

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский авиационный институт
(национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Паинг Сое Ту У

Оптимизация межорбитальных перелетов с конечной тягой

Специальность 2.5.16.

Динамика, баллистика, управление движением летательных аппаратов

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2023

Работа выполнена на кафедре 601 «Космические системы и ракетостроение» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)».

Научный руководитель: **Петухов Вячеслав Георгиевич**,

доктор технических наук, член-корреспондент РАН, первый заместитель директора по науке НИИ ПМЭ МАИ, профессор кафедры «Космические системы и ракетостроение» МАИ

Официальные оппоненты: **Муртазин Рафаил Фарвазович**,

доктор технических наук, заместитель начальника отделения–начальник отдела ПАО «РКК «Энергия» им. С.П. Королева»

Чернякина Ирина Владиславовна,

кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева»

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт космических исследований Российской академии наук

Защита состоится «8» февраля 2024 года в 14:00 на заседании диссертационного совета 24.2.327.03 в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (МАИ) по адресу: 125993, Волоколамское шоссе, д. 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте МАИ по ссылке: https://mai.ru/events/defence/?ELEMENT_ID=177126

Автореферат разослан «___»_____2023 г.

Отзывы в 2-х экземплярах, заверенные печатью организации, просим направлять по адресу: 125993, Волоколамское шоссе, д. 4, Отдел Ученого и диссертационных советов МАИ.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.327.03,
доктор технических наук, доцент

Старков А. В.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы Тема исследования относится к механике космического полета космических аппаратов (КА) с двигателями конечной тяги, в первую очередь с электроракетными двигательными установками (ЭРДУ). Использование таких двигателей позволяет сократить затраты рабочего топлива на выполнение типовых транспортных космических операций благодаря высокой скорости истечения, но, из-за малой величины тяги, существенно увеличивает длительность перелета по сравнению с использованием традиционных двигателей большой тяги. В задачах выведения КА на высокие целевые орбиты применение ЭРДУ позволяет выводить КА увеличенной массы либо использовать средства выведения более легкого класса. Во многих случаях применение ЭРДУ позволяет исключить использование разгонных блоков и решить комплекс задач, включающих довыведение на целевую орбиту, разведение КА по орбитальным плоскостям и позициям, поддержание орбитальных позиций и увод КА на орбиту захоронения после завершения его эксплуатации. С точки зрения повышения эффективности космических транспортных операций с двигателями малой и конечной тяги актуальной является задача оптимизации траекторий КА, особенно важная при проведении проектно-баллистического анализа перспективных космических миссий. В настоящее время существуют теория и методы, позволяющие проводить оптимизацию траекторий КА с конечной тягой. Типичные недостатки существующих методов связаны с недостаточно хорошей вычислительной устойчивостью и существованием проблемы выбора начального приближения. Поэтому рассматриваемые в диссертации задачи развития теории межорбитальных перелетов с двигателями конечной тяги и разработки устойчивых быстродействующих методов оптимизации таких траекторий являются актуальными.

Целью работы настоящей диссертационной работы является развитие теории и разработка методов численной оптимизации траекторий межорбитальных перелетов КА с двигателями конечной тяги.

Объектом исследования являются траектории межорбитального перелета КА.

Предметом исследования являются математические модели оптимального движения КА с двигателями конечной тяги.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

- Разработан новый метод оптимизации траекторий перелета КА с ограниченным реактивным ускорением на основе применения принципа максимума, метода продолжения и условий трансверсальности для свободных элементов конечной орбиты.
- Разработаны новая математическая постановка и численный метод решения задачи оптимизации многовитковых траекторий с фиксированной угловой дальностью, свободным временем перелета с использованием вспомогательной долготы в качестве независимой переменной.

- Обнаружена немонотонная зависимость оптимального времени перелета от величины тяги на траекториях с фиксированной угловой дальностью в задаче перелета с минимальными затратами топлива.
- Разработаны методики для быстрого анализа комбинированных схем выведения КА с ЭРДУ на геостационарную орбиту (ГСО) в вариантах с использованием и без использования разгонного блока. Получены зависимости оптимальных параметров промежуточных орбит (ПО) и массы КА на ГСО от длительности выведения.

Достоверность полученных результатов подтверждается обоснованным применением известных математических моделей и методов, а также сравнением полученных в работе результатов с результатами, опубликованными другими авторами.

Практическая значимость данной диссертационной работы состоит в следующем:

- Разработаны методы оптимизации траекторий КА с конечной тягой, позволяющие вычислять траектории, удовлетворяющие необходимым условиям оптимальности, без необходимости выбора начального приближения для параметров, определяющих оптимальное управление.
- Разработанный метод оптимизации траекторий КА с двигателями ограниченного ускорения позволяет получать верхнюю оценку затрат характеристической скорости, требуемых на выполнение заданной космической транспортной операции.
- Разработанные методы и программно-математическое обеспечение, а также полученные численные результаты могут применяться для проведения проектно-баллистического анализа перспективных космических миссий.

Методология и методы исследования. В данной диссертационной работе для решения задачи оптимизации траектории используется непрямой метод, основанный на использовании принципа максимума Понтрягина. С использованием принципа максимума задача оптимизации межорбитального перелета космического аппарата с двигательной установкой малой тяги сводится к двухточечной краевой задаче. Для решения этой краевой задачи используется метод продолжения по параметру, включая базовый вариант метода и метод продолжения по гравитационному параметру. Для вычисления правых частей дифференциальных уравнений метода продолжения требуется вычисление частных производных от вектора невязок по начальным значениям сопряженных переменных. Для вычисления этих производных используется метод комплексного шага. В работе рассмотрена комбинированная схема выведения космического аппарата с электроракетной двигательной установкой на геостационарную орбиту за заданное время. Задача оптимизации этой схемы выведения сводится к задаче условной минимизации. Для ее решения используется метод неопределенных множителей Лагранжа. Для приближенной оценки затрат характеристической скорости на участке перелета с малой тягой при оптимизации комбинированной схемы выведения используется интерполяция этих затрат трехмерными B-сплайнами по таблице зависимостей асимптотических

значений характеристической скорости от наклона, радиуса перигея и апогея ПО, полученными в результате решения массива осредненных задач оптимального быстрогодействия. Для интегрирования уравнений движения космического аппарата и дифференциальных уравнений метода продолжения используется численный метод интегрирования Дормана-Принса 7(8) -го порядка с адаптивным выбором длины шага.

Апробация результатов работы проводилась на 10 российских и международных конференциях в том числе на международных молодежных научных конференциях «Гагаринские чтения», 2018, 2020, МАИ, г. Москва, Россия, на конференциях «Авиация и космонавтика», 2019, 2020, МАИ, г. Москва, Россия, на конференциях «Академические чтения по космонавтике», 2020, 2021, 2022, МГТУ, г. Москва, Россия, на XXV Международной научной конференции «Системный анализ, управление и навигация», 2021, г. Евпатория, Крым, Россия, на XIV международной конференции по прикладной математике и механике в аэрокосмической отрасли, 2022, г. Алушта, Россия, на XIV Всероссийском межотраслевом молодежном конкурсе научно-технических работ и проектов «Молодёжь и будущее авиации и космонавтики», 2022, МАИ, г. Москва, Россия, а также на семинаре кафедры 601 МАИ.

Личный вклад и публикации. Все результаты, приведенные в диссертации, получены лично автором. Основные результаты опубликованы в 5 работах [1-5], из которых 4 статьи [1-4] – в изданиях из списка ВАК Минобрнауки России, 1 статья [5] – в журнале, входящем в систему Scopus.

На защиту выносятся:

1. Метод оптимизации траекторий перелета КА с ограниченным реактивным ускорением на основе применения принципа максимума, метода продолжения и условий трансверсальности для свободных элементов конечной орбиты.

2. Математическая постановка и численный метод решения задачи оптимизации многовитковых траекторий с фиксированной угловой дальностью, свободным временем перелета и с использованием невозмущенной истинной долготы в качестве независимой переменной.

3. Методика быстрого анализа комбинированных схем выведения КА с ЭРДУ на ГСО.

4. Результаты численного анализа оптимальных межорбитальных перелетов с конечной тягой и с комбинацией большой и малой тяги.

Структура и объем работы. Работа включает введение, шесть глав, заключение и список литературы. Объем работы составляет 130 страниц, 43 рисунка и 12 таблиц. Список литературы содержит 108 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе описываются математические модели движения КА с идеально-регулируемым и нерегулируемым двигателем, используемые в задаче оптимизации межорбитальных перелетов. Как правило, для межорбитальных перелетов используются нерегулируемые двигатели. Тяга и скорость истечения в этом случае имеет постоянное значение, когда двигатель включен. При использовании нерегулируемых двигателей траектория межорбитального

перелета определяется программами углов ориентации вектора тяги и программой включения-выключения двигателя. Задача вычисления оптимальной траектории межорбитального перелета с нерегулируемым двигателем является достаточно сложной. Одной из проблем является выбор начального приближения для неизвестных параметров краевой задачи принципа максимума. Для решения этой проблемы предлагается в качестве начального приближения использовать оптимальную траекторию КА с идеально-регулируемым двигателем (ИРД).

