s}, C_{5,11} = \frac{K_5^{v311}}{s^2}, \\
C_{6,1} &= \frac{K_6^{u012}\psi_m}{2s}, C_{6,2} = \frac{K_6^{v011}}{s^2}, C_{6,3} = 0, C_{6,4} = \frac{K_6^{u112}\psi_m}{2s}, C_{6,5} = \frac{K_6^{v111}}{s^2}, C_{6,6} = 0, \\
C_{6,7} &= \frac{K_6^{u212}\psi_m}{2s}, C_{6,8} = \frac{K_6^{v211}}{s^2}, C_{6,9} = 0, C_{6,10} = \frac{K_6^{u312}\psi_m}{2s}, C_{6,11} = \frac{K_6^{v311}}{s^2}, \\
C_{7,1} &= \frac{K_7^{u012}\psi_m}{2s}, C_{7,2} = \frac{K_7^{v011}}{s^2}, C_{7,3} = 0, C_{7,4} = \frac{K_7^{u112}\psi_m}{2s}, C_{7,5} = \frac{K_7^{v111}}{s^2}, C_{7,6} = 0, \\
C_{7,7} &= \frac{K_7^{u212}\psi_m}{2s}, C_{7,8} = \frac{K_7^{v211}}{s^2}, C_{7,9} = 0, C_{7,10} = \frac{K_7^{u312}\psi_m}{2s}, C_{7,11} = \frac{K_7^{v311}}{s^2}, \\
C_{8,1} &= \frac{K_8^{u012}\psi_m}{2s}, C_{8,2} = \frac{K_8^{v011}}{s^2}, C_{8,3} = 0, C_{8,4} = \frac{K_8^{u112}\psi_m}{2s}, C_{8,5} = \frac{K_8^{v111}}{s^2}, C_{8,6} = 0, \\
C_{8,7} &= \frac{K_8^{u212}\psi_m}{2s}, C_{8,8} = \frac{K_8^{v211}}{s^2}, C_{8,9} = 0, C_{8,10} = \frac{K_8^{u312}\psi_m}{2s}, C_{8,11} = \frac{K_8^{v311}}{s^2}, \\
C_{9,1} &= \frac{K_9^{u01}}{2s}, C_{9,2} = 0, C_{9,3} = \frac{K_9^{w011}}{s^2}, C_{9,4} = \frac{K_9^{u11}}{2s}, C_{9,5} = 0, C_{9,6} = \frac{K_9^{w111}}{s^2}, \\
C_{9,7} &= \frac{K_9^{u21}}{2s}, C_{9,8} = 0, C_{9,9} = \frac{K_9^{w211}}{s^2}, C_{9,10} = \frac{K_9^{u31}}{2s}, C_{9,11} = 0, \\
C_{10,1} &= \frac{K_{10}^{u01}}{2s}, C_{10,2} = 0, C_{10,3} = \frac{K_{10}^{w011}}{s^2}, C_{10,4} = \frac{K_{10}^{u11}}{2s}, C_{10,5} = 0, C_{10,6} = \frac{K_{10}^{w111}}{s^2}, \\
C_{10,7} &= \frac{K_{10}^{u21}}{2s}, C_{10,8} = 0, C_{10,9} = \frac{K_{10}^{w211}}{s^2}, C_{10,10} = \frac{K_{10}^{u31}}{2s}, C_{10,11} = 0, \\
C_{11,1} &= \frac{K_{11}^{u01}}{2s}, C_{11,2} = 0, C_{11,3} = \frac{K_{11}^{w011}}{s^2}, C_{11,4} = \frac{K_{11}^{u11}}{2s}, C_{11,5} = 0, C_{11,6} = \frac{K_{11}^{w111}}{s^2}, \\
C_{11,7} &= \frac{K_{11}^{u21}}{2s}, C_{11,8} = 0, C_{11,9} = \frac{K_{11}^{w211}}{s^2}, C_{11,10} = \frac{K_{11}^{u31}}{2s}, C_{11,11} = 0.
\end{aligned}$$

Метод прогонки [57] основывается на предположении

$$X_i = P_i X_{i+1} + Q_i, i = \overline{1, (N_0 - 1)}. \quad (2.22)$$

Выразим  $X_{i-1}$ ,  $X_i$  через  $X_{i+1}$  и подставим в уравнение (2.21)

$$\begin{aligned}
X_{i-1} &= P_i X_i + Q_i = P_i (P_{i+1} X_{i+1} + Q_{i+1}) + Q_i = P_i P_{i+1} X_{i+1} + P_i Q_{i+1} + Q_i; \\
(A_i P_i P_{i+1} + C_i P_{i+1} + B_i) X_{i+1} + A_i P_i Q_{i+1} + A_i Q_i + C_i Q_{i+1} - F_i &= 0. \quad (2.23)
\end{aligned}$$

Уравнения (2.23) будет выполняться независимо от решения если

$$A_i P_i P_{i+1} + C_i P_{i+1} + B_i = 0,$$

$$A_i P_i Q_{i+1} + A_i Q_i + C_i Q_{i+1} - F_i = 0.$$

Отсюда следует

$$P_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i P_i + C_i}; \quad Q_{i+1} = \frac{F_i - A_i Q_i}{A_i P_i + C_i}$$

где

$$X_0 = X_{N_0} = \Theta; \quad P_1 = -(C_1)^{-1} B_1; \quad Q_1 = -(C_1)^{-1} F_1.$$

После нахождения прогоночных коэффициентов  $P_i, Q_i$ , используя уравнения (2.22), получим решение системы

$$X_{N_0} = \Theta,$$

$$X_i = P_i X_{i+1} + Q_i, \quad i = \overline{1, (N_0 - 1)}.$$

Таким образом, с помощью формул (2.21) определяются перемещения в узлах сетки. Для аппроксимации перемещений используются сплайны [37, 38]. Затем деформации пластины находятся по формулам (2.3), а напряжения - с использованием соотношений закона Гука и уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Схема алгоритма решения краевой задачи показана на рисунке 2.2.

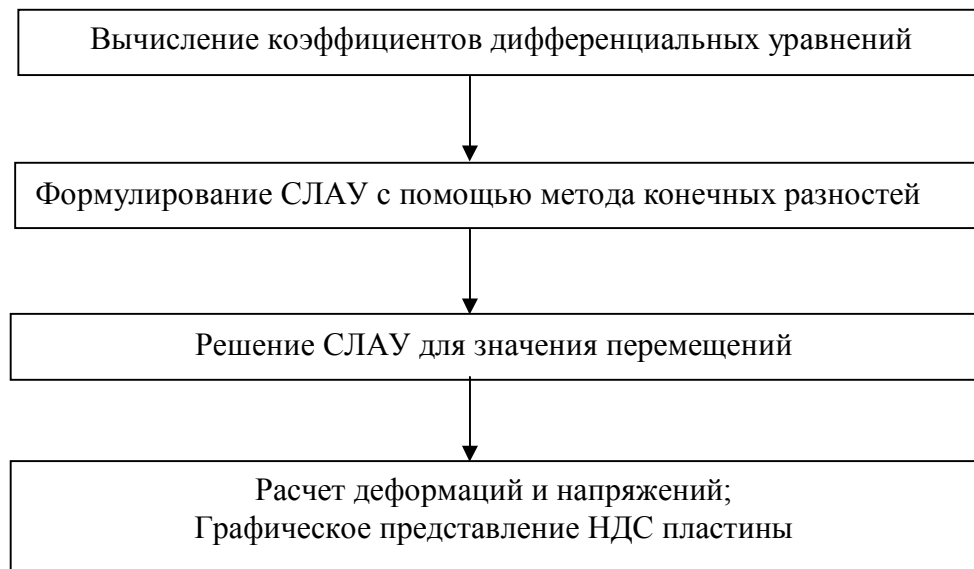


Рис. 2.2. Схема алгоритма решения задачи

## 2.4. Параметрические исследования НДС

В этом разделе на основании разработанной математической модели приведены результаты расчетов НДС прямоугольной пластины для различных вариантов изменения её толщины и характера нагружения. В качестве примера рассматривается квадратная изотропная пластина со следующими параметрами:  $a = b = 1$  (м),  $h_0 = 0,005$  (м),  $h_m = 0,05$  (м). Коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Пластина жестко закреплена на краях  $x = 0$ ,  $x = a$  и имеет шарнирные опоры на краях  $y = 0$ ,  $y = b$ .

### 2.4.1. Расчет НДС “погранслои” в зоне жестко зашечленного края. Сравнение с данными классической теории.

Толщина пластины  $2h(x)$  определяется соотношением

$$h(x) = h_m - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot x, \quad (2.24)$$

где  $\operatorname{tg}(\alpha) = (h_m - h_0) / a$ ,  $2\alpha$  – угол наклона пластины (рис. 2.3).

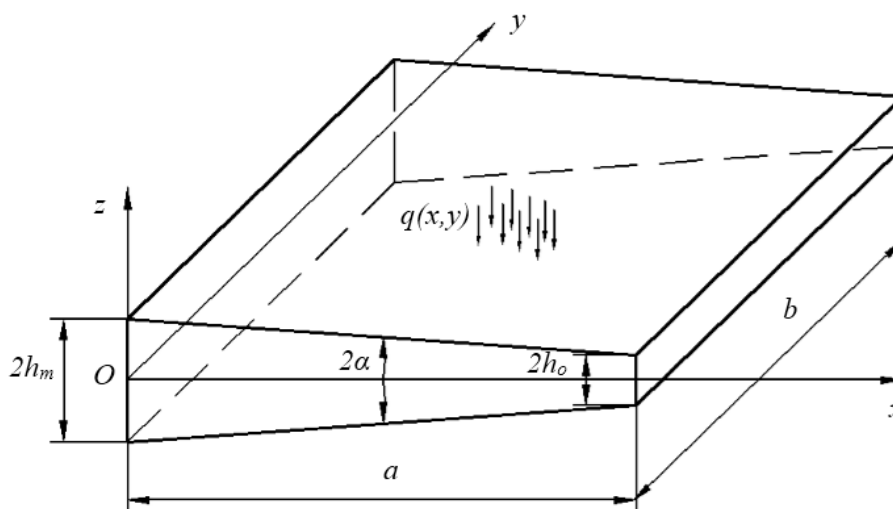


Рис. 2.3. Прямоугольная пластина

#### 2.4.1.1. Распределенная нагрузка

Рассматривается пластина переменной толщины, находящаяся под действием распределенной нагрузки  $q(x, y) = Q_0 \sin(\pi y)$ , где  $Q_0 = \text{const}$ . Результаты вычисления перемещений пластины представлены на рис 2.4.

Отметим, что на этом и последующих рисунках аббревиатура “Уточ” соответствует варианту уточненной теории и аббревиатура “Клас” - расчету по классической теории.

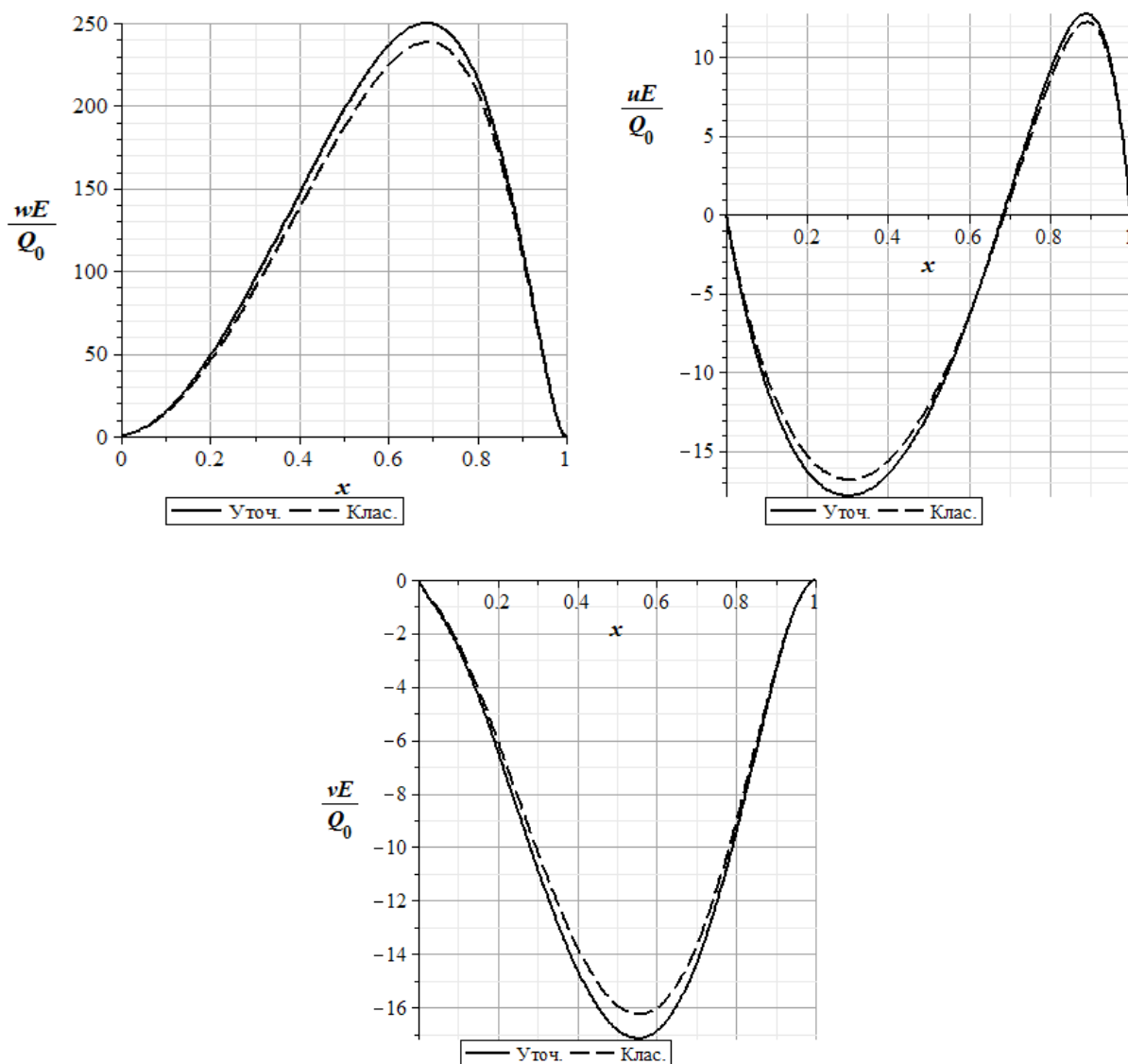


Рис. 2.4. Графики перемещений по длине пластины

Из анализа графиков рис. 2.4 следует, что максимальные величины перемещений уточняются незначительно, примерно на 7%. Результаты вычисления максимальных нормальных напряжений по длине пластины по уточненной теории представлены на рис 2.5-2.7.

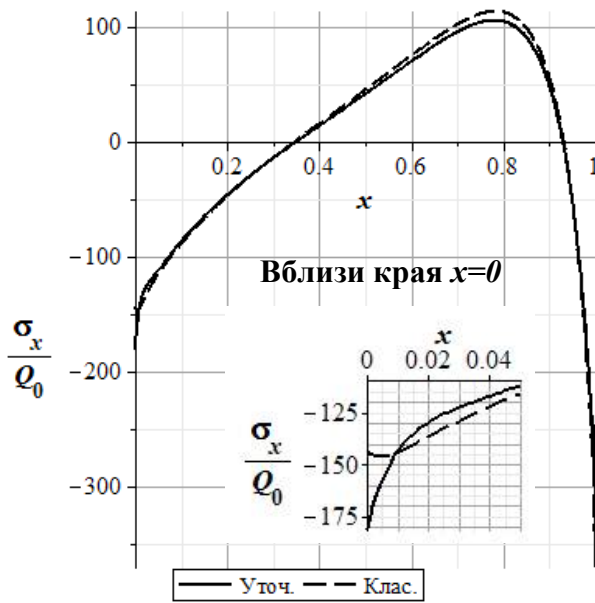


Рис. 2.5. Изменение  $\sigma_x$  по длине пластины

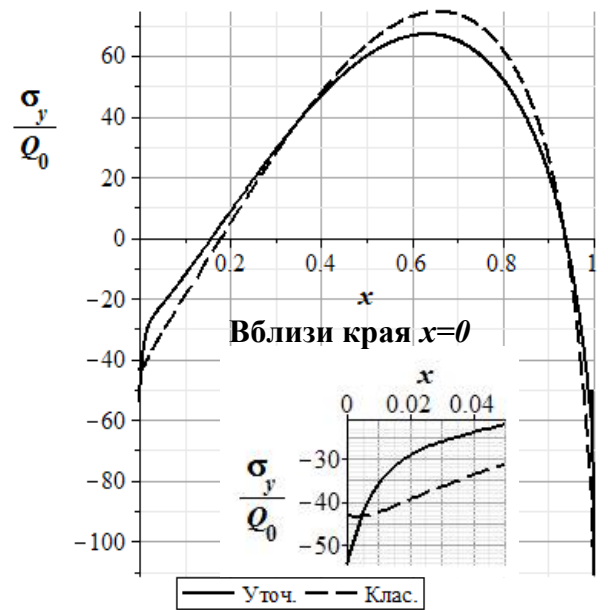


Рис. 2.6. Изменение  $\sigma_y$  по длине пластины

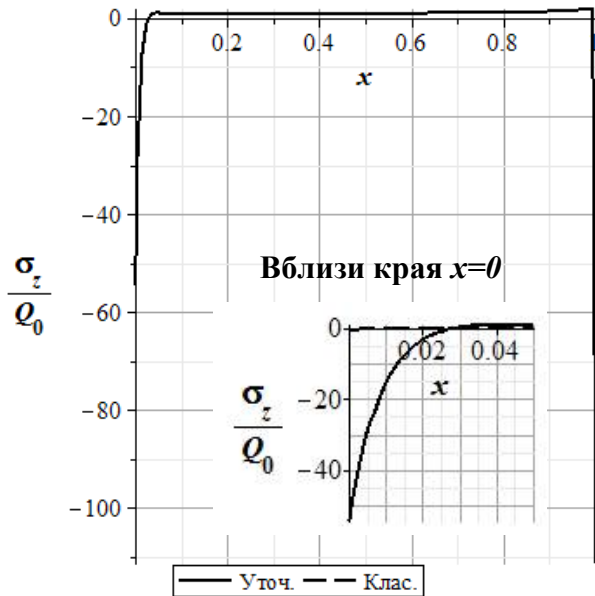


Рис. 2.7. Изменение  $\sigma_z$  по длине пластины

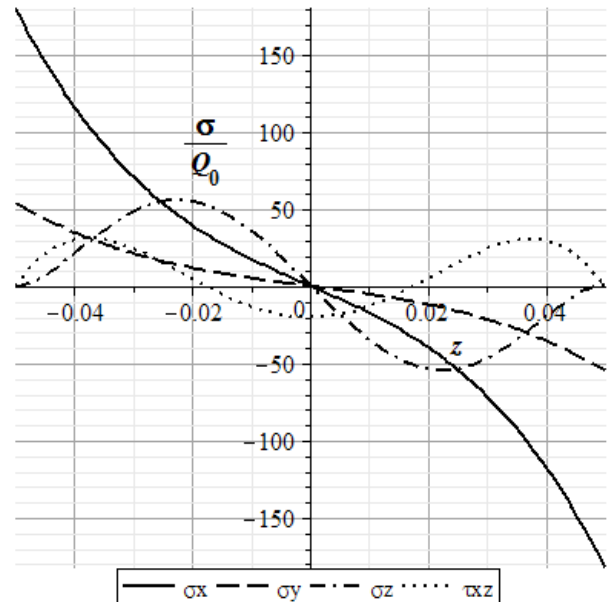


Рис. 2.8. Изменение  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}$  по толщине пластины на краю  $x=0$

Анализ полученных результатов (рис. 2.5 - 2.7) показывает, что вне краевой зоны значения напряжений, определенных по уточненной и классической теориям, практически совпадают. Максимальное рассогласование результатов расчета имеет место (рис. 2.6) при определении нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_y$  и составляет порядка 10%. При исследовании НДС пластины с помощью предлагаемой теории, напряжения в краевой зоне

существенно уточняются: нормальные тангенциальные напряжения  $\sigma_x$  - на 26,3% (рис. 2.5) и  $\sigma_y$  - на 26,3% (рис. 2.6).

Графики изменения напряжения  $\sigma_z$  по длине и в краевой зоне (рис. 2.7) показывают, что нормальные поперечные напряжения  $\sigma_z$  пренебрежимо малые по классической теории, по уточненной теории составляют около 30% от максимальных изгибных напряжений  $\sigma_x$  (рис. 2.5, 2.7).

Графики изменения напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  (напряжений “погранслои”) по толщине на краю пластины  $x=0$  показаны на рис. 2.8. Максимальные поперечные нормальные и касательные напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ , соответствующие уточненной теории, в краевой зоне пластины оказываются одного порядка с максимальными величинами основного внутреннего изгибного напряжения.

Аналогично, графики максимальных нормальных напряжений пластины, соответствующие уточненной теории, для различных величин углов  $\alpha$  представлены на рис 2.9-2.12.

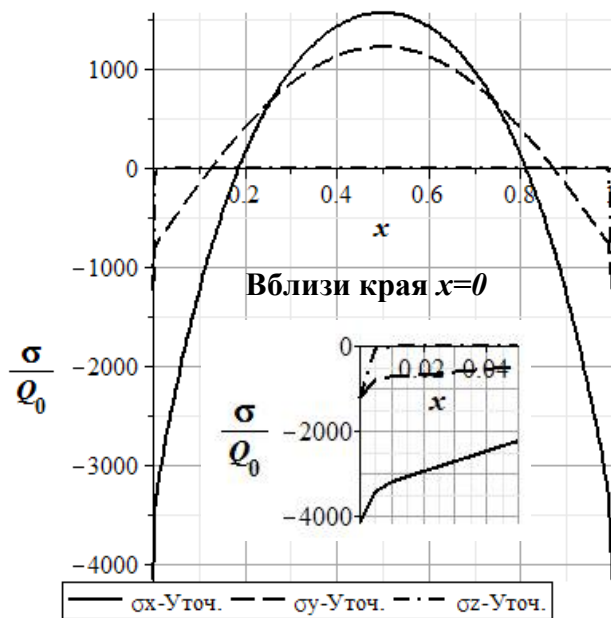


Рис. 2.9. Изменение  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  по длине пластины при  $h_m = 0,005 м$ ,  $\alpha = 0^\circ$

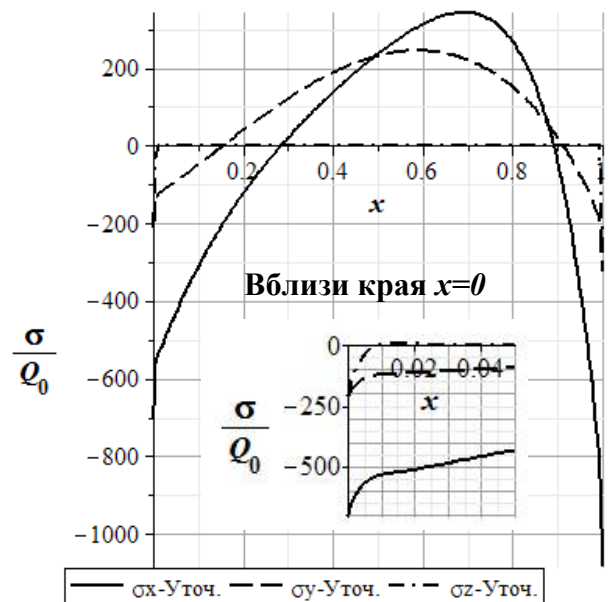


Рис. 2.10. Изменение  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  по длине пластины при  $h_m = 0,02 м$ ,  $\alpha = 0,86^\circ$

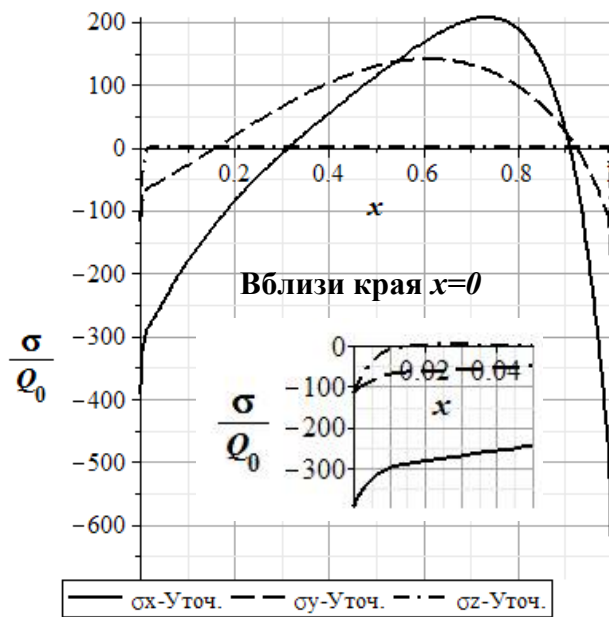


Рис. 2.11. Изменение  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  по длине пластины при  $h_m = 0,03 \text{ м}$ ,  $\alpha = 1,43^\circ$

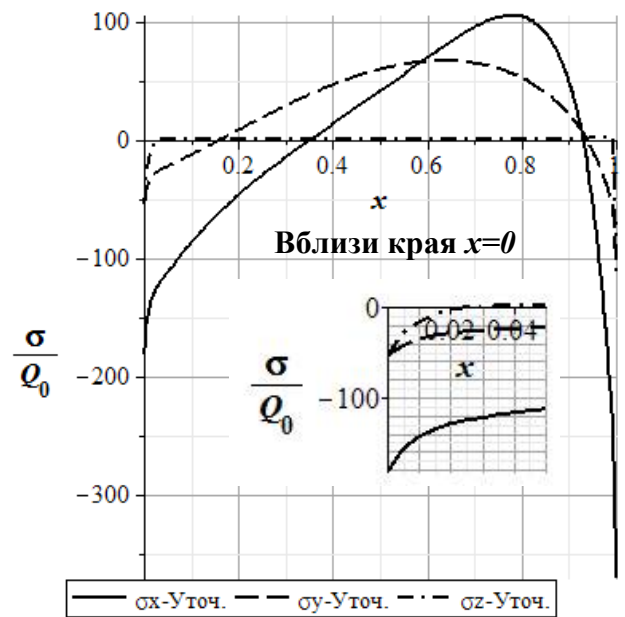


Рис. 2.12. Изменение  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  по длине пластины при  $h_m = 0,05 \text{ м}$ ,  $\alpha = 2,57^\circ$

Отметим что, в случае  $\alpha = 0^\circ$  (пластина постоянной толщины), коэффициенты системы дифференциальных уравнений (2.18) постоянны. При изменении величины толщины пластин  $h_m = 0,005 \text{ м}; 0,02 \text{ м}; 0,03 \text{ м}; 0,05 \text{ м}$  (угол  $\alpha = 0^\circ, 0,86^\circ, 1,43^\circ, 2,57^\circ$ ), напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  по длине пластины тоже изменяются. Максимальные значения напряжений получены на правом крае пластины. Ниже в таблице 2.1 представлены результаты сравнения относительных прогибов и напряжений, полученных по уточненной и классической теориям для различных углов  $\alpha$  и величин толщин.

По энергетической теории прочности определим эквивалентную прочность пластины по формуле

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2]} \quad (2.25)$$

Эта формула (2.25) с помощью условия прочности позволяет оценить появление в материале малых пластических деформаций. Отметим, что эквивалентные напряжения прямоугольной пластины, рассчитанные для

рассматриваемых случаев, также уточнены соответствует теории представления в этой работе. Это позволит более точно рассчитать прочность пластины.

Таблица 2.1

	Уточ	Клас	Уточ	Клас
	$h_m = 0,005 м, \alpha = 0^\circ$		$h_m = 0,02 м, \alpha = 0,86^\circ$	
$wE / Q_0$	18492,58	17951,05	1537,75	1488,34
$\sigma_x / Q_0$	4155,09	3310,88	703,56	555,22
$\sigma_y / Q_0$	1246,52	993,27	211,07	166,57
$\sigma_z / Q_0$	1246,52	0	211,07	0
$\sigma_{\text{ЭKB}} / Q_0$	3367.07	2942.78	566.85	492.14
	$h_m = 0,03 м, \alpha = 1,43^\circ$		$h_m = 0,05 м, \alpha = 2,57^\circ$	
$wE / Q_0$	743,56	713,48	249,9	238,19
$\sigma_x / Q_0$	392,54	309,74	180,01	142,98
$\sigma_y / Q_0$	117,76	92,92	54,00	42,89
$\sigma_z / Q_0$	117,76	0	54,00	0
$\sigma_{\text{ЭKB}} / Q_0$	316	274.36	145.87	127.08

#### 2.4.1.2. Локальная нагрузка

Рассматривается пластина переменной толщины, толщина которой определяется соотношением (2.23), находящаяся под действием локальной нагрузки при  $x_1 = 29a / 60$ ;  $x_2 = 31a / 60$

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_1 \\ Q_0 \sin(\pi y), & x_1 \leq x \leq x_2, \quad \text{где } Q_0 = const. \\ 0, & x_2 < x \leq a \end{cases}$$

Результаты вычисления перемещений пластины, жестко заземленной на двух краях  $x = 0, x = a$ , по уточненной теории представлены на рис 2.9. Из графиков рис. 2.9 следует, что максимальные величины перемещений уточняются на 6,5 %.



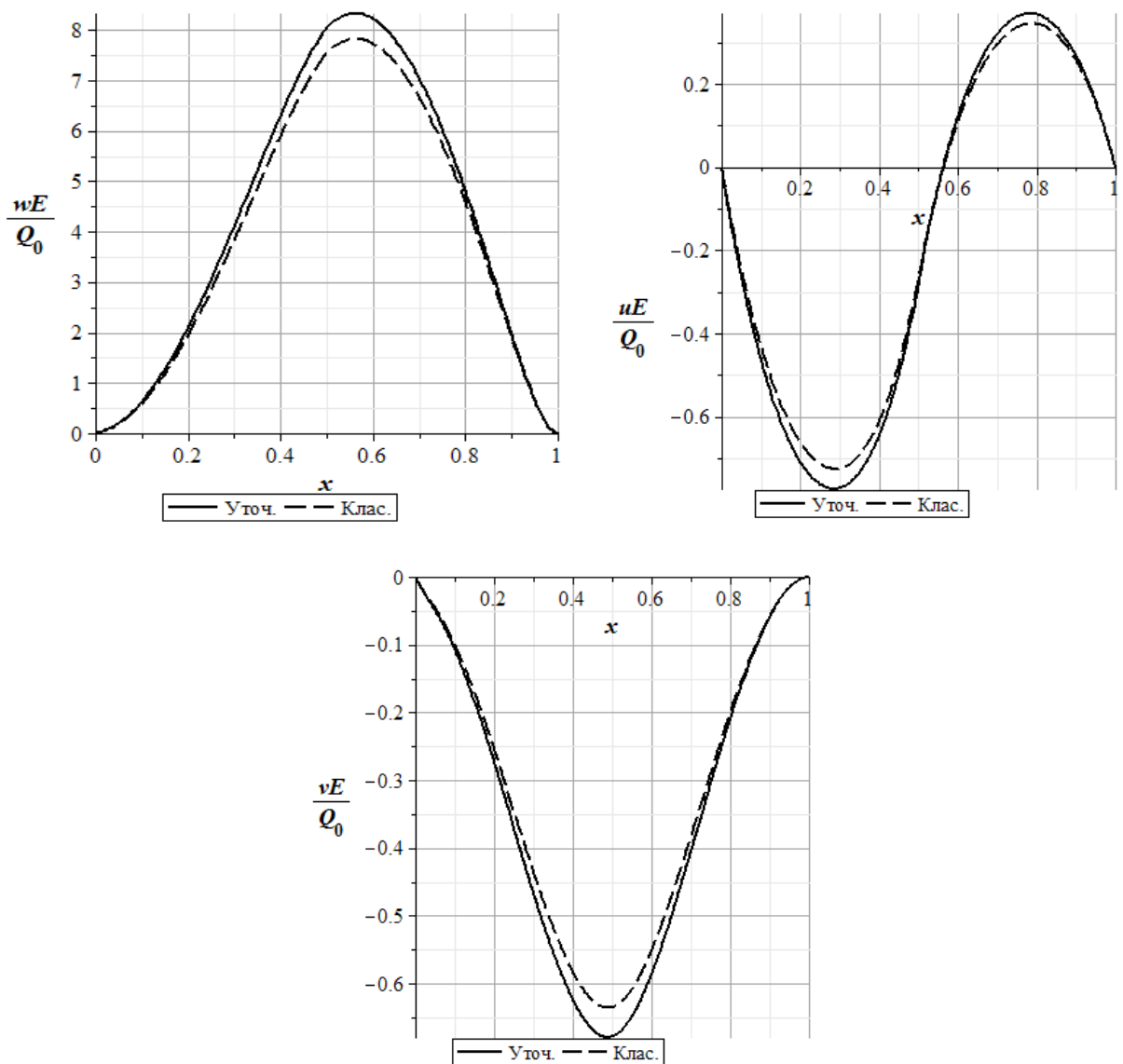


Рис. 2.13. Графики перемещений по длине пластины

Результаты вычисления максимальных нормальных напряжений пластины по уточненной теории представлены на рис. 2.14-2.16. Графики показывают, что вне краевой и локальной нагрузки зон и значения напряжений, определенных по уточненной и классической теориям, практически совпадают, что подтверждает достоверность полученных в диссертации результатов. Скачки напряжений на графиках (рис. 2.14-2.16) происходят из-за влияния локальной нагрузки. При исследовании НДС пластины с помощью предлагаемой теории, напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные тангенциальные напряжения  $\sigma_x$  - на 34,7% (рис. 2.14) и  $\sigma_y$  - на 18,6% (рис. 2.15).

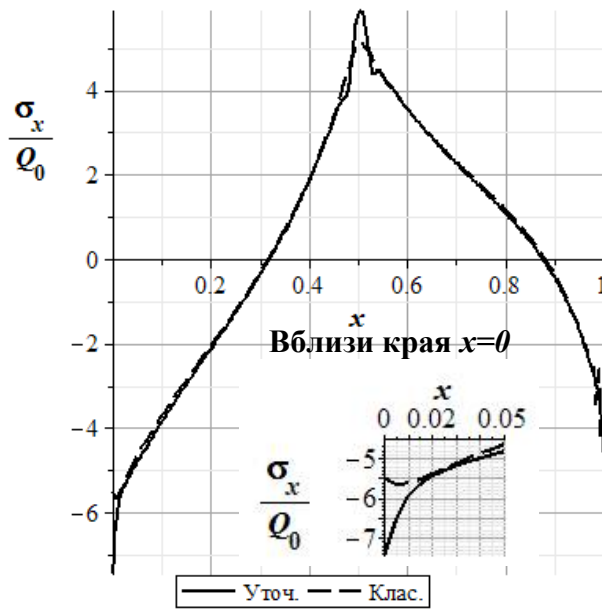


Рис. 2.14. Изменение  $\sigma_x$  по длине пластины

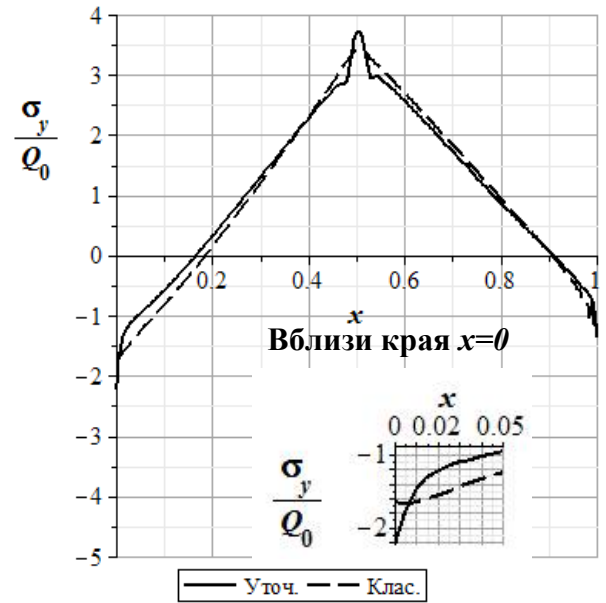


Рис. 2.15. Изменение  $\sigma_y$  по длине пластины

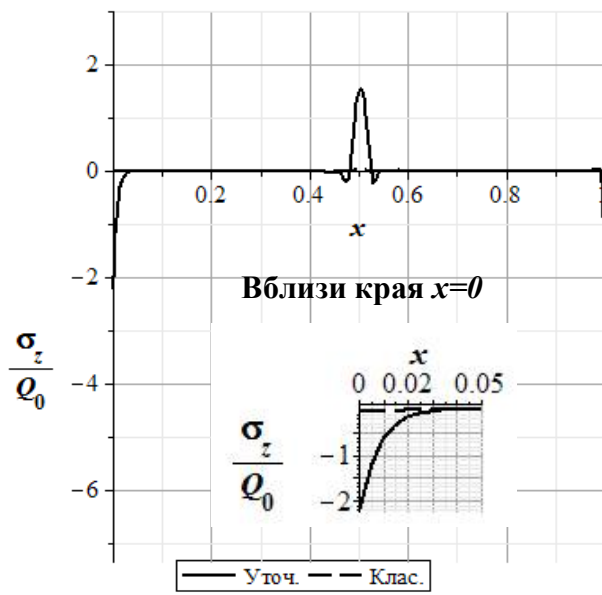


Рис. 2.16. Изменение  $\sigma_z$  по длине пластины

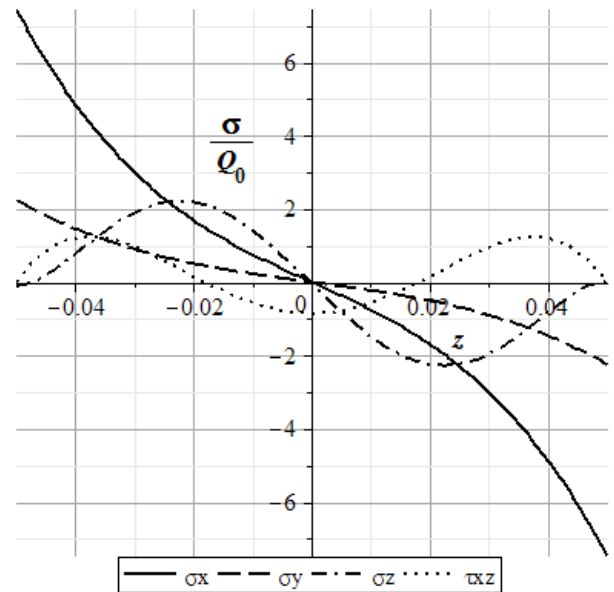


Рис. 2.17. Изменение  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}$  по толщине пластины на краю  $x=0$

Графики изменения напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}$  по толщине на краю  $x=0$  показаны на рис. 2.17. Максимальные нормальные и касательные поперечные напряжения  $\sigma_z, \tau_{xz}$ , соответствующие уточненной теории, в краевой зоне пластины оказываются одного порядка с максимальными

величинами основного изгибного напряжения. Здесь следует отметить, что нормальные поперечные напряжения  $\sigma_z$ , пренебрежимо малые по классической теории, по уточненной теории составляют около 30% от максимальных изгибных напряжений  $\sigma_x$  (рис. 2.14, 2.16, 2.17).

