

МЕХАНИКА

Научная статья

УДК 539.4

DOI: [10.34759/trd-2021-120-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-06)

Определение динамических характеристик металлополимерного слоистого стержня

Олег Александрович Прокудин¹, Лев Наумович Рабинский^{2✉},

Чан Куэт Тханг³

^{1,2,3}Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия

²Rabinskiy@mail.ru✉

Аннотация. Исследуются механические характеристики нового композиционного материала. Изготовлены балочные образцы прямоугольного поперечного сечения из алюмокомпозитного слоистого композиционного материала. Композит представляет собой пакет алюминиево-литиевых и стеклопластиковых листов толщиной 0,3 – 0,35 мм. Эффективные модули упругости полученного таким образом композиционного пакета определены путем эксперимента на квазистатическое одноосное растяжение. Проведены основные динамические испытания консольно закрепленных балочных образцов исследуемого алюмокомпозитного слоистого композиционного материала на свободные затухающие колебания, возбуждаемые кинематически путем задания начального перемещения свободного конца балки либо динамически путем задания поперечной ударной нагрузки. Получены амплитудно-частотные характеристики колебаний образцов различных

геометрических размеров, выявлены пики на амплитудно-частотных характеристиках, соответствующие резонансной частоте колебаний по первой собственной форме. Вычислены эффективные модули упругости композиционного материала. По ширине пика амплитудно-частотной характеристики в окрестности резонансной частоты определены коэффициенты демпфирования композиционного пакета. Проведена соответствующая статистическая обработка результатов эксперимента, выявлен разброс результатов, соответствующих образцам различной ширины. Для оценки точности полученных в результате экспериментальных измерений характеристик материала получено точное решение прямой задачи о свободных колебаниях композиционной балки слоистой структуры с заданными физическими постоянными. Построена модель поперечных колебаний балки, учитывающая деформации поперечного сдвига, но пренебрегающая деформациями обжатия сечения. В качестве кинематических переменных приняты продольное и поперечное перемещения точки на линии, соединяющей оси симметрии поперечных сечений, и угол поворота сечения относительно поперечной оси. Записаны соотношения для деформаций, получены выражения для кинетической и потенциальной энергии деформирования балки. Уравнения движения и их естественные краевые условия получены вариационным путем. Поставлена краевая задача о гармонических колебаниях консольно закрепленной балки, получено соответствующее вековое уравнение. Это уравнение является трансцендентным и решается численно. Для учета эффекта демпфирования применен метод комплексных модулей. Частоты и декременты колебаний, полученные на основе численно-

аналитического решения прямой задачи, вполне удовлетворительно соответствуют экспериментальным данным.

Ключевые слова: экспериментальные исследования, слоистый стержень, алюмопластик, собственные частоты, амплитудно-частотные характеристики, демпфирование

Для цитирования: Прокудин О.А, Рабинский Л.Н., Чан Куэт Тханг. Определение динамических характеристик металлополимерного слоистого стержня // Труды МАИ. № 120. DOI: [10.34759/trd-2021-120-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-06)

MECHANICS

Original article

Determination of the dynamic characteristics of a metal-polymer laminated rod

Oleg A. Prokudin¹, Lev N. Rabinsky^{2✉}, Tran Quyet Thang³

^{1,2,3}Moscow Aviation Institute (National Research University),

Moscow, Russia

²Rabinskiy@mail.ru

Abstract. The article presents the studies of mechanical characteristics of a new composite material. The beam-shaped samples of rectangular cross-section from the laminar composite material were fabricated. The composite represents a pack of aluminum-lithium and fiber-glass plastic sheets of 0.3–0.5 mm thickness. The effective elastic moduli of the composite pack obtained this way were determined by the experiment for quasi-static uniaxial tension.

The basic dynamic tests were performed for cantilever beam samples made from the aluminum-fiberglass composite laminate for the freely damped oscillations. The freely damped oscillations were being excited kinematically by applying some initial transversal translation to the free-end section of the beam or dynamically by applying some transversal concentrated shock load. The gain-frequency characteristics of the samples of various geometric dimensions were obtained, and the peaks on the gain-frequency curves corresponding to the resonant frequencies of first eigenmode oscillations were revealed. The effective elastic moduli of the composite material were computed employing the obtained results. The damping factors of the studied composites were determined using the measured peaks widths in the vicinities of the resonant frequencies. The appropriate statistical analysis of the obtained tests results was performed, scattering of the results, corresponding to the samples of different widths was revealed. The exact solution to the direct problem on oscillation of the cantilever composite beam of laminated structure with the assigned physical constants was obtained for the accuracy evaluation of the obtained results. A model of transversal oscillations of the beam was developed, accounting for the transversal shift deformation, but neglecting the cross-section crimping deformation. The longitudinal and transverse translations of a point along the line, connecting the symmetry centers of cross-sections as well as the angles of rotation of cross-sections around transverse horizontal axe, are accepted as the model main kinematic variables. Relations for the deformations are written, and equations for both kinetic energy and strain energy of an oscillating beam are obtained. The appropriate equations of motion as well as their natural boundary conditions were obtained by the Hamilton variation principle. The boundary value problem for

harmonic transverse oscillations of the cantilever beam was stated, and the corresponding characteristic equation for the frequency was derived. This equation is transcendental, and is being solved numerically. The complex moduli approach was applied to account for the damping effects. The frequencies and damping decrements obtained after the numerical-analytical solution of the direct problem of the beam oscillation are in good correlation with the test data.

Keywords: experimental studies, laminated beams, aluminum-fiberglass composites, natural frequencies, gain-frequency characteristics, damping

For citation: Prokudin O.A., RabinskyL.N., Tran Quyet Thang. Determination of the dynamic characteristics of a metal-polymer laminated rod. *Trudy MAI*, 2021, no. 120.

DOI: [10.34759/trd-2021-120-06](https://doi.org/10.34759/trd-2021-120-06)

Введение

Производители самолетов во всем мире всегда изучают и оценивают материалы, которые могут уменьшить вес. Снижение веса и улучшение характеристик устойчивости к повреждениям были главными стимулами для разработки нового семейства материалов для аэрокосмической и авиационной промышленности. Одним из перспективных материалов для первичных и вторичных компонентов самолетов является GLARE (Glass laminate aluminum reinforced epoxy), аналог в России — СИАЛ. Это многослойный материал, состоящий из чередующихся слоев алюминия и стеклопластика со связующей пленкой. Такой материал, был признан одним из лучших аэрокосмических материалов будущего. GLARE

обеспечивает значительную экономию веса (15-30 процентов) по сравнению с обычными алюминиевыми сплавами. Также повышается устойчивость к коррозии, поскольку структура слоистого материала действует как барьер для проникновения влаги.

