Тепловые процессы в технике. 2024. Т. 16. № 6. С. 243–256
Thermal processes in engineering, 2024, vol. 16, no. 6, pp. 243–256

Научная статья
УДК 539.3

Новые функциональные соотношения в аналитической теплофизике для локально-неравновесных процессов теплообмена

Э.М. Карташов[1,2]✉, С.С. Крылов[2]

[1]*МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия*
[2]*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
✉*professor.kartashov@gmail.com*

Аннотация. Статья посвящена развитию нового математического аппарата для исследования локально-неравновесного теплообмена и других направлений науки и техники. В частности, рассмотрена серия операционных (по Лапласу) нестандартных изображений, оригиналы которых отсутствуют в известных справочниках по операционному исчислению. Показано, что аналитические решения соответствуюших математических моделей с использованием найденных оригиналов имеют волновой характер, что выражается наличием в решениях ступенчатой функции Хевисайда. Последнее означает, что в любой момент времени существует область физического возмушения до точки разрыва и невозмущенная область после тоски разрыва. Рассмотренные изображения входят в операционные решения математических моделей во многих областях прикладной математики, физики, термомеханики, электротехники, теплофизики при изучении тепловой реакции твердых тел на основе обобщенной феноменологии Максвелла – Каттанео – Лыкова – Вернотта с учетом конечной скорости распространения теплоты. Главная проблема, возникающая при нахождении оригиналов сложных операционных изображений-выделение ступенчатой функции Хевисайда в оригинале, что формально не следует из правил операционного исчисления. В то же время изучаемые обобщенные модели аналитической теплофизики необходимы для изучения термической реакции сравнительно новых консолидированных структурно-чувствительных полимерных материалов в конструкциях, подверженных высокоинтенсивным внешним воздействиям. Полученные в статье оригиналы могут быть использованы в общей методологии построения и применения разнообразных математических моделей в широком диапазоне внешних воздействий на современные конструкционные материалы.

Ключевые слова: гиперболические модели локально-неравновесного теплобмена, операционные изображения, функция Хевисайда, оригиналы

Для цитирования. Карташов Э.М., Крылов С.С. Новые функциональные соотношения в аналитической теплофизике для локально-неравновесных процессов теплообмена // Тепловые процессы в технике. 2024. Т. 16. № 6. С. 243–256. URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=182449

Original article

New functional relationships in analytical thermal physics for locally none-equilibrium heat transfer processes

E.M. Kartashov[1,2]✉, **S.S. Krylov**[2]

[1]*MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia*
[2]*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*
✉*professor.kartashov@gmail.com*

Abstract. The article is devoted to the development of a new mathematical apparatus for the study of locally nonequilibrium heat transfer and other areas of science and technology. In particular, a series of operational (according to Laplace) non-standard images, the originals of which are not in known reference books on operational calculus, are considered. It is shown that analytical solutions of the corresponding mathematical models using the found originals have a wave character, which is expressed by the presence of the Heaviside step function in the solutions. The latter means that at any moment of time there is a region of physical disturbance before the point of rupture and an undisturbed region after the point of rupture. The considered images are included in the operational solutions of mathematical models in many areas of applied mathematics, physics, thermomechanics, electrical engineering, thermophysics when studying the thermal reaction of solids based on the generalized phenomenology of Maxwell – Cattaneo – Lykov – Vernott, taking into account the finite speed of heat propagation. The main problem that arises when finding the originals of complex operational images is the identification of the Heaviside step function in the original, which does not formally follow from the rules of operational calculus. At the same time, the studied generalized models of analytical thermophysics are necessary to study the thermal response of relatively new consolidated structure-sensitive polymer materials in structures subject to high-intensity external influences. The originals obtained in the article can be used in the general methodology for constructing and applying various mathematical models in a wide range of external influences on modern structural materials.

Keywords: hyperbolic models of locally nonequilibrium heat transfer, surgical images, heaviside function, originals

For citation. Kartashov E.M., Krylov S.S. New functional relationships in analytical thermal physics for locally none-equilibrium heat transfer processes. *Thermal processes in engineering*, 2024, vol. 16, no. 6, pp. 243–256. (In Russ.). URL: https://tptmai.ru/publications.php?ID=182449

Введение

Современные конструкционные материалы, представляющие собой совокупность микро- или наноструктурных элементов, часто называют структурно-чувствительными материалами. Создание таких материалов на основе нанотехнологий – важное направление развития современного материаловедения. Такие материалы обладают уникальными физико-механическими свойствами, позволяющими эффективно их использовать в конструкциях, подверженных высокоинтенсивным внешним воздействиям [1, 2]. Важным этапом в создании и использовании такого рода материалов является построение соответствующих математических моделей, позволяющих описать их поведение в широком диапазоне изменения внешних нагружений. Общая методология построения и исследования таких моделей получила широкое развитие в последние годы на основе соответствующих математических моделей ряда физических процессов с учетом пространственно-временной нелокальности [3].