Предполагается, что КА движется в гравитационном поле Земли с силовой функцией $\Omega = \mu / r$, где μ – гравитационный параметр Земли, r – геоцентрическое удаление КА. Уравнения движения центра масс КА с идеально-регулируемым двигателем в инерциальной декартовой системе координат имеют вид:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{a}, \quad (1)$$

где \mathbf{x} , \mathbf{v} – векторы положения и скорости КА соответственно, t – время и \mathbf{a} – вектор реактивного ускорения. Рассматривается задача оптимального управления динамической системой (1) на фиксированном интервале времени $t \in [t_0, t_f]$ с функционалом:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} a^2 dt, \quad (2)$$

минимум которого достигается при минимуме затрат топлива в случае постоянной реактивной мощности (половины произведения тяги на скорость истечения) двигателя КА.

Применяя формализм принципа максимума к задаче (1), (2), получаем следующее выражение для функции Понтрягина:

$$H = -\frac{1}{2} a^2 + \mathbf{p}_v^T \Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{p}_v^T \mathbf{a} + \mathbf{p}_x^T \mathbf{v}, \quad (3)$$

где \mathbf{p}_x , и \mathbf{p}_v , сопряженные переменные к \mathbf{x} , \mathbf{v} соответственно, $a = |\mathbf{a}|$. Из условия максимума функции Понтрягина по управлению \mathbf{a} , выражение для оптимального управления имеет следующий вид:

$$\mathbf{a} = \mathbf{p}_v, \quad (4)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) оптимального движения, исходя из принципа максимума, имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + \mathbf{a}, \\ \frac{d\mathbf{p}_x}{dt} &= -\Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_v, \quad \frac{d\mathbf{p}_v}{dt} = -\mathbf{p}_x, \end{aligned} \quad (5)$$

При проведении проектно-баллистического анализа перспективных космических миссий часто возникает необходимость оценки основных параметров миссии в условиях, когда основные проектные параметры КА и двигательной установки еще не определены. С целью вычисления гарантированных верхних оценок требуемых затрат характеристической скорости

при неизвестном (невывбранном) значении удельного импульса двигательной установки и начальной массы КА используется математическая модель движения КА с двигателем ограниченного ускорения (ДОУ). В рамках математической модели движения КА с нерегулируемым двигателем рассматривается математическая модель движения КА с ДОУ и математическая модель движения КА с двигателем ограниченной тяги (ДОТ).

Уравнения движения центра масс КА с ДОУ в инерциальной декартовой системе координат представляются следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + a \cdot \delta \cdot \mathbf{e}, \quad (6)$$

где a – ограниченное реактивное ускорение, δ – функция тяги (при работающем двигателе $\delta=1$, на участках пассивного полета $\delta=0$), \mathbf{e} – единичный вектор в направлении действия реактивного ускорения. При использовании модели ДОУ оптимизируемыми программами управления являются программы изменения ориентации вектора реактивного ускорения и программа включения-выключения двигателя. Рассматривается задача минимизации характеристической скорости :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} a \cdot \delta dt \quad (7)$$

Применяя формализм принципа максимума к задаче (6) и (7) получаем следующее выражение для функции Понтрягина:

$$H = -\delta \cdot a + \mathbf{p}_{\mathbf{x}}^T \mathbf{v} + \mathbf{p}_{\mathbf{v}}^T \Omega_{\mathbf{x}} + \delta \cdot a \cdot \mathbf{p}_{\mathbf{v}}^T \mathbf{e}, \quad (8)$$

где $\mathbf{p}_{\mathbf{x}}, \mathbf{p}_{\mathbf{v}}$ сопряженные переменные к \mathbf{x} и \mathbf{v} соответственно. Оптимальное управление определяется из условия максимума функции Понтрягина (8):

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{p_{\mathbf{v}}}, \quad \delta = \begin{cases} 1, & \psi > 0 \\ 0, & \psi \leq 0 \end{cases}, \quad \psi = p_{\mathbf{v}} - 1, \quad (9)$$

Система ОДУ оптимального движения, в соответствии с принципом максимума, имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega_{\mathbf{x}} + \frac{a \cdot \delta}{p_{\mathbf{v}}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \\ \frac{d\mathbf{p}_{\mathbf{x}}}{dt} &= -\Omega_{\mathbf{xx}} \mathbf{p}_{\mathbf{v}}, \quad \frac{d\mathbf{p}_{\mathbf{v}}}{dt} = -\mathbf{p}_{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (10)$$

После применения принципа максимума задача оптимизации межорбитального полета КА с ИРД или ДОУ сводится к двухточечной краевой задаче. Все начальные условия считаются заданными, а в конечной точке траектории считаются заданными либо все элементы орбиты, либо только фокальный параметр, эксцентриситет и наклонение. Таким образом, систему уравнений (5), (10) следует дополнить следующими граничными условиями:

$$p(t_0) = p_0, e(t_0) = e_0, i(t_0) = i_0, v(t_0) = v_0, \omega(t_0) = \omega_0, \Omega(t_0) = \Omega_0 \quad (11)$$

и

$$\begin{aligned} p(t_f) - p_f = 0, e(t_f) - e_f = 0, i(t_f) - i_f = 0, \\ \Omega(t_f) - \Omega_f = 0, \omega(t_f) - \omega_f = 0, \nu(t_f) - \nu_f = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

или

$$p(t_f) - p_f = 0, e(t_f) - e_f = 0, i(t_f) - i_f = 0, \quad (13)$$

где p – фокальный параметр, e – эксцентриситет, i – наклонение, ν – истинная аномалия, ω – аргумент перигея, Ω – долгота восходящего узла, нижний индекс «0» означает значение соответствующего элемента на начальной орбите, а индекс « f » – значение соответствующего элемента на конечной орбите. Начальный и конечный моменты времени фиксированы и обозначены как t_0 и t_f соответственно.

Если конечные значения истинной аномалии, восходящего узла и аргумента перигея не фиксируются, то краевые условия (13) должны быть дополнены условиями трансверсальности, которые для случая движения КА в центральном ньютоновском гравитационном поле имеют вид:

$$\mathbf{v}_f^T \mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} - \frac{\mu}{r^3} \mathbf{x}_f^T \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} = 0, \quad (14)$$

$$\left(\mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} \times \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} \times \mathbf{v}_f \right)^T \mathbf{1}_z = 0, \quad (15)$$

$$\left(\mathbf{p}_{\mathbf{x}_f} \times \mathbf{x}_f + \mathbf{p}_{\mathbf{v}_f} \times \mathbf{v}_f \right)^T (\mathbf{x}_f \times \mathbf{v}_f) = 0, \quad (16)$$

где $\mathbf{1}_z = [0, 0, 1]^T$.

При оптимизации траектории КА с ДОТ, начальные условия (11) дополняются условием на начальную массу КА $m(t_0) = m_0$, а к условиям трансверсальности добавляется условие на конечное значение сопряженной к массе переменной $p_m(t_f) = 0$. Для вычисления невязок на правом конце траектории, система ОДУ оптимального движения (5), (10) интегрируется с заданными начальными значениями векторов положения и скорости КА, вычисляемых по начальным значениям орбитальных элементов (11), а по завершении интегрирования, по полученным значениям координат \mathbf{x}_f и компонент скорости \mathbf{v}_f КА, вычисляются элементы орбиты в конечный момент времени.

При оптимизации многовитковых траекторий, для повышения точности и скорости вычислений, целесообразно использовать в качестве фазового вектора орбитальные элементы. Выбор модифицированных равноденственных элементов обусловлен отсутствием особенностей в правых частях уравнений движения в окрестности круговых и экваториальных орбит при их использовании. Для преодоления сложностей, связанных с существованием множества экстремалей в задаче с фиксированным временем и свободной угловой дальностью перелета [1] была рассмотрена задача с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета. Для упрощения решения этой задачи была введена в рассмотрение вспомогательная долгота K , которая использовалась в качестве новой независимой переменной. Рассматривается задача оптимизации многовиткового перелета КА с ДОТ в центральном ньютоновском гравитационном поле. ОДУ движения КА под действием сил гравитации и тяги в модифицированных равноденственных элементах p, e_x, e_y, i_x, i_y, L имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2p}{q} a_t, \quad \frac{de_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\ \frac{de_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \quad \frac{di_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \cos L \cdot a_n, \\ \frac{di_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \sin L \cdot a_n, \quad \frac{dL}{dt} = \sqrt{\mu p} \left(\frac{q}{p} \right)^2 + \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\xi}{q} \cdot a_n, \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{\delta \cdot P}{w},\end{aligned}\quad (17)$$