Основные производители авиационной техники, включая Airbus и Boeing, нашли применение для GLARE от обшивки самолетов до панелей пола и противопожарных перегородок. Например, слоистый материал был выбран для нескольких ключевых компонентов пассажирского самолета Airbus A380. К ним относятся обшивки верхней части фюзеляжа, стыковые лямки фюзеляжа и передние кромки горизонтальных и вертикальных стабилизаторов. Проектирование и расчет конструктивных элементов самолёта из слоистых композитов рассмотрен в работах [1-4].

Эффективные механические свойства GLARE при одноосном растяжении исследованы в работе [5], оценка межслоевой прочности алюмокомпозитов приведена в [6].

Достаточно высокая усталостная прочность и ударные свойства, впечатляющие механические свойства, прочная огнестойкость и устойчивость к ударам молнии — вот некоторые из многих желаемых характеристик GLARE.

В настоящее время достаточно полно исследовалось поведение трехслойных сэндвич-конструкций материалов типа алюмокомпозитов проводились только на ударное воздействие. На данный момент времени крайне мало исследований на особенности вибрационного воздействия в особенности для конструкций, имеющих

более трех слоев. В авиации и аэрокосмических конструкциях очень важно иметь оценку собственных частот и различных параметров демпфирования для такого вида конструкций, так как это позволяет вычислить их динамическую прочность.

В работах [7,8] представлены экспериментальные результаты в которых проводились работы по измерению параметра демпфирования материала типа GLARE. Для таких материалов коэффициент демпфирования и обычно составляет примерно 0,01-0,02, зависит от схемы армирования. Результаты статических испытаний трехслойных балок со вспененным наполнителем и с несущими слоями из алюмокомпозитов были представлены в работе [9, 10], где были исследованы особенности деформирования и механизмы разрушения образцов при трехточечном изгибе. В исследовании была предложена и протестирована аналитическая методика проектирования рассматриваемых конструкций, работающих в условиях низкоскоростного удара.

Для определения механических характеристик композиционных материалов в современных условиях используются, как правило, динамические эксперименты на колебания или распространение волн в исследуемых образцах различной формы [11-13] в сочетании с различными алгоритмами оптимизации для решения обратной задачи [12] и методом конечных элементов [13], в частности, для решения задачи определения постоянных композитных оболочек [14], а также функционально-градиентных цилиндров [15]. Для решения прямой задачи о колебаниях или распространении волн используются разные методы – аналитические и численные (например, перечисленные в обзоре [16]).

В укладке слоистой панели может быть любое количество слоев алюминия и стеклопластика, но соотношение между количеством слоев таково, так что крайний внешний слой всегда состоит из алюминия с обеих сторон. Более ранние исследования таких гибридных ламинатов показали, что эти слоистые материалы превосходят композитный или монолитный алюминий. Достаточно хорошо изучено влияние составляющих свойств на остаточную прочность гибридного материала, армированного алюминиевым сплавом и стекловолокном.

Достаточно полно исследовано долговременное поведение эпоксидных слоистых материалов из стекловолокна и алюминия. Показано, что характеристики гибридных ламинатов лучше по сравнению с монолитным алюминием в отношении коррозии. Использование стекловолокна в слое GFRP (Glass Fiber Reinforced Polymer) предотвращает гальваническую (относящуюся к получению электрического тока путём химического действия кислоты или соли на металл) коррозию, поскольку стеклянные волокна являются электрическими изоляторами. Отслоение из-за коррозии отсутствует, поскольку в гибридном ламинате не использовался лакирующий (покрытие деталей тонким слоем другого металла) слой.

Также экспериментально исследовано механическое поведение термопластичного полипропиленового композита, армированного стекловолокном, и гибридных ламинатов из алюминиевого сплава. Эти ламинаты демонстрируют превосходные формообразующие свойства, аналогичные свойствам монолитного алюминиевого сплава сопоставимой толщины.

Все эти исследования проводились на элементах трехслойных конструкций, а многослойные конструкции, состоящие из пяти и более слоев изучены недостаточно. Особенно это относится к исследованию динамической прочности таких конструкций.

Данная работа посвящена исследованию динамического поведения балки из алюмокомпозитного материала 3/2 с пятислойной структурой (три слоя алюминиевого сплава 1441 и два слоя GFRP). Экспериментально исследуются затухающие изгибные колебания консольно-закрепленных образцов. При этом определяются собственные частоты и коэффициенты демпфирования. Динамические параметры алюмокомпозитного материала вычисляются на основе анализа амплитудно-частотных характеристик, полученных методом быстрого преобразования Фурье.

Для проверки экспериментальных результатов расчета собственных частот и коэффициентов демпфирования с учетом модуля сдвига слоев, используется модель слоистой балки Тимошенко. На основании решения для консольно-закрепленной балки Тимошенко, проводится исследование влияния модуля сдвига слоев на значение собственных частот и коэффициентов демпфирования алюмокомпозитного материала. Приводится сравнение экспериментальных и аналитических результатов расчетов динамических характеристик алюмокомпозитного материала.

1 Экспериментальные исследования

Для проведения динамических испытаний алюмокомпозитного материала были изготовлены балочные образцы с прямоугольным поперечным сечением.

В качестве металлических слоев в образцах использованы листы алюминий-литиевого сплава марки 1441 толщиной $h_{Al} = 0.35$ мм, а композитные слои выполнены из стеклопластика марки КМКС-2.120.Т60 и имеют схему армирования /0/90/. Толщина каждого из композитных слоев в составе алюмокомпозитного материала составляет $h_k = 0.3$ мм. Геометрические размеры образцов представлены в таблице 1.

Структура алюмокомпозитного материала, исследуемая в настоящем разделе главы, показана на рисунке 1.