#### 2.4.2. Влияние изменчивости толщины

В качестве примера по функции второго порядка, рассматривается квадратная изотропная пластина с аналогичными параметрами, толщина  $2h(x)$  которой определяется функцией второго порядка  $h(x) = 0.028x^2 - 0.072x + 0.05$  (рис.2.18). Метод конечных разностей позволяет решать систему дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Поэтому при условии изменения толщины пластины по закону непрерывной функции, можно применять указанный метод.

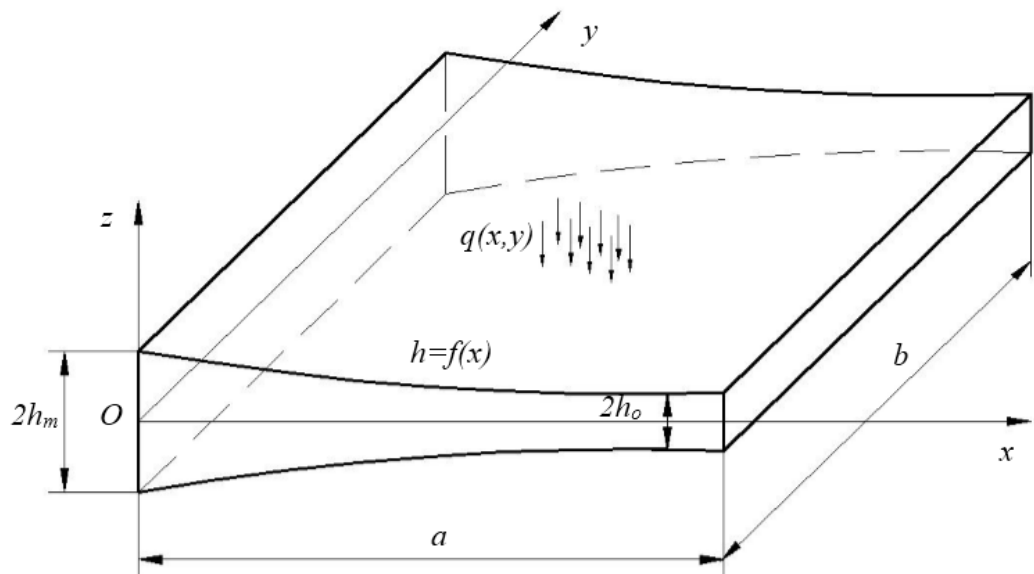


Рис. 2.18. Прямоугольная пластина

Рассматривается пластина переменной толщины, находящаяся под действием распределенной нагрузки  $q(x,y) = Q_0 \sin(\pi y)$ , где  $Q_0 = const$ . Результаты вычисления величины перемещений пластины, жестко защемленной на двух краях  $x = 0, x = a$ , по уточненной теории представлены

на рис 2.19. Из графиков рис. 2.19 следует, что максимальные величины перемещений уточняются на 7%.

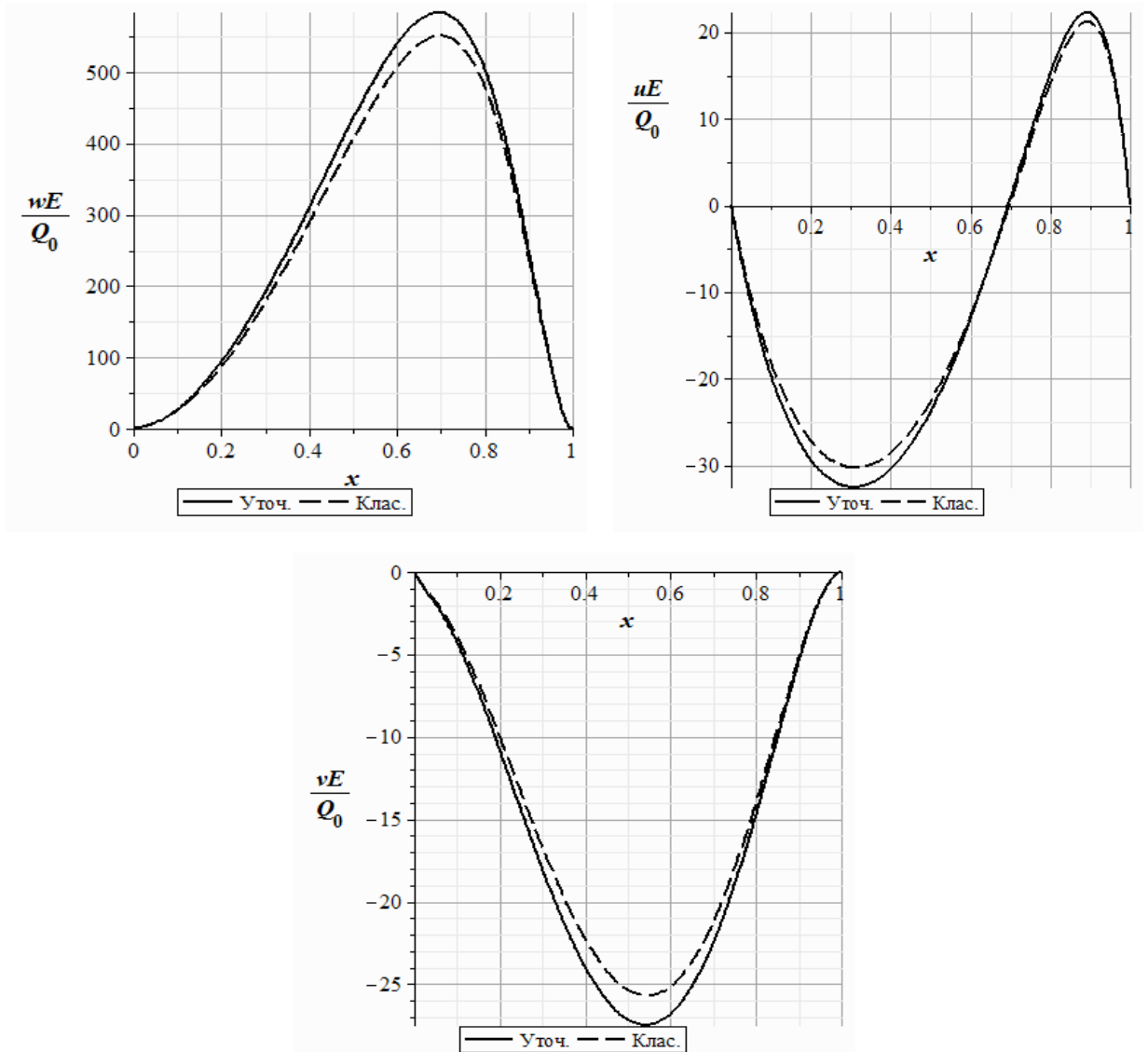


Рис. 2.19. Графики перемещений по длине пластины

Анализ полученных результатов показывает, что вне краевой зоны значения напряжений, определенных по уточненной и классической теориям, практически совпадают. Максимальное рассогласование результатов расчета имеет место (рис. 2.21) при определении нормальных тангенциальных напряжений  $\sigma_y$  и составляет 10%. При исследовании НДС пластины с помощью предлагаемой теории, напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные тангенциальные напряжения  $\sigma_x$  - на 24,8% (рис. 2.20) и  $\sigma_y$  - на 17,6% (рис. 2.21). Здесь надо отметить, что нормальные поперечные

напряжения  $\sigma_z$  (рис. 2.22), определяемые по классической теории, пренебрежимо малы, а по уточненной теории составляют около 30% от максимальных изгибных напряжений  $\sigma_x$  (рис. 2.20, 2.23).

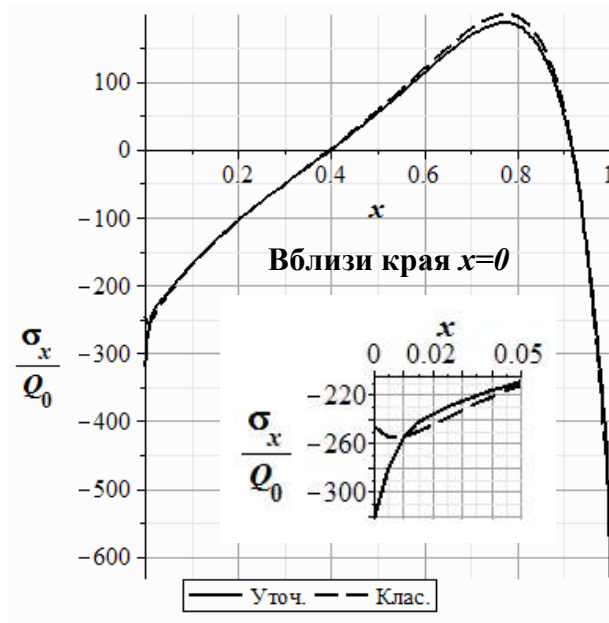


Рис. 2.20. Изменение  $\sigma_x$  по длине пластины

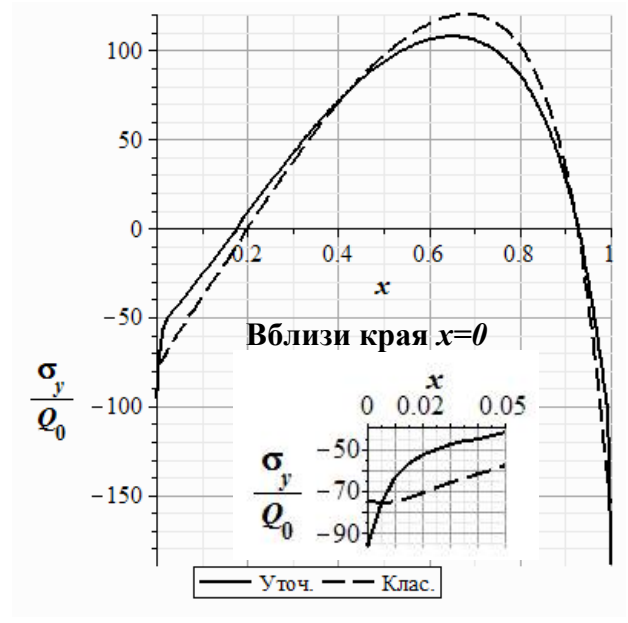


Рис. 2.21. Изменение  $\sigma_y$  по длине пластины

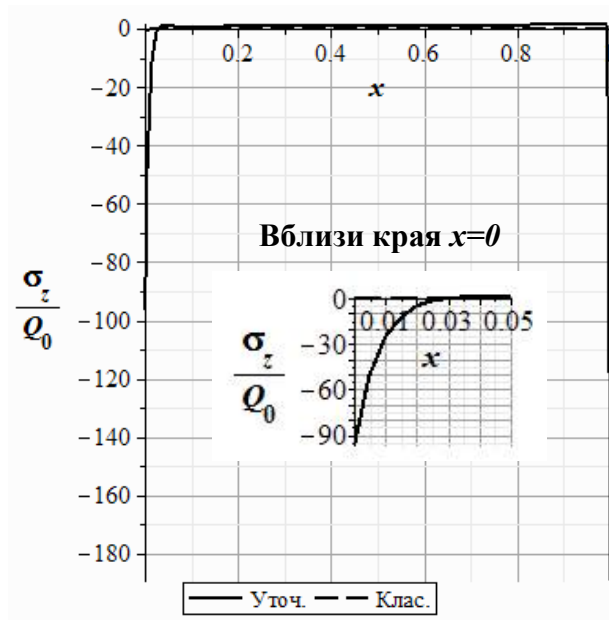


Рис. 2.22. Изменение  $\sigma_z$  по длине пластины

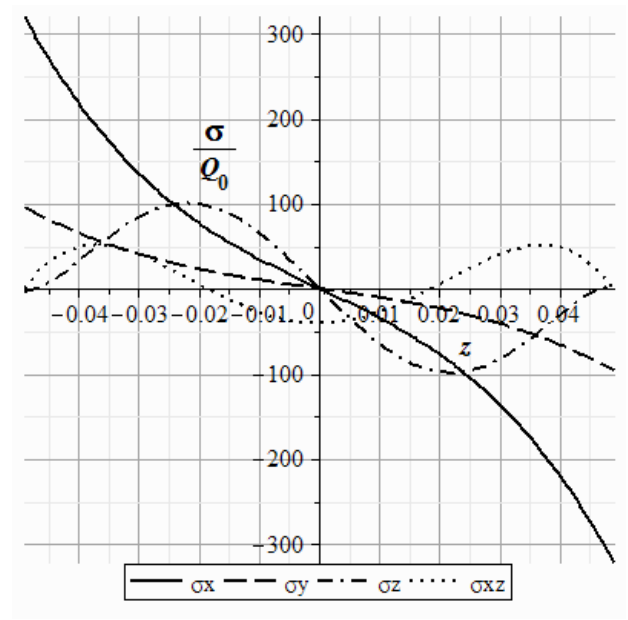


Рис. 2.23. Изменение  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}$  по толщине пластины на краю  $x=0$

Графики изменения напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}$  по толщине на краю  $x=0$  показаны на рис. 2.23. Очевидно, что максимальные поперечные нормальные и

касательные напряжения  $\sigma_z, \tau_{xz}$ , соответствующие уточненной теории, на краю пластины оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения.

### 2.4.3. Влияние характера внешней нагрузки

Рассматривается пластина переменной толщины, толщина которой определяется соотношением (2.23), находящаяся под действием локальной нагрузки, изменяющаяся по синусоидальному закону, при  $x_1 = 7a/15; x_2 = 8a/15$

$$q(x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < x_1 \\ Q_0 \sin\left(\frac{k\pi(x-x_1)}{x_2-x_1}\right) \sin(\pi y), & x_1 \leq x \leq x_2, \text{ где } k = 1, 2, 3, \dots \\ 0, & x_2 < x \leq a \end{cases}$$

Результаты вычисления максимальных нормальных напряжений пластины, по уточненной теории представлены на рис 2.24-2.26. Очевидно, что в зоне нагрузки напряжения, определяемые по уточненной и классической теориям, отличаются по величине.

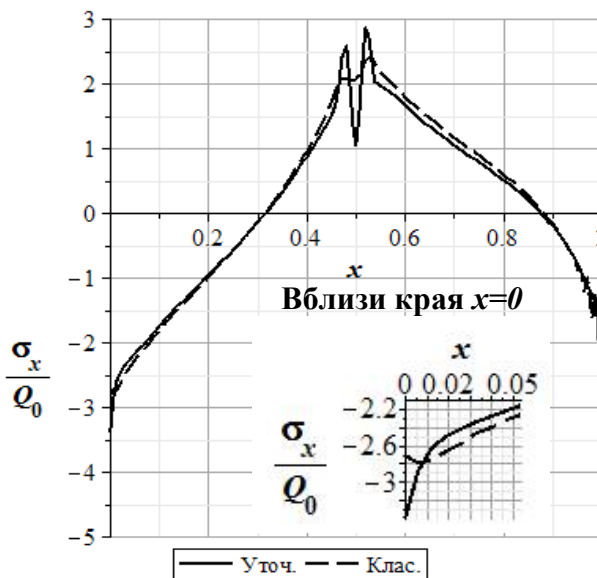


Рис. 2.24. Изменение  $\sigma_x$  по длине пластины

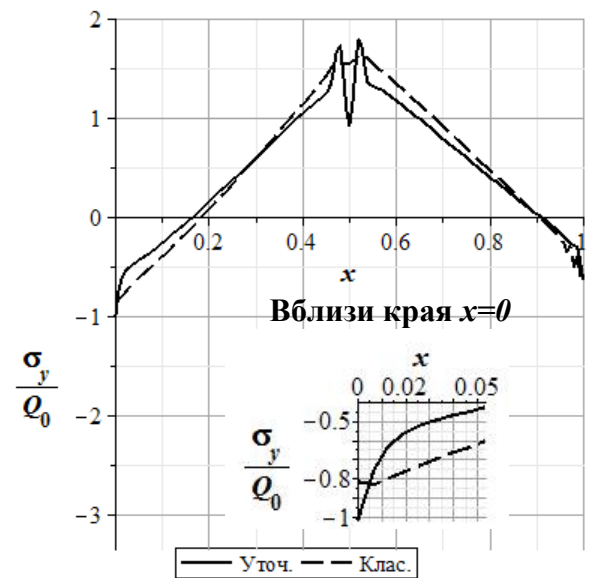


Рис. 2.25. Изменение  $\sigma_y$  по длине пластины

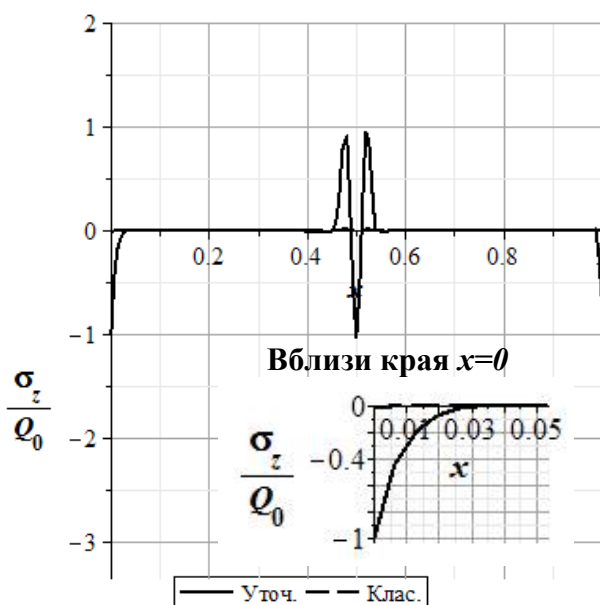


Рис. 2.26. Изменение  $\sigma_z$  по длине пластины

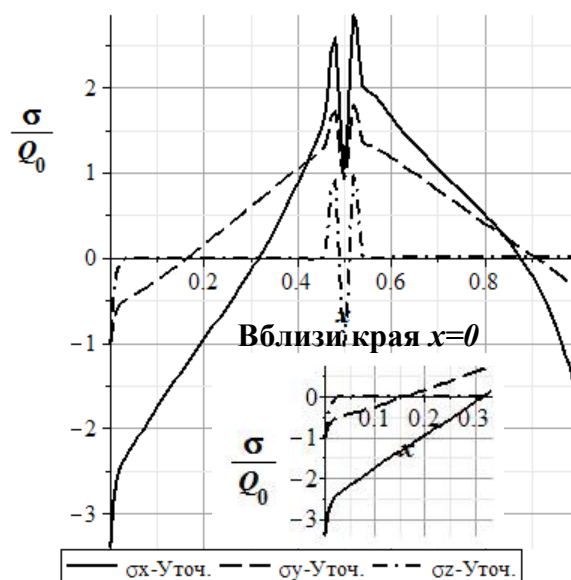


Рис. 2.27. Изменение  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  по длине пластины при  $k=3$

Скачки напряжений на графиках (рис 2.24, 2.25, 2.26) происходят из-за влияния локальной нагрузки. Максимальное рассогласование результатов расчета по величине имеет место (рис. 2.24, 2.25) при определении нормальных тангенциальных напряжений. При исследовании НДС пластины с помощью предлагаемой теории напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные тангенциальные напряжения  $\sigma_x$  - на 24,8% (рис. 2.24) и  $\sigma_y$  - на 17,6% (рис. 2.25). Очевидно, что эти значения несколько меньше, чем в зоне локальной нагрузки.

Максимальные поперечные нормальные и касательные напряжения  $\sigma_z$ , соответствующие уточненной теории, в зоне нагрузки пластины оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения (рис. 2.26). Нормальные поперечные напряжения  $\sigma_z$ , соответствующие уточненной теории, составляют около 30% от максимальных изгибных напряжений  $\sigma_x$  (рис. 2.24, 2.26).

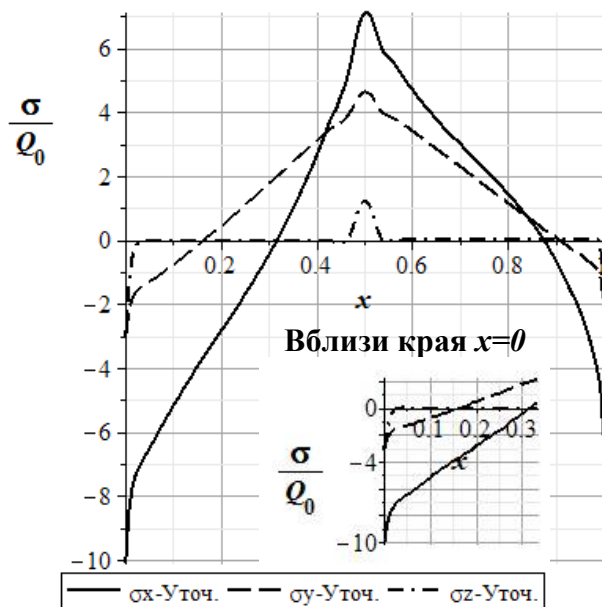


Рис. 2.28. Изменение  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  по длине пластины при  $k = 1$

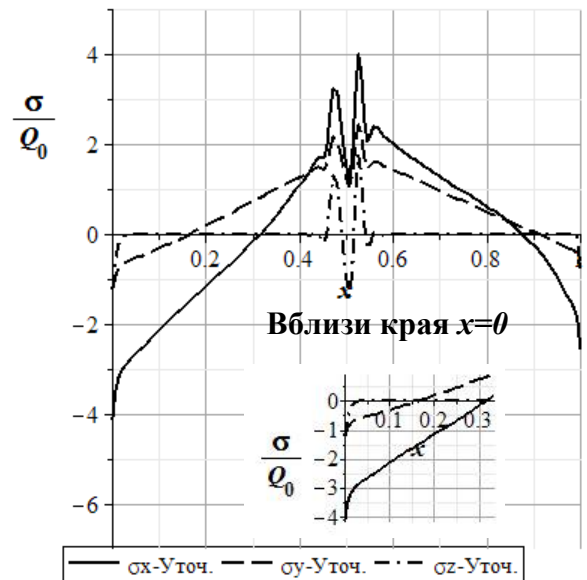


Рис. 2.29. Изменение  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  по длине пластины при  $k = 5$

На рис. 2.27 - 2.29 показаны результаты расчета нормальных напряжений пластины, жестко заземленной на двух концах, для различного числа полуволн  $k = 1, 3, 5$  соответственно. Анализ полученных результатов показывает, что число полуволн  $k$  существенно влияет на НДС пластины.

## 2.5. Разложение нагрузки в ряде Фурье

В случае поперечная нагрузка пластины задается по другой функцией, необходимо разложить функцию нагрузки в ряде Фурье по формулам (2.17). Соответственно, перемещения  $U_{im}, V_{im}, W_{jm}, i = \overline{0,3}, j = \overline{0,2}, m = 1, 2, 3, \dots$  также анализируются в ряды Фурье. Сгруппировать компонент  $\sin(\psi_m y)$ , находим систему уравнений для перемещений (2.18). Решая систему уравнений, получаем перемещения для  $m$ -ых слагаемых. Затем перемещения пластины рассчитывается по сумме перемещений, полученных из решений систем (2.18).

В диссертации представлен расчет НДС пластины, находящейся под действием распределенной нагрузки  $q(x, y) = Q_0 = const$  при  $0 \leq x \leq a, 0 < y < b$ . Параметры пластины  $a = b = 1$  (м),  $h_0 = h_m = 0,005$  (м). Коэффициент Пуассона



$\mu = 0,3$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ Па}$ . Пластина жестко защемлена на краях  $x = 0$ ,  $x = a$  и имеет шарнирные опоры на краях  $y = 0$ ,  $y = b$ .

Разложим функцию  $f(y)=1$  в ряде Фурье по синусам на интервале  $(0,1)$ , получим

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m-1)} \sin((2m-1)\pi y) = \frac{4}{\pi} \left( \sin(\pi y) + \frac{1}{3} \sin(3\pi y) + \frac{1}{5} \sin(5\pi y) + \dots \right),$$

или

$$\begin{aligned} Q_0 &= Q_0 \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m-1)} \sin((2m-1)\pi y) \right) = \\ &= \frac{4Q_0}{\pi} \left( \sin(\pi y) + \frac{1}{3} \sin(3\pi y) + \frac{1}{5} \sin(5\pi y) + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.26)$$

Из каждой слагаемых в разложение (2.26), находим соответствие перемещения по аналогии в пункте 2.4.1. Графики изменения прогиба  $w$  и напряжения  $\sigma_x$  по уточненной теории представлены на рисунках 2.30, 2.31 при  $m = 1, 2, 3$ .

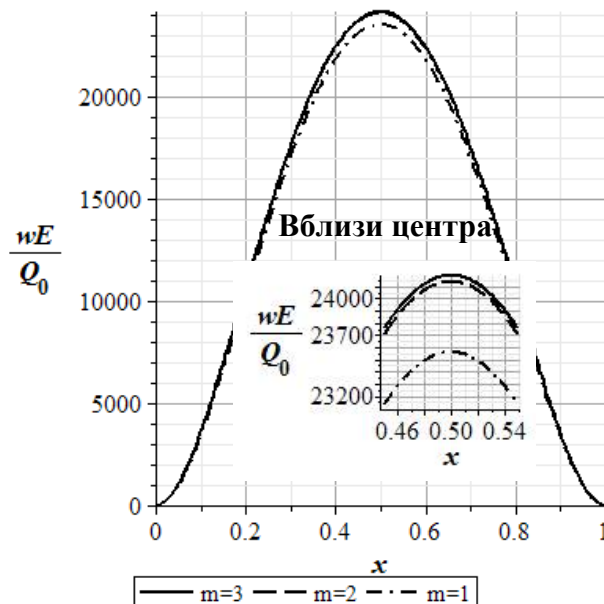


Рис. 2.30. Изменение прогиба  $w$  по длине пластины при  $m = 1, 2, 3$

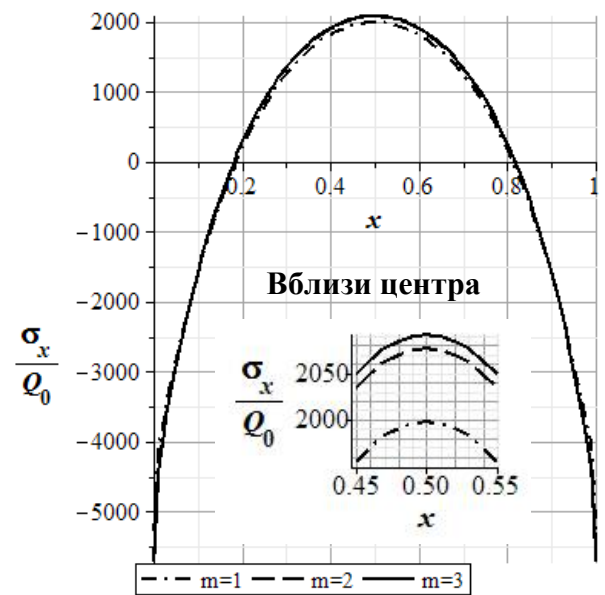


Рис. 2.31. Изменение  $\sigma_x$  по длине пластины при  $m = 1, 2, 3$

Максимальное рассогласование результатов расчета имеет место в центре пластины при определении прогиба  $w$  и нормальных тангенциальных

напряжений  $\sigma_x$ . Значения прогиба  $w$  и напряжения  $\sigma_x$  представлены в таблице 2.2.

Таблица 2.2. Сравнение прогиба  $w$  и напряжения  $\sigma_x$  в центре пластины

	<b>m=1</b>	<b>m=2</b>	<b>m=3</b>
$wE / Q_0$	23558	24139	24189
$(w_m - w_{m-1}) / w_{m-1}, \%$		2,46	0,2
$\sigma_x / Q_0$	1999	2077	2092
$(\sigma_{xm} - \sigma_{xm-1}) / \sigma_{xm-1}, \%$		3,93	0,7

Из графиков 2.30, 2.31 и таблицы 2.2 можно установить, что расчет НДС прямоугольной пластины при разложении нагрузки в ряде Фурье сходится. Чем больше количество слагаемых в ряде, тем лучше точность. Точность уже достаточная, если возьмем 3 слагаемых. Графики прогиба  $w$  и напряжений  $\sigma_x$  при  $m=2$  и  $m=3$  практически совпадают.

## 2.6. Сравнение результатов расчета НДС с данными классической и другим вариантам уточненной теории

Для проверки и сравнения полученных в диссертации результатов с другим вариантам уточненной теории, рассматривается прямоугольная пластина постоянной толщины, т.е. при угле  $\alpha = 0$ . Полагаем, что пластина имеет жестко заземленные края  $x=0$ ,  $x=a$  и шарнирные опоры на краях  $y=0$ ,  $y=b$ .

В этом случае, система дифференциальных уравнений (2.18) имеет постоянные коэффициенты и её можно решать другим методом. На рис. 2.32 и 2.33 показаны графики напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$  полученные в работе [108] методом преобразования Лапласа, по длине и по толщине пластины на краю  $x=0$ . Отметим, что решения методами конечных разностей и преобразования Лапласа практически совпадают (рис. 2.9, рис. 2.32).

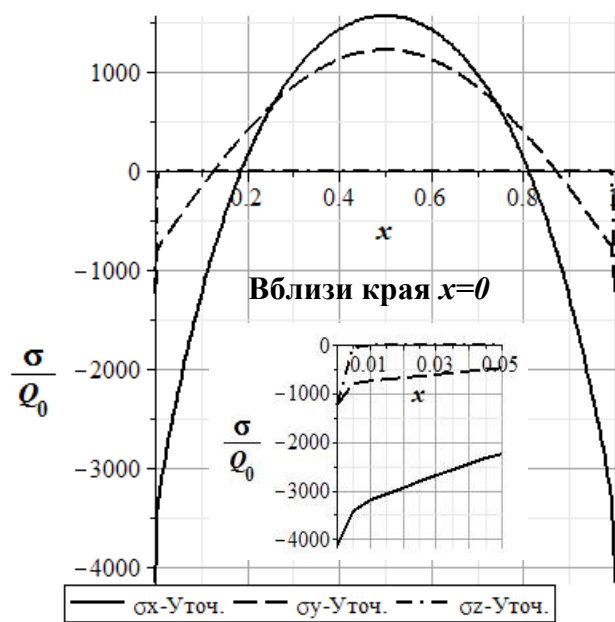


Рис. 2.32. Изменение  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  по длине пластины при  $h_m = 0,005 \text{ м}, \alpha = 0^\circ$

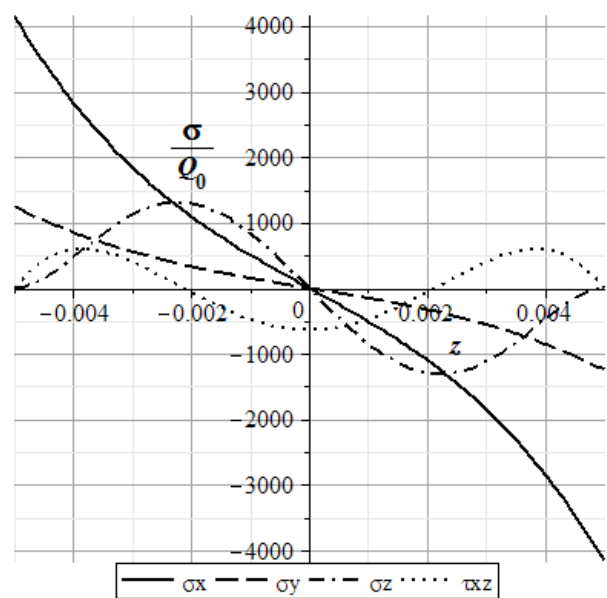


Рис. 2.33. Изменение  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xz}$  по толщине пластины на краю  $x=0$  при  $h_m = 0,005 \text{ м}, \alpha = 0^\circ$

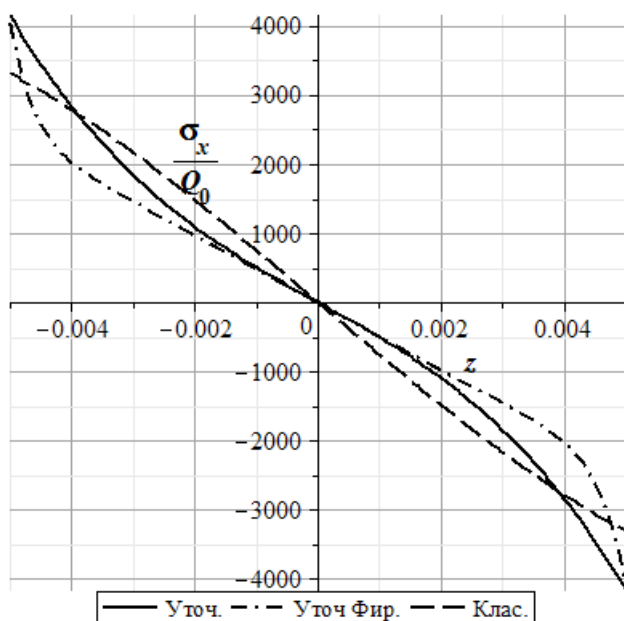


Рис. 2.34. Изменение  $\sigma_x$  по толщине пластины на краю  $x=0$

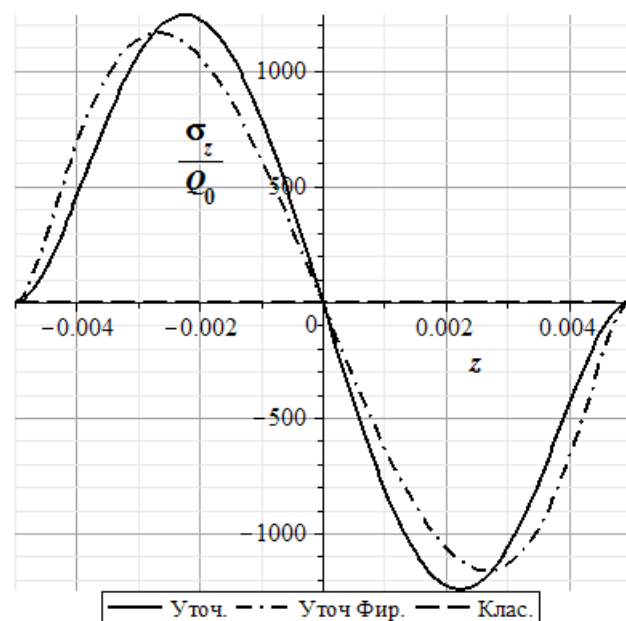


Рис. 2.35. Изменение  $\sigma_z$  по толщине пластины на краю  $x=0$

Кроме того, на графиках 2.34, 2.35 для сравнения показаны напряжения  $\sigma_x$  и  $\sigma_z$ , полученные в работе Вал.В. Фирсанова [88] по уточненной теории с

помощью вариационно-асимптотического метода (аббревиатура Уточ Фир.), по разработанной в диссертации теории (аббревиатура Уточ.) и данными классической теории (аббревиатура Клас.).

*Таблица 2.3. Сравнение нормальных напряжений пластин в зоне заземленного края по уточненным и классической теориям*

	<b>В данной работе</b>	<b>В работе [88]</b>
$(\sigma_x^{Уточ} - \sigma_x^{Клас}) / \sigma_x^{Клас}$	25,5%	22,3%
$\sigma_z^{Уточ} / \sigma_x^{Уточ}$	30%	27,8%

Из графиков 2.34, 2.35 и данных таблицы 2.2, в работе [88] максимальные изгибные напряжения  $\sigma_x$  уточняются 22,3%, поперечные нормальные напряжения  $\sigma_z$  составляют 27,8% от  $\sigma_x$  на краю  $x=0$ .

Результаты сравнения подтверждают достоверность представленного метода.

### **2.7. Прочность сварного соединения прямоугольных пластин на основе уточненной теории**

Рассматривается влияние напряженного состояния «погранслоя» на прочность и трещиностойкость непрерывных соединений и стыков разностенных элементов конструкций, моделируемых пластинами постоянной и переменной толщины. Указанная оценка проводится путем уточнения основных формул расчета непрерывных соединений (фланцевых, сварных и клеевых), позволяющих определить их геометрические параметры (толщины) на этапах проектирования с позиции уточненной теории пластин и механики разрушения.

Результаты, относящиеся к уточненному НДС прямоугольных пластин, можно применить к прочностному расчету сварных соединений. Опыт

эксплуатации изделий из высокопрочных сталей и сплавов показывает, что имеют место преждевременные разрушения сварных конструкций, в большинстве случаев, по шву или около шовной зоне.

Расчет сварных швов на прочность при статических нагрузках производится по номинальным напряжениям, вычисляемым в предположении равномерного распределения их по сечению шва.

Рассмотрим сварное соединение (рис. 2.36) прямоугольной пластины с предварительной подготовкой кромок, работающей на изгиб. По классической теории требуемое значение толщины пластины в наиболее опасном сечении определяется по формуле [91]

$$h = \sqrt{\frac{3nM_{изг}^0}{2[\sigma]_p}} \quad (2.27)$$

где  $[\sigma]_p$  – допускаемое напряжение сварного шва и  $n$  – коэффициент запаса прочности пластины.

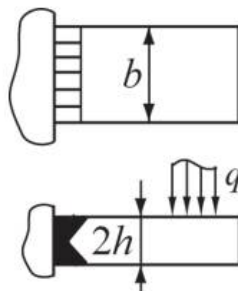


Рис. 2.36. Сварное соединение в прямоугольной пластине

Учитывая НДС прямоугольной пластины по уточненной теории в пункте 2.6, имеем

$$\sigma_x^0 = 1,19 \left( \frac{3M_{изг}^0}{2h^2} \right),$$

откуда, на основании (2.27), следует

$$h = \sqrt{1,34 \left( \frac{3nM_{изг}^0}{2[\sigma]_p} \right)} = 1,16 \sqrt{\frac{3nM_{изг}^0}{2[\sigma]_p}} \quad (2.28)$$

Сравнивая формулы (2.27) и (2.28), заключаем, что уточненные напряжения приводят к увеличению требуемой толщины пластины в зоне сварного шва около на 16%.

К приведенному расчету сварного шва на статическую прочность необходимо присовокупить также его расчет по теории хрупкого разрушения. Предположим, что на верхней плоскости пластинки в наиболее опасном сечении существует начальная прямолинейная трещина размером  $2b$ . Тогда можно установить, что с учетом уточненных напряжений  $\sigma_x$  получим следующее выражение для коэффициента интенсивности КІ на нижней кромке трещины [91]

$$K_{I\Sigma} = 1,51K_{IK} \quad (2.29)$$

где  $K_{IK} = -\frac{h\sigma_{xk}^m}{\sqrt{\pi b}} \int_{-1}^{-1+2\varepsilon} \sqrt{\frac{\zeta+1}{(2\varepsilon-\zeta-1)}} d\zeta$  - коэффициент интенсивности, соответствующий полю упругих напряжений, определяемому по классической теории.

Так как нагрузка входит в выражение (2.29) линейно, естественно полагать, что при выполнении условий хрупкой прочности ее предельная величина уменьшается в 1,51 раза. Этот вывод хорошо согласуется с опытными данными, так как часто нагрузка, приводящая к хрупкому разрушению сварной конструкции, значительно ниже расчетной величины.

В формулах (2.28) и (2.29) учитывалось только влияние продольных напряжений плоской деформации на НДС сварной конструкции прямоугольных пластин. На самом деле, в зоне шва действуют значительные поперечные нормальные и касательные напряжения, которые необходимо также принимать во внимание. В частности, заметим, что уточненные напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  в сочетании с собственными напряжениями растяжения от сварки, величины которых в ряде случаев достигают предела текучести материала, может привести для элементарного объема в зоне шва к трехосному растяжению напряжениями высокой интенсивности. В результате такого нагружения элементарного объема, даже для пластичных металлов, станет невозможной

сколь угодно значительная пластическая деформация вплоть до возникновения трещины. А поскольку все металлы в обычных условиях статического нагружения ведут себя при развитии трещины как хрупкие, постольку вновь образовавшаяся трещина начнет быстро развиваться, что, в конечном итоге, вызовет хрупкое разрушение сварной конструкции.