Здесь $e_x = e \cos(\omega + \Omega)$, $e_y = e \sin(\omega + \Omega)$ элементы вектора эксцентриситета, $i_x = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \cos \Omega$, $i_y = \operatorname{tg} \frac{i}{2} \sin \Omega$ элементы вектора наклона, $L = \nu + \omega + \Omega$ – истинная долгота, $s^2 = 1 + i_x^2 + i_y^2$, $q = 1 + e_x \cos L + e_y \sin L$, $\xi = i_x \sin L - i_y \cos L$, a_t , a_r , a_n радиальная, трансверсальная и бинормальная компоненты реактивного ускорения соответственно, которые определяются следующими соотношениями:

$$a_t = \delta \frac{P}{m} \cos \mathcal{G} \cos \psi, \quad a_r = \delta \frac{P}{m} \sin \mathcal{G} \cos \psi, \quad a_n = \delta \frac{P}{m} \sin \psi, \quad (18)$$

где \mathcal{G} – угол тангажа (угол между трансверсальным направлением и проекцией вектора тяги на плоскость оскулирующей орбиты), ψ – угол рысканья (угол между плоскостью оскулирующей орбиты и вектором тяги), P – тяга двигателя КА, \mathbf{e} – единичный вектор в направлении действия тяги, m – масса КА, w – величина скорости истечения двигателя КА. Вводятся новые переменные – вспомогательная долгота K , производная которой по времени имеет следующий вид:

$$\frac{dK}{dt} = \sqrt{\mu p} \left(\frac{q}{p} \right)^2, \quad (19)$$

и $L_K = L - K$ (отклонение истинной долготы от вспомогательной), производная которой по времени, как следует из (17) и (19), будет иметь следующий вид

$$\frac{dL_K}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\xi}{q} a_n. \quad (20)$$

После замены шестого уравнения (17) на (19) и (20), была получена система ОДУ следующего вида:

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{2p}{q} a_t, \quad \frac{de_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[\sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\ \frac{de_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \left[-\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \quad \frac{di_x}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \cos L \cdot a_n, \\ \frac{di_y}{dt} &= \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{s^2}{2q} \sin L \cdot a_n, \quad \frac{dL_K}{dt} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \frac{\xi}{q} a_n, \quad \frac{dK}{dt} = \sqrt{\mu p} \left(\frac{q}{p} \right)^2, \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{\delta \cdot P}{w}.\end{aligned}\quad (21)$$

В системе (21) везде при вычислении истинной долготы L используется выражение $L = K + L_K$. Система (21) явно не зависит от времени, а производная

dK/dt , как следует из седьмого уравнения (21), всегда положительна и определена при $p > 0$. Отсюда следует, что если ограничиться рассмотрением невырожденных орбит (то есть орбит с ненулевым фокальным параметром), то можно использовать независимую переменную K вместо t . Соотношение для такой замены независимой переменной, с учетом седьмого уравнения (21), имеет следующий вид:

$$dK = \frac{dK}{dt} dt \Rightarrow \frac{d}{dK} = \frac{dt}{dK} \frac{d}{dt} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2 \frac{d}{dt}. \quad (22)$$

В результате была получена следующая система дифференциальных уравнений движения КА с ДОТ:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dK} &= \frac{2p^3}{\mu q^3} a_r, \quad \frac{de_x}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^2} \left[\sin L \cdot a_r + \frac{(q+1)\cos L + e_x}{q} a_t - \frac{e_y \xi}{q} a_n \right], \\ \frac{de_y}{dK} &= \frac{p^2}{\mu q^2} \left[-\cos L \cdot a_r + \frac{(q+1)\sin L + e_y}{q} a_t + \frac{e_x \xi}{q} a_n \right], \quad \frac{di_x}{dK} = \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \cos L \cdot a_n, \\ \frac{di_y}{dK} &= \frac{p^2 s^2}{2\mu q^3} \sin L \cdot a_n, \quad \frac{dL_K}{dK} = \frac{p^2}{\mu q^3} \xi \cdot a_n, \quad \frac{dm}{dK} = -\frac{\delta}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2 \frac{P}{w}, \quad \frac{dt}{dK} = \frac{1}{\sqrt{\mu p}} \left(\frac{p}{q} \right)^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Рассматривается задача минимизации следующего функционала:

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \delta \frac{P}{w} dt = \int_{K_0}^{K_f} \delta \frac{P}{q^2 w} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} dK, \quad (24)$$

которая соответствует задаче минимизации затрат топлива. После применения формализма принципа максимума к задаче (23), (24), было получено следующее выражение для функции Понтрягина:

$$H = \delta P k_1 \cdot \left[\frac{k_2}{m} \cdot (A_r \sin \mathcal{G} \cos \psi + A_t \cos \mathcal{G} \cos \psi + A_n \sin \psi) - \frac{p_m + 1}{w} \right], \quad (25)$$

$$A_t = 2p \cdot p_p + [(q+1)\cos L + e_x] p_{ex} + [(q+1)\sin L + e_y] p_{ey},$$

$$A_r = q \cdot (\sin L \cdot p_{ex} - \cos L \cdot p_{ey}), \quad (26)$$

$$A_n = \xi \cdot (-e_y p_{ex} + e_x p_{ey} + p_{LK}) + \frac{s^2}{2} (\cos L \cdot p_{ix} + \sin L \cdot p_{iy}),$$

где $k_1 = \frac{1}{q^2} \sqrt{\frac{p^3}{\mu}}$, $k_2 = \frac{1}{q} \sqrt{\frac{p}{\mu}}$. Выражения для оптимального управления имеют вид:

$$\sin \mathcal{G} = A_r / A_n, \quad \cos \mathcal{G} = A_t / A_n, \quad \sin \psi = A_n / A, \quad \cos \psi = A_r / A, \quad (27)$$

$$\delta = (1 + \text{sign } S) / 2, \quad S \neq 0; \quad \delta \in [0; 1], \quad S = 0, \quad (28)$$

где $A_n = \sqrt{A_r^2 + A_t^2}$, $A = \sqrt{A_r^2 + A_t^2 + A_n^2}$, $S = k_2 A - (p_m + 1) / c$. После подстановки выражения для оптимального управления (27), (28) в (25), было получено следующее выражение для гамильтониана задачи оптимального управления:

$$H = \delta P k_1 \cdot \left[\frac{k_2 A}{m} - \frac{p_m + 1}{w} \right]. \quad (29)$$

ОДУ оптимального движения в рассматриваемой задаче имеют следующий вид ;

$$\frac{d\mathbf{x}_1}{dK} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_{x1}}, \frac{d\mathbf{p}_{x1}}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_1}, \frac{dp_m}{dK} = -\frac{\partial H}{\partial m}, \quad (30)$$

где $\mathbf{x}_1^T = (p, e_x, e_y, i_x, i_y, L_K, m, t)$ – фазовый вектор, $\mathbf{p}_{x1}^T = (p_p, p_{ex}, p_{ey}, p_{ix}, p_{iy}, p_{LK}, p_m, p_t)$ – вектор сопряженных переменных.

В диссертации рассматривалась задача оптимизации многовиткового перелета между фиксированными точками с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета, для которой использовались следующие краевые условия:

$$\begin{aligned} K = K_0 = L_0 : p(K_0) = p_0, e_x(K_0) = e_{x_0}, e_y(K_0) = e_{y_0}, i_x(K_0) = i_{x_0}, i_y(K_0) = i_{y_0}, \\ L_K(K_0) = 0, m(K_0) = m_0, t(K_0) = t_0, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} K = K_f : p(K_f) = p_f, e_x(K_f) = e_{xf}, e_y(K_f) = e_{yf}, i_x(K_f) = i_{xf}, i_y(K_f) = i_{yf}, \\ p_{LK}(K_f) = 0, p_m(K_f) = 0, p_t(K_f) = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Одна из основных идей данной работы заключается в гладком продолжении задачи оптимизации траектории КА с ИРД в траекторию КА с ДОУ или ДОТ, что позволяет избежать разрывов матрицы чувствительности в процессе решения задачи. Гладкое продолжение требует гладкой аппроксимации функции тяги δ . Кроме того, сглаженная функция тяги должна быть близка к функции $\delta(S)$ при конечном значении параметра продолжения $\tau = 1$. В этой работе использовалась гладкая аппроксимация функции тяги $\delta(S)$ следующего вида:

$$\delta = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left(\frac{S}{\varepsilon(\tau)} \right) \right), \varepsilon(\tau) = 1 - \tau + 10^{-4} \tau, \quad (33)$$

где ε – параметр сглаживания.

Во второй главе рассматривается использование двух методов продолжения: базового метода продолжения по параметру и метода продолжения по гравитационному параметру для решения двухточечной краевой задачи. Для применения метода продолжения по гравитационному параметру необходимо задать число целых витков КА вокруг притягивающего центра. Основной причиной использования метода продолжения по гравитационному параметру является возможность вычисления множества экстремальных решений с разным числом витков, в числе которых будет и глобально-оптимальное решение (точнее, решение с оптимальной угловой дальностью). Использование базового метода продолжения по параметру для решения задачи оптимизации траектории КА с ИРД не гарантирует получение глобально-оптимальных решений, с его использованием можно получить только локальное экстремальное решение. Однако базовый метод продолжения по параметру удобно использовать для продолжения оптимальной траектории КА с ИРД в оптимальную траекторию КА с ДОУ или ДОТ.