5	Сплав 1441
4.2	GFRP 90°
4.1	GFRP 90°
3	Сплав 1441
2.2	GFRP 0°
2.1	GFRP 0°
1	Сплав 1441

Рисунок 1 – структура, исследуемого образца алюмокомпозитного материала 3/2.

Таблица 1

Геометрические размеры образцов алюмокомпозитного материала

Длина, L [мм]	Ширина, b [мм]	Толщина, h [мм]	Количество

200	20	1,65	3
150	15		3
100	10		3
50	5		3
40	5		3

Свойства материалов, входящих в состав алюмостеклопластика представлены в таблице 2. Кажущаяся плотность алюмостеклопластика составляет 2300 кг/м³.

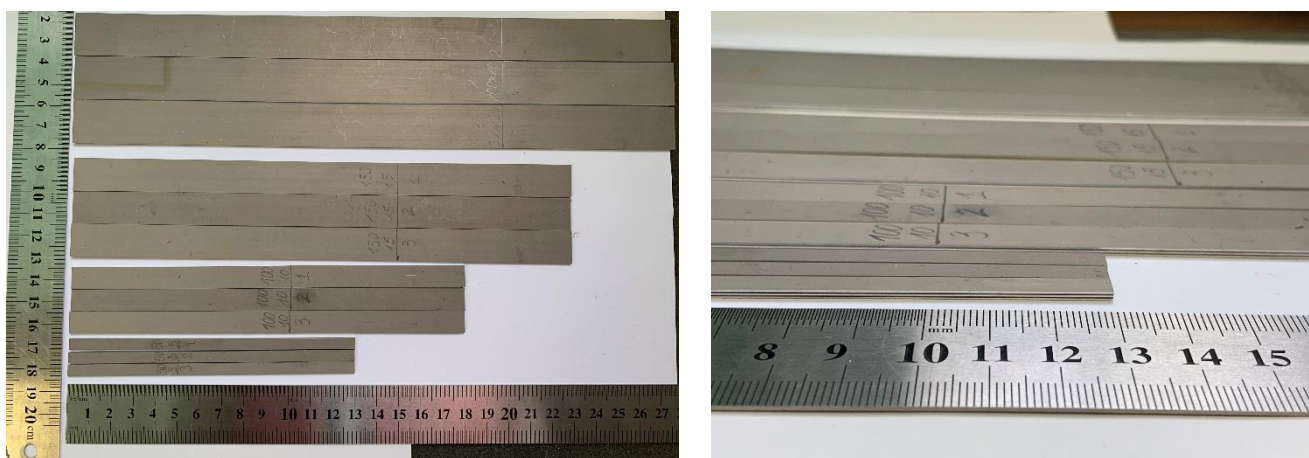
Таблица 2

Свойства материалов слоев алюмостеклопластика.

Материал	Ориентация	Е, ГПа	ν	ρ , кг/м ³
Лист сплава 1441	–	79	0,33	2600
Стеклопластик	0	50	0,3	1780
	90	12	0,07	

Для проведения испытаний всего было изготовлено по 3 однотипных образца.

На рисунке 2 а – б показаны исследуемые образцы алюмокомпозитного пластика.



а

б

Рисунок 2 – Образцы алюмокомпозитного пластика 3/2: а – разная длина и ширина образцов; б – показана пятислойная структура образцов

Механические свойства алюмокомпозитного пластика были предварительно определены в квазистатических испытаниях на растяжение, из которых был определен, в частности, эффективный модуль упругости материала E^* , значение которого в дальнейшем использовалось для оценки изгибной жесткости и собственных частот образцов.

В испытаниях образцы различной длины жестко закреплялись струбциной с одного конца, а на другом конце задавались условия нагружения, приводящие к возникновению затухающих изгибных колебаний, преимущественно, по первой собственной форме. Для возбуждения колебаний по поверхности образца либо ударяли металлическим ударником, либо задавалось начальное отклонение конца

образца от положения равновесия. Регистрация колебаний проводилась с использованием лазерного датчика Laser Triangulation Sensors RF603HS.

Обработка результатов испытаний проводилась с использованием метода быстрого преобразования Фурье для получения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) реализуемых колебаний [11]. На получаемых АЧХ определялся пик, соответствующий первой резонансной частоте. Ширина найденного пика позволяет определить коэффициент демпфирования образца ζ на основании соотношения (ГОСТ 30630.1.8-2002, ASTM E756):

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_0}, \quad (1)$$

где ω_0 – частота резонанса, и $\omega_1 < \omega_2$ – частоты вблизи резонанса, при которых значение амплитуды уменьшается в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с амплитудой резонанса.

2 Результаты

Пример диаграммы напряжения-деформации, определенной в испытаниях на растяжение для образца алюмокомпозитного пластика представлен на рисунке 3. Эффективный модуль упругости образцов составил $E^* = 60(\pm 1)$ ГПа. Это значение хорошо согласуется с теоретической оценкой, которая в пренебрежении эффектом Пуассона записывается следующим образом:

$$E_{теор}^* = \frac{3E_{Al}h_{Al} + E_0h_k + E_{90}h_k}{h} = 61 ГПа$$

Расчетное значение наклона диаграммы алюмостеклопластика показано пунктиром на рисунке 3.2. Предел текучести алюмостеклопластика, связанный с возникновением пластических деформаций в слоях алюминиевого сплава 1441, составляет не менее 270 МПа, что необходимо учитывать в процессе динамических испытаний, проводимых в зоне упругого поведения материала.

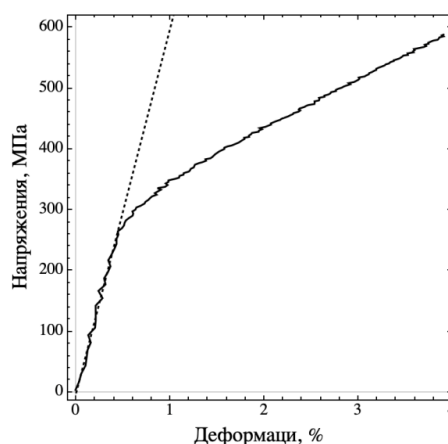


Рисунок 3 – примеры диаграмм, определенных в испытаниях на растяжение образцов алюмостеклопластика. Пунктиром показаны результаты, получаемые на основе теоретических оценок

В таблице 3 приведены результаты экспериментальных данных по определению собственных частот и коэффициентов демпфирования, полученных методом быстрого преобразования Фурье. Были проведены испытания для образцов различной длины и ширины. Каждый образец был испытан по 5 раз. Также приводятся динамические характеристики образцов алюмостеклопластика.