Таким образом, на основании изложенных результатов можно утверждать, что НДС прямоугольных пластин необходимо учитывать по уточненной теории при прочностных расчетах мест креплений конструкций с целью более рационального конструктивного оформления соединений и стыков.

## **2.8. Выводы ко второй главе**

1. На основе трехмерных уравнений теории упругости в ортогональной системе координат с помощью вариационного принципа Лагранжа построены двумерные уравнения теории прямоугольных пластин переменной толщины и сформулированы соответствующие граничные условия, количество которых соответствует порядку системы дифференциальных уравнений.

2. Краевая задача для прямоугольной пластины переменной толщины с помощью рядов Фурье приведена к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующих граничных условий.

3. С помощью метода конечных разностей и матричной прогонки получены численные решения сформулированной краевой задачи для различных вариантов изменения толщины пластины и внешней нагрузки.

4. Разработан алгоритм определения НДС прямоугольной пластины, при котором удовлетворяются уравнения равновесия теории упругости во всех внутренних точках пластины и выполняются граничные условия на всей поверхности пластины.

5. Поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, в данной работе получаются одного порядка с максимальными значениями основного (внутреннего) тангенциального напряжения, причем для

более толстых пластины вклад поперечных нормальных напряжений в общее НДС значительно возрастает, этот результат имеет важное значение при расчетах на прочность и долговечность пластин и оболочек из изотропных материалов, а также композиционных материалов при оценке прочности связующего.

6. Показано, что напряжения «погранслои» в зоне локального нагрузки пластины могут существенно отличаться (примерно в 1,5) от аналогичного в зоне жестко заземленного края для этой же пластины.



## ГЛАВА III. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В данной главе приводятся результаты построения уточненной теории изотропных круглых пластин, симметричных относительно срединной плоскости и произвольной толщины в радиальном направлении. Круглые пластины переменной толщины широко применяются в машиностроении, в том числе в авиационной и ракетной отрасли. Поэтому актуальной представляется задача повышения достоверности методов расчета пластин за счет учета трехмерности НДС в зонах его искажения, т.е. соединений, локального нагружения и др., где имеет место НДС типа “погранслои”.

Краевая задача уточненной теории круглых пластин переменной толщины построена на основе трехмерных уравнений теории упругости с помощью вариационного принципа Лагранжа и разложения искомым перемещений по толщине. При определении поперечных нормальных и касательных напряжений используется прямое интегрирование уравнений равновесия трехмерной теории упругости. Такой прием позволяет рассматривать не только тонкие пластины, но и пластины средней толщины. В качестве примера рассматривается расчет НДС круглых изотропных пластин переменной толщины под действием распределенной и локальной нагрузки. Дано сравнение результатов расчета НДС пластины по уточненной и классической теориям.

### 3.1. Построение уравнений уточненной теории

Круглая изотропная пластина с симметричной относительно срединной плоскости переменной толщиной нагружена поперечной распределенной нагрузкой  $q(r, \varphi)$ , отнесена к безразмерной цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  (рис. 3.1). Обозначим через  $a$  и  $b$  - внешний и внутренний радиусы пластины, а через  $2h(r)$  - её переменную толщину. Здесь координаты  $r$ ,  $z$  представляют собой относительные (измеренные в долях 1 м) расстояния по радиусу и толщине пластины. Внешний и внутренний края пластины  $r = a$ ,

$r = b$  могут быть любыми, т.е. свободными, шарнирно опертыми и жестко защемленными.

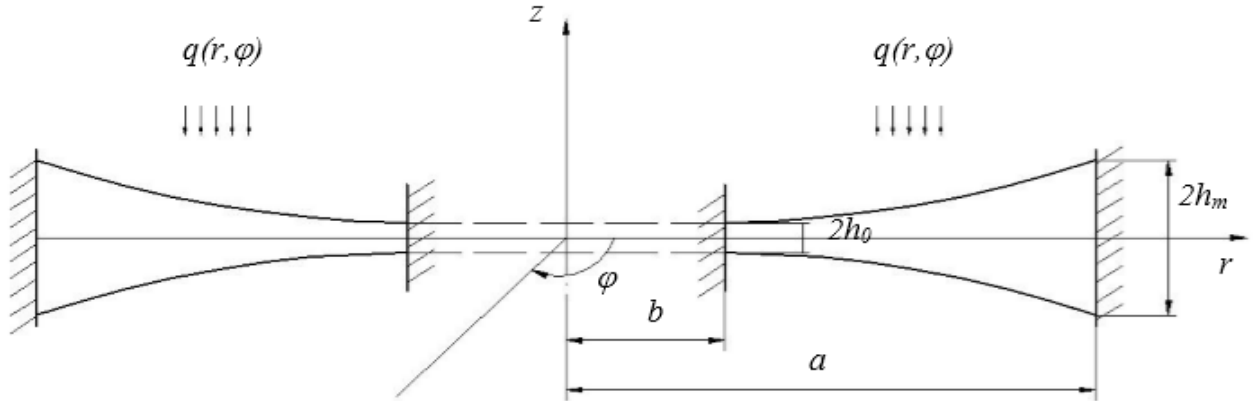


Рис. 3.1. Круглая пластина с отверстием

Для описания НДС пластины используются уравнения трехмерной теории упругости в цилиндрической системе координат. Реализуя подход, рассматриваемый в [17, 18], представим перемещения в виде полиномов

$$\begin{aligned}
 U_1(r, \varphi, z) &= u_0(r, \varphi) + u_1(r, \varphi)z + u_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!} + u_3(r, \varphi)\frac{z^3}{3!}, \\
 U_2(r, \varphi, z) &= v_0(r, \varphi) + v_1(r, \varphi)z + v_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!} + v_3(r, \varphi)\frac{z^3}{3!}, \\
 U_3(r, \varphi, z) &= w_0(r, \varphi) + w_1(r, \varphi)z + w_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!}.
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где функции  $U_1(r, \varphi, z)$ ,  $U_2(r, \varphi, z)$ ,  $U_3(r, \varphi, z)$  соответствуют перемещениям пластины в системе координат  $(r, \varphi, z)$ . Разложение (3.1) эквивалентно повышению на два порядка степени полиномов, аппроксимирующих искомые перемещения по нормальной к срединной плоскости координате, по отношению к классической теории.

Геометрические уравнения трехмерной теории упругости принимаем в виде

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} + U_1\right), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_3}{\partial z}, \\
 \gamma_{r\varphi} &= r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U_2}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial U_1}{\partial \varphi}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial U_3}{\partial r} + \frac{\partial U_1}{\partial z}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r}\frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_2}{\partial z}.
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Подставляя (3.1) в (3.2), получим

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial r} \frac{z^i}{i!}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left( \sum_{i=0}^3 \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} \frac{z^i}{i!} + \sum_{i=0}^3 u_i \frac{z^i}{i!} \right), \quad \varepsilon_z = w_1 + w_2 z, \\ \gamma_{r\varphi} &= \sum_{i=0}^3 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{1}{r} v_i \right) \frac{z^i}{i!}, \\ \gamma_{rz} &= \left( u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \left( u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) z + \left( u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) \frac{z^2}{2!}, \\ \gamma_{\varphi z} &= \left( v_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) + \left( v_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) z + \left( v_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} \right) \frac{z^2}{2!}.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Физические уравнения трехмерной теории упругости для пластины записываются в виде [72]

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (2G_0 + \lambda)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z, \quad \sigma_\varphi = \lambda\varepsilon_r + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z, \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_z, \quad \tau_{r\varphi} = G_0\gamma_{r\varphi}, \quad \tau_{rz} = G_0\gamma_{rz}, \quad \tau_{\varphi z} = G_0\gamma_{\varphi z},\end{aligned}\tag{3.4}$$

где коэффициенты  $G_0$ ,  $\lambda$  представляют собой упругие постоянные изотропного материала пластины

$$G_0 = \frac{E}{2(1+\mu)}, \quad \lambda = \frac{\mu E}{2(1+\mu)(1-2\mu)}.$$

Сформулируем вариационную постановку задачи по аналогии со второй главой. Запишем условие минимума энергетического функционала Лагранжа

$$\delta U - \delta A = 0.\tag{3.5}$$

где вариация потенциальной энергии деформации  $\delta U$  определяется как

$$\delta U = \iiint \left( \sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\varphi \delta \varepsilon_\varphi + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{r\varphi} \delta \gamma_{r\varphi} + \tau_{rz} \delta \gamma_{rz} + \tau_{\varphi z} \delta \gamma_{\varphi z} \right) dr d\varphi dz,$$

и  $\delta A$  - вариация работы внешней нагрузки, находится по формуле

$$\delta A = \iint q(r, \varphi) \delta \left[ w_0(r, \varphi) + w_1(r, \varphi)h + w_2(r, \varphi) \frac{h^2}{2} \right] dr d\varphi.$$

Подставляя в равенство (3.5) разложения для деформаций (3.3), получим

$$\begin{aligned}
\delta U - \delta A = & \int_a^b \int_0^{2\pi} \int_{-h}^h \left[ \sigma_r \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial r} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial r} z + \frac{\partial \delta u_2}{\partial r} \frac{z^2}{2!} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial r} \frac{z^3}{3!} \right) + \right. \\
& + \frac{1}{r} \sigma_\varphi \left( \frac{\partial \delta v_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial \delta v_1}{\partial \varphi} z + \frac{\partial \delta v_2}{\partial \varphi} \frac{z^2}{2!} + \frac{\partial \delta v_3}{\partial \varphi} \frac{z^3}{3!} + \delta u_0 + \delta u_1 z + \delta u_2 \frac{z^2}{2!} + \delta u_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \\
& + \sigma_z (\delta w_1 + \delta w_2 z) + \\
& + \tau_{r\varphi} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \delta u_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial \delta u_1}{\partial \varphi} z + \frac{\partial \delta u_2}{\partial \varphi} \frac{z^2}{2!} + \frac{\partial \delta u_3}{\partial \varphi} \frac{z^3}{3!} \right) + \left( \frac{\partial \delta v_0}{\partial r} + \frac{\partial \delta v_1}{\partial r} z + \right. \right. \\
& + \left. \left. \frac{\partial \delta v_2}{\partial r} \frac{z^2}{2!} + \frac{\partial \delta v_3}{\partial r} \frac{z^3}{3!} \right) - \frac{1}{r} (\delta v_0 + \delta v_1 z + \delta v_2 \frac{z^2}{2!} + \delta v_3 \frac{z^3}{3!}) \right] + \\
& + \tau_{\varphi z} \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial \delta w_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial \delta w_1}{\partial \varphi} z + \frac{\partial \delta w_2}{\partial \varphi} \frac{z^2}{2!} \right) + (\delta v_1 + \delta v_2 z + \delta v_3 \frac{z^2}{2!}) \right] + \\
& + \tau_{rz} (\delta u_1 + \delta u_2 z + \delta u_3 \frac{z^2}{2!} + \frac{\partial \delta w_0}{\partial r} + \frac{\partial \delta w_1}{\partial r} z + \frac{\partial \delta w_2}{\partial r} \frac{z^2}{2!}) - \\
& \left. - (q \delta w_0 + q h \delta w_1 + q \frac{h^2}{2} \delta w_2) \right] dr d\varphi dz, \tag{3.6}
\end{aligned}$$

или после интегрирования по  $z$

$$\begin{aligned}
\delta U - \delta A = & \int_a^b \int_0^{2\pi} \left[ N_r \frac{\partial \delta u_0}{\partial r} + M_r^1 \frac{\partial \delta u_1}{\partial r} + M_r^2 \frac{\partial \delta u_2}{\partial r} + M_r^3 \frac{\partial \delta u_3}{\partial r} + \right. \\
& + \frac{1}{r} (N_\varphi \frac{\partial \delta v_0}{\partial \varphi} + M_\varphi^1 \frac{\partial \delta v_1}{\partial \varphi} + M_\varphi^2 \frac{\partial \delta v_2}{\partial \varphi} + M_\varphi^3 \frac{\partial \delta v_3}{\partial \varphi} + N_\varphi \delta u_0 + M_\varphi^1 \delta u_1 + \\
& + M_\varphi^2 \delta u_2 + M_\varphi^3 \delta u_3) + H_z^1 \delta w_1 + H_z^2 \delta w_2 + \\
& + N_{r\varphi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \delta u_0}{\partial \varphi} + \frac{\partial \delta v_0}{\partial r} - \frac{1}{r} \delta v_0 \right) + M_{r\varphi}^1 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \delta u_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \delta v_1}{\partial r} - \frac{1}{r} \delta v_1 \right) + \\
& + M_{r\varphi}^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \delta u_2}{\partial \varphi} + \frac{\partial \delta v_2}{\partial r} - \frac{1}{r} \delta v_2 \right) + M_{r\varphi}^3 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \delta u_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial \delta v_3}{\partial r} - \frac{1}{r} \delta v_3 \right) + \\
& + Q_{\varphi z} \left( \delta v_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta w_0}{\partial \varphi} \right) + M_{\varphi z}^1 \left( \delta v_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta w_1}{\partial \varphi} \right) + M_{\varphi z}^2 \left( \delta v_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta w_2}{\partial \varphi} \right) + \\
& + Q_{rz} \left( \delta u_1 + \frac{\partial \delta w_0}{\partial r} \right) + M_{rz}^1 \left( \delta u_2 + \frac{\partial \delta w_1}{\partial r} \right) + M_{rz}^2 \left( \delta u_3 + \frac{\partial \delta w_2}{\partial r} \right) \left. \right] dr d\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
(N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}, Q_{rz}, Q_{\varphi z}) &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}) dz, \\
(M_r^i, M_\varphi^i, M_{r\varphi}^i, M_{rz}^i, M_{\varphi z}^i) &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}) \frac{z^i}{i!} dz, \\
(H_{rz}^i, H_{\varphi z}^i, H_z^i) &= \int_{-h}^{+h} (\tau_{rz}, \tau_{\varphi z}, \sigma_z) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, \quad p_z^i = qh^i / i!,
\end{aligned}$$

где  $N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}, Q_{rz}, Q_{\varphi z}, M_r^i, M_\varphi^i, M_{r\varphi}^i, M_{rz}^i, M_{\varphi z}^i, H_{rz}^i, H_{\varphi z}^i, H_z^i$  - обобщенные внутренние силовые факторы, физическая интерпретация которых в рамках уточненной теории дана в работах [17, 18].

Следует отметить, что восемь из тринадцати внутренних силовых факторов, а именно  $N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}, Q_{rz}, Q_{\varphi z}, M_r, M_\varphi, M_{r\varphi}$ , аналогичны соответствующим силовым факторам, принятым в классической теории тонких круглых пластин в общем случае нагружения, когда рассматривается изгиб пластины и её плоское напряженное состояние.

Интегрируя (3.6) по частям, после преобразований находим

$$\begin{aligned}
\delta U - \delta A &= \left[ \int_0^{2\pi} (N_r \delta u_0) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial N_r}{\partial r} \delta u_0 dr d\varphi \right] + \\
&+ \left[ \int_0^{2\pi} (M_r^1 \delta u_1) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_r^1}{\partial r} \delta u_1 dr d\varphi \right] + \left[ \int_0^{2\pi} (M_r^2 \delta u_2) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_r^2}{\partial r} \delta u_2 dr d\varphi \right] \\
&+ \left[ \int_0^{2\pi} (M_r^3 \delta u_3) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_r^3}{\partial r} \delta u_3 dr d\varphi \right] + \frac{1}{r} \left[ \int_a^b (N_\varphi \delta v_0) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} \delta v_0 dr d\varphi \right] + \\
&+ \frac{1}{r} \left[ \int_a^b (M_\varphi^1 \delta v_1) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_\varphi^1}{\partial \varphi} \delta v_1 dr d\varphi \right] + \frac{1}{r} \left[ \int_a^b (M_\varphi^2 \delta v_1) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_\varphi^2}{\partial \varphi} \delta v_2 dr d\varphi \right] + \\
&+ \frac{1}{r} \left[ \int_a^b (M_\varphi^3 \delta v_1) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_\varphi^3}{\partial \varphi} \delta v_3 dr d\varphi \right] + \frac{1}{r} \int_a^b \int_0^{2\pi} N_\varphi \delta u_0 dr d\varphi + \\
&+ \frac{1}{r} \int_a^b \int_0^{2\pi} M_\varphi^1 \delta u_1 dr d\varphi + \frac{1}{r} \int_a^b \int_0^{2\pi} M_\varphi^2 \delta u_2 dr d\varphi + \frac{1}{r} \int_a^b \int_0^{2\pi} M_\varphi^3 \delta u_3 dr d\varphi + \\
&+ \int_a^b \int_0^{2\pi} H_z^1 \delta w_1 dr d\varphi + \int_a^b \int_0^{2\pi} H_z^2 \delta w_2 dr d\varphi +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{r} \left[ \int_a^b (N_{r\varphi} \delta u_0) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial \varphi} \delta u_0 dr d\varphi \right] + \left[ \int_0^{2\pi} (N_{r\varphi} \delta v_0) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} \delta v_0 dr d\varphi \right] + \\
& + \frac{1}{r} \int_a^b \int_0^{2\pi} N_{r\varphi} \delta v_0 dr d\varphi + \frac{1}{r} \left[ \int_a^b (M_{r\varphi}^1 \delta u_1) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_{r\varphi}^1}{\partial \varphi} \delta u_1 dr d\varphi \right] + \\
& + \left[ \int_0^{2\pi} (M_{r\varphi}^1 \delta v_1) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_{r\varphi}^1}{\partial r} \delta v_1 dr d\varphi \right] + \frac{1}{r} \int_a^b \int_0^{2\pi} M_{r\varphi}^1 \delta v_1 dr d\varphi + \\
& + \frac{1}{r} \left[ \int_a^b (M_{r\varphi}^2 \delta u_2) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_{r\varphi}^2}{\partial \varphi} \delta u_2 dr d\varphi \right] + \left[ \int_0^{2\pi} (M_{r\varphi}^2 \delta v_2) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_{r\varphi}^2}{\partial r} \delta v_2 dr d\varphi \right] + \\
& + \frac{1}{r} \int_a^b \int_0^{2\pi} M_{r\varphi}^2 \delta v_2 dr d\varphi + \frac{1}{r} \left[ \int_a^b (M_{r\varphi}^3 \delta u_3) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} dr - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_{r\varphi}^3}{\partial \varphi} \delta u_3 dr d\varphi \right] + \\
& + \left[ \int_0^{2\pi} (M_{r\varphi}^3 \delta v_3) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_{r\varphi}^3}{\partial r} \delta v_3 dr d\varphi \right] + \frac{1}{r} \int_a^b \int_0^{2\pi} M_{r\varphi}^3 \delta v_3 dr d\varphi + \\
& + \int_a^b \int_0^{2\pi} H_{\varphi z}^1 \delta v_1 dr d\varphi + \int_a^b \int_0^{2\pi} M_{\varphi z}^1 \delta v_2 dr d\varphi + \int_a^b \int_0^{2\pi} M_{\varphi z}^2 \delta v_3 dr d\varphi + \tag{3.7} \\
& + \int_a^b \int_0^{2\pi} H_{rz}^1 \delta u_1 dr d\varphi + \int_a^b \int_0^{2\pi} M_{rz}^1 \delta u_2 dr d\varphi + \int_a^b \int_0^{2\pi} M_{rz}^2 \delta u_3 dr d\varphi + \\
& + \frac{1}{r} \left[ \int_0^{2\pi} (Q_{\varphi z} \delta w_0) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial Q_{\varphi z}}{\partial \varphi} \delta w_0 dr d\varphi \right] + \\
& + \frac{1}{r} \left[ \int_0^{2\pi} (M_{\varphi z}^1 \delta w_1) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_{\varphi z}^1}{\partial \varphi} \delta w_1 dr d\varphi \right] + \\
& + \frac{1}{r} \left[ \int_0^{2\pi} (M_{\varphi z}^2 \delta w_2) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_{\varphi z}^2}{\partial \varphi} \delta w_2 dr d\varphi \right] + \\
& + \left[ \int_0^{2\pi} (Q_{rz} \delta w_0) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial Q_{rz}}{\partial r} \delta w_0 dr d\varphi \right] + \left[ \int_0^{2\pi} (M_{rz}^1 \delta w_1) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_{rz}^1}{\partial r} \delta w_1 dr d\varphi \right] + \\
& + \left[ \int_0^{2\pi} (M_{rz}^2 \delta w_2) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{\partial M_{rz}^2}{\partial r} \delta w_2 dr d\varphi \right].
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки в условии (3.7), находим

$$\begin{aligned}
\delta U - \delta A = & \int_0^{2\pi} (N_r \delta u_0) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \int_0^{2\pi} (M_r^1 \delta u_1) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \int_0^{2\pi} (M_r^2 \delta u_2) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \\
& + \int_0^{2\pi} (M_r^3 \delta u_3) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (N_\varphi \delta v_0) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (M_\varphi^1 \delta v_1) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (M_\varphi^2 \delta v_2) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \\
& + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (M_\varphi^3 \delta v_3) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \int_0^{2\pi} (N_{r\varphi} \delta v_0) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \int_0^{2\pi} (M_{r\varphi}^1 \delta v_1) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \\
& + \int_0^{2\pi} (M_{r\varphi}^2 \delta v_2) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \int_0^{2\pi} (M_{r\varphi}^3 \delta v_3) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (N_{r\varphi} \delta u_0) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \\
& + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (M_{r\varphi}^1 \delta u_1) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (M_{r\varphi}^2 \delta u_2) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (M_{r\varphi}^3 \delta u_3) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \\
& + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (Q_{\varphi z} \delta w_0) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (M_{\varphi z}^1 \delta w_1) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} (M_{\varphi z}^2 \delta w_2) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \\
& + \int_0^{2\pi} (Q_{rz} \delta w_0) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \int_0^{2\pi} (M_{rz}^1 \delta w_1) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \int_0^{2\pi} (M_{rz}^2 \delta w_2) \Big|_{r=a}^{r=b} d\varphi + \tag{3.8} \\
& - \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} N_\varphi \right) \delta u_0 dr d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial M_r^1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}^1}{\partial \varphi} - Q_{rz} - \frac{1}{r} M_\varphi^1 \right) \delta u_1 dr d\varphi - \\
& - \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial M_r^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}^2}{\partial \varphi} - M_{rz}^1 - \frac{1}{r} M_\varphi^2 \right) \delta u_2 dr d\varphi - \\
& - \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial M_r^3}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}^3}{\partial \varphi} - M_{rz}^2 - \frac{1}{r} M_\varphi^3 \right) \delta u_3 dr d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{r\varphi} \right) \delta v_0 dr d\varphi - \\
& - \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi^1}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{r\varphi}^1}{\partial r} + \frac{1}{r} M_{r\varphi}^1 - Q_{\varphi z} \right) \delta v_1 dr d\varphi - \\
& - \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi^2}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{r\varphi}^2}{\partial r} + \frac{1}{r} M_{r\varphi}^2 - M_{\varphi z}^1 \right) \delta v_2 dr d\varphi - \\
& - \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi^3}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{r\varphi}^3}{\partial r} + \frac{1}{r} M_{r\varphi}^3 - M_{\varphi z}^2 \right) \delta v_3 dr d\varphi - \\
& - \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial Q_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{\varphi z}}{\partial \varphi} - p_z^0 \right) \delta w_0 dr d\varphi - \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial M_{rz}^1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi z}^1}{\partial \varphi} - H_z^1 - p_z^1 \right) \delta w_1 dr d\varphi - \\
& - \int_a^b \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial M_{rz}^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi z}^2}{\partial \varphi} - H_z^2 - p_z^2 \right) \delta w_2 dr d\varphi = 0.
\end{aligned}$$

Приравнивая нулю в равенстве (3.8) выражения, стоящие перед независимыми вариациями перемещений, получим 11 нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Система головных уравнений уточненной теории рассматриваемых круглых пластин переменной толщины представлена в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} N_\varphi &= 0, \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{r\varphi} &= 0, \\
 \frac{\partial Q_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{\varphi z}}{\partial \varphi} &= p_z^0, \\
 \frac{\partial M_r^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}^i}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} M_\varphi^i - H_{rz}^i &= 0, i = 1, 2, 3, \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi^i}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{r\varphi}^i}{\partial r} + \frac{1}{r} M_{r\varphi}^i - H_{\varphi z}^i &= 0, i = 1, 2, 3 \\
 \frac{\partial M_{rz}^1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi z}^1}{\partial \varphi} - H_z^1 &= p_z^1, \\
 \frac{\partial M_{rz}^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi z}^2}{\partial \varphi} - H_z^2 &= p_z^2.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

Таким образом, 11 уравнений (3.9) представляют собой полную систему двумерных уравнений, содержащих 11 обобщенных перемещений  $u_i, v_i, w_k$ ,  $i = \overline{0..3}; k = \overline{0..2}$ . С помощью соотношений (3.1), (3.3), (3.4), (3.6) уравнения (3.9) могут быть выражены через искомые функции перемещений  $u_i, v_i, w_k$  и тогда будут иметь общий 22-й порядок.

*Определение краевых условий.*

В силу произвольности возможных перемещений условие (3.8) выполняется лишь в случае равенства нулю каждого из входящих в него слагаемых, т.е. в случае равенства нулю выражений, стоящих в круглых скобках, либо составляющих возможных перемещений. В результате для каждого края пластины, совпадающего с координатными линиями, находятся



11 граничных условия. Сформулируем краевые условия при стандартном закреплении краев пластины, воспользовавшись стандартными краевыми условиями трехмерной теории упругости.

Соответствующие граничные условия на краях  $r = a$  и  $r = b$  представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_r = \bar{N}_r \vee u_0 = \bar{u}_0, \quad N_{r\varphi} = \bar{N}_{r\varphi} \vee v_0 = \bar{v}_0, \quad Q_{rz} = \bar{Q}_{rz} \vee w_0 = \bar{w}_0, \\ M_r^i = \bar{M}_r^i \vee u_i = \bar{u}_i, \quad M_{r\varphi}^i = \bar{M}_{r\varphi}^i \vee v_i = \bar{v}_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ M_{rz}^i = \bar{M}_{rz}^i \vee w_i = \bar{w}_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где верхней чертой обозначены значения внешних силовых факторов, действующих по боковым граням пластины.

Очевидно, что краевые условия (3.10) охватывают все разнообразие возможных условий закрепления круглой пластины, а их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений (3.9).

*Алгоритм решения задачи.* Из уравнений (3.9) с учетом выражений (3.1), (3.2), (3.3), (3.6) находим систему дифференциальных уравнений в частных производных 22-го порядка относительно 11 обобщенных перемещений  $u_i, v_i, w_k, i = \overline{0..3}; k = \overline{0..2}$ . Подстановкой найденных перемещений в формулы (3.3) находятся деформации круглой пластины. С помощью соотношений (3.4) получим выражения тангенциальных напряжений пластины. Проинтегрировав трехмерные уравнения равновесия теории упругости пластины по толщине в интервале от  $-h$  до  $z$ , находим выражения, определяющие поперечные напряжения

$$\begin{aligned} \tau_{rz} = - \int_{-h}^z \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) dz, \quad \tau_{\varphi z} = - \int_{-h}^z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} \right) dz, \\ \sigma_z = - \int_{-h}^z \left( \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \sigma_\varphi \right) dz. \end{aligned}$$

С помощью данного алгоритма, построена математическая модель НДС круглых пластин по толщине. При этом удовлетворяются уравнения равновесия

теории упругости во всех внутренних точках пластины и выполняются краевые условия на всей поверхности пластины.

### 3.2. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Поставляя формулы “деформации-смещения” (3.3) в физических уравнений (3.4), получим

$$\begin{aligned}
 \sigma_r &= (2G_0 + \lambda) \frac{\partial}{\partial r} \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \lambda \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) \right] + \lambda (w_1 + w_2 z), \\
 \sigma_\varphi &= \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) + (2G_0 + \lambda) \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) \right] + \lambda (w_1 + w_2 z), \\
 \sigma_z &= \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \lambda \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) \right] + (2G_0 + \lambda)(w_1 + w_2 z), \tag{3.11}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tau_{r\varphi} &= (2G_0 + \lambda) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{r^2} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) \right], \\
 \tau_{rz} &= \frac{1}{2} (2G_0 + \lambda) \left[ \left( u_1 + u_2 z + u_3 \frac{z^2}{2!} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( w_0 + w_1 z + w_2 \frac{z^2}{2!} \right) \right], \\
 \tau_{\varphi z} &= \frac{1}{2} (2G_0 + \lambda) \left[ \left( v_1 + v_2 z + v_3 \frac{z^2}{2!} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( w_0 + w_1 z + w_2 \frac{z^2}{2!} \right) \right].
 \end{aligned}$$

Подставляя (3.11) в (3.9), получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
& (K_1^{u00} + K_1^{u01} \frac{\partial}{\partial r} + K_1^{u011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_1^{u022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_0 + K_1^{v02} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_0 + K_1^{v012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_0 + \\
& + (K_1^{u20} + K_1^{u21} \frac{\partial}{\partial r} + K_1^{u211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_1^{u222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_2 + K_1^{v22} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_2 + K_1^{v212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_2 + \\
& + K_1^{w10} w_1 + K_1^{w11} \frac{\partial}{\partial r} w_1 + K_1^{q13p0} \cdot q_{13p} + K_1^{q13m0} \cdot q_{13m} = 0, \\
& (K_2^{u10} + K_2^{u11} \frac{\partial}{\partial r} + K_2^{u111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_2^{u122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_1 + K_2^{v12} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_1 + K_2^{v112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_1 + \\
& + (K_2^{u30} + K_2^{u31} \frac{\partial}{\partial r} + K_2^{u311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_2^{u322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_3 + K_2^{v32} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_3 + K_2^{v312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_3 + \\
& + K_2^{w20} w_2 + K_2^{w21} \frac{\partial}{\partial r} w_2 + K_2^{w01} \frac{\partial}{\partial r} w_0 = 0, \\
& (K_3^{u00} + K_3^{u01} \frac{\partial}{\partial r} + K_3^{u011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_3^{u022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_0 + K_3^{v02} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_0 + K_3^{v012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_0 + \\
& + (K_3^{u20} + K_3^{u21} \frac{\partial}{\partial r} + K_3^{u211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_3^{u222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_2 + K_3^{v22} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_2 + K_3^{v212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_2 + \\
& + K_3^{w20} w_1 + K_3^{w21} \frac{\partial}{\partial r} w_1 = 0, \\
& (K_4^{u10} + K_4^{u11} \frac{\partial}{\partial r} + K_4^{u111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_4^{u122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_1 + K_4^{v12} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_1 + K_4^{v112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_1 + \\
& + (K_4^{u30} + K_4^{u31} \frac{\partial}{\partial r} + K_4^{u311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_4^{u322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_3 + K_4^{v32} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_3 + K_4^{v312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_3 + \\
& + K_4^{w20} w_2 + K_4^{w21} \frac{\partial}{\partial r} w_2 + K_4^{w01} \frac{\partial}{\partial r} w_0 = 0, \\
& (K_5^{u02} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_5^{u012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi})u_0 + K_5^{v011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_0 + K_5^{v022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_0 + \\
& + (K_5^{u22} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_5^{u212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi})u_2 + K_5^{v211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_2 + K_5^{v222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_2 + K_5^{w12} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_1 = 0, \\
& (K_6^{u12} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_6^{u112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi})u_1 + K_6^{v10} v_1 + K_6^{v111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_1 + K_6^{v122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_1 + \\
& + (K_6^{u32} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_6^{u312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi})u_3 + K_6^{v30} v_3 + K_6^{v311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_3 + K_6^{v322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_3 + \\
& + K_6^{w02} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_0 + K_6^{w22} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_2 = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (K_7^{u02} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_7^{u012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_0 + K_7^{v011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_0 + K_7^{v022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_0 + \\
& + (K_7^{u22} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_5^{u212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_2 + K_7^{v20} v_2 + K_7^{v211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_2 + K_7^{v222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_2 + K_7^{w12} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_1 = 0, \\
& (K_8^{u12} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_8^{u112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_1 + K_8^{v10} v_1 + K_8^{v111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_1 + K_8^{v122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_1 + \\
& + (K_8^{u32} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_8^{u312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_3 + K_8^{v30} v_3 + K_8^{v311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_3 + K_8^{v322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_3 + \quad (3.12) \\
& + K_8^{w02} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_0 + K_8^{w22} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_2 = 0, \\
& (K_9^{w011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_9^{w022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_0 + (K_9^{w211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_9^{w222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_2 + \\
& + K_9^{u11} \frac{\partial}{\partial r} u_1 + K_9^{v12} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_1 + K_9^{u31} \frac{\partial}{\partial r} u_3 + K_9^{v32} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_3 + K_9^{q33p0} \cdot q_{33p} + K_9^{q33m0} \cdot q_{33m} = 0, \\
& (K_{10}^{w10} + K_{10}^{w111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{10}^{w122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_1 + (K_{10}^{w211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{10}^{w222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_2 + K_{10}^{u00} u_0 + \\
& + K_{10}^{u01} \frac{\partial}{\partial r} u_0 + K_{10}^{v02} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_0 + K_{10}^{u20} u_2 + K_{10}^{u21} \frac{\partial}{\partial r} u_2 + K_{10}^{v22} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_2 + \\
& + K_{10}^{q33p0} \cdot q_{33p} + K_{10}^{q33m0} \cdot q_{33m} = 0, \\
& (K_{11}^{w011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{11}^{w022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_0 + (K_{11}^{w20} + K_{11}^{w211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{11}^{w222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_2 + K_{11}^{u10} u_1 + \\
& + K_{11}^{u11} \frac{\partial}{\partial r} u_1 + K_{11}^{v12} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_1 + K_{11}^{u30} u_3 + K_{11}^{u31} \frac{\partial}{\partial r} u_3 + K_{11}^{v32} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_3 + \\
& + K_{11}^{q33p0} \cdot q_{33p} + K_{11}^{q33m0} \cdot q_{33m} = 0.
\end{aligned}$$

Здесь применяются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
K_1^{u00} &= \frac{2Eh}{r^2(\mu-1)}, K_1^{u01} = 0, K_1^{u011} = -\frac{2Eh}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_1^{u022} = \frac{2Eh}{r^2(\mu+1)}, \\
K_1^{u20} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu-1)}, K_1^{u222} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu+1)}, K_1^{u211} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_1^{u21} = 0, \\
K_1^{v02} &= \frac{4Eh}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, K_1^{v012} = -\frac{2Eh}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_1^{v212} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_1^{v21} &= \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, K_1^{w10} = \frac{2Eh\mu}{r(1+\mu)(-1+\mu)}, K_1^{w11} = -\frac{2Eh\mu}{(1+\mu)(-1+\mu)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_2^{u31} &= 0, K_2^{w21} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(3\mu-1)}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_2^{v312} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_2^{u311} &= -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{(\mu+1)(-\mu-1)}, K_2^{u111} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_2^{v32} = \frac{2}{15} \frac{Eh^5}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_2^{u30} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^3(-5\mu r^2 + h^2\mu + h^2 + 5r^2)}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, K_2^{u322} = \frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r^2(1+\mu)}, K_2^{u11} = 0, \\
K_2^{v112} &= -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_2^{w20} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_2^{u10} &= \frac{2}{3} \frac{Eh(-3\mu r^2 + h^2\mu + h^2 + 3r^2)}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, K_2^{w01} = -\frac{2Eh}{\mu+1}, \\
K_2^{v12} &= \frac{4}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, K_2^{u122} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu+1)}, \\
K_3^{u00} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu-1)}, K_3^{w10} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_3^{u011} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_3^{v012} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_3^{u222} = \frac{1}{10} \frac{Eh^5}{r^2(1+\mu)}, K_3^{w11} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(3\mu-2)}{(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_3^{u211} &= -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_3^{v212} = -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_3^{u022} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu+1)}, \\
K_3^{v02} &= \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r^2(1+\mu)(-1+\mu)}, K_3^{u21} = 0, K_3^{u01} = 0, K_3^{v22} = \frac{1}{5} \frac{Eh^5}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_3^{u20} &= \frac{1}{30} \frac{Eh^3(3h^2\mu - 20\mu r^2 + 3h^2 - 20r^2)}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_4^{u10} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^3(5r^2 - 5\mu r^2 + h^2\mu + h^2)}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, K_4^{u30} = \frac{1}{630} \frac{Eh^5(5h^2 - 63\mu r^2 + 63r^2 + 5h^2\mu)}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_4^{w20} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^5\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_4^{v312} = -\frac{1}{126} \frac{Eh^7}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_4^{u322} = \frac{1}{126} \frac{Eh^7}{r^2(\mu+1)}, \\
K_4^{v112} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^5(\mu r - r - \mu)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_4^{u122} = \frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r^2(\mu+1)}, K_4^{u111} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_4^{u311} &= -\frac{1}{126} \frac{Eh^7}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_4^{w21} = -\frac{1}{30} \frac{Eh^5(5\mu-3)}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_4^{w01} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(\mu+1)}, \\
K_4^{v32} &= \frac{1}{63} \frac{Eh^7}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, K_4^{v12} = \frac{2}{15} \frac{Eh^5}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, K_4^{u11} = 0, K_4^{u31} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_5^{u212} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(\mu r - \mu + 1)}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_5^{v211} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{\mu + 1}, K_5^{u22} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_5^{v222} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_5^{u012} = -\frac{2Eh(\mu r - \mu + 1)}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_5^{v011} = \frac{2Eh}{\mu + 1}, \\
K_5^{w12} &= -\frac{2Eh\mu}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_5^{u02} = -\frac{2Eh}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_5^{v022} = -\frac{2Eh}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_6^{u312} &= -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_6^{v311} = \frac{1}{15} \frac{Eh^5}{\mu + 1}, K_6^{u32} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_6^{v322} &= -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_6^{v30} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{\mu + 1}, K_6^{u112} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_6^{v111} &= \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{\mu + 1}, K_6^{w22} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(3\mu - 1)}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_6^{u12} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_6^{v122} &= -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_6^{v10} = -\frac{2Eh}{\mu + 1}, K_6^{w02} = -\frac{2Eh}{r(\mu + 1)}, \\
K_7^{u212} &= -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_7^{v211} = \frac{1}{10} \frac{Eh^5}{\mu + 1}, K_7^{u222} = -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_7^{u22} &= -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_7^{v011} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{\mu + 1}, K_7^{w12} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(3\mu - 2)}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_7^{v20} &= -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{\mu + 1}, K_7^{u12} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_7^{v022} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_7^{u02} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_8^{u312} &= -\frac{1}{126} \frac{Eh^7}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_8^{v311} = \frac{1}{126} \frac{Eh^7}{\mu + 1}, K_8^{u32} = -\frac{1}{126} \frac{Eh^7}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_8^{v322} &= -\frac{1}{126} \frac{Eh^7}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_8^{v30} = -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{\mu + 1}, K_8^{u112} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_8^{v111} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^5}{\mu + 1}, K_8^{w22} = -\frac{1}{30} \frac{Eh^5(5\mu - 3)}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_8^{u12} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_8^{v122} &= -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_8^{v10} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{\mu + 1}, K_8^{w02} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(\mu + 1)r}, \\
K_9^{u31} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1 + \mu}, K_9^{w211} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1 + \mu}, K_9^{v32} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(1 + \mu)r}, K_9^{w222} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(1 + \mu)r^2}, K_9^{u11} = \frac{2Eh}{1 + \mu}, \\
K_9^{v12} &= \frac{2Eh}{(1 + \mu)r}, K_9^{w011} = \frac{2Eh}{1 + \mu}, K_9^{w022} = \frac{2Eh}{(1 + \mu)r^2}, K_9^{q33p} = 1, K_9^{q33m} = -1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{10}^{u21} &= \frac{1}{3} \frac{2Eh^3(3\mu-2)}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_{10}^{w111} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{\mu+1}, K_{10}^{v22} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3(3\mu-2)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_{10}^{u20} &= \frac{1}{3} \frac{2Eh^3\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_{10}^{w122} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu+1)}, K_{10}^{v02} = \frac{2Eh\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_{10}^{u00} &= \frac{2Eh\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_{10}^{u01} = \frac{2Eh\mu}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_{10}^{w10} = \frac{2Eh\mu}{(\mu+1)(\mu-1)}, \\
&K_{10}^{q33p0} = h, K_{10}^{q33m0} = h, \\
K_{11}^{u31} &= \frac{1}{30} \frac{Eh^5(5\mu-3)}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_{11}^{w211} = \frac{1}{10} \frac{Eh^5}{\mu+1}, K_{11}^{v32} = \frac{1}{30} \frac{Eh^5(5\mu-3)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_{11}^{u30} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^5\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_{11}^{u11} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3(3\mu-1)}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_{11}^{w222} = \frac{1}{10} \frac{Eh^5}{r^2(\mu+1)}, \\
K_{11}^{w20} &= \frac{2}{3} \frac{Eh^3\mu}{(\mu+1)(\mu-1)}, K_{11}^{w011} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(\mu+1)}, K_{11}^{v12} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3(3\mu-1)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_{11}^{u10} &= \frac{2}{3} \frac{Eh^3\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, K_{11}^{w022} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r^2(1+\mu)}, K_{11}^{q33p0} = \frac{1}{2} h^2, K_{11}^{q33m0} = -\frac{1}{2} h^2.
\end{aligned}$$

Граничные условия (3.10) на краях  $r=a$  и  $r=b$  можно представить в виде

$$\begin{aligned}
u_0 &= \overline{u}_0 \vee -\frac{1}{3} \frac{Eh}{r(\mu^2-1)} (h^2 r \frac{\partial u_2}{\partial r} + h^2 \mu \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + h^2 \mu u_2 + 6r \frac{\partial u_0}{\partial r} + 6\mu \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \\
&+ 6\mu u_0 + 6\mu r w_1) = \overline{N}_r, \\
v_0 &= \overline{v}_0 \vee \frac{1}{3} \frac{Eh}{r(\mu+1)} (h^2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + h^2 \frac{\partial v_2}{\partial r} - h^2 v_2 + 6 \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} + 6 \frac{\partial v_0}{\partial r} - 6v_0) = \overline{N}_{r\varphi}, \\
w_0 &= \overline{w}_0 \vee \frac{1}{3} \frac{Eh}{\mu+1} (h^2 u_3 + h^2 \frac{\partial w_2}{\partial r} + 6u_1 + 6 \frac{\partial w_0}{\partial r}) = \overline{Q}_{rz}, \\
u_1 &= \overline{u}_1 \vee -\frac{1}{15} \frac{Eh^3}{r(\mu^2-1)} (h^2 r \frac{\partial u_3}{\partial r} + h^2 \mu \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} + h^2 \mu u_3 + 10r \frac{\partial u_1}{\partial r} + 10\mu \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \\
&+ 10\mu u_1 + 10r\mu w_2) = \overline{M}_r^1, \\
u_2 &= \overline{u}_2 \vee -\frac{1}{30} \frac{Eh^3}{r(\mu^2-1)} (3h^2 r \frac{\partial u_2}{\partial r} + 3h^2 \mu \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + 3h^2 \mu u_2 + \\
&+ 10r \frac{\partial u_0}{\partial r} + 10\mu \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + 10\mu u_0 + 10r\mu w_1) = \overline{M}_r^2,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

$$\begin{aligned}
u_3 = \overline{u_3} &\vee -\frac{1}{630} \frac{Eh^5}{r(\mu^2-1)} \left( 5h^2 r \frac{\partial u_3}{\partial r} + 5h^2 \mu \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} + 5h^2 \mu u_3 + 42r \frac{\partial u_1}{\partial r} + 42\mu \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \right. \\
&\left. + 42\mu u_1 + 42\mu w_2 \right) = \overline{M_r^3}, \\
v_1 = \overline{v_1} &\vee \frac{1}{15} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)} \left( h^2 \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + h^2 \frac{\partial v_3}{\partial r} - h^2 v_3 + 10 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + 10 \frac{\partial v_1}{\partial r} - 10v_1 \right) = \overline{M_{r\varphi}^1}, \\
v_2 = \overline{v_2} &\vee \frac{1}{30} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)} \left( 3h^2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + 3h^2 \frac{\partial v_2}{\partial r} - 3h^2 v_2 + 10 \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} + 10 \frac{\partial v_0}{\partial r} - 10v_0 \right) = \overline{M_{r\varphi}^2}, \\
v_3 = \overline{v_3} &\vee \frac{1}{630} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)} \left( 5h^2 \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + 5h^2 \frac{\partial v_3}{\partial r} - 5h^2 v_3 + 42 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + 42 \frac{\partial v_1}{\partial r} - 42v_1 \right) = \overline{M_{r\varphi}^3}, \\
w_1 = \overline{w_1} &\vee \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{\mu+1} \left( u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) = \overline{M_{rz}^1}, \\
w_2 = \overline{w_2} &\vee \frac{1}{30} \frac{Eh^3}{\mu+1} \left( 3h^2 u_3 + 3h^2 \frac{\partial w_2}{\partial r} + 10u_1 + 10 \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) = \overline{M_{rz}^2},
\end{aligned}$$

Очевидно, что граничные условия (3.13) охватывают все разнообразие возможных условий закрепления круглой пластины, а их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений в частных производных (3.12).