В случае, если правые части системы ОДУ оптимального движения и граничные условия не зависят явным образом от параметра продолжения τ , конечные граничные условия двухточечной краевой задачи можно представить в виде нелинейной системы уравнений.

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = 0, \quad (34)$$

где, например, для задачи оптимизации траектории КА с ИРД с частично заданными элементами орбиты \mathbf{f} определяется 6 уравнениями (13), (14), (15), (16), $\mathbf{z} = (\mathbf{p}_{x_0}, \mathbf{p}_{v_0})$.

Рассмотрим некоторое начальное приближение $\mathbf{z}_0: \mathbf{f}(\mathbf{z}_0) = \mathbf{b} \neq 0$, и погружение системы (32) в однопараметрическое семейство:

$$\mathbf{f}[\mathbf{z}(\tau)] = (1 - \tau)\mathbf{b}, \quad (35)$$

где $\tau \in [0;1]$ – параметр продолжения. Дифференцирование (35) относительно τ приводит к следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \mathbf{b}, \quad (36)$$

Уравнение (36) является дифференциальным уравнением метода продолжения по параметру. Для применимости метода продолжения необходимо существование и невырожденность матрицы частных производных $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$ на всем интервале продолжения $\tau \in [0;1]$. В ряде случаев (например, при применении метода продолжения по гравитационному параметру или при продолжении траектории КА с ИРД в траекторию КА с ДОУ или ДОТ) бывает целесообразным введение параметра продолжения τ в правые части дифференциальных уравнений движения и в краевые условия. В этом случае функция невязок \mathbf{f} явно зависит от параметра продолжения τ , а дифференциальные уравнения метода продолжения по гравитационному параметру примут вид:

$$\frac{d\mathbf{z}}{d\tau} = -\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{z}}\right)^{-1} \left(\mathbf{b} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \tau}\right), \quad (37)$$

Для получения решения \mathbf{z} , необходимо проинтегрировать уравнения (36) или (37) по параметру τ на отрезке от 0 до 1. Для вычисления правых частей дифференциальных уравнений (36) и (37), требуется вычисление частных производных от вектора невязок \mathbf{f} по начальным значениями сопряженных переменных $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{z}$. Для вычисления этих производных используется метод комплексного шага.

В третьей главе Рассматриваются численные примеры оптимизации траекторий КА с ИРД, ДОУ и ДОТ с использованием метода продолжения по гравитационному параметру и декартовых координат и компонент скорости КА в качестве фазового вектора. Рассмотрен перелет с начальной орбиты с высотой перицентра 400 км, высотой апоцентра 600 км, наклонением 52° , аргументом перицентра 30° , истинной аномалией 120° и долготой восходящего узла 330° на конечную орбиту с высотой перицентра 10000 км, высотой апоцентра 80000 км,

наклоением 63° , аргументом перицентра 270° , истинной аномалией 120° и долготой восходящего узла 0° . Длительность перелета принята равной 20 часам.

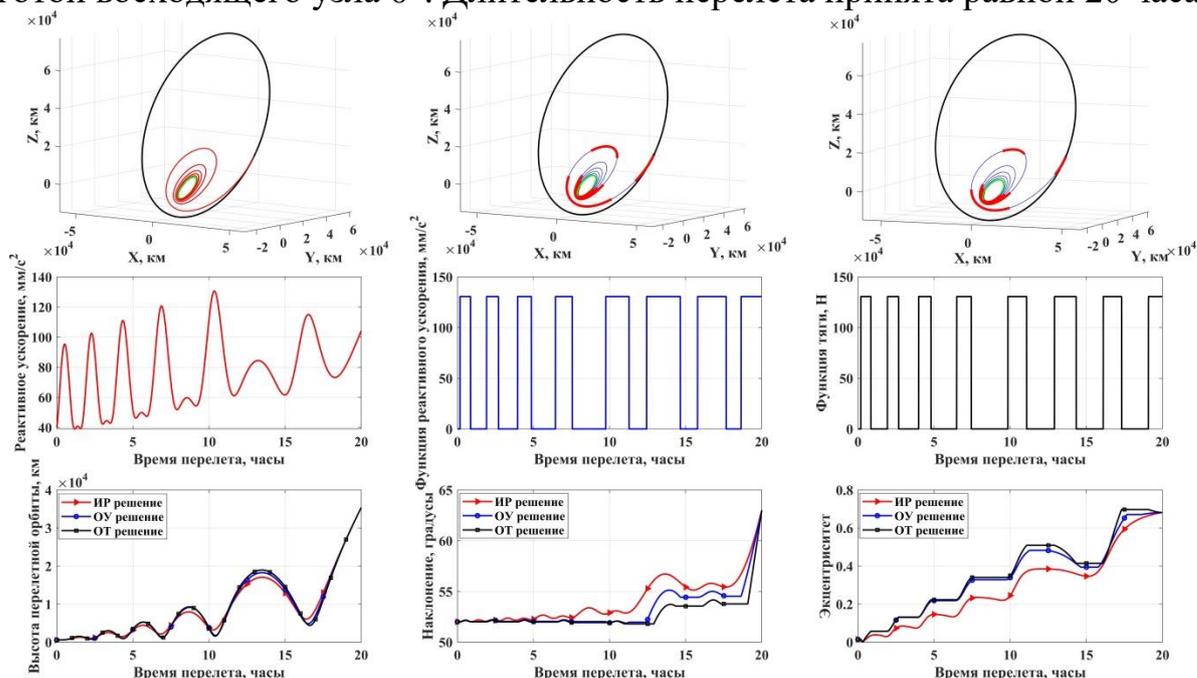


Рисунок 1 – Проекция оптимальных 5-витковой траектории КА с ИРД(слева), ДОУ(посередине), ДОТ(справа) на координатные плоскости системы координат экваториальной инерциальной (верхний ряд) и зависимости от времени реактивного ускорения, функции реактивного ускорения и функции тяги (средний ряд) и траекторных параметров (нижний ряд)

На рисунке 1 показаны проекции на координатные плоскости и пространственный вид оптимальной 5-витковой траектории КА с ИРД, ДОУ и ДОТ (здесь и далее красной сплошной линией обозначены активные участки траектории а синей пассивные участки траектории), а также зависимости от времени функция тяги δ и траекторных параметров, полученные в результате решения задачи оптимизации траекторий КА с ИРД, ДОУ (величина реактивного ускорения 130.5638 мм/с^2) и ДОТ (тяга 130.5683 Н , удельный импульс 330 с , начальная масса КА 1000 кг). Величина реактивного ускорения в ДОУ-задаче принята равной максимальному реактивному ускорению в ИРД-задаче, а величина тяги в ДОТ-задаче выбрана таким образом, чтобы начальное реактивное ускорение совпало с реактивным ускорением в ДОУ-задаче. На рисунке 2 слева сплошной линией представлена зависимость характеристической скорости на оптимальной ДОТ-траектории от удельного импульса тяги, а пунктирной - характеристическая скорость на оптимальной ДОУ-траектории. Видно, что затраты характеристической скорости на ДОТ-траектории асимптотически приближаются к затратам скорости на ДОУ-траектории с ростом удельного импульса тяги. Таким образом, решение задачи оптимизации траектории КА с ДОУ позволяет получить верхнюю оценку затрат характеристической скорости при использовании ДОТ. Справа на рисунке 2 представлена зависимость конечной массы КА на оптимальной ДОТ-траектории от удельного импульса.

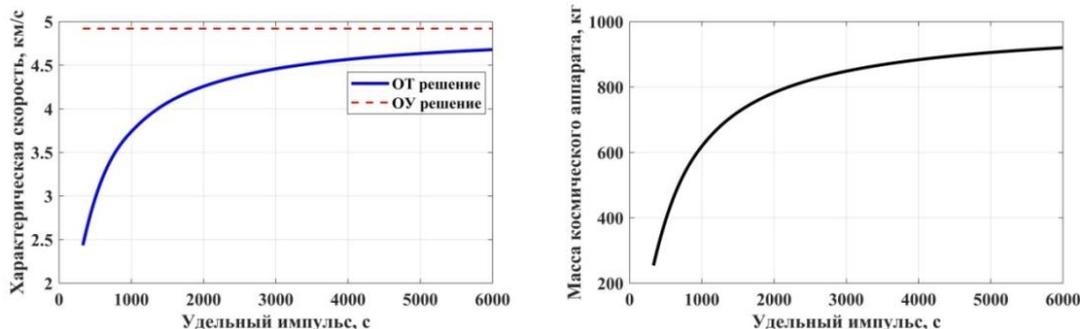


Рисунок 2 – Зависимость от удельного импульса характеристической скорости (слева) и конечной массы космического аппарата (справа)

В качестве другого примера в диссертации рассмотрена задачи оптимизации траекторий КА с ИРД и ДОУ с заданной начальной орбиты (высота перицентра 400 км, высота апоцентра 600 км, наклонение 51° , аргумент перицентра 30° , истинная аномалия 120° , долгота восходящего узла 328°) на конечную орбиту с частично заданными орбитальными элементами (высотой перицентра 800 км, высотой апоцентра 1500 км, наклонением 20° и свободными значениями аргумента перицентра, истинной аномалии и долготы восходящего узла) или фиксированными орбитальными элементами (с теми же значениями наклонения и высот перигея и апогея, аргументом перицентра 35° , истинной аномалией 200° и долготой восходящего узла 328°). На рисунке 3 представлены проекции оптимальных 4-витковой и 20-витковой траекторий перелета КА с ДОУ с начальной орбиты (черная линия) на целевую орбиту (зеленая линия) и зависимость характеристической скорости от времени перелета для 4-витковой и 20-витковой траекторий.