Таблица 3

Собственные частоты и коэффициенты демпфирования образца длиной $L = 200$ мм и шириной $b = 20$ мм.

№ образца	Частота, [Гц]	Коэффициент демпфирования, η
1_1	34,065	0,029
1_2	34,065	0,028
1_3	33,890	0,035
1_4	33,895	0,036
1_5	33,826	0,038
2_1	34,111	0,014
2_2	34,136	0,017
2_3	34,353	0,019
2_4	34,312	0,019
2_5	34,111	0,016
3_1	34,467	0,022
3_2	34,208	0,013
3_3	34,208	0,013
3_4	34,208	0,013
3_5	34,208	0,013
Минимальное значение	33,8266	0,013

Максимальное значение	34,467	0,038
Среднеарифметическое значение	34,137	0,022

Стандартное отклонение	0,175	0,009
Среднеквадратическое отклонение	0,433	0,001
Коэффициент вариации	0,012	0,054

На рисунках 4 и 5 показаны графики, полученные на основании статистической обработки экспериментальных данных. Показан разброс значений собственных частот и коэффициентов демпфирования для различных длин и ширины исследуемых образцов.

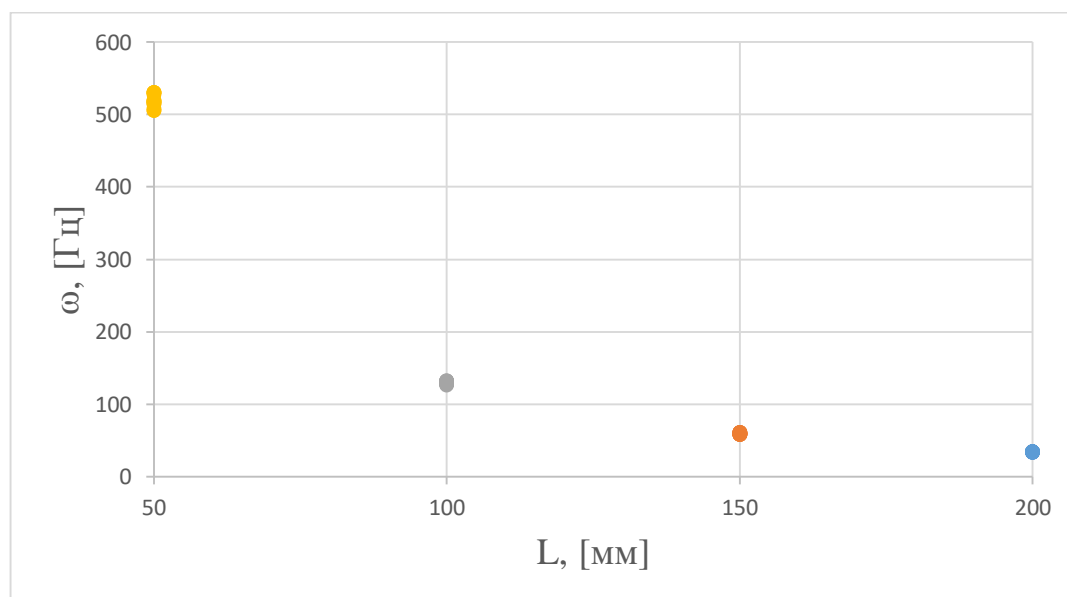


Рисунок 4 – график разброса первой собственной частоты для образцов
алюмостеклопластика 3/2

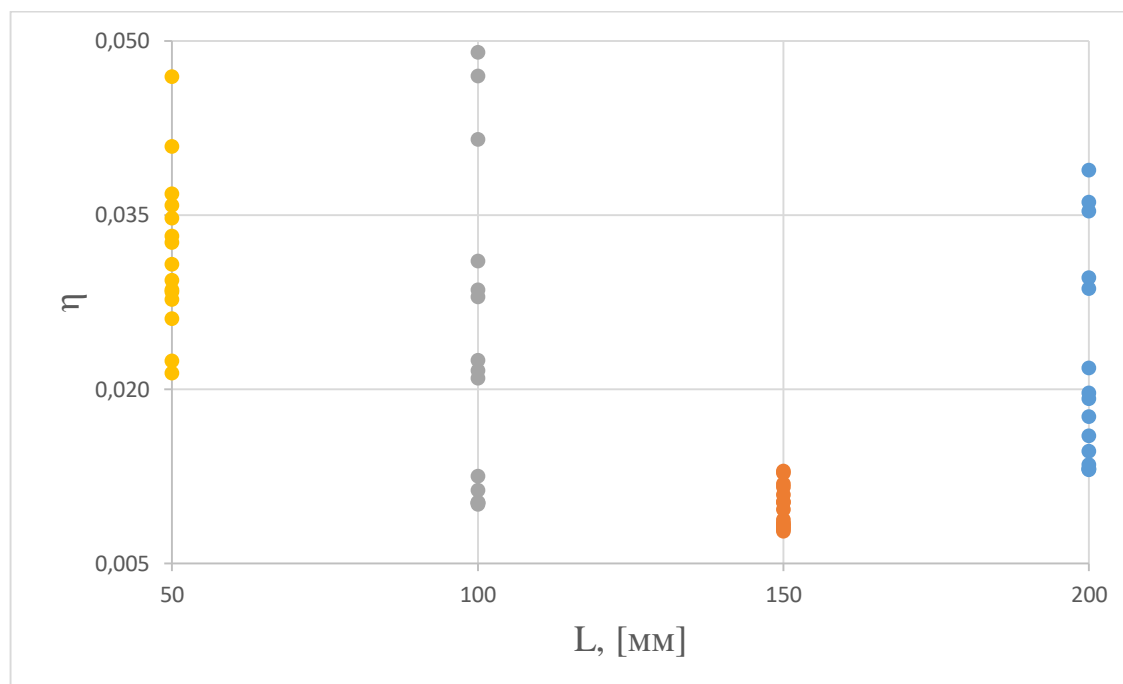


Рисунок 5 – график разброса коэффициентов демпфирования для образцов
алюмостеклопластика 3/2

3 Аналитическое решение

Для проверки экспериментальных результатов расчета собственных частот и коэффициентов демпфирования с учетом модуля сдвига слоев, используем модель слоистой балки Тимошенко. Задача решается для случая линейно-упругого деформирования слоев в предположении малых деформаций. Сначала рассмотрим решение задачи для однослойной балки. Решим задачу об определении динамических характеристик консольной балки Тимошенко длиной l .