Сформулируем граничные условия пластины на краях  $r=a$  и  $r=b$ , воспользовавшись стандартными условиями трехмерной теории упругости.

свободный край

$$N_r = N_{r\varphi} = M_r^i = M_{r\varphi}^i = Q_{rz} = M_{rz}^j = 0, \quad i=1,2,3, j=1,2, \quad (3.14a)$$

шарнирно опертый край

$$N_r = N_{r\varphi} = M_r^i = M_{r\varphi}^i = Q_{rz} = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2, \quad (3.14б)$$

или  $N_r = M_r^i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2,$

жестко защемленный край

$$u_0 = u_i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2, \quad (3.14в)$$

или  $u_0 = u_i = N_{r\varphi} = M_{r\varphi}^i = w_j = 0, \quad i=1,2,3, j=0,1,2,$



Далее полагаем, что пластина на рис. 3.1 жестко закреплена на краях  $r = a$  и  $r = b$ . Тогда разложим нагрузку и перемещения в ряды по тригонометрическим функциям вида

$$q(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(r) \sin(m\varphi), \quad u_i(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{im}(r) \sin(m\varphi), \quad (3.15)$$

$$v_i(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} V_{im}(r) \cos(m\varphi), \quad w_j(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{jm}(r) \sin(m\varphi), \quad i = \overline{0, 3}, \quad j = \overline{0, 2}.$$

После подстановки разложений (3.15) в уравнения (3.12) и граничные условия (3.14), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $U_{im}$ ,  $V_{im}$ ,  $W_{jm}$ ,  $i = \overline{0, 3}$ ,  $j = \overline{0, 2}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots$  и соответствующие граничные условия. В результате система дифференциальных уравнений равновесия пластины (3.12) представляется как

$$\begin{aligned} & \left( K_1^{u00} + K_1^{u01} \frac{d}{dr} + K_1^{u011} \frac{d^2}{dr^2} - K_1^{u022} \cdot m^2 \right) U_{0m}(r) + \\ & + \left( K_1^{u20} + K_1^{u21} \frac{d}{dr} + K_1^{u211} \frac{d^2}{dr^2} - K_1^{u222} \cdot m^2 \right) U_{2m}(r) - \\ & - m(K_1^{v02} + K_1^{v012} \frac{d}{dr}) V_{0m}(r) - m(K_1^{v22} + K_1^{v212} \frac{d}{dr}) V_{2m}(r) + \\ & + (K_1^{w10} + K_1^{w11} \frac{d}{dr}) W_{1m}(r) = 0, \\ & \left( K_2^{u10} + K_2^{u11} \frac{d}{dr} + K_2^{u111} \frac{d^2}{dr^2} - K_2^{u122} \cdot m^2 \right) U_{1m}(r) + \\ & + \left( K_2^{u30} + K_2^{u31} \frac{d}{dr} + K_2^{u311} \frac{d^2}{dr^2} - K_2^{u322} \cdot m^2 \right) U_{3m}(r) - \\ & - m(K_2^{v12} + K_2^{v112} \frac{d}{dr}) V_{1m}(r) - m(K_2^{v32} + K_2^{v312} \frac{d}{dr}) V_{3m}(r) + \\ & + (K_2^{w20} + K_2^{w21} \frac{d}{dr}) W_{2m}(r) + K_2^{w01} \frac{d}{dr} W_{0m}(r) = 0, \\ & \left( K_3^{u00} + K_3^{u01} \frac{d}{dr} + K_3^{u011} \frac{d^2}{dr^2} - K_3^{u022} \cdot m^2 \right) U_{0m}(r) + \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned}
& + \left( K_3^{u20} + K_3^{u21} \frac{d}{dr} + K_3^{u211} \frac{d^2}{dr^2} - K_3^{u222} \cdot m^2 \right) U_{2m}(r) - \\
& - m \left( K_3^{v02} + K_3^{v012} \frac{d}{dr} \right) V_{0m}(r) - m \left( K_3^{v22} + K_3^{v212} \frac{d}{dr} \right) V_{2m}(r) + \\
& \quad + \left( K_3^{w10} + K_3^{w11} \frac{d}{dr} \right) W_{1m}(r) = 0, \\
& \left( K_4^{u10} + K_4^{u11} \frac{d}{dr} + K_4^{u111} \frac{d^2}{dr^2} - K_4^{u122} \cdot m^2 \right) U_{1m}(r) + \\
& + \left( K_4^{u30} + K_4^{u31} \frac{d}{dr} + K_4^{u311} \frac{d^2}{dr^2} - K_4^{u322} \cdot m^2 \right) U_{3m}(r) - \\
& - m \left( K_4^{v12} + K_4^{v112} \frac{d}{dr} \right) V_{1m}(r) - m \left( K_4^{v32} + K_4^{v312} \frac{d}{dr} \right) V_{3m}(r) + \\
& \quad + S_2 \cdot \left( K_4^{w20} + K_4^{w21} \frac{d}{dr} \right) W_{2m}(r) + K_4^{w01} \frac{d}{dr} W_{0m}(r) = 0, \\
& m \left( K_5^{u02} + K_5^{u012} \frac{d}{dr} \right) U_{0m}(r) + m \left( K_5^{u22} + K_5^{u212} \frac{d}{dr} \right) U_{2m}(r) + \\
& + \left( K_5^{v011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_5^{v022} \right) V_{0m}(r) + \left( K_5^{v211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_5^{v222} \right) V_{2m}(r) + m \cdot K_5^{w12} W_{1m}(r) = 0, \\
& m \left( K_6^{u12} + K_6^{u112} \frac{d}{dr} \right) U_{1m}(r) + m \left( K_6^{u32} + K_6^{u312} \frac{d}{dr} \right) U_{3m}(r) + \\
& + \left( K_6^{v111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_6^{v122} + K_6^{v10} \right) V_{1m}(r) + \left( K_6^{v311} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_6^{v322} + K_6^{v30} \right) V_{3m}(r) + \\
& \quad + m \cdot K_6^{w02} W_{0m}(r) + m \cdot K_6^{w22} W_{2m}(r) = 0, \\
& m \left( K_7^{u02} + K_7^{u012} \frac{d}{dr} \right) U_{0m}(r) + m \left( K_7^{u22} + K_7^{u212} \frac{d}{dr} \right) U_{2m}(r) + \\
& + \left( K_7^{v011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_7^{v022} \right) V_{0m}(r) + \left( K_7^{v211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_7^{v222} + K_7^{v20} \right) V_{2m}(r) \\
& \quad + m \cdot K_7^{w12} W_{1m}(r) = 0, \\
& m \left( K_8^{u12} + K_8^{u112} \frac{d}{dr} \right) U_{1m}(r) + m \left( K_8^{u32} + K_8^{u312} \frac{d}{dr} \right) U_{3m}(r) + \\
& + \left( K_8^{v111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_8^{v122} + K_8^{v10} \right) V_{1m}(r) + \left( K_8^{v311} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_8^{v322} + K_8^{v30} \right) V_{3m}(r) \\
& \quad + m \cdot K_8^{w02} W_{0m}(r) + m \cdot K_8^{w22} W_{2m}(r) = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& K_9^{u11} \frac{d}{dr} U_{1m}(r) + K_9^{u31} \frac{d}{dr} U_{3m}(r) - m \cdot K_9^{v12} V_{1m}(r) - m \cdot K_9^{v32} V_{3m}(r) + \\
& + (K_9^{w011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_9^{w022}) W_{0m}(r) + (K_9^{w211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_9^{w222}) W_{2m}(r) + \\
& \quad + K_9^{Q330} Q_{33m}(r) = 0, \\
& (K_{10}^{u01} \frac{d}{dr} + K_{10}^{u00}) U_{0m}(r) + (K_{10}^{u21} \frac{d}{dr} + K_{10}^{u20}) U_{2m}(r) - m \cdot K_{10}^{v02} V_{0m}(r) - \\
& \quad - m \cdot K_{10}^{v22} V_{2m}(r) + (K_{10}^{w111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{10}^{w122} + K_{10}^{w10}) W_{1m}(r) = 0, \\
& (K_{11}^{u11} \frac{d}{dr} + K_{11}^{u10}) U_{1m}(r) + (K_{11}^{u31} \frac{d}{dr} + K_{11}^{u30}) U_{3m}(r) - m \cdot K_{11}^{v12} V_{1m}(r) - \\
& \quad - m \cdot K_{11}^{v32} V_{3m}(r) + (K_{11}^{w011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{11}^{w022}) W_{0m}(r) + \\
& \quad + (K_{11}^{w211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{11}^{w222} + K_{11}^{w20}) W_{2m}(r) + K_{11}^{Q330} Q_{33m}(r) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $K$  с верхними и нижними индексами обозначают переменные величины, зависящие от геометрических параметров и упругих постоянных изотропного материала пластины. Нижний индекс обозначает номера уравнений, верхний индекс указывает перемещение и порядок производной по радиусу  $r$ . Отметим, что в системе уравнений (3.16) имеют место дополнительные слагаемые, учитывающие влияние изменчивости толщины на НДС круглых пластин.

Для решения системы (3.16) применяем конечно-разностный метод [57, 128]. Аппроксимируя производные 1-ого и 2-ого порядков центральными разностями второго порядка точности, получим систему линейных алгебраических уравнений, матрица одиннадцатого порядка которой решается методом матричной прогонки с помощью программы для ЭВМ.

### 3.3. Алгоритм расчета НДС круглых пластин

В качестве примера рассматривается расчет НДС стальной кольцевой пластины, жестко заземленной по двум краям  $r = a$ ,  $r = b$ . Граничные условия на жестко заземленных краях  $r = a$ ,  $r = b$  в соответствии с равенствами (3.14в) принимают вид

$$U_{im} = V_{im} = W_{jm} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2.$$

Для решения системы уравнений (3.16) воспользуемся методом конечных разностей совместно с методом прогонки. Производные 1-го и 2-го порядков аппроксимируются с помощью отношения центральных разностей со 2-м порядком аппроксимации

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2s} + O(s^2); \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{s^2} + O(s^2).$$

Из уравнений (3.16) после преобразований получим систему

$$\begin{aligned} & \left( \frac{K_1^{u011}}{s^2} - \frac{K_1^{u01}}{2s} \right) u_0^{i-1} + \frac{K_1^{v012}}{2s} v_0^{i-1} - \frac{K_1^{w11}}{2s} w_1^{i-1} - \frac{K_1^{w21}}{2s} w_2^{i-1} + \left( \frac{K_1^{u211}}{s^2} - \frac{K_1^{u21}}{2s} \right) u_2^{i-1} + \\ & + \frac{K_1^{v212}}{2s} v_2^{i-1} + \left( K_1^{u00} - \frac{2K_1^{u011}}{s^2} - K_1^{u022} \right) u_0^i - K_1^{v02} v_0^i + K_1^{w10} w_1^i + \\ & + \left( K_1^{u20} - \frac{2K_1^{u211}}{s^2} - K_1^{u222} \right) u_2^i + \left( \frac{K_1^{u011}}{s^2} + \frac{K_1^{u01}}{2s} \right) u_0^{i+1} - \frac{K_1^{v012}}{2s} v_0^{i+1} + \frac{K_1^{w11}}{2s} w_1^{i+1} + \\ & + \left( \frac{K_1^{u211}}{s^2} + \frac{K_1^{u21}}{2s} \right) u_2^{i+1} - \frac{K_1^{v212}}{2s} v_2^{i+1} = 0, \\ & - \frac{K_2^{w01}}{2s} w_0^{i-1} + \left( \frac{K_2^{u111}}{s^2} - \frac{K_2^{u11}}{2s} \right) u_1^{i-1} + \frac{K_2^{v112}}{2s} v_1^{i-1} - \frac{K_2^{w21}}{2s} w_2^{i-1} + \\ & + \left( \frac{K_2^{u311}}{s^2} - \frac{K_2^{u31}}{2s} \right) u_3^{i-1} + \left( K_2^{u10} - \frac{2K_2^{u111}}{s^2} - K_2^{u122} \right) u_1^i - K_2^{v12} v_1^i + K_2^{w20} w_2^i + \\ & + \left( K_2^{u30} - \frac{2K_2^{u311}}{s^2} - K_2^{u322} \right) u_3^i + K_2^{v32} v_3^i + \frac{K_2^{w01}}{2s} w_0^{i+1} + \left( \frac{K_2^{u111}}{s^2} + \frac{K_2^{u11}}{2s} \right) u_1^{i+1} - \\ & - \frac{K_2^{v112}}{2s} v_1^{i+1} + \frac{K_2^{w21}}{2s} w_2^{i+1} + \left( \frac{K_2^{u311}}{s^2} + \frac{K_2^{u31}}{2s} \right) u_3^{i+1} - \frac{K_2^{v312}}{2s} v_3^{i+1} = 0, \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{K_3^{u011}}{s^2} - \frac{K_3^{u01}}{2s}\right)u_0^{i-1} + \frac{K_3^{v012}}{2s}v_0^{i-1} - \frac{K_3^{w11}}{2s}w_1^{i-1} + \left(\frac{K_3^{u211}}{s^2} - \frac{K_3^{u21}}{2s}\right)u_2^{i-1} + \\
& + \frac{K_3^{v212}}{2s}v_2^{i-1} - \frac{K_3^{w21}}{2s}w_2^{i-1} + (K_3^{u00} - \frac{2K_3^{u011}}{s^2} - K_3^{u022})u_0^i - K_3^{v02}v_0^i + K_3^{w10}w_1^i + \\
& + (K_3^{u20} - \frac{2K_3^{u211}}{s^2} - K_3^{u222})u_2^i - K_3^{v22}v_2^i + \left(\frac{K_3^{u011}}{s^2} + \frac{K_3^{u01}}{2s}\right)u_0^{i+1} - \frac{K_3^{v012}}{2s}v_0^{i+1} + \\
& + \frac{K_3^{w11}}{2s}w_1^{i+1} + \left(\frac{K_3^{u211}}{s^2} + \frac{K_3^{u21}}{2s}\right)u_2^{i+1} - \frac{K_3^{v212}}{2s}v_2^{i+1} = 0, \\
& - \frac{K_4^{w01}}{2s}w_0^{i-1} + \left(\frac{K_4^{u111}}{s^2} - \frac{K_4^{u11}}{2s}\right)u_1^{i-1} + \frac{K_4^{v112}}{2s}v_1^{i-1} - \frac{K_4^{w21}}{2s}w_2^{i-1} + \\
& + \left(\frac{K_4^{u311}}{s^2} - \frac{K_4^{u31}}{2s}\right)u_3^{i-1} + \frac{K_4^{v312}}{2s}v_3^{i-1} + (K_4^{u10} - \frac{2K_4^{u111}}{s^2} - K_4^{u122})u_1^i - K_4^{v12}v_1^i + K_4^{w20}w_2^i + \\
& + (K_4^{u30} - \frac{2K_4^{u311}}{s^2} - K_4^{u322})u_3^i + K_4^{v32}v_3^i + \frac{K_4^{w01}}{2s}w_0^{i+1} + \left(\frac{K_4^{u111}}{s^2} + \frac{K_4^{u11}}{2s}\right)u_1^{i+1} - \\
& - \frac{K_4^{v112}}{2s}v_1^{i+1} + \frac{K_4^{w21}}{2s}w_2^{i+1} + \left(\frac{K_4^{u311}}{s^2} + \frac{K_4^{u31}}{2s}\right)u_3^{i+1} - \frac{K_4^{v312}}{2s}v_3^{i+1} = 0, \\
& - \frac{K_5^{u012}}{2s}u_0^{i-1} + \frac{K_5^{v011}}{s^2}v_0^{i-1} - \frac{K_5^{u212}}{2s}u_2^{i-1} + \frac{K_5^{v211}}{s^2}v_2^{i-1} + \\
& + K_5^{u02}u_0^i - \left(\frac{2K_5^{v011}}{s^2} + K_5^{v022}\right)v_0^i + K_5^{w12}w_1^i + K_5^{u22}u_2^i - \left(\frac{2K_5^{v211}}{s^2} + K_5^{v222}\right)v_2^i + \\
& + \frac{K_5^{u012}}{2s}u_0^{i+1} + \frac{K_5^{v011}}{s^2}v_0^{i+1} + \frac{K_5^{u212}}{2s}u_2^{i+1} + \frac{K_5^{v211}}{s^2}v_2^{i+1} = 0, \\
& - \frac{K_6^{u112}}{2s}u_1^{i-1} + \frac{K_6^{v111}}{s^2}v_1^{i-1} - \frac{K_6^{u312}}{2s}u_3^{i-1} + \frac{K_5^{v311}}{s^2}v_3^{i-1} + \\
& + K_6^{w02}w_0^i + K_6^{u12}u_1^i - \left(\frac{2K_6^{v111}}{s^2} + K_6^{v122} - K_6^{v10}\right)v_1^i + K_6^{w22}w_2^i + K_6^{u32}u_3^i - \\
& - \left(\frac{2K_6^{v311}}{s^2} + K_6^{v322} - K_6^{v30}\right)v_3^i + \frac{K_6^{u112}}{2s}u_1^{i+1} + \frac{K_6^{v111}}{s^2}v_1^{i+1} + \frac{K_6^{u312}}{2s}u_3^{i+1} + \frac{K_6^{v311}}{s^2}v_3^{i+1} = 0, \\
& - \frac{K_7^{u012}}{2s}u_0^{i-1} + \frac{K_7^{v011}}{s^2}v_0^{i-1} - \frac{K_7^{u212}}{2s}u_2^{i-1} + \frac{K_7^{v211}}{s^2}v_2^{i-1} + \\
& + K_7^{u02}u_0^i - \left(\frac{2K_7^{v011}}{s^2} + K_7^{v022}\right)v_0^i + K_7^{w12}w_1^i + K_7^{u22}u_2^i - \left(\frac{2K_7^{v211}}{s^2} + K_7^{v222} - K_7^{v20}\right)v_2^i + \\
& + \frac{K_7^{u012}}{2s}u_0^{i+1} + \frac{K_7^{v011}}{s^2}v_0^{i+1} + \frac{K_7^{u212}}{2s}u_2^{i+1} + \frac{K_7^{v211}}{s^2}v_2^{i+1} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{K_8^{u112}}{2s}u_1^{i-1} + \frac{K_8^{v111}}{s^2}v_1^{i-1} - \frac{K_8^{u312}}{2s}u_3^{i-1} + \frac{K_8^{v311}}{s^2}v_3^{i-1} + \\
& + K_8^{w02}w_0^i + K_8^{u12}u_1^i - \left(\frac{2K_8^{v111}}{s^2} + K_8^{v122} - K_8^{v10}\right)v_1^i + K_8^{w22}w_2^i + K_8^{u32}u_3^i - \\
& - \left(\frac{2K_8^{v311}}{s^2} + K_8^{v322} - K_8^{v30}\right)v_3^i + \frac{K_8^{u112}}{2s}u_1^{i+1} + \frac{K_8^{v111}}{s^2}v_1^{i+1} + \frac{K_8^{u312}}{2s}u_3^{i+1} + \frac{K_8^{v311}}{s^2}v_3^{i+1} = 0, \\
& \frac{K_9^{w011}}{s^2}w_0^{i-1} - \frac{K_9^{u11}}{2s}u_1^{i-1} + \frac{K_9^{w211}}{s^2}w_2^{i-1} - \frac{K_9^{u31}}{2s}u_3^{i-1} - \\
& - \left(\frac{2K_9^{w011}}{s^2} + K_9^{w022}\right)w_0^i - K_9^{v12}v_1^i - \left(\frac{2K_9^{w211}}{s^2} + K_9^{w222}\right)w_2^i - K_9^{v32}v_3^i + \\
& + \frac{K_9^{w011}}{s^2}w_0^{i+1} + \frac{K_9^{u11}}{2s}u_1^{i+1} + \frac{K_9^{w211}}{s^2}w_2^{i+1} + \frac{K_9^{u31}}{2s}u_3^{i+1} + K_9^{q33}Q_m = 0, \\
& -\frac{K_{10}^{u01}}{2s}u_0^{i-1} + \frac{K_{10}^{w111}}{s^2}w_1^{i-1} - \frac{K_{10}^{u21}}{2s}u_2^{i-1} + \frac{K_{10}^{u00}}{2s}u_0^i - K_{10}^{v02}v_0^i - \left(\frac{2K_{10}^{w111}}{s^2} + K_{10}^{w122} - K_{10}^{w10}\right)w_1^i + \\
& + K_{10}^{u20}u_2^i - K_{10}^{v22}v_2^i + \frac{K_{10}^{u01}}{2s}u_0^{i+1} + \frac{K_{10}^{w111}}{s^2}w_1^{i+1} + \frac{K_{10}^{u21}}{2s}u_2^{i+1} + K_{10}^{q33}Q_m = 0, \\
& \frac{K_{11}^{w011}}{s^2}w_0^{i-1} - \frac{K_{11}^{u11}}{2s}u_1^{i-1} + \frac{K_{11}^{w211}}{s^2}w_2^{i-1} - \frac{K_{11}^{u31}}{2s}u_3^{i-1} - \\
& - \left(\frac{2K_{11}^{w011}}{s^2} + K_{11}^{w022}\right)w_0^i + K_{11}^{u10}u_1^i - K_{11}^{v12}v_1^i - \left(\frac{2K_{11}^{w211}}{s^2} + K_{11}^{w222} - K_{11}^{w20}\right)w_2^i + K_{11}^{u30}u_3^i - \\
& - K_{11}^{v32}v_3^i + \frac{K_{11}^{w011}}{s^2}w_0^{i+1} + \frac{K_{11}^{u11}}{2s}u_1^{i+1} + \frac{K_{11}^{w211}}{s^2}w_2^{i+1} + \frac{K_{11}^{u31}}{2s}u_3^{i+1} + K_{11}^{q33}Q_m = 0,
\end{aligned}$$

где  $i = \overline{1, (N_0 - 1)}$ , и  $(N_0 + 1)$ ,  $s$  - соответственно число узлов и шаг конечно-разностной схемы.

Система уравнений (3.17) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений. Она имеет одиннадцати-диагональную матрицу, которую можно представить следующей системой векторно-матричных уравнений:

$$\begin{aligned}
A_i X_{i-1} + B_i X_i + C_i X_{i+1} &= F_i, \quad i = \overline{1, (N_0 - 1)}, \\
A_1 &= C_{N_0-1} = \Theta.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Здесь  $\Theta$  - нулевая матрица размером  $11 \times 11$ ;  $F_i$  - векторы правых частей

$$F_i = \left[ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, K_9^{q33} q_{33}, K_{10}^{q33} q_{33}, K_{11}^{q33} q_{33} \right]^T;$$

$X_i$  - векторы искомых перемещений

$$X_i = \left[ u_0^i, v_0^i, w_0^i, u_1^i, v_1^i, w_1^i, u_2^i, v_2^i, w_2^i, u_3^i, v_3^i \right]^T;$$

$A_i, B_i, C_i$  - квадратные матрицы коэффициентов размером 11x11, определяемые следующим образом:

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,11} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{11,1} & A_{11,2} & A_{11,3} & \dots & A_{11,11} \end{bmatrix}; \quad B_i = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} & \dots & B_{1,11} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & B_{2,3} & \dots & B_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{11,1} & B_{11,2} & B_{11,3} & \dots & B_{11,11} \end{bmatrix};$$

$$C_i = \begin{bmatrix} C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & \dots & C_{1,11} \\ C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & \dots & C_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{11,1} & C_{11,2} & C_{11,3} & \dots & C_{11,11} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты матриц определяются равенствами

$$\begin{aligned} A_{1,1} &= \frac{K_1^{u011}}{s^2} - \frac{K_1^{u01}}{2s}, A_{1,2} = \frac{K_1^{v012}}{2s}, A_{1,3} = 0, A_{1,4} = 0, A_{1,5} = 0, A_{1,6} = -\frac{K_1^{w11}}{2s}, \\ A_{1,7} &= \frac{K_1^{u211}}{s^2} - \frac{K_1^{u21}}{2s}, A_{1,8} = \frac{K_1^{v212}}{2s}, A_{1,9} = 0, A_{1,10} = 0, A_{1,11} = 0, \\ A_{2,1} &= 0, A_{2,2} = 0, A_{2,3} = -\frac{K_2^{w01}}{2s}, A_{2,4} = \frac{K_2^{u111}}{s^2} - \frac{K_2^{u11}}{2s}, A_{2,5} = \frac{K_2^{v112}}{2s}, A_{2,6} = 0, \\ A_{2,7} &= 0, A_{2,8} = 0, A_{2,9} = -\frac{K_2^{w21}}{2s}, A_{2,10} = \frac{K_2^{u311}}{s^2} - \frac{K_2^{u31}}{2s}, A_{2,11} = \frac{K_2^{v312}\psi}{2s}, \\ A_{3,1} &= \frac{K_3^{u011}}{s^2} - \frac{K_3^{u01}}{2s}, A_{3,2} = \frac{K_3^{v012}\psi}{2s}, A_{3,3} = 0, A_{3,4} = 0, A_{3,5} = 0, A_{3,6} = -\frac{K_3^{w11}}{2s}, \\ A_{3,7} &= \frac{K_3^{u211}}{s^2} - \frac{K_3^{u21}}{2s}, A_{3,8} = \frac{K_3^{v212}\psi}{2s}, A_{3,9} = 0, A_{3,10} = 0, A_{3,11} = 0, \\ A_{4,1} &= 0, A_{4,2} = 0, A_{4,3} = -\frac{K_4^{w01}}{2s}, A_{4,4} = \frac{K_4^{u111}}{s^2} - \frac{K_4^{u11}}{2s}, A_{4,5} = \frac{K_4^{v112}\psi}{2s}, A_{4,6} = 0, \\ A_{4,7} &= 0, A_{4,8} = 0, A_{4,9} = -\frac{K_4^{w21}}{2s}, A_{4,10} = \frac{K_4^{u311}}{s^2} - \frac{K_4^{u31}}{2s}, A_{4,11} = \frac{K_4^{v312}\psi}{2s}, \\ A_{5,1} &= -\frac{K_5^{u012}}{2s}, A_{5,2} = \frac{K_5^{v011}}{s^2}, A_{5,3} = 0, A_{5,4} = 0, A_{5,5} = 0, A_{5,6} = 0, \\ A_{5,7} &= -\frac{K_5^{u212}}{2s}, A_{5,8} = \frac{K_5^{v211}}{s^2}, A_{5,9} = 0, A_{5,10} = 0, A_{5,11} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{6,1} &= 0, \quad A_{6,2} = 0, \quad A_{6,3} = 0, \quad A_{6,4} = -\frac{K_6^{u12}}{2s}, \quad A_{6,5} = \frac{K_6^{v11}}{s^2}, \quad A_{6,6} = 0, \\
A_{6,7} &= 0, \quad A_{6,8} = 0, \quad A_{6,9} = 0, \quad A_{6,10} = -\frac{K_6^{u312}}{2s}, \quad A_{6,11} = \frac{K_6^{v311}}{s^2}, \\
A_{7,1} &= -\frac{K_7^{u012}}{2s}, \quad A_{7,2} = \frac{K_7^{v011}}{s^2}, \quad A_{7,3} = 0, \quad A_{7,4} = 0, \quad A_{7,5} = 0, \quad A_{7,6} = 0, \\
A_{7,7} &= -\frac{K_7^{u212}}{2s}, \quad A_{7,8} = \frac{K_7^{v211}}{s^2}, \quad A_{7,9} = 0, \quad A_{7,10} = 0, \quad A_{7,11} = 0, \\
A_{8,1} &= 0, \quad A_{8,2} = 0, \quad A_{8,3} = 0, \quad A_{8,4} = -\frac{K_8^{u112}}{2s}, \quad A_{8,5} = \frac{K_8^{v111}}{s^2}, \quad A_{8,6} = 0, \\
A_{8,7} &= 0, \quad A_{8,8} = 0, \quad A_{8,9} = 0, \quad A_{8,10} = -\frac{K_8^{u312}}{2s}, \quad A_{8,11} = \frac{K_8^{v311}}{s^2}, \\
A_{9,1} &= 0, \quad A_{9,2} = 0, \quad A_{9,3} = \frac{K_9^{w011}}{s^2}, \quad A_{9,4} = -\frac{K_9^{u11}}{2s}, \quad A_{9,5} = 0, \quad A_{9,6} = 0, \\
A_{9,7} &= 0, \quad A_{9,8} = 0, \quad A_{9,9} = \frac{K_9^{w211}}{s^2}, \quad A_{9,10} = -\frac{K_9^{u31}}{2s}, \quad A_{9,11} = 0, \\
A_{10,1} &= -\frac{K_{10}^{u01}}{2s}, \quad A_{10,2} = 0, \quad A_{10,3} = 0, \quad A_{10,4} = 0, \quad A_{10,5} = 0, \quad A_{10,6} = \frac{K_{10}^{w111}}{s^2}, \\
A_{10,7} &= -\frac{K_{10}^{u21}}{2s}, \quad A_{10,8} = 0, \quad A_{10,9} = 0, \quad A_{10,10} = 0, \quad A_{10,11} = 0, \\
A_{11,1} &= 0, \quad A_{11,2} = 0, \quad A_{11,3} = \frac{K_{11}^{w011}}{s^2}, \quad A_{11,4} = -\frac{K_{11}^{u11}}{2s}, \quad A_{11,5} = 0, \quad A_{11,6} = 0, \\
A_{11,7} &= 0, \quad A_{11,8} = 0, \quad A_{11,9} = \frac{K_{11}^{w211}}{s^2}, \quad A_{11,10} = -\frac{K_{11}^{u31}}{2s}, \quad A_{11,11} = 0; \\
B_{1,1} &= K_1^{u00} - \frac{2K_1^{u011}}{s^2} - K_1^{u022}, \quad B_{1,2} = -K_1^{v02}, \quad B_{1,3} = 0, \quad B_{1,4} = 0, \quad B_{1,5} = 0, \quad B_{1,6} = K_1^{w10}, \\
B_{1,7} &= K_1^{u20} - \frac{2K_1^{u211}}{s^2} - K_1^{u222}, \quad B_{1,8} = -K_1^{v21}v_2^i, \quad B_{1,9} = 0, \quad B_{1,10} = 0, \quad B_{1,11} = 0, \\
B_{2,1} &= 0, \quad B_{2,2} = 0, \quad B_{2,3} = 0, \quad B_{2,4} = K_2^{u10} - \frac{2K_2^{u111}}{s^2} - K_2^{u122}, \quad B_{2,5} = -K_2^{v12}, \quad B_{2,6} = 0, \\
B_{2,7} &= 0, \quad B_{2,8} = 0, \quad B_{2,9} = K_2^{w20}, \quad B_{2,10} = K_2^{u30} - \frac{2K_2^{u311}}{s^2} - K_2^{u322}, \quad B_{2,11} = K_2^{v32}, \\
B_{3,1} &= -\frac{2K_3^{u011}}{s^2} - K_3^{u022} + K_3^{u00}, \quad B_{3,2} = -K_3^{v02}, \quad B_{3,3} = 0, \quad B_{3,4} = 0, \quad B_{3,5} = 0, \quad B_{3,6} = K_3^{w10}, \\
B_{3,7} &= -\frac{2K_3^{u211}}{s^2} - K_3^{u222} + K_3^{u20}, \quad B_{3,8} = K_3^{v22}, \quad B_{3,9} = 0, \quad B_{3,10} = 0, \quad B_{3,11} = 0, \\
B_{4,1} &= 0, \quad B_{4,2} = 0, \quad B_{4,3} = 0, \quad B_{4,4} = -\frac{2K_4^{u111}}{s^2} - K_4^{u122} + K_4^{u10}, \quad B_{4,5} = -K_4^{v12}, \quad B_{4,6} = 0, \\
B_{4,7} &= 0, \quad B_{4,8} = 0, \quad B_{4,9} = K_4^{w20}, \quad B_{4,10} = -\frac{2K_4^{u311}}{s^2} - K_4^{u322} + K_4^{u30}, \quad B_{4,11} = K_4^{v32}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
B_{5,1} &= K_5^{u02}, B_{5,2} = -\frac{2K_5^{v011}}{s^2} - K_5^{v022}, B_{5,3} = 0, B_{5,4} = 0, B_{5,5} = 0, \\
B_{5,6} &= K_5^{w12}, B_{5,7} = K_5^{u22}, B_{5,8} = -\frac{2K_5^{v211}}{s^2} - K_5^{v222}, B_{5,9} = 0, B_{5,10} = 0, B_{5,11} = 0, \\
B_{6,1} &= 0, B_{6,2} = 0, B_{6,3} = K_6^{w02}, B_{6,4} = K_6^{u12}, B_{6,5} = K_6^{v10} - \frac{2K_6^{v111}}{s^2} - K_6^{v122}, \\
B_{6,6} &= 0, B_{6,7} = 0, B_{6,8} = 0, B_{6,9} = K_6^{w22}, B_{6,10} = K_6^{u32}, B_{6,11} = -\frac{2K_6^{v311}}{s^2} - K_6^{v322} + K_6^{v30}, \\
B_{7,1} &= K_7^{u02}, B_{7,2} = -\frac{2K_7^{v011}}{s^2} - K_7^{v022}, B_{7,3} = 0, B_{7,4} = 0, B_{7,5} = 0, \\
B_{7,6} &= K_7^{w12}, B_{7,7} = K_7^{u22}, B_{7,8} = -\frac{2K_7^{v211}}{s^2} - K_7^{v222} + K_7^{v20}, B_{7,9} = 0, B_{7,10} = 0, B_{7,11} = 0, \\
B_{8,1} &= 0, B_{8,2} = 0, B_{8,3} = K_8^{w02}, B_{8,4} = K_8^{u12}, B_{8,5} = K_8^{v10} - \frac{2K_8^{v111}}{s^2} - K_8^{v122}, \\
B_{8,6} &= 0, B_{8,7} = 0, B_{8,8} = 0, B_{8,9} = K_8^{w22}, B_{8,10} = K_8^{u32}, B_{8,11} = -\frac{2K_8^{v311}}{s^2} - K_8^{v322} + K_8^{v30}, \\
B_{9,1} &= 0, B_{9,2} = 0, B_{9,3} = -\frac{2K_9^{w011}}{s^2} - K_9^{w022}, B_{9,4} = 0, B_{9,5} = K_9^{v12}, B_{9,6} = 0, \\
B_{9,7} &= 0, B_{9,8} = 0, B_{9,9} = -\frac{2K_9^{w211}}{s^2} - K_9^{w222}, B_{9,10} = 0, B_{9,11} = -K_9^{v32}, \\
B_{10,1} &= K_{10}^{u00}, B_{10,2} = -K_{10}^{v02}, B_{10,3} = 0, B_{10,4} = 0, B_{10,5} = 0, B_{10,6} = -\frac{2K_{10}^{w111}}{s^2} - K_{10}^{w122} + K_{10}^{w10}, \\
B_{10,7} &= K_{10}^{u20}, B_{10,8} = -K_{10}^{v22}, B_{10,9} = 0, B_{10,10} = 0, B_{10,11} = 0, \\
B_{11,1} &= 0, B_{11,2} = 0, B_{11,3} = -\frac{2K_{11}^{w011}}{s^2} - K_{11}^{w022}, B_{11,4} = K_{11}^{u10}, B_{11,5} = K_{11}^{v12}, B_{11,6} = 0, \\
B_{11,7} &= 0, B_{11,8} = 0, B_{11,9} = -\frac{2K_{11}^{w211}}{s^2} - K_{11}^{w222} + K_{11}^{w20}, B_{11,10} = K_{11}^{u30}, B_{11,11} = -K_{11}^{v32}, \\
C_{1,1} &= \frac{K_1^{u011}}{s^2} + \frac{K_1^{u01}}{2s}, C_{1,2} = -\frac{K_1^{v012}}{2s}, C_{1,3} = 0, C_{1,4} = 0, C_{1,5} = 0, C_{1,6} = \frac{K_1^{w11}}{2s}, \\
C_{1,7} &= \frac{K_1^{u211}}{s^2} + \frac{K_1^{u21}}{2s}, C_{1,8} = -\frac{K_1^{v212}}{2s}, C_{1,9} = 0, C_{1,10} = 0, C_{1,11} = 0 \\
C_{2,1} &= 0, C_{2,2} = 0, C_{2,3} = \frac{K_2^{w01}}{2s}, C_{2,4} = \frac{K_2^{u111}}{s^2} + \frac{K_2^{u11}}{2s}, C_{2,5} = -\frac{K_2^{v12}\psi}{2s}, C_{2,6} = 0, \\
C_{2,7} &= 0, C_{2,8} = 0, C_{2,9} = \frac{K_2^{w21}}{2s}, C_{2,10} = \frac{K_2^{u311}}{s^2} + \frac{K_2^{u31}}{2s}, C_{2,11} = -\frac{K_2^{v312}\psi}{2s} \\
C_{3,1} &= \frac{K_3^{u011}}{s^2} + \frac{K_3^{u01}}{2s}, C_{3,2} = -\frac{K_3^{v012}\psi}{2s}, C_{3,3} = 0, C_{3,4} = 0, C_{3,5} = 0, C_{3,6} = \frac{K_3^{w11}}{2s}, \\
C_{3,7} &= \frac{K_3^{u211}}{s^2} + \frac{K_3^{u21}}{2s}, C_{3,8} = -\frac{K_3^{v212}\psi}{2s}, C_{3,9} = 0, C_{3,10} = 0, C_{3,11} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{4,1} &= 0, C_{4,2} = 0, C_{4,3} = \frac{K_4^{w01}}{2s}, C_{4,4} = \frac{K_4^{u11}}{s^2} + \frac{K_4^{u11}}{2s}, C_{4,5} = -\frac{K_4^{v112}}{2s}, C_{4,6} = 0, \\
C_{4,7} &= 0, C_{4,8} = 0, C_{4,9} = \frac{K_4^{w21}}{2s}, C_{4,10} = \frac{K_4^{u311}}{s^2} + \frac{K_4^{u31}}{2s}, C_{4,11} = -\frac{K_4^{v312}}{2s}, \\
C_{5,1} &= \frac{K_5^{u012}}{2s}, C_{5,2} = \frac{K_5^{v011}}{s^2}, C_{5,3} = 0, C_{5,4} = 0, C_{5,5} = 0, C_{5,6} = 0, \\
C_{5,7} &= \frac{K_5^{u212}}{2s}, C_{5,8} = \frac{K_5^{v211}}{s^2}, C_{5,9} = 0, C_{5,10} = 0, C_{5,11} = 0, \\
C_{6,1} &= 0, C_{6,2} = 0, C_{6,3} = 0, C_{6,4} = \frac{K_6^{u112}}{2s}, C_{6,5} = \frac{K_6^{v111}}{s^2}, C_{6,6} = 0, \\
C_{6,7} &= 0, C_{6,8} = 0, C_{6,9} = 0, C_{6,10} = \frac{K_6^{u312}}{2s}, C_{6,11} = \frac{K_6^{v311}}{s^2}, \\
C_{7,1} &= \frac{K_7^{u012}}{2s}, C_{7,2} = \frac{K_7^{v011}}{s^2}, C_{7,3} = 0, C_{7,4} = 0, C_{7,5} = 0, C_{7,6} = 0, \\
C_{7,7} &= \frac{K_7^{u212}}{2s}, C_{7,8} = \frac{K_7^{v211}}{s^2}, C_{7,9} = 0, C_{7,10} = 0, C_{7,11} = 0, \\
C_{8,1} &= 0, C_{8,2} = 0, C_{8,3} = 0, C_{8,4} = \frac{K_8^{u112}}{2s}, C_{8,5} = \frac{K_8^{v111}}{s^2}, C_{8,6} = 0, \\
C_{8,7} &= 0, C_{8,8} = 0, C_{8,9} = 0, C_{8,10} = \frac{K_8^{u312}}{2s}, C_{8,11} = \frac{K_8^{v311}}{s^2}, \\
C_{9,1} &= 0, C_{9,2} = 0, C_{9,3} = \frac{K_9^{w011}}{s^2}, C_{9,4} = \frac{K_9^{u11}}{2s}, C_{9,5} = 0, C_{9,6} = 0, \\
C_{9,7} &= 0, C_{9,8} = 0, C_{9,9} = \frac{K_9^{w211}}{s^2}, C_{9,10} = \frac{K_9^{u31}}{2s}, C_{9,11} = 0, \\
C_{10,1} &= \frac{K_{10}^{u01}}{2s}, C_{10,2} = 0, C_{10,3} = 0, C_{10,4} = 0, C_{10,5} = 0, C_{10,6} = \frac{K_{10}^{w11}}{s^2}, \\
C_{10,7} &= \frac{K_{10}^{u21}}{2s}, C_{10,8} = 0, C_{10,9} = 0, C_{10,10} = 0, C_{10,11} = 0, \\
C_{11,1} &= 0, C_{11,2} = 0, C_{11,3} = \frac{K_{11}^{w011}}{s^2}, C_{11,4} = \frac{K_{11}^{u11}}{2s}, C_{11,5} = 0, C_{11,6} = 0, \\
C_{11,7} &= 0, C_{11,8} = 0, C_{11,9} = \frac{K_{11}^{w211}}{s^2}, C_{11,10} = \frac{K_{11}^{u31}}{2s}, C_{11,11} = 0.
\end{aligned}$$