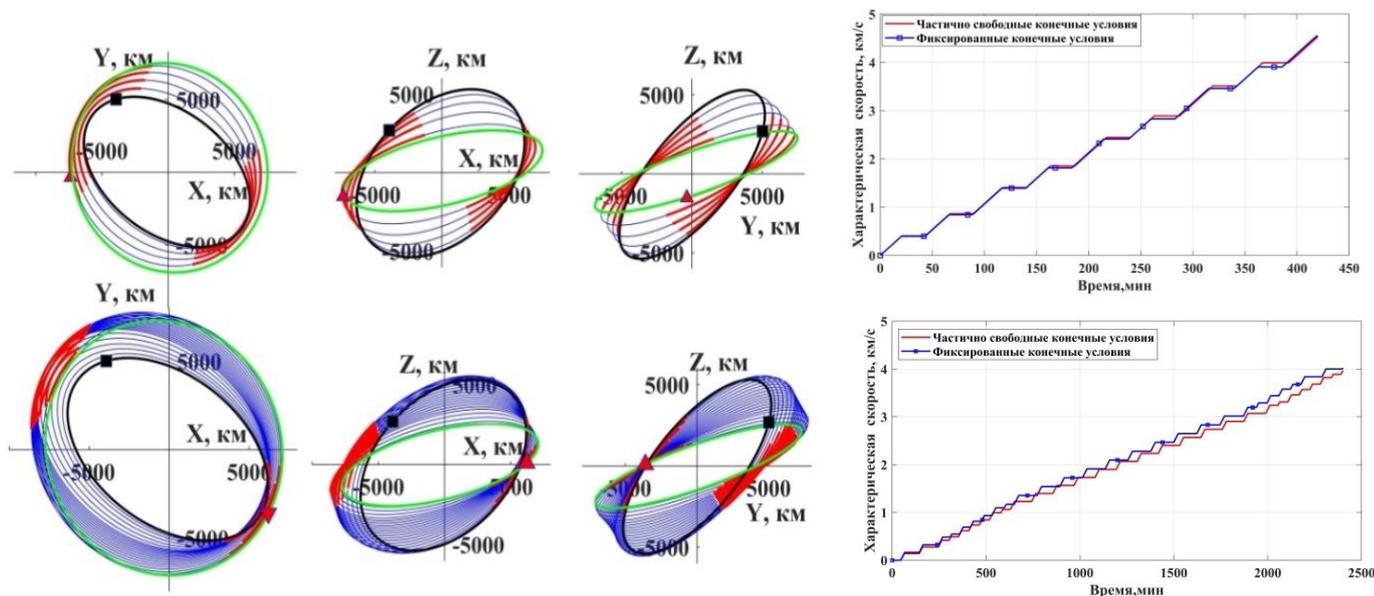


Рисунок 3– Проекция на координатные плоскости оптимальных 4-витковых (слева сверху) и 20-витковых (слева внизу) траекторий КА с частично свободными конечными условиями и зависимости характеристической скорости от времени перелета для 4-витковых траектории (справа сверху) и 20-витковых траектории (справа внизу)

На рисунке 3 также приведены сравнения зависимостей характеристической скорости от времени для задач с фиксированными и частично заданными краевыми условиями. В результате решения задачи оптимизации 20-витковых траектории с частично заданными краевыми условиями характеристическая скорость равна 3.9629 км/с, а для перелета на орбиту с фиксированными конечными условиями потребовалась характеристическая скорость 4.0284 км/с. Как и ожидалось, ослабление ограничений на правом конце траектории привело к снижению затрат характеристической скорости.

В четвертой главе рассмотрена задача оптимизации многовиткового перелета космического аппарата с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета с заданной начальной орбиты на геостационарную орбиту в центральном ньютоновском гравитационном поле. Целью оптимизации является расчет программы управления вектором тяги, обеспечивающей минимум затрат топлива при реализации многовитковой траектории перелета на конечную орбиту.

Величина тяги считается постоянной. Оптимизация программы управления вектором тяги включает в себя оптимизацию программ ориентации вектора тяги (углов тангажа и рысканья) и оптимизацию периодов работы двигателя. Для математического моделирования движения космического аппарата используются дифференциальные уравнения в равноденственных элементах, а в качестве независимой переменной используется вспомогательная долгота K . Для достижения поставленной цели рассмотрено последовательное решение задач оптимизации многовиткового перелета КА с ИРД и ДОТ.

Базовый метод продолжения по параметру и метод продолжения по гравитационному параметру были успешно использованы для решения краевой задачи при использовании математической модели движения КА, записанной в декартовых координатах. Однако для решения задачи оптимизации многовиткового перелета, при использовании метода продолжения по гравитационному параметру, необходимо задать число целых витков КА вокруг притягивающего центра и время перелета на конечную орбиту. В случае несоответствия заданной продолжительности перелета и заданной

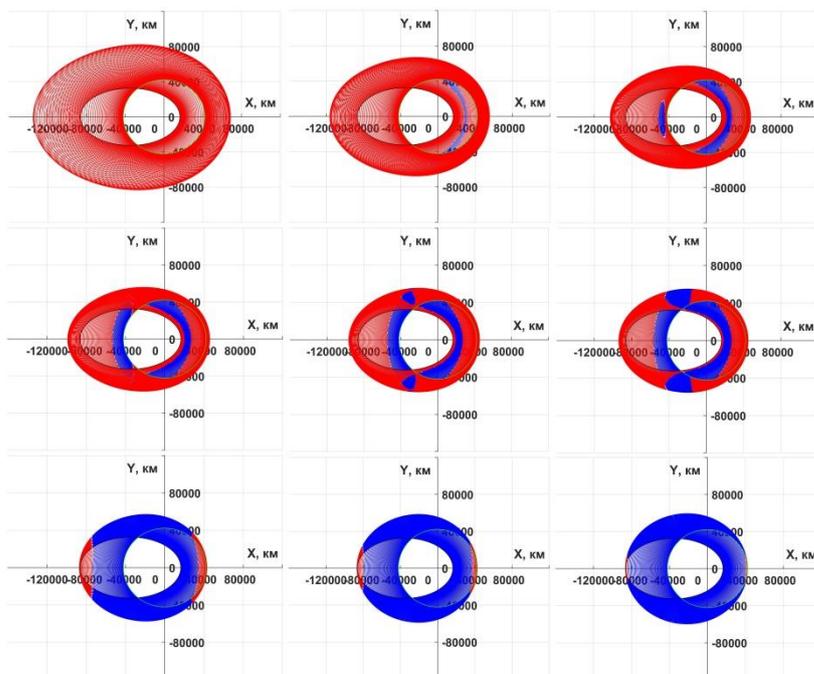


Рисунок 4 – Эволюция структуры 100 витковых оптимальных траектории перелета с эллиптической орбиты на ГСО с ростом тяги

угловой дальности возможен отказ метода или вычисление локально оптимальной траектории, сильно отличающейся от наилучшего решения. Это связано с существованием множества траекторий с фиксированным временем перелета, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности и отличающихся друг от друга разной угловой дальностью. При рассмотрении задачи с фиксированной угловой дальностью и свободным временем перелета, судя по проведенному численному анализу, для каждого типа экстремали существует единственная траектория, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности. Поэтому в четвертой главе рассматривались численные примеры решения задачи оптимального управления именно в такой постановке.

На рисунке 4 приведены примеры оптимальных 100-витковых траекторий КА с ДОТ с различными значениями тяги ЭРДУ в виде их проекций на плоскость геоэкватора. Начальная орбита имеет высоту перигея 10000 км, высоту апогея 80000 км, наклонение 31° , нулевые значения аргумента перигея и долготы восходящего узла. Конечная орбита – ГСО (круговая орбита с высотой 35793 км и с нулевым наклонением). В верхнем ряду рисунка 4 приведены траектории с тягой 145 мН, 150 мН, 160 мН, в среднем ряду – траектории с тягой 170 мН, 180 мН, 195 мН, в нижнем ряду – траектории с тягой 435 мН, 580 мН, 1000 мН. На рисунке 5 приведены зависимости траекторных параметров и программы управления от времени для траектории с тягой 1000 мН.

В начале перелета угол тангажа колеблется около нулевого значения с амплитудой менее 30 градусов, а на следующем участке траектории угол тангажа изменяется от -180 до 180 градусов, обеспечивая торможение в окрестности перигея для уменьшения высоты апогея и разгон в окрестности апогея для увеличения высоты перигея. Угол рысканья изменяется от -90 до 70 градусов.