Классические феноменологические модели процессов переноса и других явлений, таких как теплоты Фурье, массы Нернста, электричества Ома, напряжений Ньютона и Гука базируются на принципе локального термодинамического равновесия и гипотезе сплошной среды. Полученные на их основе дифференциальные уравнения для соответствующих физических величин являются локальными, то есть в них не учитывается локальная неравновесность процессов; в процессе вывода в них заложена бесконечная скорость распространения возмущений. При этом, функции, описывающие эти процессы, являются гладкими функциями координат и времени. Однако скорости распространения потенциалов любых физических полей не могут принимать бесконечных значений. В реальном теле процесс их изменения происходит с некоторым запаздыванием во времени согласно релаксационным свойствам материала, учитываемыми коэффициентами релаксации. Такие процессы реально существуют. Они имеют так называемые фронтовые поверхности, при переходе через которые температурная функция и ее производные имеют разрыв [4, 5].

В последние годы усилился интерес к изучению такого рода процессов, протекающих в локально-неравновесных условиях, что обусловлено широкими возможностями их практического применения [6–10]: создание новых технологий получения наноматериалов и покрытий с уникальными физико-химическими свойствами (бинарные многокомпонентные металлические сплавы, полимерные материалы, металлические полупроводниковые стекла, нано-жидкости, коллоидные, био- и криосистемы); оптимизация режимов лазерной обработки изделий; режимы интенсивного нагрева и охлаждения компонентов наноэлектроники и нанотехники; нагрев, плавление и абляция вещества при воздействии сверхкоротких лазерных импульсов и др. Интенсификация тепловых процессов в этих условиях потребовала для их описания уточнения гипотезы Фурье, что и было проделано в рамках учета локальной неравновесности, заложенной в соотношение:

$$\bar{q}(M,t) = -\lambda gradT(M,t) - \tau_r \frac{\partial \bar{q}(M,t)}{\partial t}, \quad (1)$$

учитывающей конечную скорость распространения теплоты. Здесь время τ_r – мера инерции теплового потока, связанная со скоростью распространения теплоты соотношением $v_T = \sqrt{a/\tau_r}$. На необходимость учета влияния ограниченности скорости переноса теплоты (массы) указывали в теории газодинамики Дж. Максвелл [11], А.В. Лыков при исследовании тепло- и влагопереноса в капиллярно-пористых телах [12], Каттанео [13] и Вернотт [14] в теории теплопроводности. Уравнение энергии и соотношение (1) приводят к уравнению переноса теплоты гиперболического типа

$$\frac{\partial T(M,t)}{\partial t} = a\Delta T(M,t) - \tau_r \frac{\partial^2 T(M,t)}{\partial t^2} + \\ + \frac{\tau_r}{c\rho}\left[\frac{\partial F(M,t)}{\partial t} + \frac{1}{\tau_r}F(M,t)\right] \quad (2)$$

и соответствующим краевым задачам нестационарной теплопроводности обобщенного типа. При математической постановке указанных задач следует применять соответствующие локально-неравновесные граничные условия. Использование стандартных локально-равновесных граничных условий (что довольно часто наблюдается в публикациях по аналитической теплофизике) может привести к физически противоречивым результатам (например, к появлению отрицательных решений для температуры [15]). Эти вопросы детально рассмотрены автором в [16]. Сформулированы корректные обобщенные граничные условия на основе соотношения (1) в интегральной и эквивалентной дифференциальной формах. Так, в первом случае для условия теплового нагрева (охлаждения) граничное условие второго рода имеет вид:

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \frac{\partial T(M,\tau)}{\partial n}\Big|_{M\in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right)d\tau = \\ = \pm(q_0/\lambda)S_+(t), t \ge 0; \quad (3)$$

в случае нагрева средой следует записывать:

$$\frac{1}{\tau_r}\int_0^t \frac{\partial T(M,\tau)}{\partial n}\Big|_{M\in S} \exp\left(-\frac{t-\tau}{\tau_r}\right)d\tau = \\ = h\left\{T(M,t)\Big|_{M\in S} - \left[T_0 + S_+(t)(T_c - T_0)\right]\right\}, t \ge 0. \quad (4)$$

$$S_+(t) = \begin{cases} 1, t > 0 \\ 0. t \le 0. \end{cases} \quad (5)$$

При $(1/h) \to 0$ $(h \to \infty)$ из (4) имеем граничное условие при температурном нагреве

$$T(M,t)\big|_{M\in S} = T_o + S_+(t)(T_c - T_0), t \ge 0. \qquad (6)$$

Следует заметить, что гиперболическое уравнение (2) для описания локально-неравновесных процессов тепломассопереноса было получено впервые в работах И.А. Фока [17] и Б.И. Давыдова [18] на основании предположения о конечном значении скорости частиц, переносящих энергию или массу. Уравнение (2) также получил А.С. Предводителев [19], исходя из анализа скоростей перемещения изотермических поверхностей с использованием представлений Римана, то есть при полном отказе от релаксационной формулы (1).