Используя метод матричной прогонки, аналогично пункту 2.4 диссертации, имеем

$$X_i = P_i X_{i+1} + Q_i, i = \overline{1, (N_0 - 1)}, \quad (3.19)$$

где  $X_0 = X_{N_0} = \Theta$ ,  $P_1 = -(C_1)^{-1} B_1$ ,  $Q_1 = -(C_1)^{-1} F_1$ ,

$$P_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i P_i + C_i}; \quad Q_{i+1} = \frac{F_i - A_i Q_i}{A_i P_i + C_i}.$$

После определения прогоночных коэффициентов  $P_i, Q_i$ , используя уравнения (3.19) получим решение системы

$$\begin{aligned} X_{N_0} &= \Theta, \\ X_i &= P_i X_{i+1} + Q_i, \quad i = \overline{1, (N_0 - 1)}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Таким образом, с помощью формул (3.20) определяются перемещения в узлах сетки. Для аппроксимации перемещений используются сплайны. Затем деформации пластины находятся по формулам (3.3), а напряжения - с использованием соотношений закона Гука и уравнений равновесия трехмерной теории упругости.

Схема алгоритма решения краевой задачи для круглых пластин переменной толщины показана на рисунке 3.2.

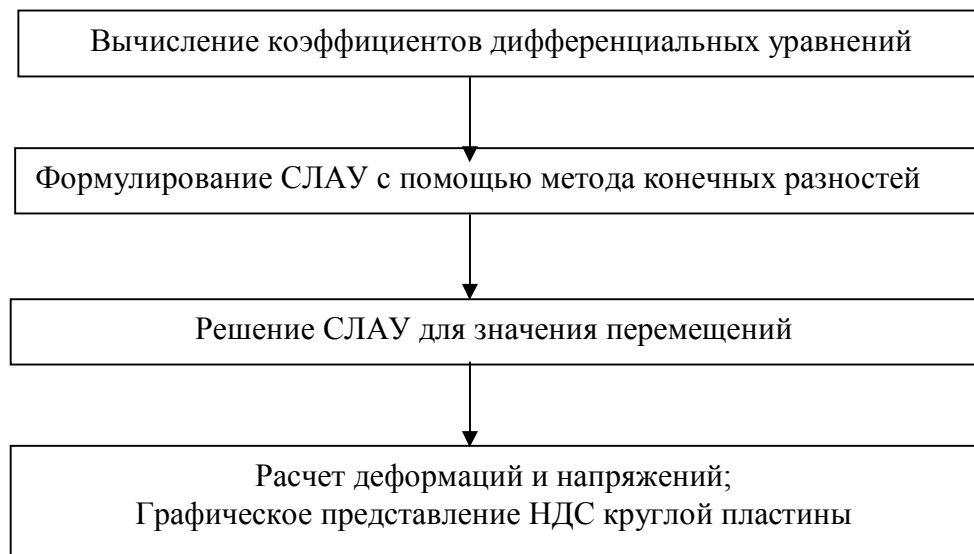


Рис. 3.2. Схема алгоритма для решения задач

### 3.4. Параметрические исследования НДС

В этом параграфе приведены результаты параметрических исследований НДС пластины по уточненной математической модели в зависимости от изменяемости толщины и характера нагружения. В качестве примера рассматривается круглая изотропная пластина со следующими параметрами:  $a = 1(м)$ ,  $b = 0,5(м)$ ,  $h_m = 0,025(м)$ ,  $h_0 = 0,01(м)$ . Коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^{11} Па$ . Пластина жестко защемлена на двух краях  $r = a$ ,  $r = b$ .

#### 3.4.1. Расчет НДС “погранслои” в зоне жестко защемленного края. Сравнение с данными классической теории

Толщина пластины  $2h(r)$  определяется соотношением

$$h(r) = h_m - tg(\alpha) \cdot (a - r), \quad (3.21)$$

где  $tg(\alpha) = (h_m - h_0) / (a - b)$ ,  $2\alpha$  – угол наклона пластины (рис. 3.3).

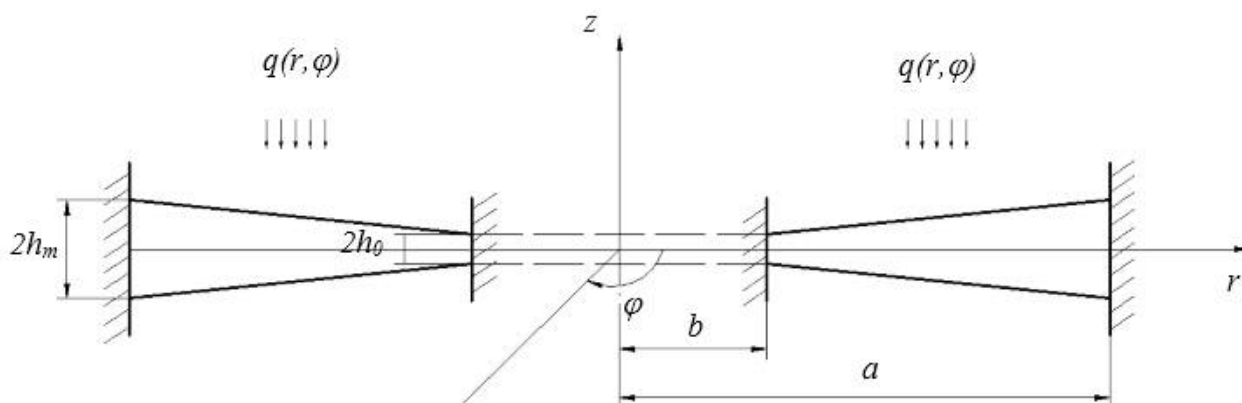


Рис. 3.3. Круглая пластина

#### 3.4.1.1. Распределенная нагрузка

Рассмотрим стальную круглую пластину, находящуюся под действием распределенной нагрузки  $q(r, \varphi) = Q_0 \sin(\varphi)$ ,  $Q_0 = const$ . Отметим, что на рисунках этого раздела аббревиатура “Уточ” соответствует расчету по уточненной теории и “Клас” - расчету по классической теории. Результаты расчета перемещений пластины представлены на рис 3.4.

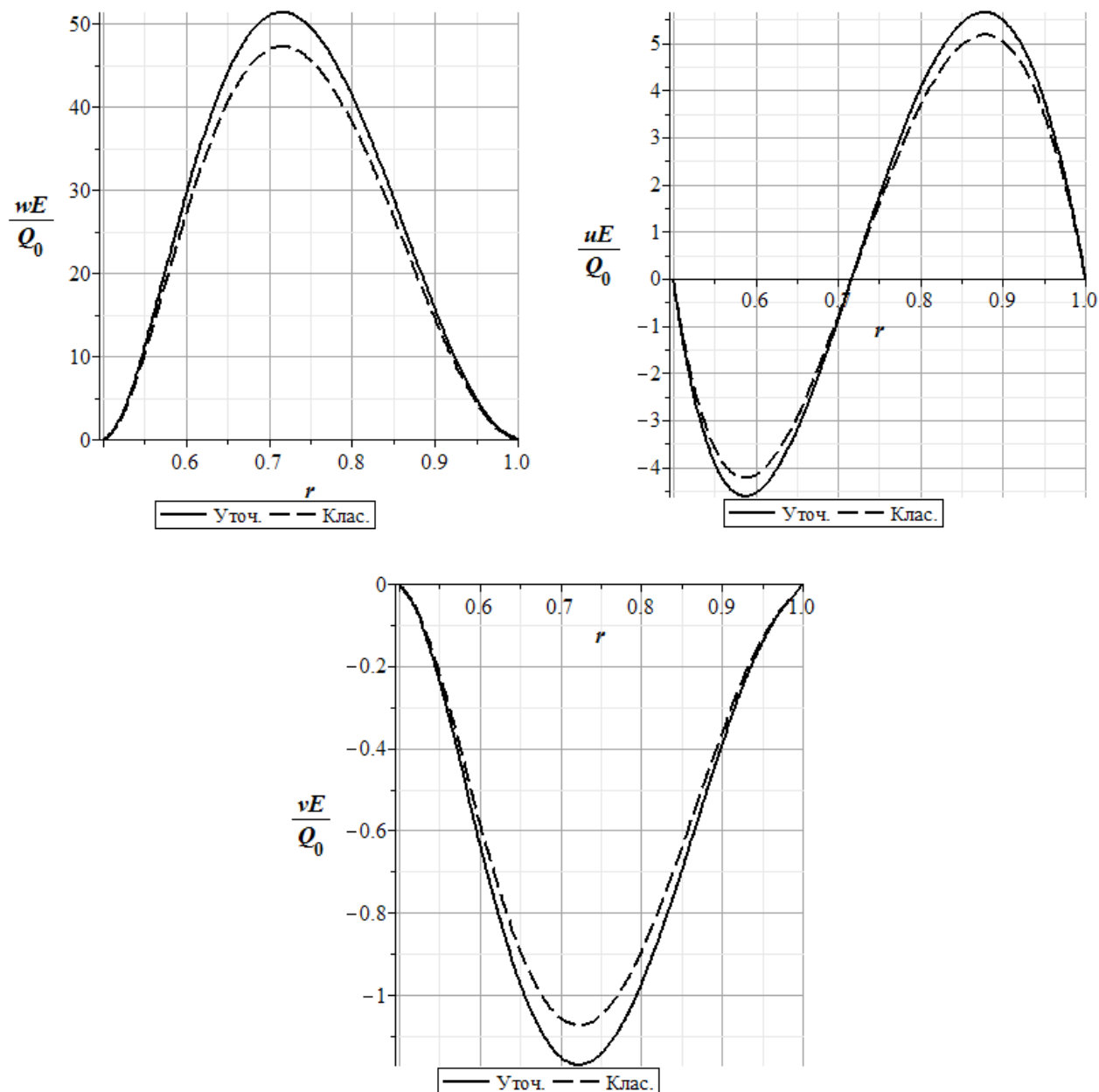


Рис. 3.4. Графики перемещений по радиусу пластины

Из графиков рис. 3.4 следует, что максимальные величины перемещений уточняются на 9%. Результаты вычисления нормальных напряжений пластины по уточненной теории представлены на рис 3.5-3.7.

Анализ полученных результатов показывает, что вне краевой зоны значения нормальных тангенциальных напряжений, определенных по уточненной и классической теориям, практически совпадают (рис. 3.5, 3.6). Максимальное рассогласование результатов расчета имеет место (рис. 3.6) при

определении напряжений  $\sigma_\varphi$  и составляет 15%. При исследовании НДС пластины с помощью предлагаемой теории, напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные тангенциальные напряжения  $\sigma_r$  - на 26,6% (рис. 3.5) и  $\sigma_\varphi$  - на 20,3% (рис. 3.6).

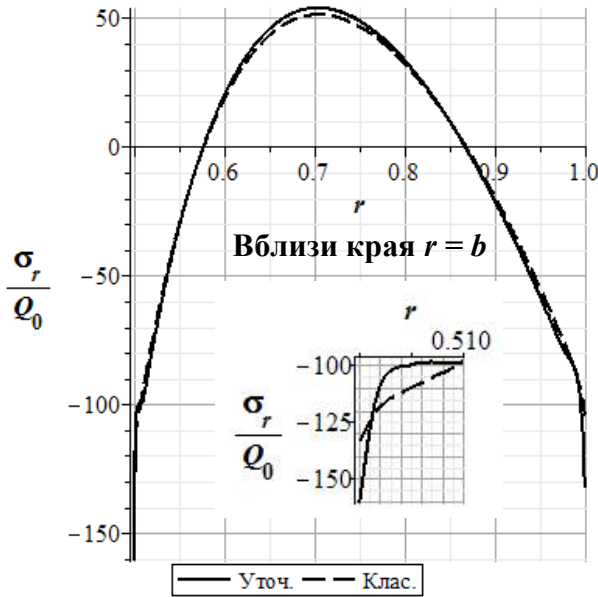


Рис. 3.5. Изменение  $\sigma_r$  по радиусу пластины

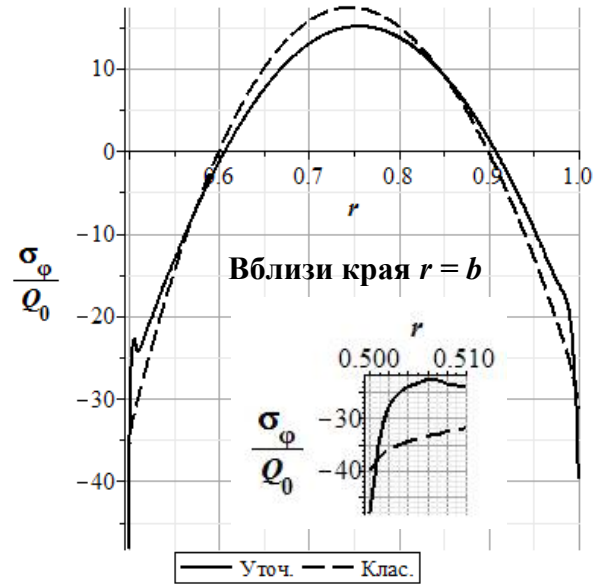


Рис. 3.6. Изменение  $\sigma_\varphi$  по радиусу пластины

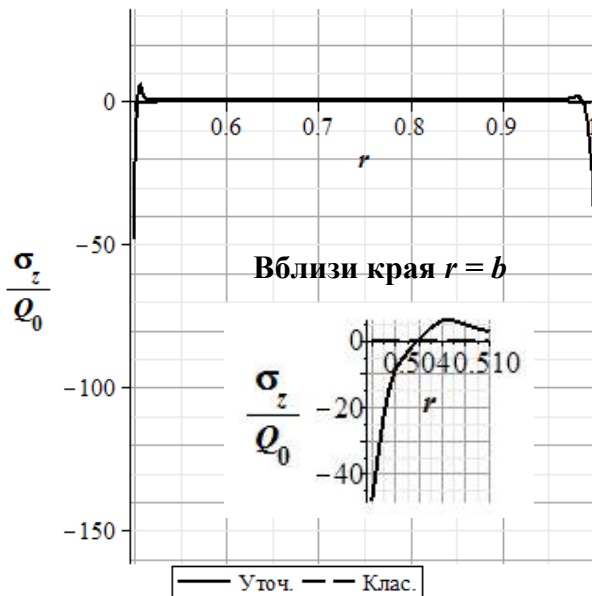


Рис. 3.7. Изменение  $\sigma_z$  по радиусу пластины

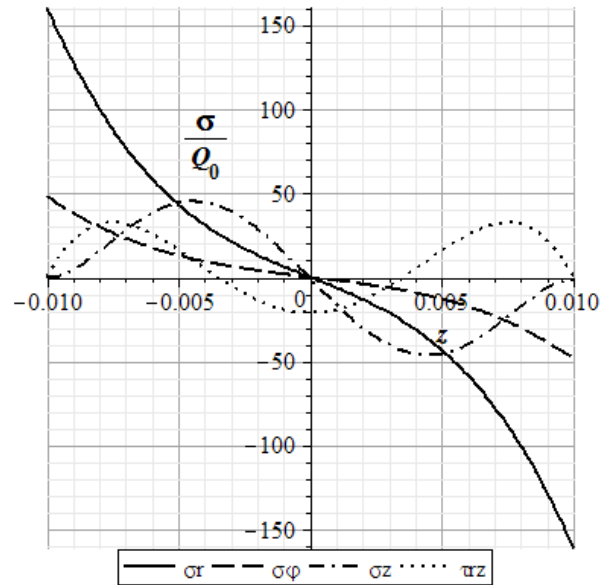


Рис. 3.8. Изменение  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$  по толщине пластины на краю  $r=b$

Здесь надо отметить, что нормальные поперечные напряжения  $\sigma_z$  (рис. 3.7), определяемые по классической теории, пренебрежимо малы, а по

уточненной теории составляют 30% от максимальных изгибных напряжений  $\sigma_r$  (рис. 3.5, 3.7, 3.8).

Графики изменения дополнительных напряжений “погранслои”  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$  по толщине в краю  $r=b$  показаны на рис. 3.8. Максимальные поперечные нормальные и касательные напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$ , соответствующие уточненной теории, в краевой зоне пластины оказываются одного порядка с максимальными величинами основного внутреннего изгибного напряжения (рис. 3.8).

Графики нормальных напряжений пластины по уточненной теории для различных величин углов наклона пластины  $2\alpha$  представлены на рис 3.9-3.12.

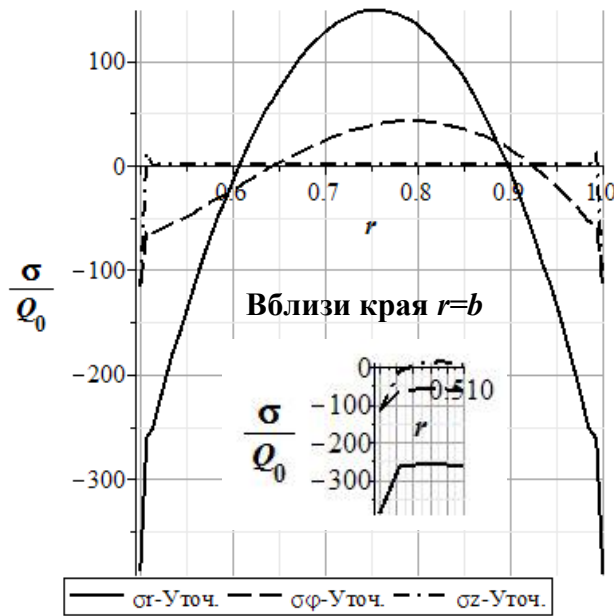


Рис. 3.9. Изменение  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  по радиусу пластины при  $h_m = 0,01(м)$ ;  $\alpha = 0^\circ$

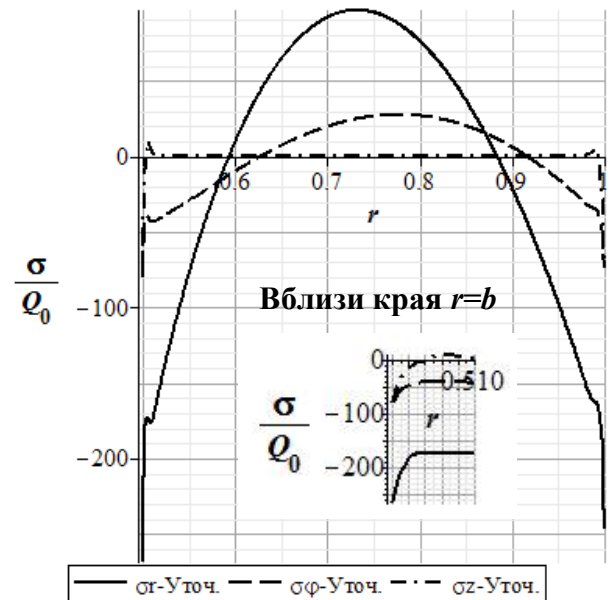


Рис. 3.10. Изменение  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  по радиусу пластины при  $h_m = 0,015(м)$ ;  $\alpha = 0,57^\circ$

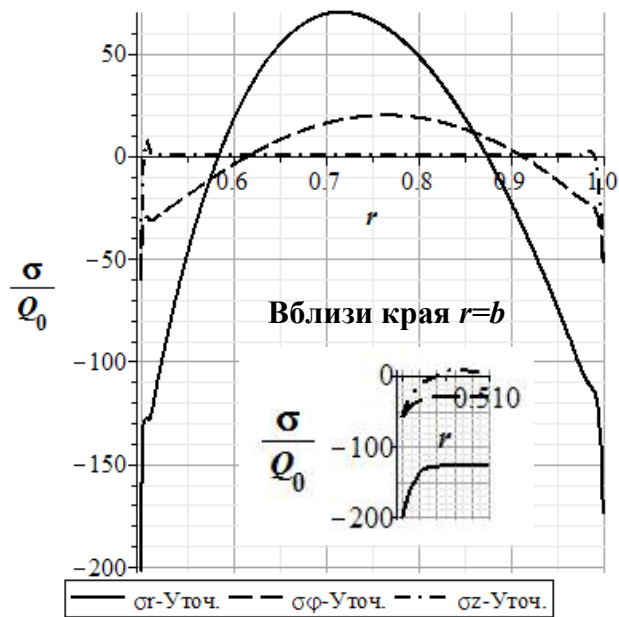


Рис. 3.11. Изменение  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  по радиусу пластины при  $h_m = 0,02(м)$ ;  $\alpha = 1,15^\circ$

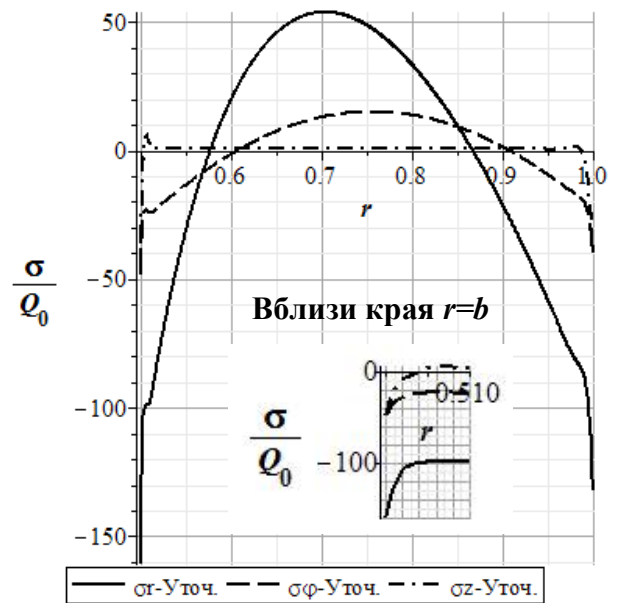


Рис. 3.12. Изменение  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  по радиусу пластины при  $h_m = 0,025(м)$ ;  $\alpha = 1,72^\circ$

Отметим, что величины нормальных напряжений существенно зависят от величины угла  $\alpha$ . Для данного случая нагружения в табл. 3.1 приведены значения прогиба и максимальных относительных нормальных напряжений на краю  $r = b$ , определенных по результатам данной работы и по классической теории.

По энергетической теории прочности, определим эквивалентную прочность пластины по формуле

$$\sigma_{ЭKB} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_r - \sigma_\varphi)^2 + (\sigma_\varphi - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 \right] + 6\tau_{r\varphi}^2 + 6\tau_{rz}^2 + 6\tau_{\varphi z}^2} \quad (3.22)$$



Таблица 3.1

	Уточ	Клас	Уточ	Клас
	$h_m = 0,01(м); \alpha = 0^\circ$		$h_m = 0,015(м); \alpha = 0,57^\circ$	
$wE / Q_0$	243,84	223,67	155,71	142,89
$\sigma_r / Q_0$	317,23	260,34	245,28	202,20
$\sigma_\varphi / Q_0$	95,17	78,10	73,59	60,66
$\sigma_z / Q_0$	95,17	0	73,59	0
$\sigma_{\text{ЭKB}} / Q_0$	315.30	276.68	217.63	192.13
	$h_m = 0,02(м); \alpha = 1,15^\circ$		$h_m = 0,025(м); \alpha = 1,72^\circ$	
$wE / Q_0$	76.09	69.86	51.33	47.21
$\sigma_r / Q_0$	202.62	164.23	161.21	131.31
$\sigma_\varphi / Q_0$	60.78	50.27	48.36	40.19
$\sigma_z / Q_0$	60.78	0	48.36	0
$\sigma_{\text{ЭKB}} / Q_0$	164.19	145.75	130.64	116.54

Отметим, что эквивалентные напряжения пластины, рассчитанные для рассматриваемых случаев, также уточнена соответствует теории представления в этой работе. Это позволит более точно рассчитать прочность пластины.

### 3.4.1.2. Локальная нагрузка

Рассматривается пластина переменной толщины, толщина которой определяется соотношением (3.21), находящаяся под действием локальной нагрузки в зоне  $x_1 = (19a + 21b) / 20$ ;  $x_2 = (21a + 19b) / 20$ , изменяющейся по следующему закону

$$q(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & b \leq x < x_1 \\ Q_0 \sin(\varphi), & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x_2 < x \leq a \end{cases}$$

где  $Q_0 = const$ .

Результаты вычисления величины перемещений пластины, жестко заземленной на двух краях  $r = b$ ,  $r = a$ , по уточненной теории представлены на рис 3.13. Из графики рис. 3.13 следует, что максимальные величины перемещений уточняются на 8,2 %.

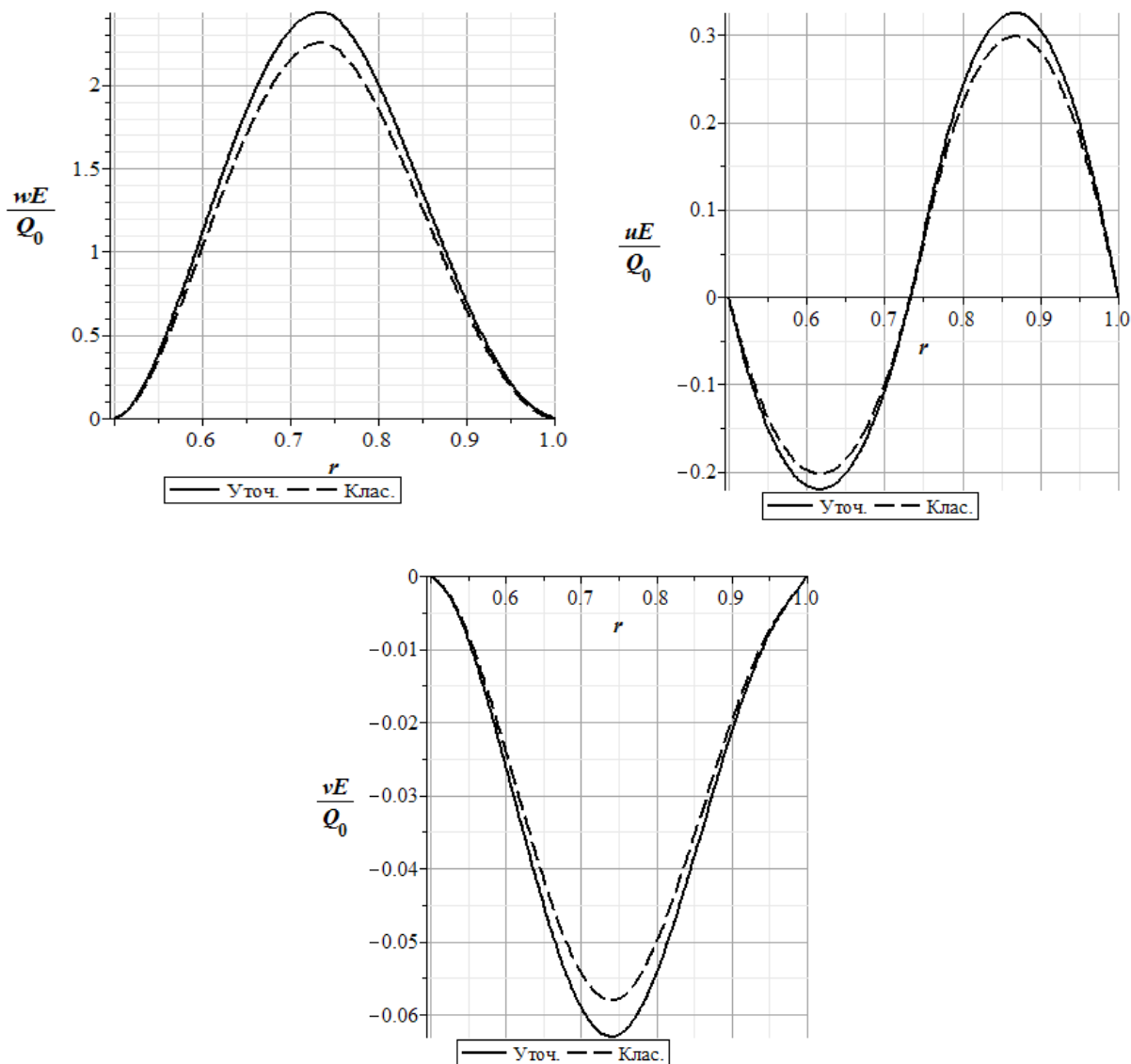


Рис. 3.13. Графики перемещений по радиусу пластины

Результаты вычисления максимальных нормальных напряжений пластины по уточненной теории представлены на рис 3.14-3.16. Графики показывают, что в зоне локальной нагрузки значения напряжений, определенных по уточненной и классической теориям, отличаются по величине. Максимальное расхождение результатов расчета из-за наличия дополнительных напряжений “погранслои” имеет место (рис. 3.14, 3.15) при определении нормальных напряжений. В зоне

локальной нагрузки они существенно уточняются: нормальные тангенциальные напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\varphi$  быстрее уменьшаются (рис. 3.14, . 3.15). Здесь надо отметить, что нормальные поперечные напряжения  $\sigma_z$  в зоне локальной нагрузки (рис. 3.12) составляют около 17% от максимальных изгибных напряжений  $\sigma_r$  (рис. 3.10, 3.12).

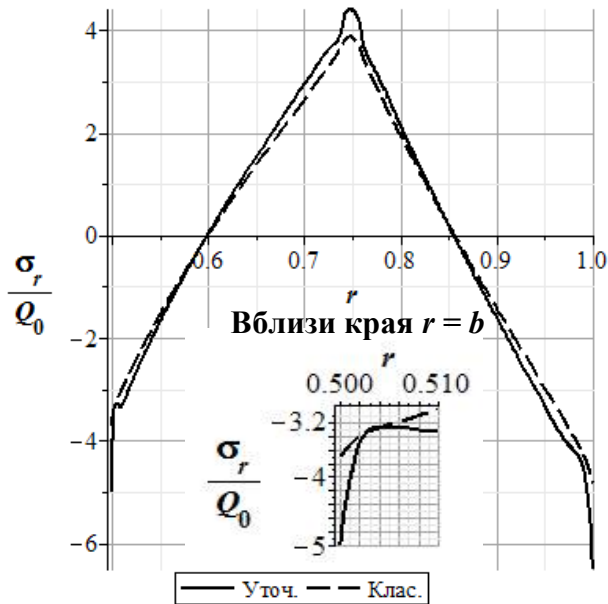


Рис. 3.10. Изменение  $\sigma_r$  по радиусу пластины

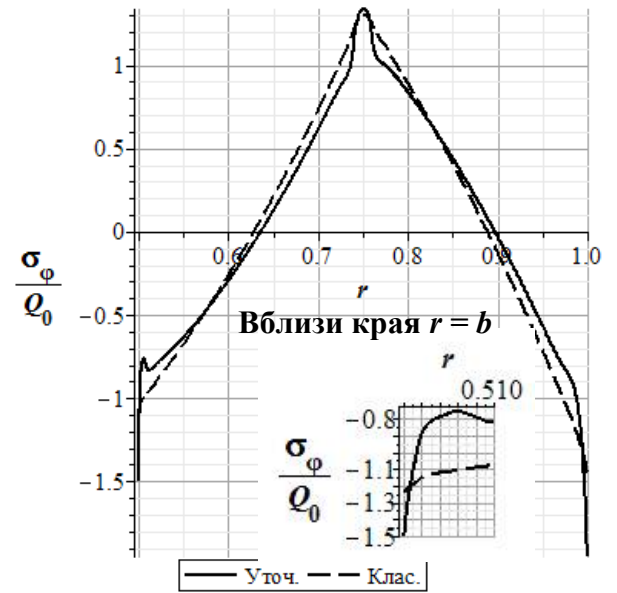


Рис. 3.11. Изменение  $\sigma_\varphi$  по радиусу пластины

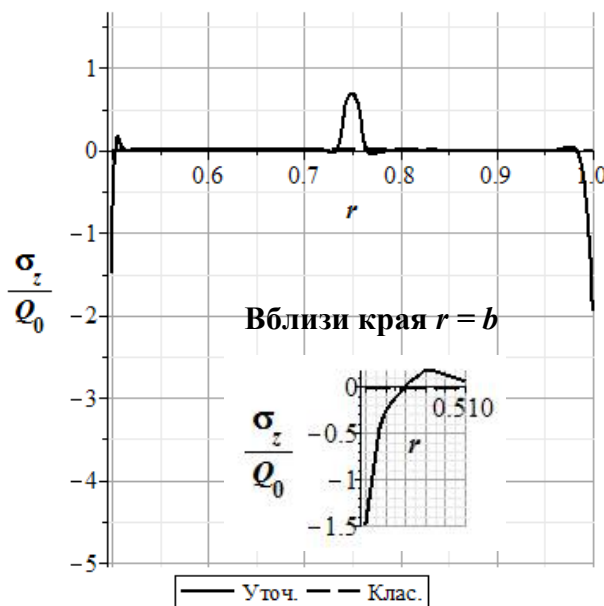


Рис. 3.12. Изменение  $\sigma_z$  по радиусу пластины

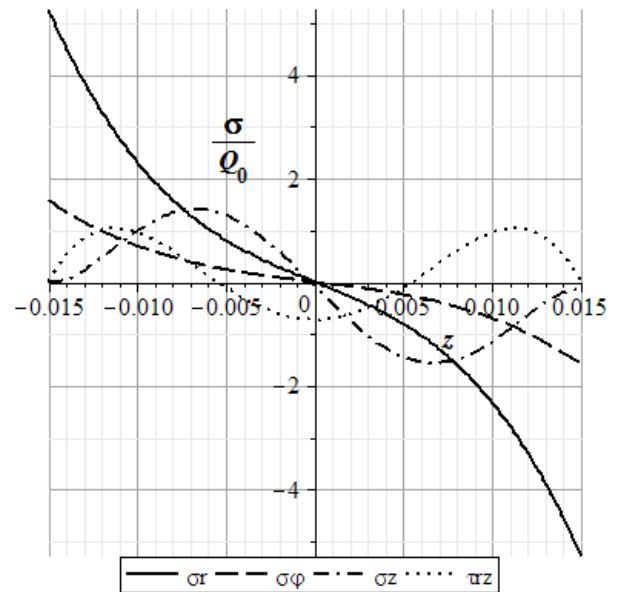


Рис. 3.13. Изменение  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}$  по толщине пластины на краю  $r=b$

Графики изменения напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$  по толщине на краю  $r=b$  показаны на рис. 3.13. Максимальные поперечные нормальные и касательные напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$ , соответствующие уточненной теории, в краевой зоне пластины оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения.