Зависимость оптимального времени перелета и конечной массы КА от величины тяги приведена на рисунке 6. Обнаружено, что с увеличением величины тяги конечная масса КА растет приближаясь к некоторому предельному значению. Оптимальное время перелета с ростом тяги сначала уменьшается, а затем начинает расти, также приближаясь к некоторому предельному значению при дальнейшем росте тяги.

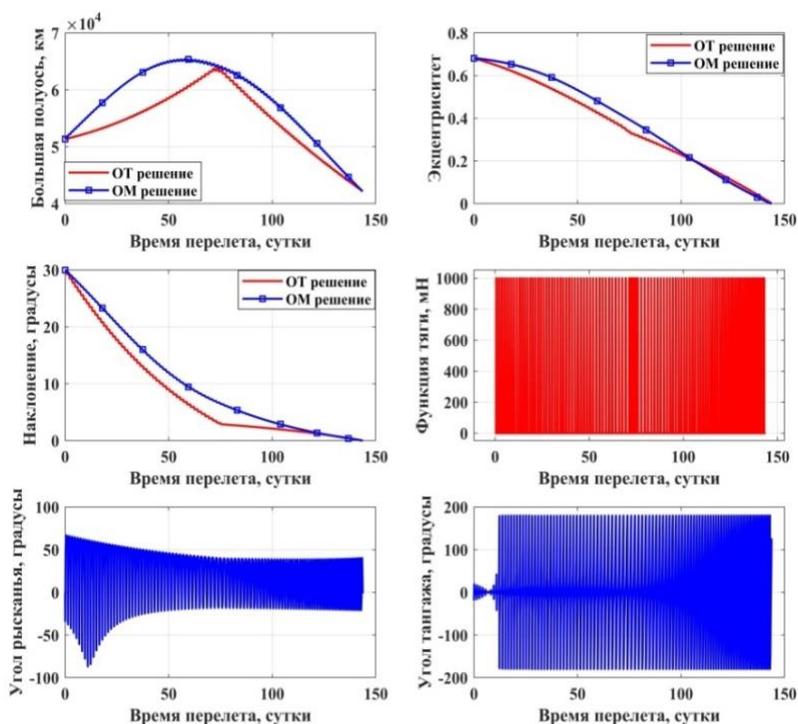


Рисунок 5 – Зависимости от времени траекторных параметров и программы управления с тягой 1000 мН

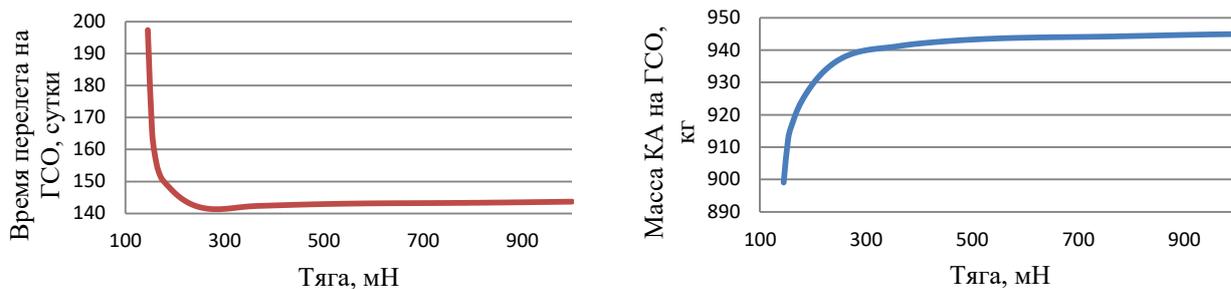


Рисунок 6 – Зависимость от различной величины тяги оптимальной времени перелета (слева) и конечной массы КА на ГСО (справа)

В пятой главе рассматривается комбинированная схема перелета, в рамках которой ракета-носитель Falcon 9 выводит КА на эллиптическую промежуточную орбиту с космодрома на мысе Канаверал. В процессе проведения анализа задачи, фиксируется значение высоты перигея и наклонение промежуточной орбиты, а высота апогея промежуточной орбиты варьируется. После отделения от последней ступени ракеты-носителя, КА осуществляет перелет на ГСО с использованием ЭРДУ. На этапе выведения КА с промежуточной орбиты на ГСО с использованием ЭРДУ рассматривается задача минимизация массы рабочего топлива многовиткового межорбитального перелета. Число витков и высота апогея промежуточной орбиты варьируются с целью анализа влияния этих параметров на длительность перелета и доставляемую массу КА на ГСО. Основной целью рассматриваемой задачи является вычисление оптимальных значений высоты апогея промежуточной орбиты и оптимальных значений число витков, обеспечивающих за заданное время Δt^* доставку максимальной массы космического аппарата на ГСО. Для решения задачи оптимизации применяется принцип максимума Понтрягина. После применения принципа максимума задача оптимизации сводится к решению краевой задачи, которая решается методом продолжения по параметру.

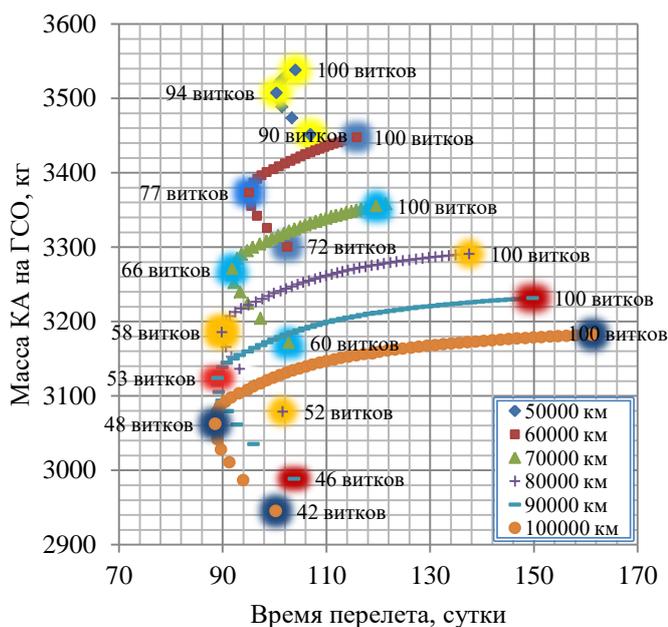


Рисунок 7 – Зависимость доставляемой массы КА на ГСО от длительности выведения

Параметры промежуточной орбиты заданы фиксированными значениями высоты перигея 185 км, наклона 28,5°, аргумента перицентра 180°, истинной аномалии 0° и 180° долготы восходящего узла 0°. Параметры промежуточной орбиты и начальная масса КА на этой орбите соответствует использованию РН Falcon 9. При расчете многовиткового перелета с промежуточной орбиты на ГСО с двигателем малой тягой, предполагается что ЭРДУ состоит из 4 однотипных нерегулируемых двигателей с тягой по 280 мН с удельным импульсом 1780 с.

Зависимость доставляемой массы КА на ГСО от длительности выведения для различных высот апогея промежуточной

орбиты и различного числа витков довыведения с ЭРДУ представлена на рисунке 7. В частности, при высоте апогея промежуточной орбиты 50000 км и угловой дальности перелета 94 витка достигается минимальная длительность перелета (100,3332 суток), при этом на ГСО доставляется КА массой 3507, 3098 кг.

Очевидно, что огибающая представленных на рисунке 7 кривых будет представлять собой Парето-фронт задачи максимизации доставляемой на ГСО массы КА и минимизации длительности перелета. Эта огибающая позволяет определить оптимальные значения высоты апогея промежуточной орбиты и оптимальное число витков траектории перелета с промежуточной орбиты на ГСО, которые для каждой длительности перелета обеспечивают доставку на ГСО КА максимальной массы. Зависимость оптимального времени перелета, конечной массы КА и числа витков от высоты апогея промежуточной орбиты, определяющая Парето-фронт, представлена в таблице 1.