Новые операционные соотношения для математических моделей гиперболического типа

Обобщенные задачи переноса для уравнения (2) значительно отличаются от классических на основе феноменологии Фурье [4], являясь более сложными при нахождении аналитических решений. Специфика указанных задач заключается в относительной простоте исходных математических моделей и трудностях их решения в аналитически замкнутом виде. Отсюда – весьма незначительные успехи в нахождении их точных аналитических решений и, в основном, для частично ограниченных областей. Основной метод решения указанных задач – операционный, но здесь возникают две основные проблемы. Если нахождение операционного решения задачи не составляет особого труда, то переход к оригиналам затрудняется ввиду их отсутствия в таблицах по операционному исчислению. Формальное применение теорем операционного исчисления при нахождении оригиналов может привести к ошибочным результатам, так как искомые оригиналы должны содержать ступенчатую функцию Хевисайда [20], появление которой формально не всегда удается реализовать. Естественный выход из этой ситуации – развитие искусственных приемов или сложный переход к оригиналам с помощью контурного интегрирования изображений [21–25].

1. Частично ограниченная область

Рассмотрим операционное решение однородного уравнения (2) в области $\Omega = \{M(z,t): z\ge 0, t\ge 0\}$ в безразмерных переменных

$$\xi = \mathrm{v}_p z/a, \tau = \mathrm{v}_p^2 t/a, \beta = \mathrm{v}_\mathrm{p}/\mathrm{v}_\mathrm{T},$$

$$W(\xi,\tau) = \left[T(z,t) - T_0\right]/(T_c - T_0), \mathrm{v}_T = \sqrt{a/\tau_r},$$

$\mathrm{v}_p = \sqrt{2G(1-\nu)/\left[\rho(1-2\nu)\right]}$ – скорость распространения волны расширения в упругой среде (G –модуль сдвига, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность). Задача имеет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2}, \xi > 0, \tau > 0, \qquad (7)$$

$$\left.\begin{aligned} W(\xi,\tau)\Big|_{\tau=0} = \frac{\partial W(\xi,\tau)}{\partial \tau}\Big|_{\tau=0} = 0, \xi \ge 0, \\ \left|W(\xi,\tau)\right| < \infty, \xi \ge 0, \tau \ge 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (8)$$

Пусть $\overline{W}(\xi,p) = \int\limits_0^\infty \exp(-p\tau) W(\xi,\tau) d\tau$ – изображение Лапласа функции $W(\xi,\tau)$.

Из уравнения (7) находим

$$\overline{W}(\xi,p) = \overline{f}(p)\exp\left(-\xi\sqrt{\beta^2 p^2 + p}\right). \qquad (9)$$

Записанное для $\overline{W}(\xi,p)$ изображение определяет дальнейшую цель исследования – получить оригиналы для серии изображений вида

$$\overline{f}(p)\exp\left[-\xi\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}\right] =$$
$$= \overline{f}(p)\exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right],$$
$$\overline{\mu}(p) = \sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}$$

при различных $\overline{f}(p)$ со ступенчатой функцией Хевисайда.

Подчеркнем еще раз особенности предстоящих вычислений. Как показали первые публикации в 1970-х гг. [23, 26] по простейшим гиперболическим моделям переноса, особенностью процесса теплопроводности в рамках математических моделей для уравнения (2) является волновой характер, что выражается наличием ступенчатой функции $\eta(\tau - \xi)$ в аналитическом решении первой краевой задачи (7), (8) при $W(0,\tau) = 1$, $\tau > 0$. В любой момент времени существует область теплового следа $\xi < \tau$ и невозмущенная область $\xi > \tau$ (в точках области более чем $\xi = \tau$ изменение температуры не происходит и ее значение равно начальному). На поверхности фронта распространяющейся волны $\xi = \tau$ и на фронте температурный профиль имеет разрыв, амплитуда которого быстро затухает с увеличением времени прогрева. Именно в области за фронтом тепловой волны наблюдается существенное различие между решениями уравнений гиперболического (2) и параболического [4] типов (в последнем случае решения являются гладкими, существенно большими начального значения). Указанные особенности как раз и объясняются наличием в аналитическом решении тепловой задачи ступенчатой функции.

В дальнейшем будут рассматриваться только соотношения операционного исчисления, поэтому вернемся (как это и принято) к обозначению временной переменной *t*.

Для получения определяющих соотношений рассмотрим функцию $\varphi(x) = x^{-m/2} I_m(x^{1/2})$, ее производную вида

$$\frac{d^n}{dx^n}[\varphi(x)] = \frac{1}{2^n} x^{-\frac{m+n}{2}} I_{m+n}(x^{\frac{1}{2}}),$$