Кинематика балки определяется вектором перемещения $\vec{U} = (V + z\theta)\vec{e}_1 + W\vec{e}_2$,

где осевое перемещение - $V(x, t)$, поперечное перемещение - $W(x, t)$, поворот поперечного сечения - $\theta(x, t)$. Соответствующее деформированное состояние балки определяется величинами продольной деформации

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial x} + z \frac{\partial \theta}{\partial x},$$

деформации поперечного сдвига

$$\varepsilon_{13} = \frac{\partial W}{\partial x} + \theta.$$

Поперечная нормальная деформация равна нулю: $\varepsilon_{12} = 0$.

Плотность потенциальной энергии деформации равна

$$\Pi_V = \frac{1}{2} C_{1111} \varepsilon_{11}^2 + \frac{1}{2} C_{1313} \varepsilon_{13}^2 = \frac{1}{2} C_{1111} (V' + z\theta')^2 + \frac{1}{2} C_{1313} \left(\theta + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2$$

где C_{1111} – приведенная осевая жесткость. Соответственно, потенциальная энергия балки определяется такой формулой:

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_V \Pi_V dV = \int_0^l b \int_{-h/2}^{h/2} \Pi_V dz dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 b \int_{-h/2}^{h/2} C_{1111} dz + \left(\theta + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 b \int_{-h/2}^{h/2} C_{1313} dz + \right. \\ &+ 2 \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} b \int_{-h/2}^{h/2} C_{1111} z dz + \left. \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 b \int_{-h/2}^{h/2} C_{1111} z^2 dz \right\} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ A \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} + D \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + G \left(\theta + \frac{\partial W}{\partial x} \right)^2 \right\} dx, \end{aligned}$$

$$A = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{1111} dz - \text{осевая жесткость}; \quad B = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{1111} z dz; \quad D = b \int_{-h/2}^{h/2} C_{1111} z^2 dz - \text{изгибная}$$

жесткость; в случае балки симметричного сечения $B = 0$.

Кинетическая энергия балки равна:

$$T_v = \frac{1}{2} \rho \vec{U} \vec{V} = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + z \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2$$

$$T = \int_v T_v dV = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 b \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz + 2 \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial t} b \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz + \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 b \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 b \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz \right\} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ F_\rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + F_\rho \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + 2 S_\rho \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial t} + J_\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 \right\} dx,$$

$$F_\rho = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz - \text{погонная масса}; \quad S_\rho = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho z dz - \text{статический момент};$$

$$J_\rho = b \int_{-h/2}^{h/2} \rho z^2 dz - \text{момент инерции. В случае стержня симметричного сечения } S_\rho = 0.$$

Для построения уравнений движения и естественных краевых условий применим метод [17, 18], позволяющий получить уравнения движения для системы с произвольным количеством кинематических степеней свободы. Аналогичный подход ранее был предложен в [19, 20] для балок постоянного и переменного сечения, а также для оболочек вращения [21]. Запишем функционал Лагранжа: $L_v = T_v - V_v + A_v$

$$L = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} F_\rho \left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{2}{2} S_\rho \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{2} J_\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} A \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - B \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} D \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} G \left(\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \rho b w \right\} dx,$$

ρ – нормальная (поперечная) нагрузка;

$A_v = \rho b w$ – погонная работа нормальной нагрузки.

$$L = \int_0^l L_x dx.$$

Погонная плотность функционала Лагранжа равна:

$$L_x = \frac{1}{2} F_\rho \left[\left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] + S_\rho \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{1}{2} J_\rho \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} A \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 - B \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{1}{2} D \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 - \frac{1}{2} G \left(\theta + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \rho b w.$$

$$H = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l L_x dx dt.$$

Применим принцип Гамильтона-Остроградского: $\delta H = 0$. где действие по

Гамильтону имеет вид $H = \int_{t_0}^{t_1} L dt = \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l L_x dx dt$. Используя обобщенные уравнения

Лагранжа II рода [17] для стержня с определенным выше функционалом Лагранжа

(т. е. вариационные уравнения Эйлера-Лагранжа) и их естественные краевые условия

получим:

$$\begin{aligned} & - \left(F_\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + S_\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \left(A \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) = 0, \\ & - \left(S_\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + J_\rho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \right) + \left(B \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right) - G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta \right) = 0, \quad (2) \\ & - F_\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta \right) + b \rho = 0. \end{aligned}$$

$$-\left(A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \delta V|_0^l = 0,$$

$$-\left(B \frac{\partial V}{\partial x} + D \frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \delta \theta|_0^l = 0,$$

$$-G \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \theta\right) \delta w|_0^l = 0.$$

Тогда постановка начально-краевой задачи для изгибных колебаний стержня относительно единственной кинематической переменной w будет иметь вид [22]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{C_1^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{C_2^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) + C_3^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (3)$$

Путем соответствующих преобразований выразим краевые условия через прогиб балки w , тогда получаем аналогично [23]:

$$x = 0: \quad W = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = 0;$$

$$x = l: \quad C_3^2 \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{\partial^3 W}{\partial x^3} \Big|_{x=l} - \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2}\right) \frac{\partial^3 W}{\partial x \partial t^2} \Big|_{x=l} = 0. \quad (4)$$

$$\text{где } C_1 = \sqrt{\frac{D}{J_\rho}}, C_2 = \sqrt{\frac{G}{F_\rho}}, C = \sqrt{\frac{F_\rho}{D}} \quad (5)$$

Положим $W(x, t) = w e^{i\omega t}$, $w = w(x)$. тогда краевая задача о свободных колебаниях стержня будет иметь вид:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2}{C_1^2}\right) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{\omega^2}{C_2^2} w\right) - \omega^2 C_3^2 w = 0$$