### 3.4.2. Толщина пластины изменяется по квадратичному закону

В качестве примера, рассматривается круглая изотропная пластина с аналогичными геометрическими и физическими параметрами, толщина которой определяется функцией второго порядка  $h(r) = 0.025r^2 - 0.0075r + 0.0075$  (рис. 3.14). Отметим, что в этом случае толщина на краях  $r = b$  и  $r = a$  приняты таким же как в пункте 3.4.1, а именно  $h_m = 0,025(м)$ ,  $h_0 = 0,01(м)$ . Результаты расчета перемещений пластины представлены на рис 3.15.

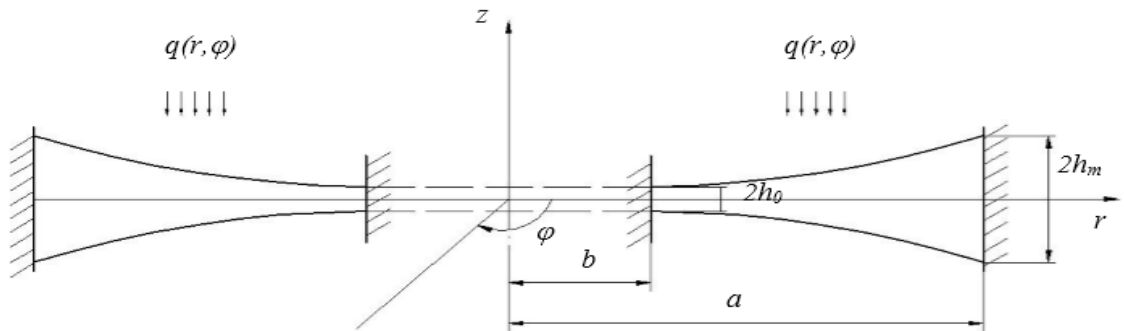


Рис. 3.14. Круглая пластина

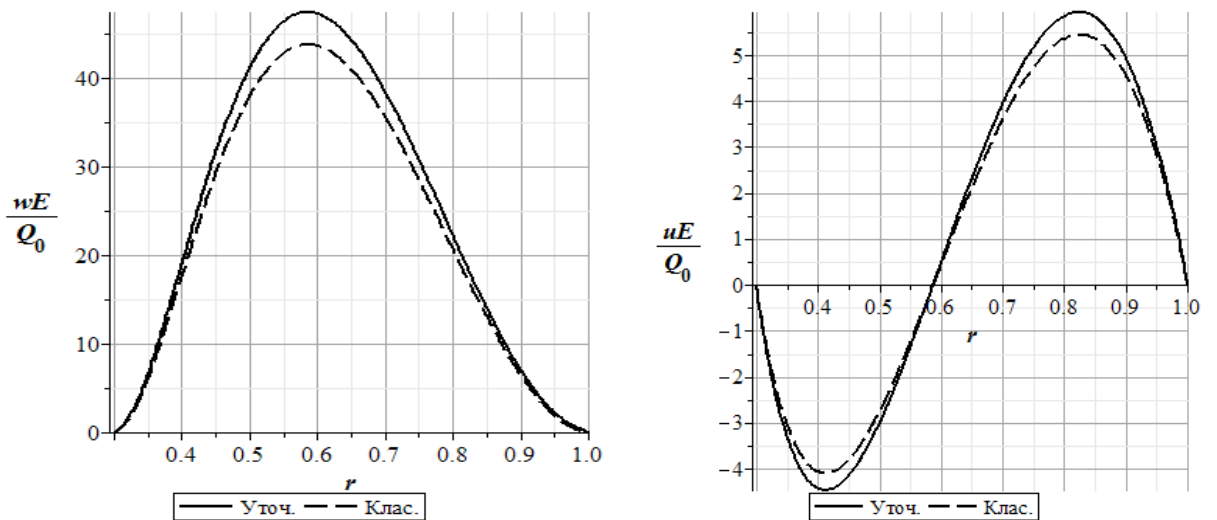


Рис. 3.15. Графики перемещений по радиусу пластины

Результаты расчета НДС пластины представлены на рис 3.16-3.19. Из представленных графиков следует, что напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные напряжения  $\sigma_r$  - на 27,1% (рис. 3.16) и  $\sigma_\varphi$  - на 20,7% (рис. 3.17). Очевидно, что во внутренней области пластины, т.е. при удалении от краевой зоны порядка её толщины, напряжения “погранслои” затухают, что подтверждает достоверность полученных результатов.

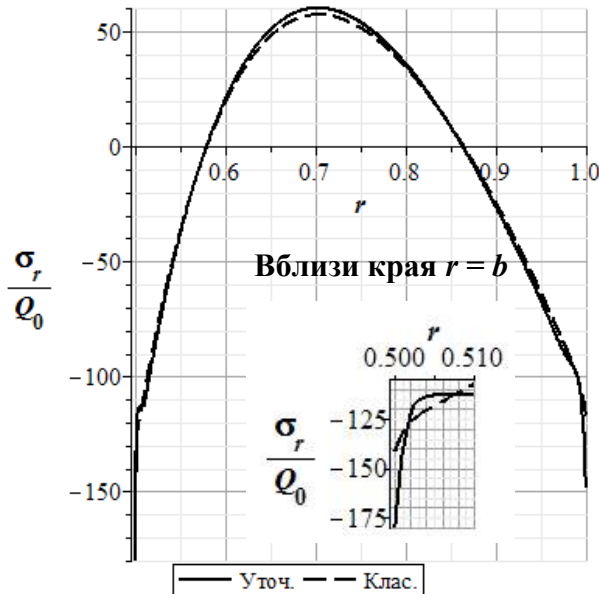


Рис. 3.16. Изменение  $\sigma_r$  по радиусу пластины

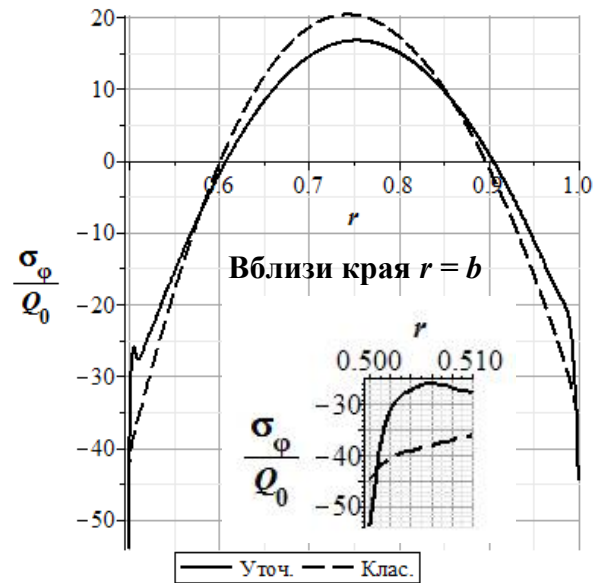


Рис. 3.17. Изменение  $\sigma_\varphi$  по радиусу пластины

Графики изменения напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{rz}$  по толщине на краю  $r = b$  показаны на рис. 3.19. Максимальные поперечные нормальные и касательные напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xz}$ , соответствующие уточненной теории, в краевой зоне пластины оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения (рис. 3.19).

Анализируя графики на рис 3.16 - 3.19 для двух вариантов круглых пластин, можно установить, что пластина с линейно изменяющейся толщиной является более прочной по сравнению со вторым вариантом. Это утверждение справедливо как для внутренних областей пластин, так для их узких зон вблизи жестко защемлённого края.

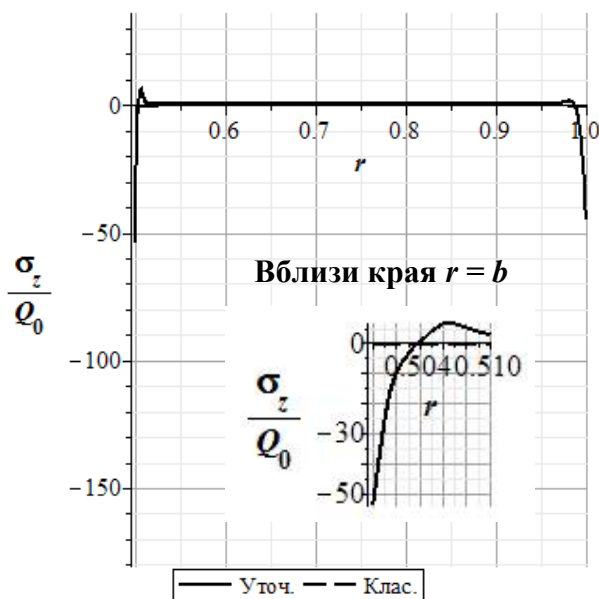


Рис. 3.18. Изменение  $\sigma_z$  по радиусу пластины

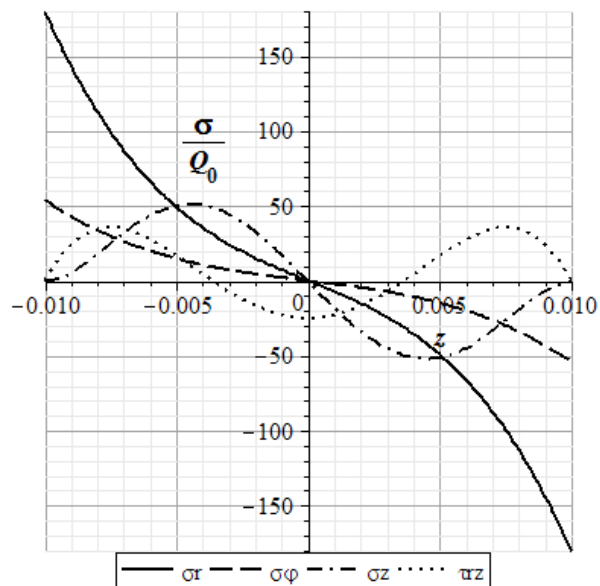


Рис. 3.19. Изменение  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z, \tau_{rz}$  по толщине пластины на краю  $r=b$

### 3.4.3. Влияние характера внешней нагрузки

Рассматривается пластина переменной толщины, толщина которой определяется соотношением (3.21), находящаяся под действием локальной нагрузки в зоне  $r_1 = (5a + 7b)/12$ ;  $r_2 = (5b + 7a)/12$ , изменяющей по синусоидальному закону

$$q(r, \varphi) = \begin{cases} 0, & b \leq r < r_1 \\ Q_0 \sin\left(\frac{k\pi(r-r_1)}{r_2-r_1}\right) \sin(\varphi), & r_1 \leq r \leq r_2, \\ 0, & r_2 < r \leq a \end{cases}$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Результаты вычисления максимальных нормальных напряжений пластины, по уточненной теории при  $k = 3$  представлены на рис. 3.20-3.22.

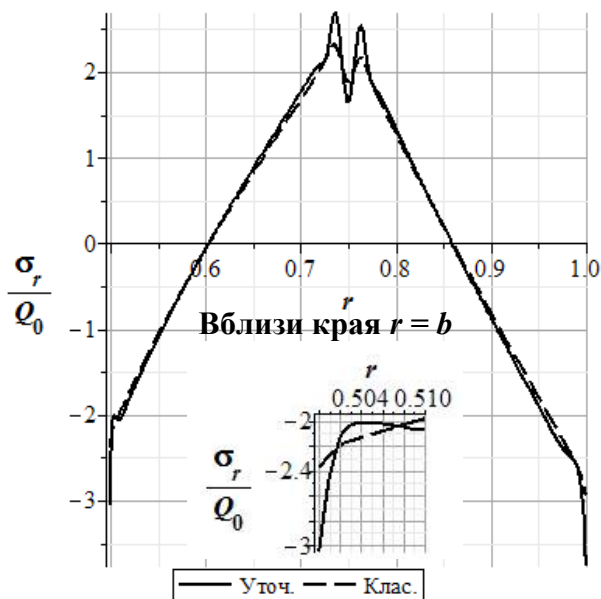


Рис. 3.20. Изменение  $\sigma_r$  по радиусу пластины

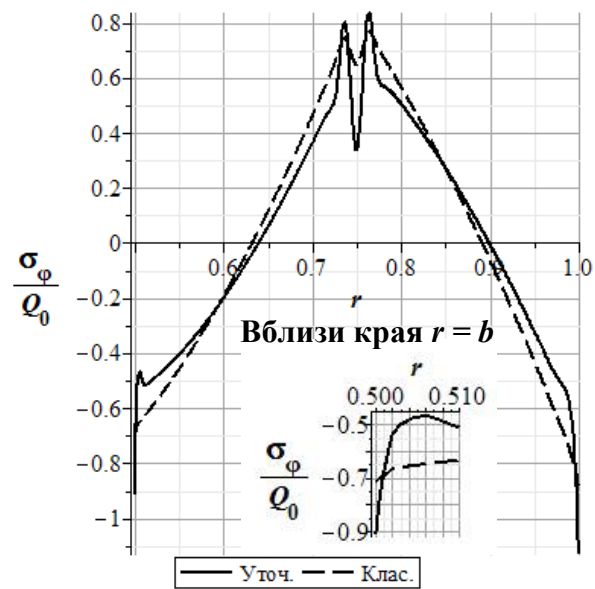


Рис. 3.21. Изменение  $\sigma_\phi$  по радиусу пластины

В этом случае, в зоне нагрузки по синусоидальному закону, значения напряжений, определенных по уточненной и классической теориям, отличаются. Скачки напряжений происходят из-за влияния синусоидальной локальной нагрузки. Максимальное рассогласование результатов расчета имеет место (рис. 3.20, 3.21) при определении нормальных тангенциальных напряжений и составляет 30%.

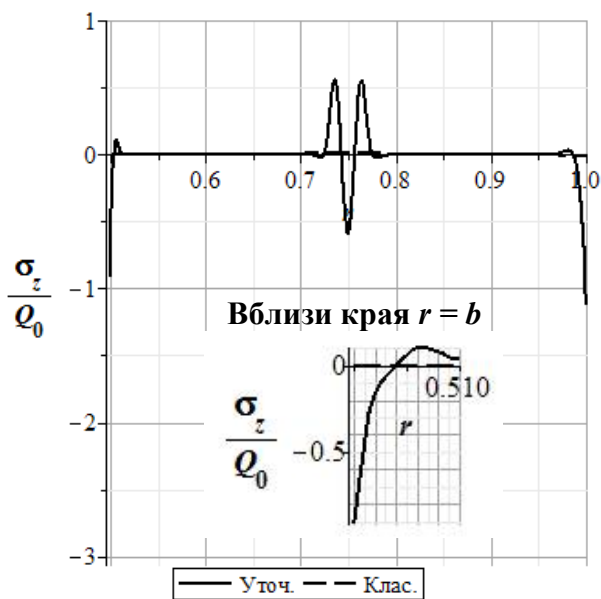


Рис. 3.22. Изменение  $\sigma_z$  по радиусу пластины

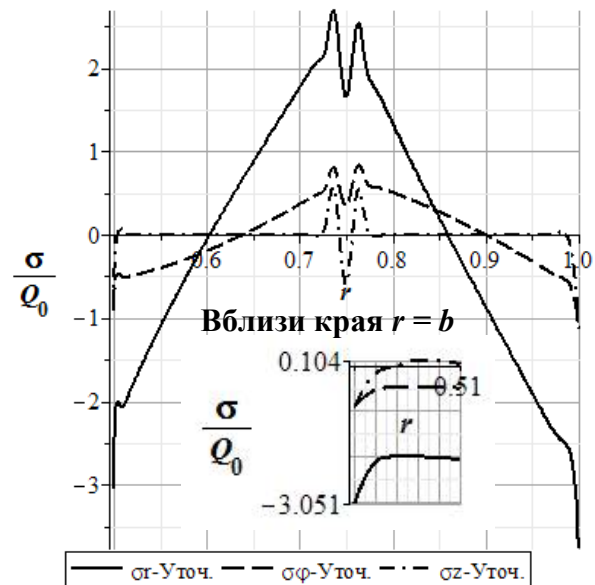


Рис. 3.23. Изменение  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\phi$ ,  $\sigma_z$  по радиусу пластины при  $k=3$

При исследовании НДС пластины с помощью предлагаемой теории, напряжения в краевой зоне существенно уточняются: нормальные тангенциальные напряжения  $\sigma_r$  - на 22,34% (рис. 3.20) и  $\sigma_\varphi$  - на 19,98% (рис. 3.21). Отметим, что уточненные напряжения “погранслоя” в зоне жестко заземленного края оказываются меньше, чем в зоне локальной нагрузки.

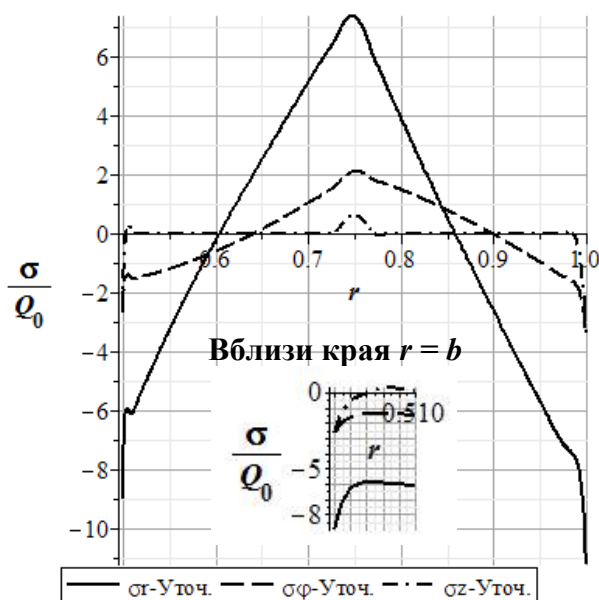


Рис. 3.24. Изменение  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  по радиусу пластины при  $k=1$

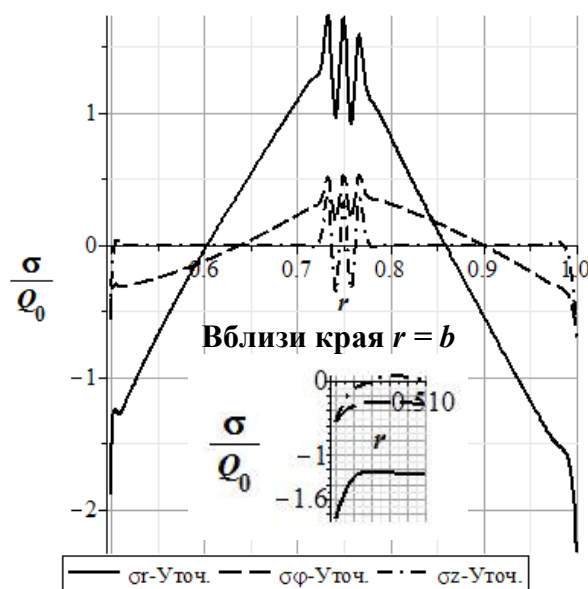


Рис. 3.25. Изменение  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\varphi$ ,  $\sigma_z$  по радиусу пластины при  $k=5$

Максимальные поперечные нормальные и касательные напряжения  $\sigma_z$ , соответствующие уточненной теории, в зоне нагрузки пластины оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения (рис. 3.22). Здесь надо отметить, что поперечные нормальные напряжения  $\sigma_z$ , определяемые по классической теории, пренебрежимо малы, а по уточненной теории составляют около 30% от максимальных изгибных напряжений  $\sigma_r$ . (рис. 3.20, 3.22).

На рис. 3.23 - 3.25 показаны результаты расчета относительных нормальных напряжений пластины, жестко заземленной на двух концах, для различного числа полуволн  $k = 1,3,5$  соответственно. Анализ полученных результатов показывает, что число полуволн  $k$  существенно влияет на НДС пластины.



### 3.5. Сравнение результатов расчета НДС с данными классической и другим вариантам уточненной теории

Для сравнения полученных результатов с данными классической теории и другого варианта уточненной теории [104], рассмотрим пластины постоянной толщины (угол  $\alpha = 0$ ,  $h_0 = h_m = 0,01(м)$ ) с жестко защемленными краями  $r=b$ ,  $r=a$ . Задача определения НДС круглой пластины по классической теории может быть решена с использованием вариационно-асимптотического метода, изложенного в работе [104]. Графики напряжений  $\sigma_z$  показаны на рисунках 3.26.

Таблица 3.2

	<b>В работе [104]</b>	<b>В этой работе</b>
$\sigma_z^{Уточ} / \sigma_r^{Уточ}$	28%	30%

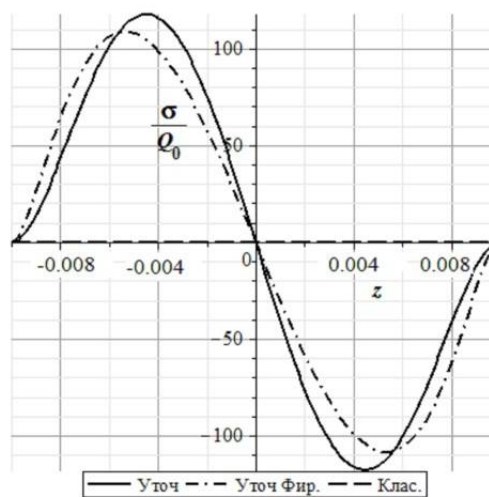


Рис. 3.26. Изменение  $\sigma_z$  по радиусу пластины

Сравнение результатов по двум вариантам уточненной теории показало, что максимальные величины напряжения  $\sigma_z$  практически совпадают, также рассогласование составляет около 2% (Таб. 3.2). Это подтверждает достоверность представленной в диссертации математической модели.

### 3.6. Выводы к третьей главе

1. На основании трехмерных уравнений теории упругости и вариационного принципа Лагранжа построена и решена краевая задача уточненной теории круглых пластин с симметрично изменяющейся по произвольному закону толщиной в радиальном направлении. Сформулированы краевая задача и соответствующие граничные условия, количество которых соответствует порядку системы дифференциальных уравнений.

2. Краевая задача круглой пластины приведена к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующих граничных условий с помощью тригонометрических рядов.

3. С помощью метода конечных разностей и матричной прогонки получены численные решения сформулированной краевой задачи для различных вариантов изменения толщины пластины и внешней нагрузки.

4. Разработан алгоритм определения НДС круглой пластины, при котором удовлетворяются уравнения равновесия теории упругости во всех внутренних точках пластины и граничные условия на всей поверхности пластины.

5. Проведено сравнение результатов расчета НДС круглых пластин при использовании уточненной и классической теорий. Установлено, что при исследовании НДС в краевых зонах пластины следует использовать уточненную теорию, так как в них максимальные напряжения существенно уточняются. Поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, в краевой зоне («пограничный слой») оказываются одного порядка с максимальными величинами основного изгибного напряжения.

6. Показано, что напряжения «погранслоя» в зоне локального нагрузки пластины могут существенно отличаться (примерно в 1,5 раза) от аналогичных напряжений в зоне жестко защемленного края пластины.

## ГЛАВА IV. НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ ТЕРМОМЕХАНИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ

В данной главе рассматриваются круглые и кольцевые пластины переменной толщины, находящиеся при совместном действии силовой осесимметричной нагрузки и температурного нагрева. Искомые перемещения пластины по нормальной к её срединной плоскости координате аппроксимируются полиномами на две степени выше по сравнению с классической теорией типа Киргофа-Лява. На основании трехмерных уравнений теории упругости и вариационного принципа Лагранжа построена уточненная математическая модель НДС в краевой зоне рассматриваемых пластин. Математическая модель представляет собой систему двухмерных дифференциальных уравнений в перемещениях с переменными коэффициентами и естественные граничные условия на краях пластины.

В качестве примера рассматривается кольцевая пластина с линейно изменяющейся толщиной при условии равномерного распределения нагрузки и температуры. Решение краевой задачи осуществляется приведением системы двухмерных дифференциальных уравнений к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью тригонометрических рядов по окружной координате. Далее к полученной системе уравнений применяется метод конечных разностей. Дан анализ влияния температуры на её напряженное состояние.

### 4.1. Построение уравнений уточненной теории

Рассматривается круглая изотропная пластина с симметричной относительно срединной плоскости толщиной, нагруженной поперечной распределенной нагрузкой  $q(r, \varphi)$  при наличии перепада температур по поверхностям пластины  $T(r, \varphi)$ , отнесенной к безразмерной цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  (рис. 4.1). Обозначим через  $a$  и  $b$  внешний и

внутренний радиусы пластины, а через  $2h(r)$  - её переменную толщину. Внешний и внутренний края пластины  $r = a$ ,  $r = b$ , могут быть свободными, шарнирно опертыми и жестко защемленными.

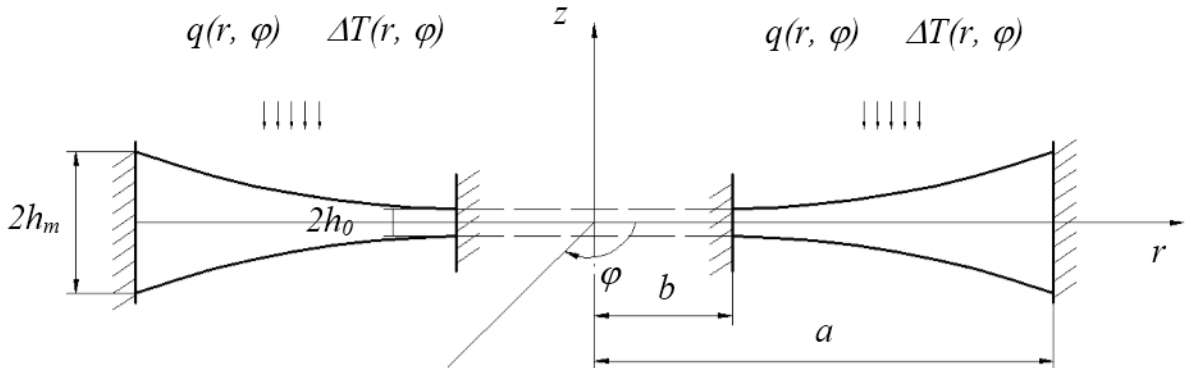


Рис. 4.1. Круглая пластина с отверстием

Для описания НДС круглой пластины используются уравнения трехмерной теории упругости в цилиндрической системе координат. Аналогично третьей главе диссертации, полагаем, что перемещения  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  пластины аппроксимируются полиномами по нормальной координате

$$\begin{aligned}
 U_1(r, \varphi, z) &= u_0(r, \varphi) + u_1(r, \varphi)z + u_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!} + u_3(r, \varphi)\frac{z^3}{3!}, \\
 U_2(r, \varphi, z) &= v_0(r, \varphi) + v_1(r, \varphi)z + v_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!} + v_3(r, \varphi)\frac{z^3}{3!}, \\
 U_3(r, \varphi, z) &= w_0(r, \varphi) + w_1(r, \varphi)z + w_2(r, \varphi)\frac{z^2}{2!}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Предположим, что верхняя поверхность пластины имеет температуру  $T_0(r, \varphi)$ , а нижняя поверхность  $-T_1(r, \varphi)$ . При этом будем считать, что перепад температуры  $T = T_1 - T_0$  таков, что нагрев не изменяет механических свойств материала пластины. Полные деформации от суммы нагрузок и температурных воздействий представляются в виде

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_r &= \varepsilon_r(q) + \varepsilon_r(T), \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\varphi(q) + \varepsilon_\varphi(T), \quad \varepsilon_z = \varepsilon_z(q) + \varepsilon_z(T), \\
 \gamma_{r\varphi} &= \gamma_{r\varphi}(q) + \gamma_{r\varphi}(T), \quad \gamma_{\varphi z} = \gamma_{\varphi z}(q) + \gamma_{\varphi z}(T), \quad \gamma_{zr} = \gamma_{zr}(q) + \gamma_{zr}(T),
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

где  $\varepsilon_r(q), \varepsilon_\varphi(q), \varepsilon_z(q), \gamma_{r\varphi}(q), \gamma_{\varphi z}(q), \gamma_{rz}(q)$  - деформации от механической нагрузки и  $\varepsilon_r(T), \varepsilon_\varphi(T), \varepsilon_z(T), \gamma_{r\varphi}(T), \gamma_{\varphi z}(T), \gamma_{rz}(T)$  - деформации от температурных воздействий.

При перепаде  $T(r, \varphi)$  температур тела, деформации определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon_r(T) = \varepsilon_\varphi(T) = \varepsilon_z(T) = \alpha_T T, \quad \gamma_{r\varphi}(T) = \gamma_{\varphi z}(T) = \gamma_{rz}(T) = 0,$$

где  $\alpha_T$  - коэффициент температурного расширения материала.

Геометрические уравнения трехмерной теории упругости принимаются в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial U_1}{\partial r}, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} + U_1 \right), \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U_3}{\partial z}, \\ \gamma_{r\varphi} &= r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U_2}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi}, \quad \gamma_{rz} = \frac{\partial U_3}{\partial r} + \frac{\partial U_1}{\partial z}, \quad \gamma_{\varphi z} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_3}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_2}{\partial z}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

С учетом формул (4.2), (4.3) выражения для деформаций записываются как

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \sum_{i=0}^3 \frac{\partial u_i}{\partial r} \frac{z^i}{i!} + \alpha T, \quad \varepsilon_\varphi = \frac{1}{r} \left( \sum_{i=0}^3 \frac{\partial v_i}{\partial \varphi} \frac{z^i}{i!} + \sum_{i=0}^3 u_i \frac{z^i}{i!} \right) + \alpha T, \quad \varepsilon_z = w_1 + w_2 z + \alpha T, \\ \gamma_{r\varphi} &= \sum_{i=0}^3 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_i}{\partial r} - \frac{1}{r} v_i \right) \frac{z^i}{i!}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{rz} &= \left( u_1 + \frac{\partial w_0}{\partial r} \right) + \left( u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) z + \left( u_3 + \frac{\partial w_2}{\partial r} \right) \frac{z^2}{2!}, \\ \gamma_{\varphi z} &= \left( v_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) + \left( v_2 + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial \varphi} \right) z + \left( v_3 + \frac{1}{r} \frac{\partial w_2}{\partial \varphi} \right) \frac{z^2}{2!}. \end{aligned}$$

Физические уравнения трехмерной теории упругости для круглой пластины имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= (2G_0 + \lambda)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z, \quad \sigma_\varphi = \lambda\varepsilon_r + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_\varphi + \lambda\varepsilon_z, \\ \sigma_z &= \lambda\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\varphi + (2G_0 + \lambda)\varepsilon_z, \quad \tau_{r\varphi} = G_0\gamma_{r\varphi}, \quad \tau_{rz} = G_0\gamma_{rz}, \quad \tau_{\varphi z} = G_0\gamma_{\varphi z}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где коэффициенты  $G_0, \lambda$  представляют собой упругие постоянные изотропного материала пластины.

Дифференциальные уравнения равновесия и естественные граничные условия находим на основании применения вариационного принципа Лагранжа к уточненному выражению полной энергии пластины

$$\begin{aligned} \delta U - \delta A = & \iiint (\sigma_r \delta \varepsilon_r + \sigma_\varphi \delta \varepsilon_\varphi + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{r\varphi} \delta \gamma_{r\varphi} + \tau_{rz} \delta \gamma_{rz} + \tau_{\varphi z} \delta \gamma_{\varphi z}) dr d\varphi dz - \\ & - \iint q(r, \varphi) \delta \left[ w_0(r, \varphi) + w_1(r, \varphi)h + w_2(r, \varphi) \frac{h^2}{2} \right] dr d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Из равенства (4.6) с учетом соотношений (4.4), (4.5) получим систему головных уравнений уточненной теории рассматриваемых пластин

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} N_\varphi &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} N_{r\varphi} &= 0, \\ \frac{\partial Q_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial Q_{\varphi z}}{\partial \varphi} &= p_z^0, \\ \frac{\partial M_r^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r\varphi}^i}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} M_\varphi^i - H_{rz}^i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial M_\varphi^i}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{r\varphi}^i}{\partial r} + \frac{1}{r} M_{r\varphi}^i - H_{\varphi z}^i &= 0, \quad i = 1, 2, 3 \\ \frac{\partial M_{rz}^1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi z}^1}{\partial \varphi} - H_z^1 &= p_z^1, \\ \frac{\partial M_{rz}^2}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{\varphi z}^2}{\partial \varphi} - H_z^2 &= p_z^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} (N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}, Q_{rz}, Q_{\varphi z}) &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}) dz, \\ (M_r^i, M_\varphi^i, M_{r\varphi}^i, M_{rz}^i, M_{\varphi z}^i) &= \int_{-h}^{+h} (\sigma_r, \sigma_\varphi, \tau_{r\varphi}, \tau_{rz}, \tau_{\varphi z}) \frac{z^i}{i!} dz, \\ (H_{rz}^i, H_{\varphi z}^i, Q_z^i) &= \int_{-h}^{+h} (\tau_{rz}, \tau_{\varphi z}, \sigma_z) \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} dz, \quad p_z^i = qh^i / i!, \end{aligned}$$

где  $N_r, N_\varphi, N_{r\varphi}, Q_{rz}, Q_{\varphi z}, M_r^i, M_\varphi^i, M_{r\varphi}^i, M_{rz}^i, M_{\varphi z}^i, H_{rz}^i, H_{\varphi z}^i, Q_z^i$  - обобщенные внутренние силовые факторы.

Таким образом, 11 уравнений (4.7) представляют собой полную систему двумерных уравнений, содержащих 11 обобщенных перемещений  $u_i, v_i, w_j$ ,  $i = \overline{0,3}, j = \overline{0,2}$ . С помощью соотношений (4.1), (4.3), (4.4), (4.5) уравнения (4.7) могут быть выражены через искомые функции  $u_i, v_i, w_j$  и тогда будут иметь общий 22-й порядок.

*Определение краевых условий.*

Соответствующие граничные условия на краях  $r = a$  и  $r = b$  представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} N_r = \bar{N}_r \vee u_0 = \bar{u}_0, \quad N_{r\varphi} = \bar{N}_{r\varphi} \vee v_0 = \bar{v}_0, \quad Q_{rz} = \bar{Q}_{rz} \vee w_0 = \bar{w}_0, \\ M_r^i = \bar{M}_r^i \vee u_i = \bar{u}_i, \quad M_{r\varphi}^i = \bar{M}_{r\varphi}^i \vee v_i = \bar{v}_i, \quad i = 1, 2, 3, \\ M_{rz}^i = \bar{M}_{rz}^i \vee w_i = \bar{w}_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где верхней чертой обозначены значения внешних силовых факторов, действующих по боковым граням пластины.

Очевидно, что краевые условия (4.8) охватывают все разнообразие возможных условий закрепления круглых пластин, а их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений (4.7).

*Алгоритм решения задачи.* Из уравнений (4.7) с учетом выражений (4.1), (4.3), (4.4), (4.5) находим систему дифференциальных уравнений в частных производных 22-го порядка относительно 11 обобщенных перемещений  $u_i, v_i, w_j$ ,  $i = \overline{0,3}, j = \overline{0,2}$ . Подстановкой найденных перемещений в формулы (4.4) находятся деформации круглых пластин. С помощью соотношений (4.5) получим выражения тангенциальных напряжений пластины. Проинтегрировав уравнения равновесия пластины по толщине в интервале от  $-h$  до  $z$ , находим выражения, определяющие поперечные напряжения

$$\begin{aligned}\tau_{rz} &= -\int_{-h}^z \left( \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) dz, \quad \tau_{\varphi z} = -\int_{-h}^z \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} \right) dz, \\ \sigma_z &= -\int_{-h}^z \left( \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \sigma_\varphi \right) dz.\end{aligned}\tag{4.9}$$

С помощью данного алгоритма, построена математическая модель НДС круглых пластин при термомеханическом нагружении. При этом удовлетворяются уравнения равновесия теории упругости во всех внутренних точках пластины и выполняются граничные условия на всей поверхности пластины.