а также ряд Маклорена для $\varphi(x + x_0)$:

$$\begin{gathered} \varphi(x+x_0) = (x+x_0)^{-\frac{1}{2}m} I_m\left[(x+x_0)^{\frac{1}{2}}\right] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_0^n}{n!} \frac{1}{2^n} x^{-\frac{m+n}{2}} I_{m+n}(x^{\frac{1}{2}}). \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь $I_m(x^{1/2})$ – модифицированная функция Бесселя. Тождественными преобразованиями $x_0 = 2\kappa t, x = t^2, m = 0$ приводим ряд к виду $\varphi(t) = I_0\left[\sqrt{t(t+2\kappa)}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!} I_n(t)$ с изображением по Лапласу

$$\begin{gathered} \overline{\varphi}(p) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) I_0\left[\sqrt{t(t+2\kappa)}\right] dt = \\ = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa^n}{n!}\left(p - \sqrt{p^2-1}\right)^n = \\ = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\kappa p - \kappa\sqrt{p^2-1})^n}{n!} = \\ = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \exp(\kappa p - \kappa\sqrt{p^2-1}). \end{gathered}$$

Отсюда получаем важное соотношение $\overline{\varphi}(p)\exp(-\kappa p) = \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \exp(-\kappa\sqrt{p^2-1})$ и его оригинал

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \exp(-\kappa\sqrt{p^2-1}) \leftarrow \\ \leftarrow \varphi(t-\kappa)\eta(t-\kappa) = I_0(\sqrt{t^2-\kappa^2})\eta(t-\kappa). \end{gathered} \tag{11}$$

Преобразуем полученное соотношение, заменяя κ на δ, t на σt, используя при этом теорему подобия [4]; затем введем обозначение $\xi = \delta / \sigma$. Находим:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{p^2-\sigma^2}} \exp(-\xi\sqrt{p^2-\sigma^2}) \leftarrow \\ \leftarrow I_0(\sigma\sqrt{t^2-\xi^2})\eta(t-\xi). \end{gathered} \tag{12}$$

Произведем слева в (12) замену $p \to p + \rho$ и далее используем теорему смещения

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{(p+\rho+\sigma)(p+\rho-\sigma)}} \times \\ \times \exp\left[-\xi\sqrt{(p+\rho+\sigma)(p+\rho-\sigma)}\right] \leftarrow \\ \leftarrow \exp(-\rho t) I_0(\sigma\sqrt{t^2-\xi^2})\eta(t-\xi). \end{gathered}$$

Введем обозначения: $\rho + \sigma = 2\alpha$, $\rho - \sigma = 2\beta$, откуда $\rho = \alpha + \beta$, $\sigma = \alpha - \beta$. Теперь окончательно приходим к нужному результату:

$$\begin{gathered} \frac{1}{\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}} \times \\ \times \exp\left[-\xi\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}\right] = \\ = \frac{1}{\overline{\mu}(p)} \exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right] \leftarrow \\ \leftarrow \exp(-\rho t) I_0(\sigma\sqrt{t^2-\xi^2})\eta(t-\xi). \end{gathered} \tag{13}$$

Из (13) находим:

$$\begin{gathered} \frac{1}{p\overline{\mu}(p)} \exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right] \leftarrow \\ \leftarrow \left[\int_{\xi}^{t} \exp(-\rho\tau) I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-\xi^2}) d\tau\right] \times \\ \times \eta(t-\xi). \end{gathered} \tag{14}$$

Применяя к (13) теорему о свертке, получаем:

$$\frac{1}{\overline{\mu}(p)}\exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right]\overline{f}(p)\leftarrow$$
$$\leftarrow\left[\int_{\xi}^{t}f(t-\tau)\exp(-\rho\tau)I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-\xi^2})d\tau\right]\times \tag{15}$$
$$\times\eta(t-\xi).$$

Дифференцируя (15) по ξ, получаем:

$$\exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right]\overline{f}(p)\leftarrow$$
$$\leftarrow f(t-\xi)\exp(-\rho\xi)+$$
$$+\sigma\xi\int_{\xi}^{t}f(t-\tau)\exp(-\rho\tau)\times \tag{16}$$
$$\times\frac{I_1(\sigma\sqrt{\tau^2-\xi^2})}{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}d\tau, t>\xi.$$

Допустим, в (16) $\overline{f}(p)=1$, откуда $f(t)=\delta(t)$ – функция Дирака и (16) будет иметь вид:

$$\exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right]\leftarrow$$
$$\leftarrow\left[\exp(-\rho\xi)\delta(t-\xi)+\right.$$
$$\left.+\sigma\xi\exp(-\rho t)\frac{I_1(\sigma\sqrt{t^2-\xi^2})}{\sqrt{t^2-\xi^2}}\right]\eta(t-\xi). \tag{17}$$

Пусть теперь в (16) $\overline{f}(p)=\frac{1}{p}$, тогда $f(t)=1$ и оригинал будет:

$$\frac{1}{p}\exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right]\leftarrow$$
$$\leftarrow\left[\exp(-\rho\xi)+\sigma\xi\int_{\xi}^{t}\exp(-\rho\tau)\times\right. \tag{18}$$
$$\left.\times\frac{I_1(\sigma\sqrt{\tau^2-\xi^2})}{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}d\tau\right]\eta(t-\xi).$$

Ряд проблем в теории теплового удара [4] приводят к изображению вида

$$\frac{1}{p}\sqrt{\frac{p+2\beta}{p+2\alpha}}\exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right].$$