Таблица 1 – Зависимость оптимального времени перелета, конечной массы КА и числа витков от высоты апогея промежуточной орбиты

Высота апогея r_{α} , км	Время перелета Δt , сутки	Начальная масса на ПО, кг	Конечная масса на ГСО m , кг	Число витков N_{rev}
50000	100.3332	4044	3507.3098	94
60000	95.0464	3869	3373.4300	77
70000	91.8015	3741	3270.9573	66
80000	89.8080	3642	3185.7008	58
90000	88.9604	3564	3123.8915	53
100000	88.5158	3501	3062.3202	48

Для оценки оптимальных значений высоты апогея, оптимальных значений числа витков и значений конечной массы КА в промежутках между вычисленными длительностями перелета используется интерполяция данных из таблицы 1. Для аппроксимации используются функции Гаусса высшего порядка (38), (39), (40). В таблицах 2, 3 и 4 приведены значения используемых в этих формулах значений коэффициентов a_i , b_i , c_i .

$$m(\Delta t) = \sum_{i=1}^5 a_i \exp\left(-\frac{(\Delta t - b_i)^2}{2c_i^2}\right), \quad (38)$$

$$N_{rev}(\Delta t) = \sum_{i=1}^6 a_i \exp\left(-\frac{(\Delta t - b_i)^2}{2c_i^2}\right), \quad (39)$$

$$r_{\alpha}(\Delta t) = \sum_{i=1}^7 a_i \exp\left(-\frac{(\Delta t - b_i)^2}{2c_i^2}\right). \quad (40)$$

Таблица 2 – Значения коэффициентов для интерполяции оптимального радиуса апогея

коэффициент	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	$i=5$	$i=6$	$i=7$
a_i	1.52e+05	848.5	-175.7	6.095e+04	2256	176.4	4.43e+04
b_i	85.34	89.78	89.66	80.31	106.1	94.95	106.5
c_i	2.186	0.8258	0.887	13.07	4.009	4.196	60.08

Таблица 3 – Значения коэффициентов для интерполяции оптимального числа витков

коэффициент	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
a_i	83.42	94.23	-21.81	25.14	0.01428	7.028
b_i	103.1	95.26	95.24	89.33	93.34	88.55
c_i	4.645	5.259	3.292	2.869	0.01916	1.318

Таблица 4 – Значения коэффициентов для интерполяции конечной массы КА

коэффициент	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
a_i	3579	533.3	165.9	37.32	158.1
b_i	105.1	89.62	88.24	88.6	95.27
c_i	25.37	4.879	2.539	1.076	4.61

Зависимости оптимальных значений высоты апогея, оптимальных значений число витков и значений конечной массы КА от продолжительности перелета на интервале от 88,516 сутки до 100,333 суток, вычисленные по формулам (38), (39), (40), представлены на рисунке 8 и 9.

В шестой главе рассматривается комбинированная схема выведения космического аппарата на геостационарную орбиту при запуске с помощью РН среднего класса и разгонного блока (РБ) с космодрома Восточный. В рамках этой схемы РН среднего класса выводит КА с РБ на опорную орбиту с высотой 200 км и, после отделения от последней ступени РН, РБ выводит КА на эллиптическую промежуточную орбиту. После отделения от РБ, КА осуществляет перелет на ГСО с использованием ЭРДУ. На рисунке 10 показана эта схема выведения КА на ГСО с использованием комбинации большой и малой тяги.

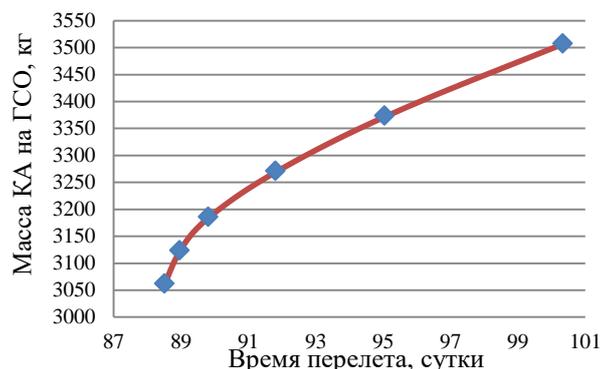


Рисунок 8 – Зависимость доставляемой массы КА на ГСО от длительности выведения

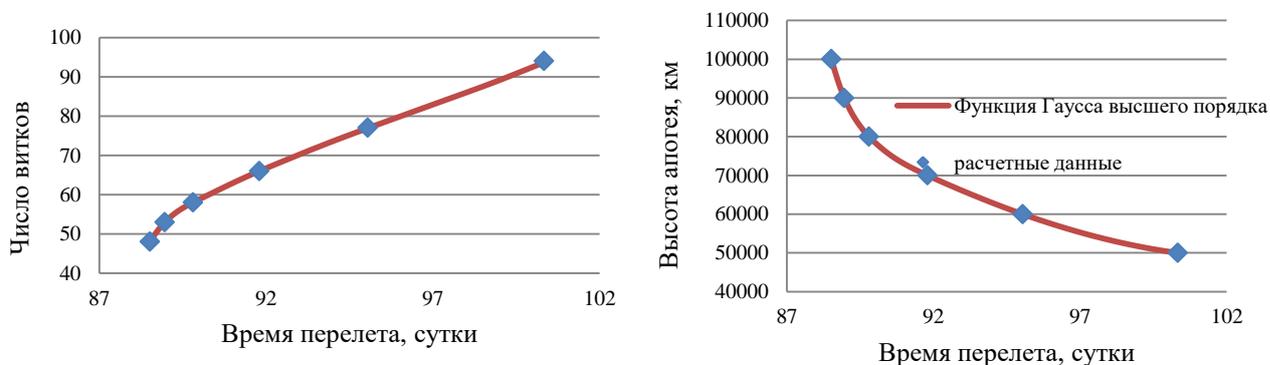


Рисунок 9 – Зависимость оптимального числа витков (слева) и оптимальных значений высоты апогея (справа) от длительности выведения

На этапе выведения КА разгонным блоком на эллиптическую промежуточную орбиту с опорной орбиты (высотой 200 км, наклоном 51,8

градусов) используется двухимпульсная схема перелета. Расчет траектории перелета между опорной и промежуточной орбитами производится в импульсном приближении с учетом потерь скорости. Основными параметрами, определяющими промежуточную орбиту, являются радиус перигея r_π , радиус апогея r_α и наклонение i . После вычисления суммарных импульсов скорости, вычисляется начальная масса орбитального блока на опорной орбите с учетом ограничения, чтобы затраты топлива РБ не превышали заданную максимальную величину.

На этапе выведения КА с промежуточной орбиты на ГСО с использованием ЭРДУ рассматривается осредненная задача минимизации времени многовиткового межорбитального перелета и используются асимптотические значения характеристической скорости перелета с малой тягой. В работе были использованы 30400 значений характеристической скорости ЭРДУ, которые необходимы для перелета с различных промежуточных орбитах (определенных на трехмерной сетке значения r_π, r_α, i) на ГСО.

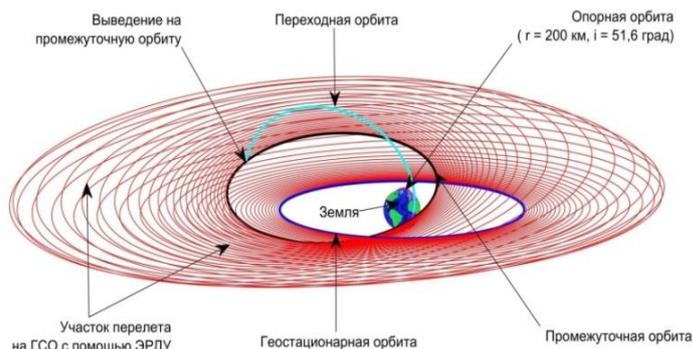


Рисунок 10 – Типичная схема выведения КА на ГСО с использованием комбинации большой и малой тяги

При известном значении массы КА на промежуточной орбите $m_{КА}^{ПО}$ и значении характеристической скорости ЭРДУ, необходимой для перелета с промежуточной орбиты на ГСО, вычисляется конечная масса КА на ГСО $m_{КА}^{ГСО}$ и время перелета на ГСО ΔT ;

$$m_{КА}^{ГСО}(r_\pi, r_\alpha, i) = m_{КА}^{ПО}(r_\pi, r_\alpha, i) \exp[-V_x(r_\pi, r_\alpha, i) / (I \cdot g_0)] \quad (41)$$

$$\Delta t(r_\pi, r_\alpha, i) = [m_{КА}^{ПО}(r_\pi, r_\alpha, i) - m_{КА}^{ГСО}(r_\pi, r_\alpha, i)] / (P / (I \cdot g_0)) \quad (42)$$

где $I=1750$ с – удельный импульс ЭРДУ; $P = 290$ мН – тяга ЭРДУ и $g_0 = 9.80665$ м/с².

Для определения условного экстремума функции при наличии ограничений используется метод неопределенных множителей Лагранжа. В данной работе для оценки начальной массы КА и значений характеристической скорости ЭРДУ в промежутках между узлами рассматриваемой сетки, необходимой для расчета перелета с промежуточной орбиты на ГСО, используется трехмерная интерполяция В-сплайнами. С применением В-сплайнов реализуется гладкая аппроксимация зависимости $m_{КА}^{ПО}$ и V_x от параметров промежуточной орбиты и вычисляются необходимые первые и вторые производные по этим параметрам.

Основной целью решаемой задачи является вычисление оптимальных параметров промежуточной орбиты, обеспечивающих за заданное время Δt^* доставку максимальной массы КА на ГСО и самой максимальной массы КА.