#### 4.2. Приведение краевой задачи к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Подставляя формулы “деформации-смещения” (4.4) в физические уравнения (4.5), получим

$$\begin{aligned}\sigma_r &= (2G_0 + \lambda) \frac{\partial}{\partial r} \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \lambda \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) \right] + \lambda (w_1 + w_2 z), \\ \sigma_\varphi &= \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) + (2G_0 + \lambda) \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) \right] + \lambda (w_1 + w_2 z), \\ \sigma_z &= \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \lambda \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) \right] + (2G_0 + \lambda) (w_1 + w_2 z), \\ \tau_{r\varphi} &= (2G_0 + \lambda) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( u_0 + u_1 z + u_2 \frac{z^2}{2!} + u_3 \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r^2} \left( v_0 + v_1 z + v_2 \frac{z^2}{2!} + v_3 \frac{z^3}{3!} \right) \right],\end{aligned}\tag{4.10}$$



$$\tau_{rz} = \frac{1}{2}(2G_0 + \lambda) \left[ (u_1 + u_2 z + u_3 \frac{z^2}{2!}) + \frac{\partial}{\partial r} (w_0 + w_1 z + w_2 \frac{z^2}{2!}) \right],$$

$$\tau_{\varphi z} = \frac{1}{2}(2G_0 + \lambda) \left[ (v_1 + v_2 z + v_3 \frac{z^2}{2!}) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (w_0 + w_1 z + w_2 \frac{z^2}{2!}) \right].$$

Подставляя (4.10) в (4.7), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} & (K_1^{u00} + K_1^{u01} \frac{\partial}{\partial r} + K_1^{u011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_1^{u022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_0 + K_1^{v02} \frac{\partial^2}{\partial \varphi} v_0 + K_1^{v012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_0 + \\ & + (K_1^{u20} + K_1^{u21} \frac{\partial}{\partial r} + K_1^{u211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_1^{u222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_2 + K_1^{v22} \frac{\partial^2}{\partial \varphi} v_2 + K_1^{v212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_2 + \\ & + K_1^{w10} w_1 + K_1^{w11} \frac{\partial}{\partial r} w_1 + K_1^{q13p0} \cdot q_{13p} + K_1^{q13m0} \cdot q_{13m} = 0 \\ & (K_2^{u10} + K_2^{u11} \frac{\partial}{\partial r} + K_2^{u111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_2^{u122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_1 + K_2^{v12} \frac{\partial^2}{\partial \varphi} v_1 + K_2^{v112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_1 + \\ & + (K_2^{u30} + K_2^{u31} \frac{\partial}{\partial r} + K_2^{u311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_2^{u322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_3 + K_2^{v32} \frac{\partial^2}{\partial \varphi} v_3 + K_2^{v312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_3 + \\ & + K_2^{w20} w_2 + K_2^{w21} \frac{\partial}{\partial r} w_2 + K_2^{w01} \frac{\partial}{\partial r} w_0 = 0 \\ & (K_3^{u00} + K_3^{u01} \frac{\partial}{\partial r} + K_3^{u011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_3^{u022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_0 + K_3^{v02} \frac{\partial^2}{\partial \varphi} v_0 + K_3^{v012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_0 + \\ & + (K_3^{u20} + K_3^{u21} \frac{\partial}{\partial r} + K_3^{u211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_3^{u222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_2 + K_3^{v22} \frac{\partial^2}{\partial \varphi} v_2 + K_3^{v212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_2 + \\ & + K_3^{w20} w_1 + K_3^{w21} \frac{\partial}{\partial r} w_1 = 0 \\ & (K_4^{u10} + K_4^{u11} \frac{\partial}{\partial r} + K_4^{u111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_4^{u122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_1 + K_4^{v12} \frac{\partial^2}{\partial \varphi} v_1 + K_4^{v112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_1 + \\ & + (K_4^{u30} + K_4^{u31} \frac{\partial}{\partial r} + K_4^{u311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_4^{u322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2})u_3 + K_4^{v32} \frac{\partial^2}{\partial \varphi} v_3 + K_4^{v312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} v_3 + \\ & + K_4^{w20} w_2 + K_4^{w21} \frac{\partial}{\partial r} w_2 + K_4^{w01} \frac{\partial}{\partial r} w_0 = 0 \\ & (K_5^{u02} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_5^{u012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi})u_0 + K_5^{v011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_0 + K_5^{v022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_0 + \\ & + (K_5^{u22} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_5^{u212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi})u_2 + K_5^{v211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_2 + K_5^{v222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_2 + K_5^{w12} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (K_6^{u12} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_6^{u112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_1 + K_6^{v10} v_1 + K_6^{v111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_1 + K_6^{v122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_1 + \\
& + (K_6^{u32} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_6^{u312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_3 + K_6^{v30} v_3 + K_6^{v311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_3 + K_6^{v322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_3 + \\
& \quad + K_6^{w02} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_0 + K_6^{w22} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_2 = 0 \\
& (K_7^{u02} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_7^{u012} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_0 + K_7^{v011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_0 + K_7^{v022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_0 + \\
& + (K_7^{u22} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_5^{u212} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_2 + K_7^{v20} v_2 + K_7^{v211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_2 + K_7^{v222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_2 + K_7^{w12} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_1 = 0 \\
& (K_8^{u12} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_8^{u112} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_1 + K_8^{v10} v_1 + K_8^{v111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_1 + K_8^{v122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_1 + \\
& + (K_8^{u32} \frac{\partial}{\partial \varphi} + K_8^{u312} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}) u_3 + K_8^{v30} v_3 + K_8^{v311} \frac{\partial^2}{\partial r^2} v_3 + K_8^{v322} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v_3 + \quad (4.11) \\
& \quad + K_8^{w02} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_0 + K_8^{w22} \frac{\partial}{\partial \varphi} w_2 = 0 \\
& (K_9^{w011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_9^{w022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_0 + (K_9^{w211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_9^{w222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_2 + \\
& + K_9^{u11} \frac{\partial}{\partial r} u_1 + K_9^{v12} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_1 + K_9^{u31} \frac{\partial}{\partial r} u_3 + K_9^{v32} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_3 + K_9^{q33p0} \cdot q_{33p} + K_9^{q33m0} \cdot q_{33m} = 0 \\
& (K_{10}^{w10} + K_{10}^{w111} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{10}^{w122} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_1 + (K_{10}^{w211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{10}^{w222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_2 + K_{10}^{u00} u_0 + \\
& + K_{10}^{u01} \frac{\partial}{\partial r} u_0 + K_{10}^{v02} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_0 + K_{10}^{u20} u_2 + K_{10}^{u21} \frac{\partial}{\partial r} u_2 + K_{10}^{v22} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_2 + \\
& \quad + K_{10}^{q33p0} \cdot q_{33p} + K_{10}^{q33m0} \cdot q_{33m} = 0 \\
& (K_{11}^{w011} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{11}^{w022} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_0 + (K_{11}^{w20} + K_{11}^{w211} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + K_{11}^{w222} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}) w_2 + K_{11}^{u10} u_1 + \\
& + K_{11}^{u11} \frac{\partial}{\partial r} u_1 + K_{11}^{v12} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_1 + K_{11}^{u30} u_3 + K_{11}^{u31} \frac{\partial}{\partial r} u_3 + K_{11}^{v32} \frac{\partial}{\partial \varphi} v_3 + \\
& \quad + K_{11}^{q33p0} \cdot q_{33p} + K_{11}^{q33m0} \cdot q_{33m} = 0
\end{aligned}$$

Здесь применяются следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
K_1^{u00} &= \frac{2Eh(1 + \mu + \alpha_T Tr + 2\mu\alpha_T Tr)}{r^2(\mu - 1)(\mu + 1)}, K_1^{u01} = \frac{2Eh\alpha_T T(1 + 2\mu)}{r(\mu - 1)(\mu + 1)}, \\
K_1^{u011} &= -\frac{2Eh}{(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_1^{u022} = \frac{2Eh}{r^2(\mu + 1)}, K_1^{u20} = \frac{1}{3} \frac{Eh(h^2\mu + h^2 + 6\alpha_T Tr + 12\mu\alpha_T Tr)}{r^2(\mu - 1)(\mu + 1)}, \\
K_1^{u222} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu + 1)}, K_1^{u211} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_1^{u21} = \frac{2Eh\alpha_T T(2\mu + 1)}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_1^{v02} &= \frac{2Eh(2 + \alpha_T Tr + 2\mu\alpha_T Tr)}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_1^{v012} = -\frac{2Eh}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_1^{v212} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_1^{v21} = \frac{2}{3} \frac{Eh(h^2 + 3\alpha_T Tr + 6\mu\alpha_T Tr)}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_1^{w10} &= \frac{2Eh(\alpha_T T + 2\mu\alpha_T T + \mu)}{r(1 + \mu)(-1 + \mu)}, K_1^{w11} = -\frac{2Eh\mu}{(1 + \mu)(-1 + \mu)}, \\
K_2^{u31} &= 0, K_2^{w21} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(3\mu - 1)}{(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_2^{v312} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_2^{u311} &= -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{(\mu + 1)(-\mu - 1)}, K_2^{u111} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_2^{v32} = \frac{2}{15} \frac{Eh^5}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_2^{u30} &= 0, K_2^{u322} = \frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r^2(1 + \mu)}, K_2^{u11} = 0, K_2^{v112} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_2^{w20} &= \frac{2}{3} \frac{Eh^3\mu}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_2^{u10} = -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{(1 + \mu)(-1 + \mu)}, K_2^{w01} = -\frac{2Eh}{\mu + 1}, \\
K_2^{v12} &= \frac{4}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_2^{u122} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu + 1)}, \\
K_3^{u211} &= -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_3^{u011} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_3^{w11} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(3\mu - 2)}{(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_3^{u21} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3\alpha_T T(2\mu + 1)}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_3^{v212} = -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_3^{v22} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^3(3h^2 + 5\alpha_T Tr + 10\mu\alpha_T Tr)}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_3^{u222} = \frac{1}{10} \frac{Eh^5}{r^2(1 + \mu)}, \\
K_3^{u20} &= \frac{1}{30} \frac{Eh^3(3h^2\mu - 20\mu r^2 + 3h^2 + 20r^2 + 10\alpha_T Tr + 20\mu\alpha_T Tr)}{r^2(\mu + 1)(\mu - 1)}, \\
K_3^{u01} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3\alpha_T T(2\mu + 1)}{r(\mu + 1)(\mu - 1)}, K_3^{v012} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu + 1)(\mu - 1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_3^{v02} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3(2 + \alpha_T Tr + 2\mu\alpha_T T)}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, & K_3^{u00} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3(1 + \mu + \alpha_T Tr + 2\mu\alpha_T T)}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_3^{u022} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r^2(\mu+1)}, & K_3^{w10} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3(\alpha_T T + 2\mu\alpha_T T + \mu)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_4^{u10} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^3(5r^2 - 5\mu r^2 + h^2\mu + h^2)}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, & K_4^{u30} &= \frac{1}{630} \frac{Eh^5(5h^2 - 63\mu r^2 + 63r^2 + 5h^2\mu)}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_4^{w20} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^5\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_4^{v312} &= \frac{1}{126} \frac{Eh^7(\mu r - r - \mu)}{(\mu+1)(\mu-1)}, & K_4^{u322} &= \frac{1}{126} \frac{Eh^7}{r(\mu+1)}, \\
K_4^{v112} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^5(\mu r - r - \mu)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_4^{u122} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)}, & K_4^{u111} &= -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_4^{u311} &= -\frac{1}{126} \frac{Eh^7}{(\mu+1)(\mu-1)}, & K_4^{w21} &= -\frac{1}{30} \frac{Eh^5(5\mu - 3)}{(\mu+1)(\mu-1)}, & K_4^{w01} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(\mu+1)}, \\
K_4^{v32} &= -\frac{1}{126} \frac{Eh^7(\mu r - \mu - r - 1)}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, & K_4^{v12} &= -\frac{1}{15} \frac{Eh^5(\mu r - \mu - r - 1)}{r^2(\mu+1)(\mu-1)}, & K_4^{u11} &= 0, & K_4^{u31} &= 0, \\
K_5^{u212} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(\mu r - \mu + 1)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_5^{v211} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{\mu+1}, & K_5^{u22} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_5^{v222} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_5^{u012} &= -\frac{2Eh(\mu r - \mu + 1)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_5^{v011} &= \frac{2Eh}{\mu+1}, \\
K_5^{w12} &= -\frac{2Eh\mu}{(\mu+1)(\mu-1)}, & K_5^{u02} &= -\frac{2Eh}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_5^{v022} &= -\frac{2Eh}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_6^{u312} &= -\frac{1}{15} \frac{Eh^5(\mu r - \mu + 1)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_6^{v311} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^5}{\mu+1}, & K_6^{u32} &= -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_6^{v322} &= -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_6^{v30} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{\mu+1}, & K_6^{u112} &= -\frac{2}{3} \frac{Eh^3(\mu r - \mu + 1)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_6^{v111} &= \frac{2}{3} \frac{2Eh^3}{\mu+1}, & K_6^{w22} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(2\mu r + \mu - 1)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_6^{u12} &= -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_6^{v122} &= -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_6^{v10} &= -\frac{2Eh}{\mu+1}, & K_6^{w02} &= -\frac{2Eh}{r(\mu+1)}, \\
K_7^{u212} &= -\frac{1}{10} \frac{Eh^5(\mu r - \mu + 1)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_7^{v211} &= \frac{1}{10} \frac{Eh^5}{\mu+1}, & K_7^{u222} &= -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_7^{u22} &= -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)(\mu-1)}, & K_7^{v011} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{\mu+1}, & K_7^{w12} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(\mu r + 2\mu - 2)}{r(\mu+1)(\mu-1)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_7^{v20} &= -\frac{2}{3} \frac{Eh^3}{\mu+1}, \quad K_7^{u12} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3(\mu r - \mu + 1)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_7^{v022} &= -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_7^{u02} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_8^{u312} &= -\frac{1}{126} \frac{Eh^7(\mu r - \mu + 1)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_8^{v311} = \frac{1}{126} \frac{Eh^7}{\mu+1}, \quad K_8^{u32} = -\frac{1}{126} \frac{Eh^7}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_8^{v322} &= -\frac{1}{126} \frac{Eh^7}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_8^{v30} = -\frac{1}{10} \frac{Eh^5}{\mu+1}, \quad K_8^{u112} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5(\mu r - \mu + 1)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_8^{v111} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^5}{\mu+1}, \quad K_8^{w22} = -\frac{1}{30} \frac{Eh^5(2\mu r + 3\mu - 3)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_8^{u12} = -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_8^{v122} &= -\frac{1}{15} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_8^{v10} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{\mu+1}, \quad K_8^{w02} = -\frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(\mu+1)r}, \\
K_9^{u31} &= \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1+\mu}, \quad K_9^{w211} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1+\mu}, \quad K_9^{v32} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{1+\mu}, \quad K_9^{w222} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{(1+\mu)r}, \quad K_9^{u11} = \frac{2Eh}{1+\mu}, \\
K_9^{v12} &= \frac{2Eh}{1+\mu}, \quad K_9^{w011} = \frac{2Eh}{1+\mu}, \quad K_9^{w022} = \frac{2Eh}{(1+\mu)r}, \quad K_9^{q33p} = 1, \quad K_9^{q33m} = -1, \\
K_{10}^{u21} &= \frac{1}{3} \frac{2Eh^3(3\mu - 2)}{(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_{10}^{w111} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{\mu+1}, \quad K_{10}^{v22} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3(2\mu r + \mu - 2r)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_{10}^{u20} &= \frac{1}{3} \frac{2Eh(h^2\mu + 6\alpha_T Tr + 12\mu\alpha_T Tr)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_{10}^{w122} = \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)}, \quad K_{10}^{v02} = \frac{2Eh\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_{10}^{u00} &= \frac{2Eh(\alpha_T Tr + 2\mu\alpha_T Tr + \mu)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_{10}^{u01} = \frac{2Eh\mu}{(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_{10}^{w10} &= \frac{2Eh(1 + \alpha_T T + 2\mu\alpha_T T)}{(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_{10}^{q33p0} = h, \quad K_{10}^{q33m0} = h, \\
K_{11}^{u31} &= \frac{1}{30} \frac{Eh^5(5\mu - 3)}{(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_{11}^{w211} = \frac{1}{10} \frac{Eh^5}{\mu+1}, \quad K_{11}^{v32} = \frac{1}{30} \frac{Eh^5(3\mu r - 3r + 2\mu)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_{11}^{u30} &= \frac{1}{15} \frac{Eh^5\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_{11}^{u11} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3(3\mu - 1)}{(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_{11}^{w222} = \frac{1}{10} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)}, \\
K_{11}^{w20} &= \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_{11}^{w011} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{\mu+1}, \quad K_{11}^{v12} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3(\mu r - r + 2\mu)}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \\
K_{11}^{u10} &= \frac{2}{3} \frac{Eh^3\mu}{r(\mu+1)(\mu-1)}, \quad K_{11}^{w022} = \frac{1}{3} \frac{Eh^3}{r(1+\mu)}, \quad K_{11}^{q33p0} = \frac{1}{2} h^2, \quad K_{11}^{q33m0} = -\frac{1}{2} h^2.
\end{aligned}$$

Граничные условия (4.8) на краях  $r=a$  и  $r=b$  можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
u_0 &= \bar{u}_0 \vee -\frac{1}{3} \frac{Eh}{r(\mu^2-1)} (h^2 r \frac{\partial u_2}{\partial r} + h^2 \mu \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + h^2 \mu u_2 + 6r \frac{\partial u_0}{\partial r} + 6\mu \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + \\
&+ 6\mu u_0 + 6\mu r w_1 + 6\alpha_T T r) = \bar{N}_r, \\
v_0 &= \bar{v}_0 \vee \frac{1}{3} \frac{Eh}{r(\mu+1)} (h^2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + h^2 \frac{\partial v_2}{\partial r} - h^2 v_2 + 6 \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} + 6 \frac{\partial v_0}{\partial r} - 6v_0) = \bar{N}_{r\varphi}, \\
w_0 &= \bar{w}_0 \vee \frac{1}{3} \frac{Eh}{\mu+1} (h^2 u_3 + h^2 \frac{\partial w_2}{\partial r} + 6u_1 + 6 \frac{\partial w_0}{\partial r}) = \bar{Q}_{rz}, \\
u_1 &= \bar{u}_1 \vee -\frac{1}{15} \frac{Eh^3}{r(\mu^2-1)} (h^2 r \frac{\partial u_3}{\partial r} + h^2 \mu \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} + h^2 \mu u_3 + 10r \frac{\partial u_1}{\partial r} + 10\mu \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \\
&+ 10\mu u_1 + 10r\mu w_2) = \bar{M}_r^1, \\
u_2 &= \bar{u}_2 \vee -\frac{1}{30} \frac{Eh^3}{r(\mu^2-1)} (3h^2 r \frac{\partial u_2}{\partial r} + 3h^2 \mu \frac{\partial v_2}{\partial \varphi} + 3h^2 \mu u_2 + \\
&+ 10r \frac{\partial u_0}{\partial r} + 10\mu \frac{\partial v_0}{\partial \varphi} + 10\mu u_0 + 10r\mu w_1 + 10\alpha_T T r) = \bar{M}_r^2, \\
u_3 &= \bar{u}_3 \vee -\frac{1}{630} \frac{Eh^5}{r(\mu^2-1)} (5h^2 r \frac{\partial u_3}{\partial r} + 5h^2 \mu \frac{\partial v_3}{\partial \varphi} + 5h^2 \mu u_3 + 42r \frac{\partial u_1}{\partial r} + 42\mu \frac{\partial v_1}{\partial \varphi} + \\
&+ 42\mu u_1 + 42\mu w_2) = \bar{M}_r^3, \\
v_1 &= \bar{v}_1 \vee \frac{1}{15} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)} (h^2 \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + h^2 \frac{\partial v_3}{\partial r} - h^2 v_3 + 10 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + 10 \frac{\partial v_1}{\partial r} - 10v_1) = \bar{M}_{r\varphi}^1, \\
v_2 &= \bar{v}_2 \vee \frac{1}{30} \frac{Eh^3}{r(\mu+1)} (3h^2 \frac{\partial u_2}{\partial \varphi} + 3h^2 \frac{\partial v_2}{\partial r} - 3h^2 v_2 + 10 \frac{\partial u_0}{\partial \varphi} + 10 \frac{\partial v_0}{\partial r} - 10v_0) = \bar{M}_{r\varphi}^2, \\
v_3 &= \bar{v}_3 \vee \frac{1}{630} \frac{Eh^5}{r(\mu+1)} (5h^2 \frac{\partial u_3}{\partial \varphi} + 5h^2 \frac{\partial v_3}{\partial r} - 5h^2 v_3 + 42 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} + 42 \frac{\partial v_1}{\partial r} - 42v_1) = \bar{M}_{r\varphi}^3, \\
w_1 &= \bar{w}_1 \vee \frac{2}{3} \frac{Eh^3}{\mu+1} (u_2 + \frac{\partial w_1}{\partial r}) = \bar{M}_{rz}^1, \\
w_2 &= \bar{w}_2 \vee \frac{1}{30} \frac{Eh^3}{\mu+1} (3h^2 u_3 + 3h^2 \frac{\partial w_2}{\partial r} + 10u_1 + 10 \frac{\partial w_0}{\partial r}) = \bar{M}_{rz}^2,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Очевидно, что граничные условия (4.12) охватывают все разнообразие возможных условий закрепления круглой пластины, а их количество полностью

соответствует порядку системы дифференциальных уравнений в частных производных (4.11).

Сформулируем граничные условия пластины на краях пластины, воспользовавшись стандартными условиями трехмерной теории упругости:

свободный край

$$\bar{N}_r = \bar{N}_{r\varphi} = \bar{M}_r^i = \bar{M}_{r\varphi}^i = \bar{Q}_{rz} = \bar{M}_{rz}^j = 0, \quad i = 1, 2, 3, j = 1, 2; \quad (4.13a)$$

шарнирно опертый край

$$\bar{N}_r = \bar{N}_{r\varphi} = \bar{M}_r^i = \bar{M}_{r\varphi}^i = w_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, \quad (4.13б)$$

или  $\bar{N}_r = \bar{M}_r^i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2;$

жестко защемленный край

$$u_0 = u_i = v_0 = v_i = w_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2, \quad (4.13в)$$

или  $u_0 = u_i = \bar{N}_{r\varphi} = \bar{M}_{r\varphi}^i = w_j = 0, \quad i = 1, 2, 3, j = 0, 1, 2.$

Полагаем, что пластина на рис. 4.1 жестко защемлена на краях  $r = a$  и  $r = b$ . Тогда разложим нагрузку и перемещения в ряды по тригонометрическим функциям вида

$$q(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(r) \sin(m\varphi), \quad u_i(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{im}(r) \sin(m\varphi), \quad (4.14)$$

$$v_i(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} V_{im}(r) \cos(m\varphi), \quad w_j(r, \varphi) = \sum_{m=1}^{\infty} W_{jm}(r) \sin(m\varphi), \quad i = \overline{0, 3}, \quad j = \overline{0, 2}.$$

После подстановки разложений (4.14) в уравнения (4.11) и граничные условия (4.12), находим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $U_{im}, V_{im}, W_{jm}, i = \overline{0, 3}, j = \overline{0, 2}, m = 1, 2, 3, \dots$  и соответствующие граничные условия. В результате система дифференциальных уравнений равновесия пластины (4.11) представляется как

$$\begin{aligned}
& \left( K_1^{u00} + K_1^{u01} \frac{d}{dr} + K_1^{u011} \frac{d^2}{dr^2} - K_1^{u022} \cdot m^2 \right) U_{0m}(r) + \\
& + \left( K_1^{u20} + K_1^{u21} \frac{d}{dr} + K_1^{u211} \frac{d^2}{dr^2} - K_1^{u222} \cdot m^2 \right) U_{2m}(r) - \\
& - m \left( K_1^{v02} + K_1^{v012} \frac{d}{dr} \right) V_{0m}(r) - m \left( K_1^{v22} + K_1^{v212} \frac{d}{dr} \right) V_{2m}(r) + \\
& + \left( K_1^{w10} + K_1^{w11} \frac{d}{dr} \right) W_{1m}(r) = 0, \\
& \left( K_2^{u10} + K_2^{u11} \frac{d}{dr} + K_2^{u111} \frac{d^2}{dr^2} - K_2^{u122} \cdot m^2 \right) U_{1m}(r) + \\
& + \left( K_2^{u30} + K_2^{u31} \frac{d}{dr} + K_2^{u311} \frac{d^2}{dr^2} - K_2^{u322} \cdot m^2 \right) U_{3m}(r) - \\
& - m \left( K_2^{v12} + K_2^{v112} \frac{d}{dr} \right) V_{1m}(r) - m \left( K_2^{v32} + K_2^{v312} \frac{d}{dr} \right) V_{3m}(r) + \\
& + \left( K_2^{w20} + K_2^{w21} \frac{d}{dr} \right) W_{2m}(r) + K_2^{w01} \frac{d}{dr} W_{0m}(r) = 0, \\
& \left( K_3^{u00} + K_3^{u01} \frac{d}{dr} + K_3^{u011} \frac{d^2}{dr^2} - K_3^{u022} \cdot m^2 \right) U_{0m}(r) + \\
& + \left( K_3^{u20} + K_3^{u21} \frac{d}{dr} + K_3^{u211} \frac{d^2}{dr^2} - K_3^{u222} \cdot m^2 \right) U_{2m}(r) - \\
& - m \left( K_3^{v02} + K_3^{v012} \frac{d}{dr} \right) V_{0m}(r) - m \left( K_3^{v22} + K_3^{v212} \frac{d}{dr} \right) V_{2m}(r) + \\
& + \left( K_3^{w10} + K_3^{w11} \frac{d}{dr} \right) W_{1m}(r) = 0, \\
& \left( K_4^{u10} + K_4^{u11} \frac{d}{dr} + K_4^{u111} \frac{d^2}{dr^2} - K_4^{u122} \cdot m^2 \right) U_{1m}(r) + \\
& + \left( K_4^{u30} + K_4^{u31} \frac{d}{dr} + K_4^{u311} \frac{d^2}{dr^2} - K_4^{u322} \cdot m^2 \right) U_{3m}(r) - \\
& - m \left( K_4^{v12} + K_4^{v112} \frac{d}{dr} \right) V_{1m}(r) - m \left( K_4^{v32} + K_4^{v312} \frac{d}{dr} \right) V_{3m}(r) + \\
& + \left( K_4^{w20} + K_4^{w21} \frac{d}{dr} \right) W_{2m}(r) + K_4^{w01} \frac{d}{dr} W_{0m}(r) = 0,
\end{aligned} \tag{4.15}$$



$$\begin{aligned}
& m \left( K_5^{u02} + K_5^{u012} \frac{d}{dr} \right) U_{0m}(r) + m \left( K_5^{u22} + K_5^{u212} \frac{d}{dr} \right) U_{2m}(r) + \\
& + (K_5^{v011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_5^{v022}) V_{0m}(r) + (K_5^{v211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_5^{v222}) V_{2m}(r) + m \cdot K_5^{w12} W_{1m}(r) = 0, \\
& m \left( K_6^{u12} + K_6^{u112} \frac{d}{dr} \right) U_{1m}(r) + m \left( K_6^{u32} + K_6^{u312} \frac{d}{dr} \right) U_{3m}(r) + \\
& + (K_6^{v111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_6^{v122} + K_6^{v10}) V_{1m}(r) + (K_6^{v311} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_6^{v322} + K_6^{v30}) V_{3m}(r) + \\
& + m \cdot K_6^{w02} W_{0m}(r) + m \cdot K_6^{w22} W_{2m}(r) = 0, \\
& m \left( K_7^{u02} + K_7^{u012} \frac{d}{dr} \right) U_{0m}(r) + m \left( K_7^{u22} + K_7^{u212} \frac{d}{dr} \right) U_{2m}(r) + \\
& + (K_7^{v011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_7^{v022}) V_{0m}(r) + (K_7^{v211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_7^{v222} + K_7^{v20}) V_{2m}(r) \\
& + m \cdot K_7^{w12} W_{1m}(r) = 0, \\
& m \left( K_8^{u12} + K_8^{u112} \frac{d}{dr} \right) U_{1m}(r) + m \left( K_8^{u32} + K_8^{u312} \frac{d}{dr} \right) U_{3m}(r) + \\
& + (K_8^{v111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_8^{v122} + K_8^{v10}) V_{1m}(r) + (K_8^{v311} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_8^{v322} + K_8^{v30}) V_{3m}(r) \\
& + m \cdot K_8^{w02} W_{0m}(r) + m \cdot K_8^{w22} W_{2m}(r) = 0, \\
& K_9^{u11} \frac{d}{dr} U_{1m}(r) + K_9^{u31} \frac{d}{dr} U_{3m}(r) - m \cdot K_9^{v12} V_{1m}(r) - m \cdot K_9^{v32} V_{3m}(r) + \\
& + (K_9^{w011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_9^{w022}) W_{0m}(r) + (K_9^{w211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_9^{w222}) W_{2m}(r) + \\
& + K_9^{Q330} Q_{33m}(r) = 0, \\
& (K_{10}^{u01} \frac{d}{dr} + K_{10}^{u00}) U_{0m}(r) + (K_{10}^{u21} \frac{d}{dr} + K_{10}^{u20}) U_{2m}(r) - m \cdot K_{10}^{v02} V_{0m}(r) - \\
& - m \cdot K_{10}^{v22} V_{2m}(r) + (K_{10}^{w111} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{10}^{w122} + K_{10}^{w10}) W_{1m}(r) = 0, \\
& (K_{11}^{u11} \frac{d}{dr} + K_{11}^{u10}) U_{1m}(r) + (K_{11}^{u31} \frac{d}{dr} + K_{11}^{u30}) U_{3m}(r) - m \cdot K_{11}^{v12} V_{1m}(r) - \\
& - m \cdot K_{11}^{v32} V_{3m}(r) + (K_{11}^{w011} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{11}^{w022}) W_{0m}(r) + \\
& + (K_{11}^{w211} \frac{d^2}{dr^2} - m^2 K_{11}^{w222} + K_{11}^{w20}) W_{2m}(r) + K_{11}^{Q330} Q_{33m}(r) = 0.
\end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $K$  с верхними и нижними индексами обозначают переменные величины, зависящие от геометрических параметров, упругих постоянных изотропного материала пластины и характера изменения температуры.

### 4.3. Алгоритм расчета НДС круглых пластин

Для решения системы уравнений (4.15) воспользуемся методом конечных разностей совместно с методом матричной прогонки. Аппроксимируя производные 1-ого и 2-ого порядков центральными разностями второго порядка точности, получим систему линейных алгебраических уравнений, матрица одиннадцатого порядка которой решается методом матричной прогонки с помощью программы для ЭВМ.

В качестве примера, рассматривается стальная кольцевая пластина, жестко защемленная по двум краям  $r = a$ ,  $r = b$ . Граничные условия на жестко защемленных краях  $r = a$  и  $r = b$  в соответствии с равенствами (4.13в) принимают вид

$$U_{im} = V_{im} = W_{jm} = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3, j = 0, 1, 2.$$

Производные 1-го и 2-го порядков в уравнениях (4.15) аппроксимируются с помощью отношения центральных разностей со 2-м порядком аппроксимации

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2s} + O(s^2); \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{s^2} + O(s^2).$$

Конкретное решение методом конечных разностей проводится по аналогии с третьей главой диссертации. Система обыкновенных дифференциальных уравнений преобразуется к замкнутой системе алгебраических уравнений. Таким образом, после решения алгебраических уравнений, определяются перемещения в узлах сетки. Для аппроксимации перемещений используются сплайны. Затем деформации пластины находятся по формулам (4.4), а напряжения - с использованием физических (4.5) и статических (4.9) уравнений трехмерной теории упругости.

## 4.4. Параметрические исследования НДС

### 4.4.1. Перепад температуры задается линейной функцией

Рассматривается стальная кольцевая пластина, жестко заземленная по двум краям  $r = a$ ,  $r = b$ , находящаяся под действием распределенной нагрузки и температуры. Коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Па. Размеры пластины: внешний и внутренний радиусы  $a = 1$ (м),  $b = 0,5$ (м),  $h_m = 0,025$ (м),  $h_0 = 0,01$ (м); линейно изменяющаяся толщина определяется соотношением  $h(r) = h_m - \operatorname{tg}(\alpha) \cdot (a - r)$ ,  $\operatorname{tg}(\alpha) = (h_m - h_0) / (a - b)$ . Пластина находится под действием распределенной нагрузки  $q(r, \varphi) = Q_0 \sin(\varphi)$ ,  $Q_0 = \text{const}$ .

На нижней и верхней поверхностях пластины поддерживаются температуры  $T_1$  и  $T_0$  соответственно. Разность температуры между верхней и нижней поверхностями зададим линейной функцией  $T = f(r) = 30 \cdot (r + a - 2b) / (a - b)$  [°C]. Компоненты перемещений и соответствующих им напряжений пластины определяются только с учетом первых слагаемых в разложении (4.14). Результаты вычислений нормальных напряжений пластины по уточненной теории в зависимости от перепада температуры представлены на рис. 4.2-4.4. Здесь практически скачкообразное увеличение напряжений в краевой зоне объясняется наличием дополнительных напряжений типа «погранслоя», определяемых по уточненной теории.

При  $T = f(r)$  [°C], максимумы напряжений  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$  находятся в краевой зоне (рис. 4.2 - 4.4). При перепаде температуры от  $0^\circ\text{C}$  до  $f(r)$  [°C], напряжение  $\sigma_r$  повышается на 12.9% и 31.4% на внутреннем и внешнем краях соответственно. Анализ полученных результатов показывает, что максимальные напряжения имеют место на краях пластины, и быстро уменьшаются при удалении от края, что подтверждает достоверность результатов определения НДС пластины по уточненной теории.

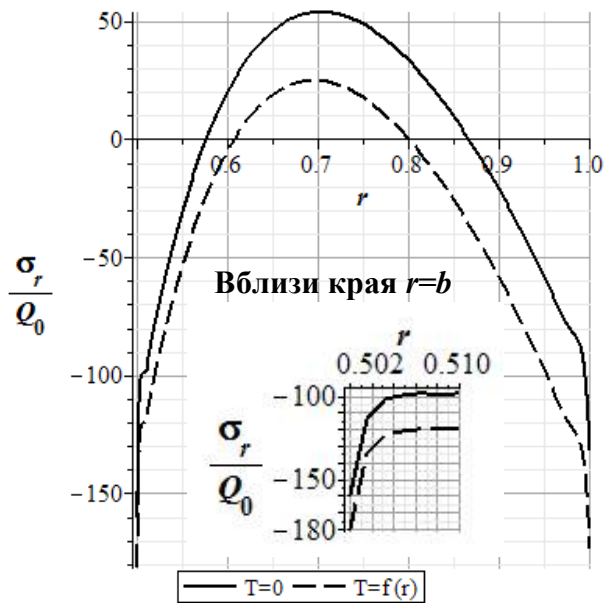


Рис. 4.2. Изменение  $\sigma_r$  по радиусу в зависимости от температуры

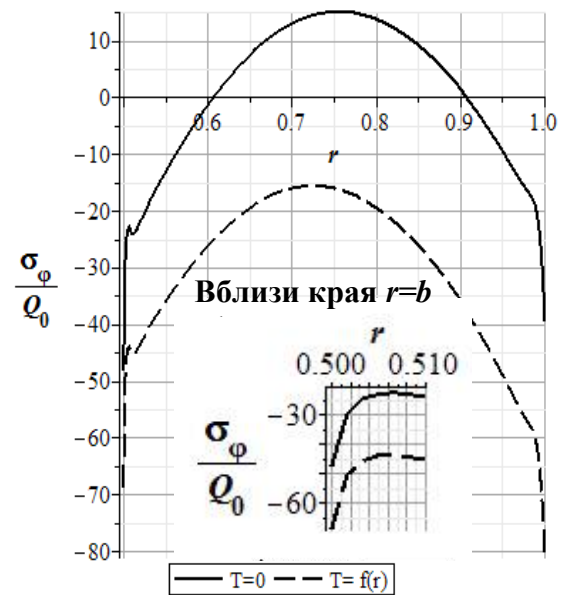


Рис. 4.3. Изменение  $\sigma_\phi$  по радиусу в зависимости от температуры

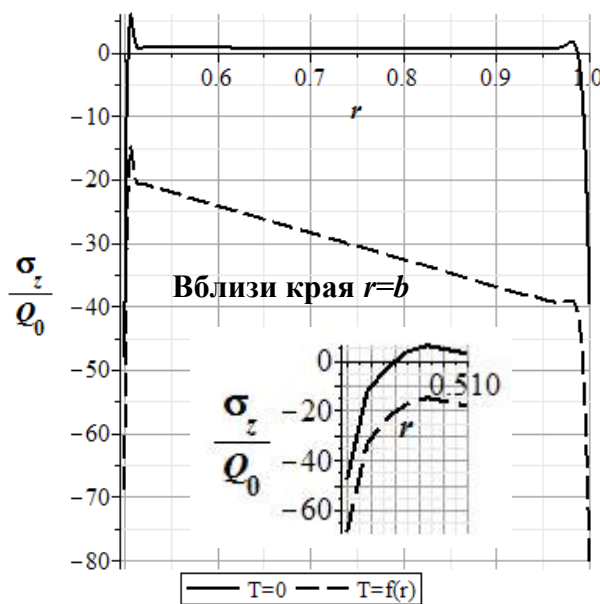


Рис. 4.4. Изменение  $\sigma_z$  по радиусу в зависимости от температуры

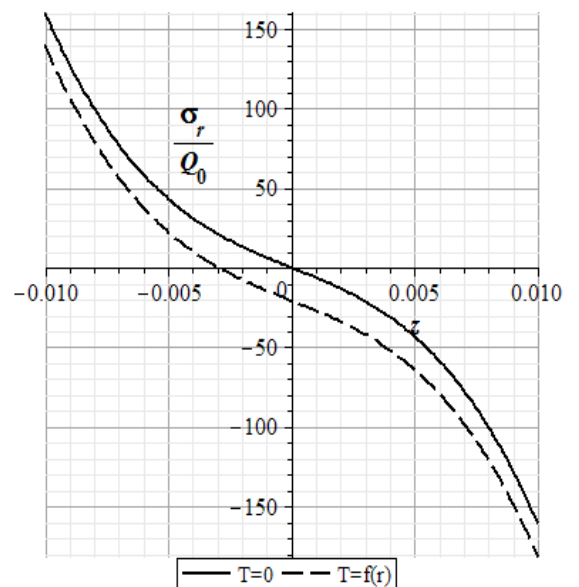


Рис. 4.5. Изменение  $\sigma_r$  по толщине на краю  $r=b$  в зависимости от температуры

Графики изменения указанных напряжений на краю  $r=b$  по толщине представлены на рис. 4.5-4.6, откуда следует, что для рассматриваемых случаев учет влияния температуры приводит к существенным изменениям НДС в краевой зоне круглой пластины по радиусу и толщине.

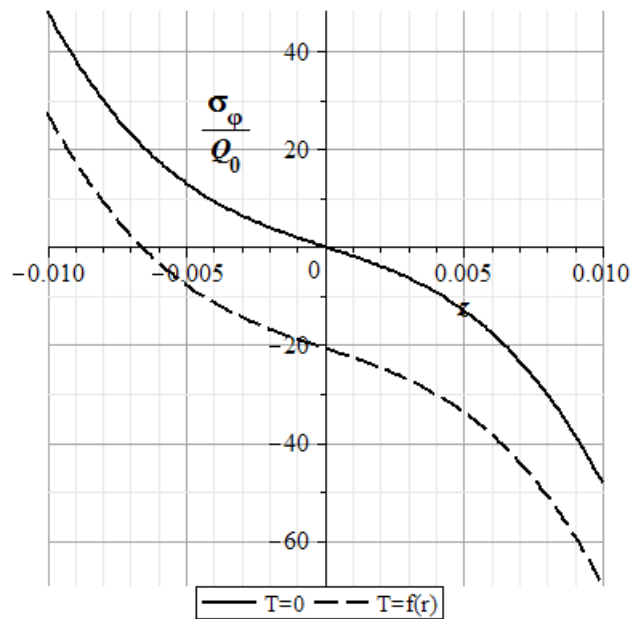


Рис. 4.6. Изменение  $\sigma_\varphi$  по толщине на краю  $r=b$  в зависимости от температуры

Анализ полученных результатов показывает, что поперечное нормальное напряжение  $\sigma_z$ , определенное по уточненной теории, составляют около 46.7% от максимального напряжения  $\sigma_r$  на внешнем крае и 38% на внутреннем крае (рис. 4.2-4.4).

#### 4.4.2. Перепад температуры задается функцией по квадратичному закону

Разность температуры между верхней и нижней поверхностями задана функцией по квадратичному закону  $T = f(r) = 30 \cdot (-3.5 \cdot r^2 + 6.85 \cdot r - 1.35)$  [°C]. Максимумы напряжений  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$  находятся на краю пластины (рис. 4.7-4.9). При перепаде температуры от 0°C до  $f(r)$ [°C], напряжение  $\sigma_r$  повышается на 15.49% и 31.35% на внутреннем и внешнем краях соответственно. Анализ полученных результатов показывает, что максимальные напряжения имеют место на краях пластины, и быстро уменьшаются при удалении от края, так же, как в случае, рассчитанном в пункте 4.5.1.