Найдем оригинал. Имеем из (14):

$$\frac{1}{p}\frac{\exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right]}{\sqrt{(p+2\alpha)(p+2\beta)}}\leftarrow$$
$$\leftarrow\int_{\xi}^{t}\exp(-\rho\tau)I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-\xi^2})d\tau, t>\xi. \tag{19}$$

Умножим (19) на 2β и сложим почленно с (13). Получим:

$$\frac{1}{p}\sqrt{\frac{p+2\beta}{p+2\alpha}}\exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right]\leftarrow$$
$$\leftarrow\exp(-\rho t)I_0(\sigma\sqrt{t^2-\xi^2})+ \tag{20}$$
$$+2\beta\int_{\xi}^{t}\exp(-\rho\tau)I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-\xi^2})d\tau, t>\xi.$$

Преобразуем (20), используя соотношения $(d/dx)I_0(x)=I_1(x), I_0(0)=1$. Получаем окончательно искомый оригинал:

$$\frac{1}{p}\sqrt{\frac{p+2\beta}{p+2\alpha}}\exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right]\leftarrow\exp(-\rho\xi)+$$
$$+\int_{\xi}^{t}\exp(-\rho\tau)\left[\frac{\sigma\tau I_1(\sigma\sqrt{\tau^2-\xi^2})}{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}-\right. \tag{21}$$
$$\left.-\sigma I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-\xi^2})\right]d\tau, t>\xi.$$

С помощью приведенных соотношений и теорем операционного исчисления запишем важный для приложений оригинал более общего изображения:

$$\sqrt{\frac{p+2\beta}{p+2\alpha}}\exp\left[-\xi\overline{\mu}(p)\right]\overline{f}(p)\leftarrow$$
$$\leftarrow f(t-\xi)\exp(-\rho\xi)+\int_{\xi}^{t}f(t-\tau)\times$$
$$\times\exp(-\rho\tau)\left[\frac{\sigma\tau I_1(\sigma\sqrt{\tau^2-\xi^2})}{\sqrt{\tau^2-\xi^2}}-\right. \tag{22}$$
$$\left.-\sigma I_0(\sigma\sqrt{\tau^2-\xi^2})\right]d\tau, t>\xi.$$

Выражение (22) содержит ряд практических частных случаев при заданных $f(t)\to\overline{f}(p)$.

Приведенные операционные соотношения закрывают проблему нахождения аналитических решений уравнения (7) с обобщенными граничными условиями. Однако указанная проблема имеет интересное продолжение, состоящее в возможности представления одного и того же аналитического решения в виде различных функциональных конструкций. Существенно при этом, что некоторая громоздкость аналитической записи решений может быть упрощена с использованием специальных преобразований, приводящих к новым аналитическим решениям, неизвестным ранее. Покажем это на примере первой краевой задачи для уравнения (7) (краевые условия приведены выше). Аналитическое решение задачи на основе соотношения (18) имеет вид:

$$W(\xi,\tau)=\left[\exp(-\frac{\xi}{2\beta})+\frac{\xi}{2\beta}\int_{\xi}^{\tau/\beta}\exp(-\frac{x}{2\beta})\times\right.$$
$$\left.\times\frac{I_1(\frac{1}{2\beta}\sqrt{x^2-\xi^2})}{\sqrt{x^2-\xi^2}}dx\right]\eta(\tau-\xi\beta)= \tag{23}$$
$$=\Psi_1(\xi,\tau)\eta(\tau-\xi\beta).$$

Изображение искомой функции (23) имеет вид:

$$\overline{W}(\xi,p)=(1/p)\exp\left[-\beta\xi\sqrt{p(p+1/\beta^2)}\right],$$

оригинал которого можно записать через интеграл Римана – Меллина следующим образом:

$$\frac{1}{p}\exp\left[-\beta\xi\sqrt{p(p+1/\beta^2)}\right]\leftarrow$$
$$\leftarrow\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty}\frac{1}{p}\exp\left[p\tau-\right. \tag{24}$$
$$\left.-\beta\xi\sqrt{p(p+1/\beta^2)}\right]dp=\Psi_2(\xi,\tau).$$

Подынтегральная функция в (27) удовлетворяет условиям леммы Жордано [24], имеет две точки ветвления. Вычисляя контурный интеграл (24), находим:

$$\Psi_2(\xi,\tau)=1-\frac{1}{\pi}\int_0^{1/\beta^2}\exp(-\rho\tau)\times$$
$$\times\frac{\sin\xi\beta\sqrt{\rho(\frac{1}{\beta^2}-\rho)}}{\rho}d\rho. \tag{25}$$

Теперь покажем, что аналитические решения первой краевой задачи в виде $W(\xi,\tau)=$ $=\Psi_1(\xi,\tau)\eta(\tau-\xi\beta)$ и $W(\xi,\tau)=\Psi_2(\xi,\tau)\eta(\tau-\xi\beta)$ эквивалентны, то есть $\Psi_1(\xi,\tau)=\Psi_2(\xi,\tau)$. Имеем:

$$\Psi_1(\xi,\tau)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[-\int_{\xi}^{\tau/\beta}\exp(-\frac{x}{2\beta})I_0(\frac{1}{2\beta}\sqrt{x^2-\xi^2})dx\right].$$