Рассматриваемая задача сводится к задаче условной минимизации следующего вида:

$$\begin{aligned} J^* = -m_f = -m_0 e^{-V_x/c} \rightarrow \min, \\ m_0 - m_f - m^* \Delta t = 0, m^* = P / (I \cdot g_0). \end{aligned} \quad (43)$$

Расширенный функционал этой задачи условной минимизации имеет вид:

$$J = -m_f + \lambda (m_0 - m_f - m^* \Delta t), \quad (44)$$

а сама задача, в силу необходимых условий оптимальности, сводится к решению системы нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{\partial m_f}{\partial r_\pi} + \lambda \left(\frac{\partial m_0}{\partial r_\pi} - \frac{\partial m_f}{\partial r_\pi} \right) = 0, -\frac{\partial m_f}{\partial r_\alpha} + \lambda \left(\frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} - \frac{\partial m_f}{\partial r_\alpha} \right) = 0, \\ -\frac{\partial m_f}{\partial i} + \lambda \left(\frac{\partial m_0}{\partial i} - \frac{\partial m_f}{\partial i} \right) = 0, m_0 - m_f - m^* \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

где λ – неопределённый множитель Лагранжа. Значение λ можно получить из любого из первых трех уравнений (45) и подставить его в оставшиеся уравнения. Полученная система из трех нелинейных уравнений решается методом продолжения по параметру. Необходимые первые и вторые производные от $m_{КА}^{ГСО}$ и Δt по параметрам промежуточной орбиты легко вычисляются ввиду использования В-сплайнов для их аппроксимации. В итоге систем (45) может быть сведена к следующей системе из трех нелинейных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} \frac{\partial V_x}{\partial r_\pi} - \frac{\partial m_0}{\partial r_\pi} \frac{\partial V_x}{\partial r_\alpha} = 0 \\ \frac{\partial m_0}{\partial r_\alpha} \frac{\partial V_x}{\partial i} - \frac{\partial m_0}{\partial i} \frac{\partial V_x}{\partial r_\alpha} = 0 \\ m_0 - m_f - m^* \Delta t = 0 \end{aligned} \quad (46)$$

В данной работе для получения решения системы нелинейных уравнений используется метод продолжения по параметру и в результате решения получается значение радиуса перигея r_π , радиуса апогея r_α , наклонение i . В данной задаче используются аналитические частные производные от вектора невязок \mathbf{f} (46) по значениям неизвестных параметров $\mathbf{z} = (r_\pi, r_\alpha, i)$. Результаты расчетов представлены на рисунках (11) и (12). На рисунке 11 показана зависимость оптимальных параметров промежуточной орбиты от длительности выведения КА с промежуточной орбиты на ГСО. С увеличением длительности перелета наклонение промежуточной орбиты монотонно увеличивается, высота перигея уменьшается, а зависимость оптимальной высоты апогея от длительности перелета имеет максимум.

На рисунке 12 показана зависимость доставляемой массы КА на ГСО от длительности выведения КА с промежуточной орбиты на ГСО. Видно, что увеличение доставляемой на ГСО массы КА происходит монотонно с увеличением длительности выведения. Конечная масса КА на ГСО при короткой

продолжительности полета составляет 872.0 кг, а при продолжительности полета 235 дней достигает 2045.7 кг.

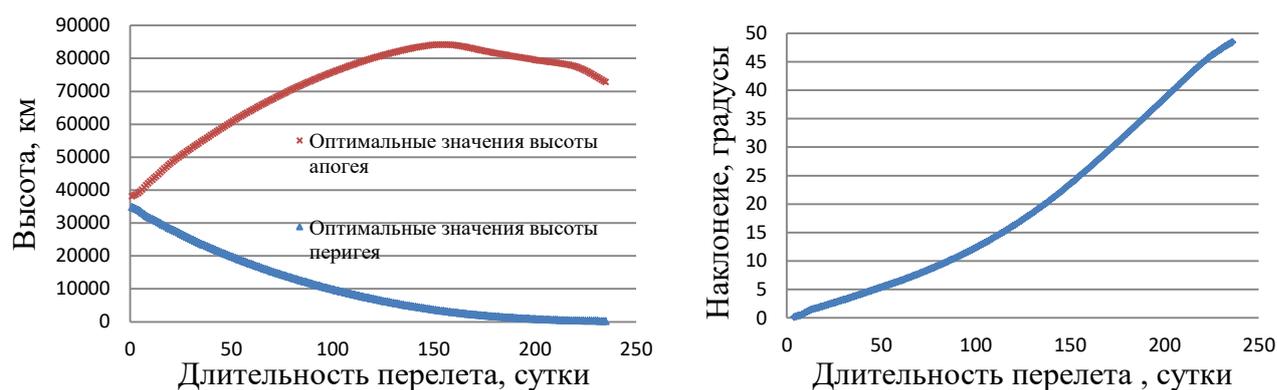


Рисунок 11 – Зависимость от длительности выведения КА на ГСО оптимальных значений высоты перигея и апогея промежуточной орбиты (слева) и оптимального наклонения промежуточной орбиты (справа)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе рассмотрена проблема оптимизации многовитковых межорбитальных перелетов КА с ЭРДУ. Основные результаты работы состоят в следующем:

- предложен подход к решению задачи минимизации затрат топлива на перелет КА с конечной тягой с заданными или частично свободными конечными условиями за фиксированное время на основе использования принципа максимума и метода продолжения для математической модели движения КА в декартовых координатах. Для решения краевой задачи принципа максимума разработан двухэтапный метод. Во-первых, решается задача расчета траектории КА с ИРД, удовлетворяющей необходимым условиям оптимальности. Результаты оптимизации траектории КА с ИРД используются в качестве начального приближения на втором этапе, на котором реализуется численное продолжение оптимальной траектории КА с ИРД в оптимальную траекторию КА с ДОУ или ДОТ. Для оптимизации свободных элементов конечной орбиты (истинной аномалии, долготы восходящего узла и аргумента перицентра) используются условия трансверсальности;

- разработан метод оптимизации многовитковых перелетов КА с ЭРДУ с заданной угловой дальностью. Между двумя заданными орбитами в центральном гравитационном поле. В разработанном методе используется математическая модель движения КА с ДОТ в равноденственных переменных, использующая вспомогательную долготу в качестве независимой переменной. В качестве

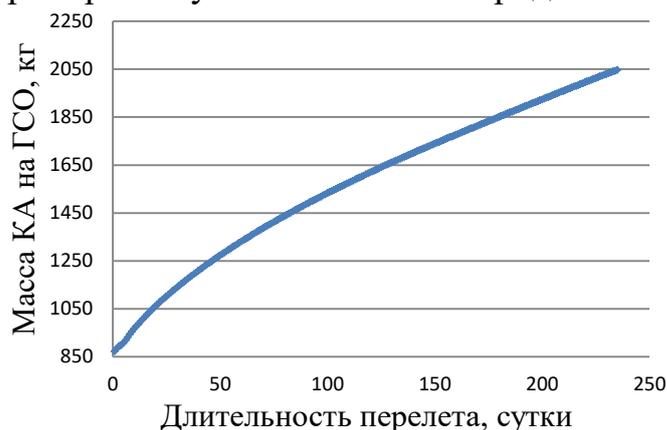


Рисунок 12 – Зависимость доставляемой массы КА на ГСО от длительности выведения по оптимальной схеме

минимизируемого функционала рассмотрены затраты топлива. Используя принцип максимума Понтрягина, задача оптимального управления была сведена к краевой задаче для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которая была решена с применением метода продолжения по параметру. В результате проведения численных расчетов с использованием разработанного метода, обнаружена немонотонная зависимость оптимального времени перелета с фиксированной угловой дальностью от тяги ЭРДУ;

- разработаны методики оптимизации комбинированных схем выведения геостационарного космического аппарата с ЭРДУ в вариантах с использованием и без использования разгонного блока. Получены зависимости оптимальных параметров промежуточной орбиты и массы КА на ГСО от длительности выведения. Представленные методики и численные результаты могут быть использованы при выборе основных параметров комбинированных схем выведения КА с ЭРДУ на геостационарную орбиту.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ АВТОРОМ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

*В рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в Перечень
Высшей аттестационной комиссии Российской Федерации :*

1. **Паинг Сое Ту У.** Оптимизация многовитковых траекторий межорбитального перелета с идеально-регулируемым двигателем малой тяги. / Петухов В.Г.// Известия Российской академии наук. Энергетика, 2019, № 3, с. 140-154.
2. **Паинг Сое Ту У.** Метод оптимизации траектории перелета на конечную орбиту с частично заданными элементами// Инженерный журнал: Наука и инновации. 2020, вып . 9, с.1-21, <http://engjournal.ru/catalog/arise/adb/2017.html>.
3. **Паинг Сое Ту У.** Анализ выведения космических аппаратов на геостационарную орбиту с использованием комбинации большой и малой тяги // Космонавтика и ракетостроение, 2023, № 1, том . 130, с. 69-78.
4. **Паинг Сое Ту У.** Оптимизация схемы выведения геостационарного космического аппарата с электроракетной двигательной установкой с использованием ракеты-носителя Falcon-9 // Космические аппараты и технологии, 2023, № 1, том . 7, с. 35-43.

В рецензируемых иностранных изданиях, входящих в Scopus:

5. **Paing Soe Thu Oo,** Low-Thrust multi-revolutionary trajectories to geostationary orbit using angular independent variable // AIP Conference Proceedings 2549, 120007 (2023), <https://doi.org/10.1063/5.0107755> .