или

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) \omega^2 \frac{d^2 w}{dx^2} + \omega^2 \left(\frac{\omega^2}{C_1^2 C_2^2} - C_3^2 \right) w = 0 \quad (6)$$

$$x = 0: \quad w = 0, \quad \frac{dw}{dx} = 0;$$

$$x = l: \quad \omega^2 C_3^2 w + \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=l} + \omega^2 \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) \frac{dw}{dx} \Big|_{x=l} = 0. \quad (7)$$

Решая уравнение (1) получаем:

$$w = Ae^{ax} + Be^{-ax} + Ce^{bx} + De^{-bx} \quad (8)$$

где

$$a = e^{\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \sqrt{-\omega \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) + \sqrt{\omega^2 \left[\left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \right)^2 - \frac{4C_3^2}{C_1^2 C_2^2} \right] + 4C_3^2}} \quad (9)$$

$$b = e^{i\sqrt{\frac{\omega}{2}}} \sqrt{\omega \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) + \sqrt{\omega^2 \left[\left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \right)^2 - \frac{4C_3^2}{C_1^2 C_2^2} \right] + 4C_3^2}}$$

Удовлетворяя краевым условиям (6) получаем систему уравнений для определения постоянных интегрирования

$$A + B + C + D = 0$$

$$aA - aB + bC - bD = 0$$

$$(\omega^2 C_3^2 + a^2) e^{al} A + (\omega^2 C_3^2 + a^2) e^{-al} B + (\omega^2 C_3^2 + b^2) e^{bl} C + (\omega^2 C_3^2 + b^2) e^{-bl} D = 0$$

$$a^3 A e^{al} - a^3 B e^{-al} + b^3 C e^{bl} - b^3 D e^{-bl} + \omega^2 \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) (aA e^{al} - aB e^{-al} + bC e^{bl} - bD e^{-bl}) = 0$$

$$\left[a^3 + a\omega^2 \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) \right] A e^{al} - \left[a^3 + a\omega^2 \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) \right] B e^{-al} +$$

$$+ \left[b^3 + b\omega^2 \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) \right] C e^{bl} - \left[b^3 + b\omega^2 \left(\frac{1}{C_1^2} + \frac{1}{C_2^2} \right) \right] D e^{-bl} = 0$$

Для решения поставленной задачи необходимо определитель этой системы уравнений приравнять к нулю, тогда получаем трансцендентное уравнение относительно собственной частоты ω . Для вычисления динамических характеристик слоистой балки представленной на рис 1. Будем использовать уравнение движения для однослойной балки в следующем виде

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\frac{J_\rho}{D} + \frac{F_\rho}{G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{F_\rho}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{J_\rho F_\rho}{DG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (10)$$

Если в этом уравнении положить

$$D = I_2 - \frac{I_1^2}{I_0}, J_\rho = I_2 - 2eI_1 + e^2 F_\rho, e = \frac{\int_0^h btdt}{\int_0^h bdt}, F_\rho = \sum_{m=1}^i (\rho_m b_m h_m), G = \frac{bh^2}{\sum_{i=1}^k \frac{h_i}{G_i}}, \quad (11)$$

$$I_1 = \frac{b}{2} \sum_{i=1}^k E_i h_i (t_{i-1} + t_i), \quad I_2 = \frac{b}{3} \sum_{i=1}^k E_i h_i (t_{i-1}^2 + t_{i-1} t_i + t_i^2),$$

В этих выражениях E_i – модуль упругости i -го слоя в продольном направлении балки, G_i – модуль сдвига i -го слоя в плоскости изгиба, $h_i = t_i - t_{i-1}$ – толщина i -го слоя, t_i – координата i -го слоя, отсчитываемая от нижней поверхности балки, показана на рисунке 6, k – число слоев в алюмоплексостеклопластике.

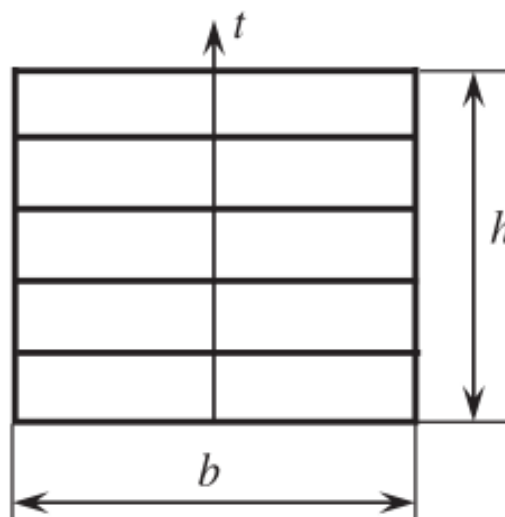


Рисунок 6 - Модель слоистой балки, используемая для нахождения коэффициентов в уравнении 3

При этом соотношения (10) полностью определяют соотношения (5).

Решение уравнения (3) с соответствующими краевыми условиями будет определять динамические характеристики для слоистой консольной балки из алюмокомпозитного материала. Решение трансцендентного уравнения относительно частоты ω , вообще говоря, комплексной, строится численно. Для нахождения коэффициентов демпфирования алюмокомпозитного материала, при решении уравнения 3 (или 10) применен метод комплексных модулей [24, 25]. В соответствии с этим методом, значение собственных частот и коэффициентов демпфирования определяется следующим образом

$$\omega_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\operatorname{Re} \left[(\omega_i^*)^2 \right]}; \quad \eta_i = \frac{\operatorname{Im} \left[(\omega_i^*)^2 \right]}{\operatorname{Re} \left[(\omega_i^*)^2 \right]} \quad (12)$$

Выводы

1. Изготовлены балочные образцы прямоугольного поперечного сечения из алюмопестклопластикового слоистого композиционного материала и определены их эффективные модули упругости путем эксперимента на квазистатическое одноосное растяжение.

2. Проведены динамические испытания консольно закрепленных балочных образцов алюмопестклопластикового композиционного материала на свободные затухающие колебания, возбуждаемые кинематически либо динамически, получены амплитудно-частотные характеристики образцов.

3. По результатам экспериментов вычислены эффективные модули упругости композиционного материала и коэффициенты демпфирования пакета.