Продифференцируем обе части по τ:

$$\left[\Psi_1\right]_{\tau}'=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[-\frac{1}{\beta}\exp(-\frac{\tau}{2\beta^2})I_0(\frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{\tau^2}{\beta^2}-\xi^2})\right]=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[-\frac{1}{\beta}\exp(-\frac{\tau}{2\beta^2})J_0(\frac{1}{2\beta^2}\sqrt{(\beta\xi)^2-\tau^2})\right].$$

Воспользуемся далее интегралом (достаточно редким)

$$\int_0^a\frac{\exp(-py)}{\sqrt{ay-y^2}}\cos c\sqrt{ay-y^2}dy=$$
$$=\pi\exp(-\frac{ap}{2})J_0(\tfrac{a}{2}\sqrt{c^2-p^2}).$$

Находим:

$$\left[\Psi_1(\xi,\tau)\right]_{\tau}'=$$
$$=\frac{\partial}{\partial\xi}\left[-\frac{1}{\beta\pi}\times\int_0^{1/\beta^2}\frac{\exp(-\rho\tau)}{\sqrt{\rho(\frac{1}{\beta^2}-\rho)}}\times\right.$$
$$\left.\times\cos(\beta\xi\sqrt{\rho(\frac{1}{\beta^2}-\rho)})d\rho\right]=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{1/\beta^2}\exp(-\rho\tau)\sin\beta\xi\sqrt{\rho(\frac{1}{\beta^2}-\rho)}d\rho.$$

Проинтегрируем по τ:

$$\Psi_1(\xi,\tau)=-\frac{1}{\pi}\int_0^{1/\beta^2}\exp(-\rho\tau)\times$$
$$\times\frac{\sin\beta\xi\sqrt{\rho(\frac{1}{\beta^2}-\rho)}}{\rho}d\rho+C.$$

Так как по условию задачи $\Psi_1(0,\tau)=1$, то $C = 1$ и окончательно получаем:

$$\Psi_1(\xi,\tau)=$$

$$=1-\frac{1}{\pi}\int_0^{1/\beta^2}\exp(-\rho\tau)\frac{\sin\beta\xi\sqrt{\rho(\frac{1}{\beta^2}-\rho)}}{\rho}d\rho=$$

$$=\Psi_2(\xi,\tau).$$

Таким образом, показано, что

$$W(\xi,\tau)=\Psi_1(\xi,\tau)\eta(\tau-\xi\beta)= \\ =\Psi_2(\xi,\tau)\eta(\tau-\xi\beta). \quad (26)$$

Приведенные рассуждения могут быть распространены также на вторую и третью краевые задачи с обобщенными граничными условиями, что подчеркивает особенность гиперболических моделей переноса. Высказанное утверждение проиллюстрируем еще на одном классе задач с обобщенными граничными условиями (3)–(6), что представляет интерес для многих практических приложений [5].

В безразмерных переменных

$$\xi=\frac{z}{\sqrt{a\tau_r}},\tau=t/\tau_r,Bi^*=h\sqrt{a\tau_r},$$

$$W_i(\xi,\tau)=\frac{T_i(z,t)-T_0}{T_c-T_0}(i=1,3), \quad (27)$$

$$W_2(\xi,\tau)=\frac{T_2(z,t)-T_0}{q_0\sqrt{a\tau_r}/\lambda}$$

рассмотрим задачу вида

$$\frac{\partial W_i}{\partial\tau}=\frac{\partial^2 W_i}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 W_i}{\partial\tau^2}, \\ \xi>0,\tau>0(i=1,2,3) \quad (28)$$

$$W_i(\xi,\tau)\Big|_{\tau=0}=\frac{\partial W_i(\xi,\tau)}{\partial\tau}\Big|_{\tau=0}=0, \\ \xi\ge 0, \quad (29)$$

$$W_1(\xi,\tau)\Big|_{\xi=0}=1,\tau>0, \quad (30)$$

$$\int_0^{\tau}\frac{\partial W_2(\xi,\tau')}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0}\exp\left[-(\tau-\tau')\right]d\tau'=-1, \\ \tau>0, \quad (31)$$

$$\int_0^{\tau}\frac{\partial W_3(\xi,\tau')}{\partial\xi}\Big|_{\xi=0}\exp\left[-(\tau-\tau')\right]d\tau'= \\ =Bi^*\left[W_3(\xi,\tau)\Big|_{\xi=0}-1\right],\tau>0, \quad (32)$$

$$\left|W_i(\xi,\tau)\right|<\infty,\xi\ge 0,\tau\ge 0. \quad (33)$$

Операционное решение задачи (28)–(33) по Лапласу $\overline{W_i}(\xi,p)=\int_0^{\infty}W_i(\xi,\tau)\exp(-p\tau)d\tau$ имеет вид:

$$\overline{W_i}(\xi,p)=\overline{f_i}(p)\exp\left[-\xi\sqrt{p(p+1)}\right], \quad (34)$$

$$\overline{f_i}(p)=\begin{cases}1/p & i=1,\\ \sqrt{p+1}/p^{3/2} & i=2,\\ \dfrac{Bi^*\sqrt{p+1}}{p(\sqrt{p}+Bi^*\sqrt{p+1})} & i=3.\end{cases} \quad (35)$$