Анализ полученных результатов показывает, что поперечное нормальное напряжение  $\sigma_z$ , определенное по уточненной теории, составляет около 39.39% от максимального изгибного напряжения  $\sigma_r$  на внешнем краю и 46.7% на

внутреннем крае (рис. 4.7-4.9). Графики изменения напряжений  $\sigma_r, \sigma_\phi$  на краю  $r = b$  по толщине пластины представлены на рис. 4.10-4.11.

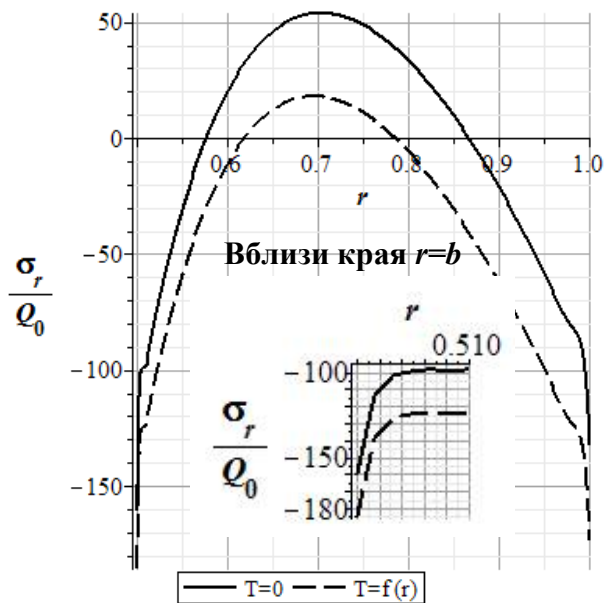


Рис. 4.7. Изменение  $\sigma_r$  по радиусу в зависимости от температуры

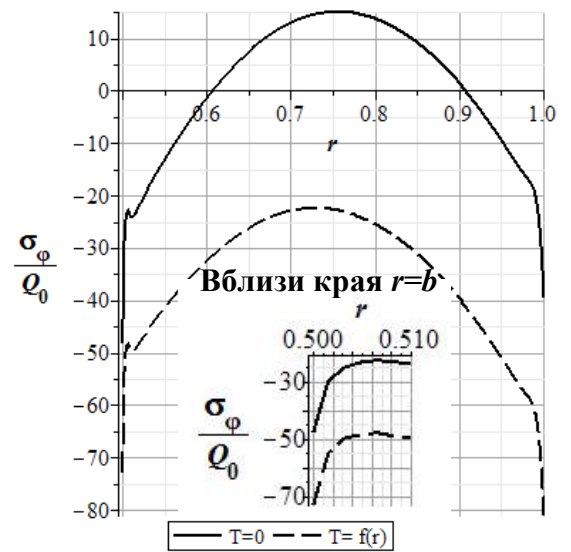


Рис. 4.8. Изменение  $\sigma_\phi$  по радиусу в зависимости от температуры

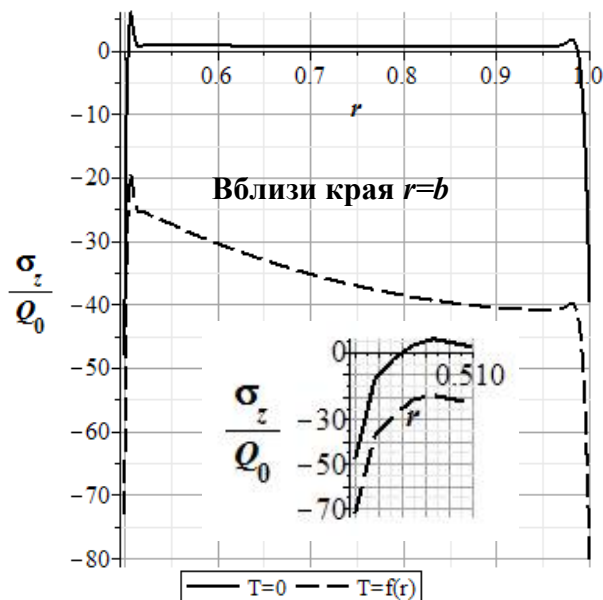


Рис. 4.9. Изменение  $\sigma_z$  по радиусу в зависимости от температуры

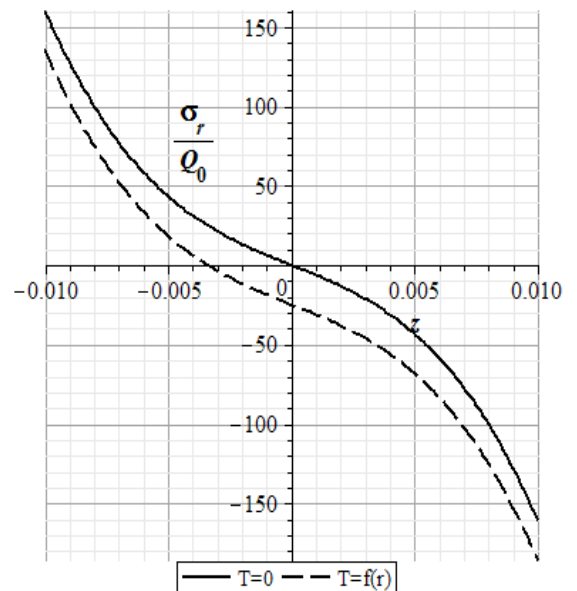


Рис. 4.10. Изменение  $\sigma_r$  по толщине на краю  $r = b$  в зависимости от температуры

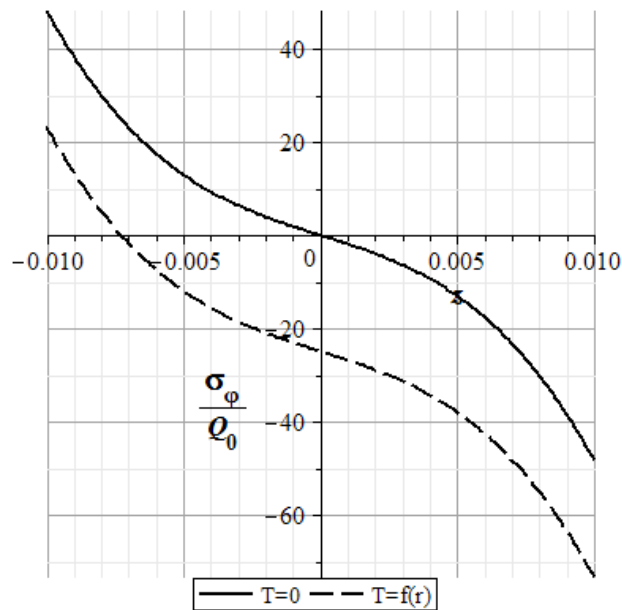


Рис. 4.11. Изменение  $\sigma_\varphi$  по толщине на краю  $r=b$  в зависимости от температуры

#### 4.4.3. Перепад температуры задается по синусоидальному закону

Разность температуры между верхней и нижней поверхностями задана функцией  $T = f(r) = 30 \cdot (2 + 0.33 \sin(15\pi(r-b)))$  [°C]. Максимумы напряжений  $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$  находятся на краю пластины (рис. 4.12 - 4.14). При перепаде температуры от  $0^\circ\text{C}$  до  $f(r)$  [°C], напряжение  $\sigma_r$  повышается на 25,8 % и 26% на внутреннем и внешнем краях соответственно. Анализ полученных результатов показывает, что максимальные напряжения имеют место на краях пластины, и быстро уменьшаются при удалении от края, что подтверждает достоверность результатов определения НДС пластины по уточненной теории.

Графики показывают, что для рассматриваемых случаев учет влияния температуры приводит к существенным изменениям НДС в краевой зоне круглой пластины по радиусу и толщине. Поперечное нормальное напряжение  $\sigma_z$ , определенное по уточненной теории, составляют около 45% от максимального напряжения  $\sigma_r$  на внешнем краю и 44,3% на внутреннем краю (рис. 4.12-4.14).

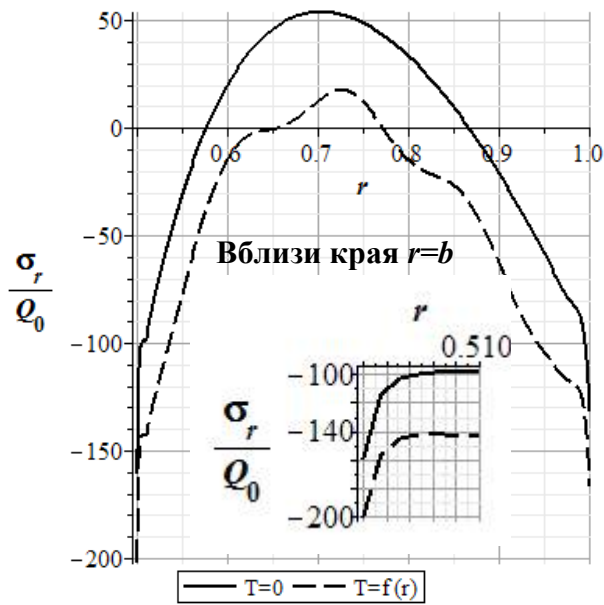


Рис. 4.12. Изменение  $\sigma_r$  по радиусу в зависимости от температуры

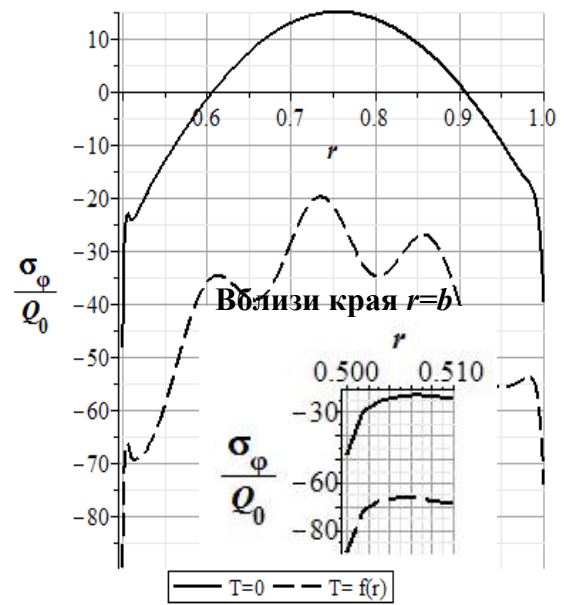


Рис. 4.13. Изменение  $\sigma_\phi$  по радиусу в зависимости от температуры

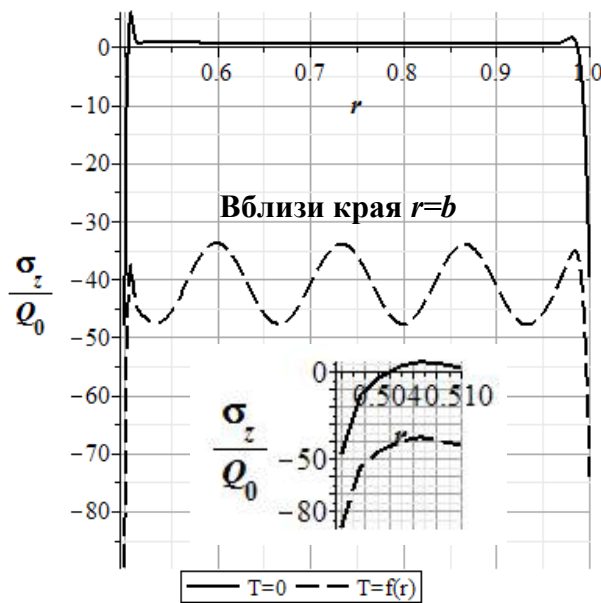


Рис. 4.14. Изменение  $\sigma_z$  по радиусу в зависимости от температуры

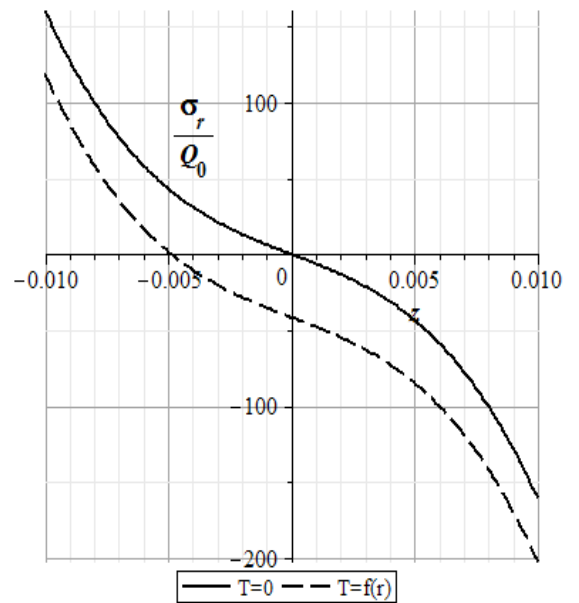


Рис. 4.15. Изменение  $\sigma_r$  по толщине на краю  $r=b$  в зависимости от температуры

Графики изменения этих же напряжений на краю  $r=b$  по толщине представлены на рис. 4.15-4.16.



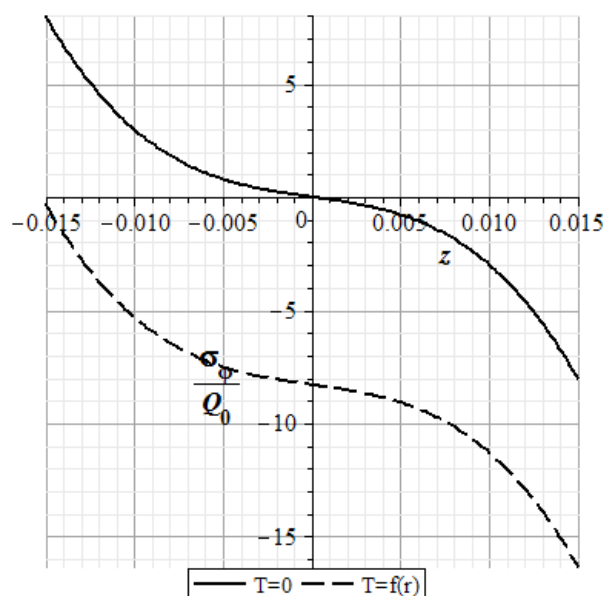


Рис. 4.16. Изменение  $\sigma_\varphi$  по толщине на краю  $r=b$  в зависимости от температуры

#### 4.5. Выводы к четвертой главе

1. На основании вариационного принципа Лагранжа и разложения компонентов перемещений в полиномы по толщине на один-два порядка выше по отношению к классической теории построена краевая задача и сформулированы соответствующие граничные условия уточненной теории круглой пластины переменной толщины в продольном направлении в условиях термомеханического нагружения.

2. Разработан алгоритм определения НДС круглых пластин переменной толщины, при котором удовлетворяются уравнения равновесия теории упругости во всех внутренних точках пластины и выполняются граничные условия на её краях.

3. Проведено сравнение результатов расчета НДС пластины при использовании уточненной теории для нескольких вариантов температуры.

4. Показано, что при расчете круглых пластин по уточненной теории имеют место дополнительные быстро затухающие краевые напряженные состояния типа «погранслой». Соответствующие им поперечные нормальные

напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, получаются одного порядка (40-50%) с максимальными значениями основного изгибного напряжения.

5. Учет влияния температуры на НДС круглых пластин по уточненной теории позволяет получить существенно более точные величины напряжений термоупругости. Этот результат имеет важное значение, так как дает возможность более достоверно оценить прочность и трещиностойкость в зонах искажения напряженного состояния элементов конструкций летательных аппаратов, а также других объектов машиностроения.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе для пластин переменной толщины при механическом и термомеханическом нагружении построены математические модели уточненной теории, основанной на трехмерных уравнениях теории упругости.

Для описания НДС пластин в декартовой и цилиндрической системах координат искомые перемещения аппроксимируются полиномами по нормальной к срединной плоскости координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява.

Применением к уточненному выражению полной потенциальной энергии пластины вариационного принципа Лагранжа получена система дифференциальных уравнений в перемещениях и сформулированы граничные условия.

Для прямоугольных и круглых пластин, приведение уравнений равновесия в частных производных и граничных условий к обыкновенным дифференциальным уравнениям осуществляется с помощью тригонометрических рядов по продольной и окружной координатам.

Применяя метод конечных разностей и матричной прогонки, получены численные решения сформулированных краевых задач для различных вариантов нагружения и геометрических параметров пластины.

На основе решения краевой задачи для пластины переменной толщины построено первое приближение напряженного состояния краевой плоской деформации типа «погранслой» и сформулированы модифицированные естественные граничные условия.

Разработан алгоритм решения сформулированной задачи в программном пакете ЭВМ, что позволяет исследовать НДС пластин переменной толщины при различных видах нагружения и геометрических параметров.

Проведено параметрическое исследование НДС пластин переменной толщины при термомеханическом нагружении, которое позволило установить следующее:

1. При расчете НДС пластин по уточненной теории имеют место быстро затухающие самоуравновешенные дополнительные краевые напряженные состояния типа «погранслои», которые вносят значительный вклад в общее напряженное состояние пластин. Например, при действии распределенной нагрузки, максимальные изгибные напряжения уточняются на 20-30%, поперечные касательные напряжения - на 20-30% и поперечные нормальные напряжения - на 30-35% от максимальных напряжений.

2. Вблизи зон искажения напряженного состояния (на защемленном краю и зонах локальной нагрузки) поперечные нормальные напряжения, которые в классической теории принимаются равными нулю, получаются одного порядка с максимальными значениями основного напряжения (30-35%).

3. При изменении толщины круглых и прямоугольных пластин, НДС существенно изменяется. При одинаковой толщине по краю пластина с линейным характером изменением толщины оказываются прочнее, чем пластина, толщина которой изменяется в соответствии с квадратичной функцией.

4. Разработан метод расчета НДС пластин переменной толщины при термомеханическом нагружении. Проведено сравнение результатов расчета НДС пластины при использовании уточненной теории для нескольких вариантов температуры. Установлено, что уточненная теория позволяет получить существенно более точные величины напряжений при термомеханическом нагружении.

## **СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ**

НДС – напряженно-деформированное состояние

СЛАУ – система линейных алгебраических уравнений

## ЛИТЕРАТУРА

1. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука. 1997. 414 с.
2. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек // ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 111-125.
3. Аксентян О.К., Ворович И.И. Напряженное состояние плиты малой толщины // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 6. С. 1057-1074.
4. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз. 1961. 384 с.
5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука. 1967. 268 с.
6. Баничук Н.В., Барсук А.А. О локализации собственных форм и предельных переходах в задачах устойчивости прямоугольных пластин. ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 302-307.
7. Бахвалов, Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). М.: Наука. 1975. 632 с.
8. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. Изд. 2, испр. доп. М.: Высшая школа. 1968. 512 с.
9. Биргер И.А. Круглые пластинки и оболочки вращения. М.: Оборониздат. 1961. 368 с.
10. Бойцов Б.В., Гавва Л.М., Ендогур А.И., Фирсанов В.В. напряженно-деформированное состояние и устойчивость конструктивно-анизотропных панелей летательных аппаратов из композиционных материалов с учетом технологии изготовления. Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2018. № 4. С. 20-27.
11. Болотин В.В., Власов В.З., Гольденблат И.И. О развитии строительной механики // Известия АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 2. С. 122-133.

12. Болотин В.В., Макаров Б.П. Корреляционная теория докритических деформаций тонких упругих оболочек // Прикладная математика и механика, 1968, т. 32, вып. 3, с. 428-434.
13. Боли Б., Уэйнер Дж. Теория температурных напряжений. М.: Мир, 1964. 517с.
14. Босаков С.В. К решению контактной задачи для круглой пластинки. ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 99-102.
15. Вайнберг Д.В., Вайнберг Е.Д. Расчет пластин. - Киев: Будивельник, 1970. 435 с.
16. Васильев В.В. О теории тонких пластин // Изв. АН. МТТ. 1992. № 3. С. 26-47.
17. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин // Изв. АН. МТТ. 1990. № 2. С. 158-167.
18. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек // Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. С. 139-146.
19. Васильев В.В., Лурье С.А. Обобщенная теория упругости. Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2015. № 4. С. 16-27.
20. Власов Б.Ф. Об уравнениях теории изгиба пластинок // Изв. АН СССР. ОТН. 1957. № 12. С. 57-60.
21. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949. 475 с.
22. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. М.: Госстройиздат, 1958. 502 с.
23. Вольмир А.С. Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехиздат, 1956. 419 с.
24. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. 455 с.
25. Ворович И.И. Некоторые математические вопросы теории пластин и оболочек // Тр. 2-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механике. Т. 3. Механика твердого тела. М.: Наука. 1966. С. 116-136.

26. Ворович И.И. Общие проблемы теории пластин и оболочек // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку. 1966. Обзорные докл. М.: Наука, 1966. С. 896-903.
27. Геворкян Р.С. Асимптотические решения связанных динамических задач термоупругости для изотропных пластин. ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 148-156.
28. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. М.: Физматлит, 1961. 228 с.
29. Глазырин В. С. Применение теории Рейсснера к расчету неограниченных плит, лежащих на упругом основании. Строительная мех. и расчет сооруж., 1964. № 2.
30. Гольденвейзер А.Л. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин // Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 134-149.
31. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости // ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668-686.
32. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512 с.
33. Гольденвейзер А.Л., Колос А.В. К построению двумерных уравнений теории упругих тонких пластинок // ПММ. 1965. Т. 29. Вып. 1. С. 141-155.
34. Гольденвейзер А.Л., Лурье А.И. О математической теории равновесия упругих оболочек // ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 5. С. 565-592.
35. Гольденвейзер А.Л. О теории изгиба пластинок Рейсснера. Изв. АН СССР ОТН, 1958, № 4.
36. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. О расчете цилиндрических оболочек, нагруженных по линиям // ПММ. 1967. Т. 31. Вып. 6. С. 1141-1146.
37. Григоренко Я.М. Решение задач теории пластин и оболочек с применением сплайн – функций (обзор) // Прикладная механика. 1996. Т. 31. № 6. С. 3-27.



38. Григоренко, Я. М. Решения двумерных задач об изгибе прямоугольных пластин на основе метода сплайн-коллокации / Я. М. Григоренко, М. Н. Беренов // Докл. АН. УРСР. Сер. А. 1987. № 8. С. 22-25.
39. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Применение метода Ритца к расчету осесимметричных колебаний оболочек вращения с жидкостью при произвольных граничных условиях. Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20. № 4. С. 593-606.
40. Данилин А.Н., Шалашилин В.И. О параметризации нелинейных уравнений деформирования твердого тела. Известия Академии наук. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 82.
41. Данилин А.Н. Конечно-элементное моделирование плоского движения гибкой стержневой системы со связями. Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22. № 4. С. 467-490.
42. Даревский В.М. Основы теории оболочек // Тр. Центр ин-та авиац. моторостр. 1998. № 1309. С. 3-193.
43. Дмитриев В.Г., Егорова О.В., Рабинский Л.Н., Роффе А.И. особенности построения консервативных разностных схем в нелинейных задачах механики многосвязных оболочек из композиционных материалов. Механика композиционных материалов и конструкций. 2014. Т. 20. № 3. С. 364-374.
44. Дмитриев В.Г., Бирюков В.И., Егорова О.В., Жаворонок С.И., Рабинский Л.Н. нелинейное деформирование многослойных композитных оболочек вращения при больших перемещениях и углах поворота нормали. Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2017. № 2. С. 8-15.
45. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин. Математическое моделирование и численные методы. 2018. № 1 (17). С. 16-40.

46. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Асимптотическая теория тонких двухслойных упругих пластин с проскальзыванием слоев. Математическое моделирование и численные методы. 2019. № 1 (21). С. 3-26.
47. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки / Пер. с англ. Л.Г. Корнейчука: Под ред. Э.И. Григолюка. М.: Наука, 1982. 567 с.
48. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки // Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ. 1983. Т.15. С. 3-68.
49. Дудченко А.А., Сергеев В.Н. Нелинейные уравнения равновесия конической оболочки, подкрепленной дискретным набором шпангоутов. Вестник ПНИПУ. Сер. Механика, 2017, № 2, с. 60-77.
50. Зверяев Е.М. Декомпозиционные свойства принципа сжатых отображений в теории тонких упругих оболочек // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. № 2. С. 3-19.
51. Зверяев Е.М., Макаров Г.И. Общий метод построения теорий типа Тимошенко // ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 2. С. 308-321.
52. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: Монография. - М.: Изд-во РУДН, 2010. 542 с.
53. Иванов В.Н., Кушнаренко И.В. расчет подкрепленных пластинок с помощью вариационно-разностного метода (врм), предназначенного для расчета тонкостенных конструкций. Строительная механика и расчет сооружений. 2014. № 3 (254). С. 43-49.
54. Иванов В.Н., Кривошапко С.Н. Аналитические методы расчета оболочек неканонической формы: Монография. - М.: Изд-во РУДН, 2010. 542 с.
55. Иванова О.Ф., Павлов Н.Н., Федоров Ф.М. Решение задачи об изгибе пластинки с заделанными краями путем сведения к бесконечным системам уравнений. ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 2. С. 295-302.
56. Ильгамов М.А. Обобщение уравнения изгиба тонкой пластины под действием давления газа. ПММ. 2019. Т. 83. Вып. 1. С. 134-143.

57. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Физматгиз, 1962. 708 с.
58. Коваленко, А.Д. Термоупругость. М.: Киев: Вища школа, 1975. 216 с.
59. Колос А.В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. ПММ. 1964. Т. 28. Вып. 3. С. 582-589.
60. Корнишин М.С. Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения. М.: Наука, 1964. 192 с.
61. Кривошапко С.Н. Применение асимптотического метода малого параметра для аналитического расчета тонких упругих торсов-геликоидов // Пространственные конструкции зданий и сооружений: Сб. статей МОО «Пространственные конструкции». Вып. 9. М.: ООО «Девятка Принт», 2004. С. 36—44.
62. Кривошапко С.Н. Два вида расчетных уравнений для оболочек в произвольных криволинейных координатах. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 1. С. 15-22.
63. Лехницкий С.Г. Изгиб неоднородных анизотропных тонких плит симметричного строения // ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 1. С. 71-91.
64. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
65. Медведский А.Л., Мартиросов М.И., Хомченко А.В. Напряженно-деформированное состояние многослойной композитной пластины при наличии межслоевых дефектов. Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. № 8. С. 168-179.
66. Мовчан А.А., Машихин А.Е. Деформации кругового цилиндра из сплава с памятью формы при структурном переходе или прямом фазовом превращении. Механика композиционных материалов и конструкций. 2012. Т. 18. № 2. С. 235-247.
67. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.

68. Нерубайло Б. В. Асимптотический метод расчета конической оболочки на действие локальной нагрузки / Б. В. Нерубайло, В.П. Ольшанский // Изв. РАН. МТТ. 2007. №3. С. 115-124.
69. Нерубайло Б.В. Применение асимптотического метода в задачах термоупругости цилиндрических оболочек // Прикладная механика. 1979. Том XV. №3. С. 36-45.
70. Новожилов В.В. Краткий очерк развития теории оболочек в СССР // Исследования по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанского ун-та. 1970. Вып. VI-VII. С. 3-23.
71. Новожилов В.В., Финкельштейн Р. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек // ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 5. С. 331-340.
72. Новожилов В. В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958. 371 с.
73. Образцов И.Ф., Васильев В.В., Бунаков В.А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1977. 144 с.
74. Образцов И. Ф., Нерубайло Б. В., Андрианов И. В. Асимптотические методы в строительной механике тонкостенных конструкций. М.: Машиностроение, 1991.
75. Огибалов П.М., Колтунов М.А. Оболочки и пластины. М.: МГУ, 1969. 696 с.
76. Ольшанский В.Ю. Линейные инвариантные соотношения уравнений Кирхгофа. ПММ. 2015. Т. 79. Вып. 4. С. 476-497.
77. Паймушин В.Н. Контактная постановка нелинейных задач механики оболочек, соединенных по торцевым сечениям плоским криволинейным стержнем. ПММ. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 125-144.
78. Паймушин В.Н. Теория тонких оболочек при конечных перемещениях и деформациях, основанная на модифицированной модели Кирхгофа-Лява. ПММ. 2011. Т. 75. Вып. 5. С. 813-829.
79. Пикуль В.В. Современное состояние теории оболочек и перспективы ее развития // Изв. АН. МТТ. 2000. № 2. С. 153-168.

80. Пикуль В.В. Физические корректные модели материала упругих оболочек// Изв. АН. МТТ. 1995. № 2. С. 103-108.
81. Рапопорт И.М. Колебания упругой оболочки, частично заполненной жидкостью. М.: Машиностроение, 1967. 360 с.
82. Рейсснер Э. Некоторые проблемы теории оболочек // Упругие оболочки / Пер. с англ. под ред. Э.И. Григолюка. М.: Изд-во иностранной литературы, 1962. С. 7-65.
83. Саркисян С.О. Краевые задачи несимметричной теории упругости для тонких пластин. ПММ. 2008. Т. 72. Вып. 1. С. 129-147.
84. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим наполнителем. Ученые записки казанского университета. Серия: физико-математические науки. 2016. Т. 158. № 1. С. 141-151.
85. Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Двумерный нестационарный контакт упругих цилиндрических или сферических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 2. С. 69 -76.
86. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
87. Филин А.П. Элементы теории оболочек. Л.: Стройиздат, 1987. 384 с.
88. Фирсанов В.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов // Механика композиционных материалов и конструкций / Изд. ИПРИМ РАН. 2002. Т. 8. №1. С. 28-64.
89. Фирсанов В.В., Чан Н.Д. Энергетически согласованная теория цилиндрических оболочек // Проблемы машиностроения и надежности машин // ИМаш РАН. 2011. №6. С. 49-54. (V.V. Firsanov and Ch.N.Doan. Energy-cousistent theory of cylindrical shells// Journal of machinery, manufacture and reliabity.2011. Vol. 40. No. 6. Pp. 543-548.)
90. Фирсанов В.В., Доан Ч.Н., Хиеу Л.Ч. Уточненная теория расчета напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки

переменной толщины. Вестник Московского авиационного института. 2013. Т. 20. № 4. С. 198-211.

91. Фирсанов В.В., Серпичева Е.В. Прочность и трещиностойкость непрерывных соединений авиационных конструкций на основе неклассической теории оболочек. Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2014. № 11-1. С. 267-278.
92. Фирсанов В.В., Серпичева Е.В. Влияние напряженно-деформированного состояния "пограничный слой" на прочность фланцевых и сварных соединений. Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2014. № 11-1. С. 279-288.
93. Фирсанов В.В., Чан Н.Д. Свободные колебания произвольных оболочек на основе неклассической теории. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2014. № 5. С. 21-29.  
Firsanov V.V., Doan C.N. Natural oscillations of general shells based on nonclassical theory. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2014. Т. 43. № 5. С. 349-357.
94. Фирсанов В.В. Математическая модель напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластинки переменной толщины с учетом пограничного слоя. Механика композиционных материалов и конструкций. 2016. Т. 22. № 1. С. 3-18.
95. Фирсанов В.В. Напряженное состояние типа "пограничный слой" - краевое кручение прямоугольной пластинки. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 6. С. 44-51.
96. Фирсанов В.В. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластинок на основе неклассической теории. Проблемы машиностроения и надежности машин. Имаш РАН. 2016. № 6. С. 35-43.  
Firsanov V.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2016. Vol. 45. № 6. Pp. 515-521.

97. Фирсанов В.В., Павлова О.В. Напряженно-деформированное состояние "пограничный слой" в краевой зоне прямоугольной пластины. Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 6. С. 236-242.
98. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Исследование изгибной формы потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов в операционной среде matlab. Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2017. № 4. С. 66-76.
99. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Исследование в операционной среде MATLAB крутильной формы потери устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 2. С. 226-237.
100. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Параметрический анализ докритического напряжённо-деформированного состояния конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов. Механика композиционных материалов и конструкций. 2019. Т. 25. № 2. С. 145-153.
101. Фирсанов В.В., Гавва Л.М. Исследование устойчивости конструктивно-анизотропных панелей из композиционных материалов с учетом докритического напряженного состояния. Конструкции из композиционных материалов. 2019. № 4 (156). С. 17-24.
102. Фирсанов Вал.В., Зоан К.Х. Напряженное состояние "пограничный слой" в прямоугольной пластине переменной толщины // Известия ТулГУ. Технические науки. 2018. Выпуск 6. С.443-451.
103. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Исследование напряженно-деформированного состояния симметричных прямоугольных пластин произвольной геометрии на основе уточненной теории // Труды МАИ, 2018. № 103.  
URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=100589>.
104. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Напряженно-деформированное состояние симметричных прямоугольных пластин переменной толщины при

температурном воздействии. Тепловые процессы в технике. 2019. Т.11. №. 8. С.365-373.

105. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Краевое напряженное состояние круглой пластины переменной толщины при термомеханическом нагружении на основе уточненной теории. Тепловые процессы в технике. 2020. Т.12. №. 1. С.39-48. DOI: 10.34759/tpt-2020-12-1-39-48.
106. Фирсанов В.В., Зоан К.Х. Краевое напряженно-деформированное состояние прямоугольной пластины переменной толщины под действием локальной нагрузки // Труды МАИ. 2020. № 110. DOI: 10.34759/trd-2020-110-10. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=112851>.
107. Фирсанов Вал.В., Зоан К.Х., Чан Н.Д. Краевое напряженно-деформированное состояние круглой пластины переменной толщины на основе неклассической теории. Проблемы прочности и пластичности. 2020. Том 82. №1. С.32-42. DOI: 10.32326/1814-9146-2020-82-1-32-42.
108. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу, Во Ань Хиеу. Внутреннее напряженно-деформированное состояние круглой пластины переменной толщины на основе неклассической теории // Материалы XXIII международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва, МАИ, 2017г. Сборник тезисов докладов. 2017. С. 86 – 88.
109. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу, Во Ань Хиеу. Исследование напряженно-деформированного состояния прямоугольной пластины переменной толщины на основе неклассической теории // Тезисы докладов VI международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». 2017. С. 117-118.
110. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу. Напряженно-деформированное состояние “пограничный слой” типа “краевой плоской деформации” в прямоугольной пластине переменной толщины // Материалы XXIV международного



симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва, МАИ. Сборник тезисов докладов. 2018. С. 218 – 220.

111. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу. Краевое напряженно-деформированное состояние круглой пластины переменной толщины на основе неклассической теории // Сборник докладов VII международного научного семинара «Динамическое деформирование и контактное взаимодействие тонкостенных конструкций при воздействии полей различной физической природы». Москва, МАИ, 12 – 13 ноября 2018г. Сборник тезисов докладов. С. 124 – 125.
112. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу. Краевое напряженно-деформированное состояние симметричных прямоугольных пластин переменной толщины на основе неклассической теории // Материалы XXV международного симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова. Москва, МАИ, 2019г. Сборник тезисов докладов. С. 206 – 207.
113. Фирсанов В.В., Зоан Куи Хиеу. Напряженное состояние “пограничный слой” в круглой пластине переменной толщины по уточненной теории// Международная конференция Авиация и космонавтика, МАИ, 2019г. Сборник тезисов докладов. С. 18.
114. Фирсанов В.В. Основное напряженно-деформированное состояние круглой пластинки переменной толщины на основе неклассической теории. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 1. С. 66-73.  
Firsanov V.V. The basic stress-strain state of a circular plate of variable thickness based on a nonclassical theory. Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2019. Vol. 48. № 1. С. 54-60.
115. Фирсанов В.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние сферической оболочки под действием произвольной нагрузки на основе

- неклассической теории. Проблемы прочности и пластичности. 2019. Т. 81. № 3. С. 359-368.
116. Фирсанов В.В., Нгуен Л.Х., Чан Н.Д. Исследование электроупругостного состояния цилиндрических оболочек из пьезоматериалов на основе уточненной теории. Труды МАИ. 2019. № 109. С. 10.
117. Фирсанов Вик.В. Особенности изгиба тонкой прямоугольной пластинки из материала с неизменяемым объёмом // Механика композиционных материалов и конструкций. 2018. Т. 24. №3. С. 490-498.
118. Фирсанов Вик.В. расчётная модель изгиба круглой осесимметричной пластинки с учётом её несжимаемости // Механика композиционных материалов и конструкций. 2019. Т. 25. № 1. С. 110-121.
119. Цейтлин А.И. Прикладные методы решения краевых задач строительной механики. М.: Стройиздат, 1984. 333 с.
120. Чан Н.Д., Фирсанов В.В., Напряженно-деформированное состояние прямоугольных пластин на основе уточненной теории // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. РУДН. 2018. Т.14. № 1. С.23-32.
121. Чан Н.Д., Фирсанов В.В., Зыонг В.К. Анализ флаттера плоских слоистых композиционных панелей в сверхзвуковом потоке на основе неклассической теории пластин. Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2018. № 2. С. 299-309.
122. Шарафутдинов Г.З. Напряжения и сосредоточенные силы в тонких кольцевых пластинках // ПММ. 2004. Т. 68. Вып. 1. С. 45-59.
123. Шереметьев М.П., Пелех Б.Л. К построению уточненной теории пластин // Инж. ж. 1964. Т. 4. № 3. С. 504-509.
124. Alex Demidov, Vsevolod Popov. Stress State in a Finite Cylinder with Outer Ring-Shaped Crack at Non-stationary Torsion Proceedings of the Second International Conference on Theoretical, Applied and Experimental Mechanics. 2019. Pp. 215-221. DOI: 10.1007/978-3-030-21894-2\_41.

125. Firsanov V.V., Quy Hieu Doan, Trong Chuc Nguyen. Stress and deformation state for the edge of a rectangular plate based on nonclassical theory. *Structural integrity and life*. 2020. Vol. 20. No. 1.
126. Green A.E. On the linear theory of thin elastic shells // *Proc. R. Soc.* 1962. V.A. 266, № 1325. Pp. 143-160.
127. Naghdi P. M. The theory of shells and plates // *Handbuch der Physik*. Berlin: Springer, 1972. Bd. V1 a/2. Pp. 425-640.
128. Pisacic Katarina, Horvat Marko, Botak Zlatko. Finite difference solution of plate bending using Wolfram. *Mathematica Tehnički glasnik*. 2019. Vol. 13. Pp. 241-247. DOI: 10.31803/tg-20190328111708.
129. Reiss E.L. A theory for the small rotationally symmetric deformations of cylindrical shells // *Communications. Pure and Appl. Math.* V.XIII. 1960. P. 973.
130. Reissner E. On the analysis of first and second-order shear deformation effects for isotropic elastic plates // *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1980. V. 47. № 4. Pp. 959-961.
131. Reissner E. Asymptotic considerations for transverse bending of orthotropic sheardeformable plates // *ZAMP*. 1989. V. 40. № 4. Pp. 543-557.
132. Reissner E. On a mixed variational theorem and on shear deformable plate theory // *Intern J. Numer. Meth. Eng.* 1986. V. 23. № 2. Pp. 194-198.
133. Reissner E. On axi-symmetrical vibrations of circular plates of uniform thickness, including the effect of transverse shear deformation and rotatory inertia. *J. Acoust. Soc. Amer.*, 1954, vol. 26, 2.
134. Levinski T., Telega J.J. Plates, laminates and shells. Asymptotic analysis and homogenization. Singapore. London. World Sci. Publ. 2000. 739 p.
135. Victor L. Berdichevsky. An asymptotic theory of sandwich plates. *Mathematics*. 2010. DOI:10.1016/j.ijengsci.2009.09.001.
136. Chebakov R, Kaplunov J, Rogerson GA. A non-local asymptotic theory for thin elastic plates. *Proc. R. Soc. A*. 2017. Vol. 473: 20170249.  
<http://dx.doi.org/10.1098/rspa.2017.0249>.