4. Для оценки точности полученных в результате экспериментальных измерений характеристик материала получено точное решение прямой задачи о свободных колебаниях композиционной балки слоистой структуры с заданными физическими постоянными. Для учета эффекта демпфирования применен метод комплексных модулей. Получено вполне удовлетворительное соответствие результатов численно-аналитического решения прямой задачи полученным ранее экспериментальным данным.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ проект 20-01-00517

Список источников

1. Грищенко С.В. Расчёт и проектирование изделий конструкции самолёта из слоистых композитов с учётом межслоевых эффектов // Труды МАИ. 2015. № 84. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=63011>
2. Ендогур А.И., Кравцов В.А. Идеология проектирования авиационных конструкций из полимерных композиционных материалов // Труды МАИ. 2015. № 81. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=57755>
3. Дудченко А.А., Ле Ким Кыонг, Лурье С.А. Расчет и проектирование контурно подкреплённой композитной панели, нагруженной поперечной силой // Труды МАИ. 2012. № 50. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=28792>
4. Грищенко С.В., Попов Ю.И. Разработка макромодели слоистого композита для анализа напряженно-деформированного состояния нерегулярных зон типовых конструкций планера самолёта // Труды МАИ. 2013. № 65. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=35854>
5. Антипов В.В., Добрянский В.Н., Короленко В.А., Лурье С.А., Серебренникова Н.Ю., Соляев Ю.О. Оценка эффективных механических характеристик слоистого алюмокомпозитного пластика в условиях одноосного растяжения // Вестник Московского авиационного института. 2018. Т. 25. № 2. С. 221-229.
6. Антипов В.В., Прокудин О.А., Лурье С.А., Серебренникова Н.Ю., Соляев Ю.О., Коновалов А.Н. Оценка межслоевой прочности алюмокомпозитного пластика по результатам испытаний образцов на трехточечный изгиб // Вестник Московского авиационного института. 2019. Т. 26. № 2. С. 229-237.

7. Mathivanan P., Balakrishnan M., Krishnan H. Impact properties of aluminum - glass fiber reinforced plastics sandwich panels // Materials Research, 2012, vol. 15, no. 3, pp. 347-554. DOI:[10.1590/S1516-14392012005000036](https://doi.org/10.1590/S1516-14392012005000036)
8. Sang Y.P, Won J.C. The Guidelines of Material Design and Process Control on Hybrid Fiber Metal Laminate for Aircraft Structures, Optimum Composite Structures, Karam Y. Maalawi, 2019. DOI:[10.5772/intechopen.78217](https://doi.org/10.5772/intechopen.78217)
9. Прокудин О.А., Соляев Ю.О., Бабайцев А.В., Артемьев А.В., Коробков М.А. Динамические характеристики трехслойных балок с несущими слоями из алюмоплексостеклопластика // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2020. № 4. С. 260-270. DOI:[10.15593/perm.mech/2020.4.22](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.22)
10. Botelho E.C., Silva R.A., Pardini L.C., Rezende M.C. A review on the development and properties of continuous fiber/epoxy/aluminum hybrid composites for aircraft structures // Materials Research, 2006, vol. 9, no. 3, pp. 247–256. DOI:[10.1590/S1516-14392006000300002](https://doi.org/10.1590/S1516-14392006000300002)
11. Yilmaz C., Topal S., Ali H. Q., Tabrizi I. E., Al-Nadhari A., Suleman A., Yiliz M. Non-destructive determination of the stiffness matrix of a laminated composite structure with Lamb wave // Composite Structures, 2020, vol. 237, pp. 111956.
12. Cui R., Lanza di Scalea F. On the identification of the elastic properties of composites by ultrasonic guided waves and optimization algorithm // Composite Structures, 2019, vol. 223, pp. 110969. DOI:[10.1016/j.compstruct.2019.110969](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.110969)

13. Chronopoulos D., Droz C., Apalowo R., Ichchou M., Yan W.J. Accurate structural identification for layered composite structures through a wave and finite element scheme // Composite Structures, 2017, vol. 182, pp. 566-578. DOI:[10.1016/j.compstruct.2017.09.062](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.062)
14. Abrosimov N.A., Novosel'tseva N.A. The identification of material parameters in nonlinear deformation models of metallic-plastic cylindrical shells under pulsed loadings // Materials Physics and Mechanics, 2015, vol. 23, pp. 66-70.
15. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. About the specifics of identification thermomechanical characteristics of functionally graded hollow cylinder // Materials Physics and Mechanics, 2015, vol. 23, pp. 71-75. DOI:[10.18500/1816-9791-2014-14-3-329-335](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-3-329-335)
16. Жаворонок С.И. Задачи о дисперсии волн в неоднородных волноводах: методы решения (обзор). Часть I // Механика композиционных материалов и конструкций. 2021. Т. 27. № 2. С. 227-260. DOI:[10.33113/mkmk.ras.2021.27.02.227_260.06](https://doi.org/10.33113/mkmk.ras.2021.27.02.227_260.06)
17. Жаворонок С.И. Вариационные уравнения трехмерной теории анизотропных оболочек // Вестник Нижегородского ун-та им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4-5. С. 2154-2156.
18. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. The variational equations of the extended N'th order shell theory and its application to some problems of dynamics // PNPu Mechanics Bulletin, 2015, no. 2, pp. 36-59. DOI:[10.15593/perm.mech/2015.2.03](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.2.03)
19. Амосов А.А., Жаворонок С.И. К проблеме редукции плоской задачи теории упругости к последовательности одномерных краевых задач // Механика композиционных материалов и конструкций. 1997. Т. 3. № 1. С. 69-80.