Оригиналы в (34) найдем по приведенным выше соотношениям:

$$W_i(\xi,\tau)=\Big[f_i(\tau-\xi)\exp(-\xi/2)+ \\ +(\xi/2)\int_{\xi}^{\tau}f_i(\tau-\tau')\exp(-\tau'/2)\times \\ \times\frac{I_1(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2-\xi^2})}{\sqrt{\tau'^2-\xi^2}}d\tau\Big]\eta(\tau-\xi), \quad (36)$$

где

$$f_i(\tau)=\begin{cases}1, & i=1,\\ \int_0^{\tau}(\dfrac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}}+\Phi(\tau'))\dfrac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}, & i=2,\\ 1-\gamma_1\exp(-\gamma_2\tau)-\gamma_3\int_0^{\tau}\Bigg(\dfrac{1}{\sqrt{\pi\tau'}}+\sqrt{\gamma_1}\times \\ \times\exp(\gamma_1\tau')\Phi(\sqrt{\gamma_1\tau'}\Bigg)\dfrac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}d\tau', & i=3,\end{cases}$$

$$\gamma_1=(1-Bi^{*2})^{-1}, \\ \gamma_2=1-\gamma_1, \\ \gamma_3=(1-\gamma_1)/Bi^*. \quad (37)$$

Теперь рассмотрим новые аналитические формы для решения (36). Вначале в (36) изучим случай $i = 1$. Имеем из (36)

$$W_1(\xi,\tau)=\left[\exp(-\xi/2)+(\xi/2)\times\right.$$
$$\left.\times\int_{\xi}^{\tau}\exp(-\tau'/2)\frac{I_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau'^2-\xi^2}\right)}{\sqrt{\tau'^2-\xi^2}}d\tau\right]\times \quad (38)$$
$$\times\eta(\tau-\xi)$$

или на основании предыдущих рассуждений в (26)

$$W_1(\xi,\tau)=\left[1-\frac{1}{\pi}\int_0^1\exp(-\rho\tau)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\sin\xi\sqrt{\rho(1-\rho)}}{\rho}d\rho\right]\eta(\tau-\xi). \quad (39)$$

Теперь покажем, что решения $W_i(\xi,\tau)$ для $I = 2, 3$ могут быть записаны через одну функцию (39) $\Psi_1(\xi,\tau)$ (правая часть (39)). Имеем из (34)–(35) для $i = 2$:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\overline{W}_2(\xi,p)}{d\xi}=\\&=-\overline{W}_1(\xi,p)-p\overline{W}_1(\xi,p),\xi>0,\\&\overline{W}_2(\xi,p)\Big|_{\xi=\infty}=0,\end{aligned}\right\} \quad (40)$$

откуда $\overline{W}_2(\xi,p)=\int_{\xi}^{\infty}\overline{W}_1(y,p)dy+p\int_{\xi}^{\infty}\overline{W}_1(y,p)dy.$

Переходя к оригиналам, находим:

$$W_2(\xi,\tau)=\int_{\xi}^{\tau}\Psi_1(y,\tau)dy+$$
$$+(\partial/\partial\tau)\int_{\xi}^{\tau}\Psi_1(y,\tau)dy,\tau>\xi. \quad (41)$$

При $i = 3$ из (34)–(35) следует:

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{d\overline{W}_3(\xi,p)}{d\xi}-Bi^*(p+1)\overline{W}_3(\xi,p)=\\&\quad=-Bi^*(p+1)\overline{W}_1(\xi,p)\\&\overline{W}_3(\xi,p)\Big|_{\xi=\infty}=0,\end{aligned}\right.$$

откуда

$$\overline{W}_3(\xi,p)=Bi^*(p+1)\times$$
$$\times\int_{\xi}^{\infty}\exp\left[-Bi^*(y-\xi)(p+1)\right]\overline{W}_1(y,p)dy.$$

В пространстве оригиналов получаем:

$$W_3(\xi,\tau)=Bi^*\int_{\xi}^{\frac{\tau+Bi^*\xi}{1+Bi^*}}\exp\left[-Bi^*(y-\xi)\right]\times$$
$$\times\Psi_1\left[y,\tau-Bi^*(y-\xi)\right]dy+ \quad (42)$$
$$+Bi^*(\partial/\partial\tau)\int_{\xi}^{\frac{\tau+Bi^*\xi}{1+Bi^*}}\exp\left[-Bi^*(y-\xi)\right]\times$$
$$\times\Psi_1\left[y,\tau-Bi^*(y-\xi)\right]dy,\tau>\xi.$$

Представленные аналитические решения (41)–(42) также новые интегральные соотношения в аналитической теплофизике При развитом в настоящее время программном обеспечении проведение числовых экспериментов по новым соотношениям вполне решаемая задача.