20. Амосов А.А., Князев А.А., Жаворонок С.И. О решении некоторых краевых задач о плоском напряженном состоянии криволинейной трапеции // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1999. Т. 5. № 1. С. 60-72.
21. Амосов А.А., Жаворонок С.И., Леонтьев К.А. О решении некоторых задач о напряженно-деформированном состоянии анизотропных толстостенных оболочек вращения в трехмерной постановке // *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2004. Т. 10. № 3. С. 301-310.
22. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н. П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. – М.: Физматлит, 2002. - 208 с.
23. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. Механика деформируемых твердых тел. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. – М.: ВИНТИ, 1973. Т. 5. - 272 с.
24. Rao S.S. *Mechanical Vibrations*, Prentice Hall, 2019, 1084 p.
25. Lurie S., Solyaev Y., Ustenko A. Optimal Damping Behavior of a Composite Sandwich Beam Reinforced with Coated Fibers // *Applied Composite Materials*, 2019, vol. 26, pp. 389–408. DOI:[10.1007/s10443-018-9698-9](https://doi.org/10.1007/s10443-018-9698-9)

References

1. Grishchenko S.V. *Trudy MAI*, 2015, no. 84. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=63011>
2. Endogur A.I., Kravtsov V.A. *Trudy MAI*, 2015, no. 81. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=57755>

3. Dudchenko A.A., Le Kim Kyong, Lur'e S.A. *Trudy MAI*, 2012, no. 50. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=28792>
4. Grishchenko S.V., Popov Yu.I. *Trudy MAI*, 2013, no. 65. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=35854>
5. Antipov V.V., Dobryanskii V.N., Korolenko V.A., Lur'e S.A., Serebrennikova N.Yu., Solyaev Yu.O. *Aerospace MAI Journal*, 2018, vol. 25, no. 2, pp. 221-229.
6. Antipov V.V., Prokudin O.A., Lur'e S.A., Serebrennikova N.Yu., Solyaev Yu.O., Konovalov A.N. *Aerospace MAI Journal*, 2019, vol. 26, no. 2, C. 229-237.
7. Mathivanan P., Balakrishnan M., Krishnan H. Impact properties of aluminum - glass fiber reinforced plastics sandwich panels, *Materials Research*, 2012, vol. 15, no. 3, pp. 347-554. DOI:[10.1590/S1516-14392012005000036](https://doi.org/10.1590/S1516-14392012005000036)
8. Sang Y.P, Won J.C. *The Guidelines of Material Design and Process Control on Hybrid Fiber Metal Laminate for Aircraft Structures, Optimum Composite Structures*, Karam Y. Maalawi, 2019. DOI:[10.5772/intechopen.78217](https://doi.org/10.5772/intechopen.78217)
9. Prokudin O.A., Solyaev Yu.O., Babaitsev A.V., Artem'ev A.V., Korobkov M.A. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2020, no. 4, pp. 260-270. DOI:[10.15593/perm.mech/2020.4.22](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2020.4.22)
10. Botelho E.C., Silva R.A., Pardini L.C., Rezende M.C. A review on the development and properties of continuous fiber/epoxy/aluminum hybrid composites for aircraft structures, *Materials Research*, 2006, vol. 9, no. 3, pp. 247–256. DOI:[10.1590/S1516-14392006000300002](https://doi.org/10.1590/S1516-14392006000300002)

11. Yilmaz C., Topal S., Ali H. Q., Tabrizi I. E., Al-Nadhari A., Suleman A., Yiliz M. Non-destructive determination of the stiffness matrix of a laminated composite structure with Lamb wave, *Composite Structures*, 2020, vol. 237, pp. 111956.
12. Cui R., Lanza di Scalea F. On the identification of the elastic properties of composites by ultrasonic guided waves and optimization algorithm, *Composite Structures*, 2019, vol. 223, pp. 110969. DOI:[10.1016/j.compstruct.2019.110969](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.110969)
13. Chronopoulos D., Droz C., Apalowo R., Ichchou M., Yan W.J. Accurate structural identification for layered composite structures through a wave and finite element scheme, *Composite Structures*, 2017, vol. 182, pp. 566-578. DOI:[10.1016/j.compstruct.2017.09.062](https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.09.062)
14. Abrosimov N.A., Novosel'tseva N.A. The identification of material parameters in nonlinear deformation models of metallic-plastic cylindrical shells under pulsed loadings, *Materials Physics and Mechanics*, 2015, vol. 23, pp. 66-70.
15. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. About the specifics of identification thermomechanical characteristics of functionally graded hollow cylinder, *Materials Physics and Mechanics*, 2015, vol. 23, pp. 71-75. DOI:[10.18500/1816-9791-2014-14-3-329-335](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2014-14-3-329-335)
16. Zhavoronok S.I. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2021, vol. 27, no. 2, pp. 227-260. DOI: [10.33113/mkmmk.ras.2021.27.02.227_260.06](https://doi.org/10.33113/mkmmk.ras.2021.27.02.227_260.06)
17. Zhavoronok S.I. *Vestnik Nizhegorodskogo un-ta im. N. I. Lobachevskogo*, 2011, no. 4-5, pp 2154-2156.
18. Egorova O.V., Zhavoronok S.I., Kurbatov A.S. The variational equations of the extended N'th order shell theory and its application to some problems of dynamics, *PNPU Mechanics Bulletin*, 2015, no. 2, pp. 36-59. DOI: [10.15593/perm.mech/2015.2.03](https://doi.org/10.15593/perm.mech/2015.2.03)

19. Amosov A.A., Zhavoronok S.I. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 1997, vol. 3, no. 1, pp. 69-80.
20. Amosov A.A., Knyazev A.A., Zhavoronok S.I. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 1999, vol. 5, no. 1, pp. 60-72.
21. Amosov A.A., Zhavoronok S.I., Leont'ev K.A. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksii*, 2004, vol. 10, no. 3, pp. 301-310.
22. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N. P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineinost' Nelinejnost'* (Waves in the rods. Dispersion. Dissipation. Non-linearity), Moscow, Fizmatlit, 2002, 208 p.
23. Grigolyuk E.I., Selezov I.T. *Mekhanika deformiruemykh tverdykh tel. Neklassicheskie teorii kolebanii sterzhnei, plastin i obolochek* (Mechanics of Deformable Solids. Non-classical theories of vibrations of rods, plates and shells), Moscow, VINITI, 1973, vol. 5, 272 p.
24. Rao S.S. *Mechanical Vibrations*, Prentice Hall, 2019, 1084 p.
25. Lurie S., Solyaev Y., Ustenko A. Optimal Damping Behavior of a Composite Sandwich Beam Reinforced with Coated Fibers, *Applied Composite Materials*, 2019, vol. 26, pp. 389–408. DOI: [10.1007/s10443-018-9698-9](https://doi.org/10.1007/s10443-018-9698-9)

Статья поступила в редакцию 01.09.2021; одобрена после рецензирования 10.09.2021; принята к публикации 22.10.2021.

The article was submitted 01.09.2021; approved after reviewing 10.09.2021; accepted for publication 22.10.2021.