В заключение этого раздела приведем ряд практически важных для теории локально-неравновесного теплообмена операционных соотношений, оригиналы которых отсутствуют в справочниках по операционному исчислению и их нахождение связано с длительными громоздкими вычислениями.

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p}\,(p+b)}\Leftarrow\int_0^{\tau}\left[\frac{exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}}+\sqrt{1-b}\times\right.$$
$$\left.\times exp(-b\tau')\Phi\left(\sqrt{(1-b)\tau'}\right)\right]\frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}},(b<1) \quad (43)$$

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p}(p-b)}\Leftarrow\int_0^{\tau}\left[\frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi\tau'}}+\sqrt{b+1}\times\right.$$
$$\left.\times\exp(b\tau')\Phi(\sqrt{(b+1)\tau'})\right]\frac{d\tau'}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}},b>0 \quad (44)$$

$$\frac{\sqrt{p+1}}{\sqrt{p}(p+b)}\Leftarrow\int_0^{\tau}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi\tau'}}-\frac{2\sqrt{b-1}}{\sqrt{\pi}}F(\tau')\right]\times$$
$$\times\frac{\exp(-\tau')}{\sqrt{\pi(\tau-\tau')}}d\tau',b>1 \quad (45)$$

Здесь $F(\tau)=\exp(-\tau^2)\int\limits_0^{\tau}\exp(y^2)dy$ – вещественная функция, которая остается ограниченной при любых вещественных τ. При этом $F(\tau)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n \tau^{2n+1}}{(2n+1)!!},(|\tau|<\infty)$; $\Phi(z)=(2/\sqrt{\pi})\times\int\limits_0^{z}\exp(-y^2)dy$ – функция Лапласа.

Изображение

$$\overline{K}^*_n(p)=\frac{p^{(n-1/2)}}{(1+\gamma\sqrt{p})(\gamma^2p^2+2\gamma\beta p+2\beta)}$$

имеет оригинал:

$$K^*_n(t)=\frac{(-1)^n}{\pi}\times$$
$$\times\int\limits_0^{\infty}\exp(-xt)\frac{x^{(n-1/2)}}{(1+\gamma^2x)(\gamma^2x^2-2\gamma\beta x+2\beta)}dx,$$
$$n=0,1,2.$$

Следующее соотношение изображение-оригинал достаточно сложной конструкции имеет многочисленные приложения в термомеханике упругих и вязкоупругих тел:

$$\frac{1}{p}\exp\left[-\frac{\xi-1}{\alpha_0}p\sqrt{\frac{p+\beta_1+\beta_2}{p+\beta_2}}\right]\leftarrow$$
$$\leftarrow\left\{1-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\beta_1}\frac{1}{x+\beta_2}\exp\left[-(x+\beta_2)t\right]\times\right. \quad (46)$$
$$\left.\times\sin\left[\frac{(\xi-1)(x+\beta_2)}{\alpha_0}\sqrt{\frac{\beta_1-x}{x}}\right]dx\right\}\ \eta(t-\frac{\xi-1}{\alpha_0}).$$

2. Конечные области канонического типа

Математические модели для уравнения (7) в области $\xi\in[0,\xi_0],\tau\geq 0$ с обобщенными граничными условиями практически не располагают в полной мере необходимым аппаратом операционного исчисления, что существенно затрудняет нахождение их точных аналитических решений. Рассмотрим ряд операционных соотношений, характерных для указанного случая.

Найдем оригинал изображения

$$\frac{(H-\beta p)^n}{(H+\beta p)^{n+1}}. \quad (47)$$

Воспользуемся справочной формулой [27]:

$$\frac{(1-p)^n}{p^{n+1}}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k p^{k-n-1}=(-1)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m p^{-(m+1)}\leftarrow$$
$$\leftarrow(-1)^n\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m\frac{1}{m!}t^m=(-1)^nL_n(t),$$

где $L_n(t)=\frac{1}{n!}\exp(t)\frac{d^n}{dt^n}\left[t^n\exp(-t)\right]$ – полином Лагерра.

Используя далее последовательно операционные теоремы $(1/k)\overline{f}(pk)\leftarrow f(kt)$; $\overline{f}(p-k)\leftarrow\leftarrow\exp(kt)f(t)$; $\overline{f}(p)\exp(-pt_0)\leftarrow f(t-t_0)\eta(t-t_0)$, находим искомый оригинал:

$$\frac{(H-\beta p)^n}{(H+\beta p)^{n+1}}\leftarrow\frac{(-1)^n}{\beta}\exp(-\frac{H}{\beta}t)L_n(2\frac{H}{\beta}t). \quad (48)$$

Аналогичными рассуждениями можно показать:

$$\frac{(H+\beta p)^n}{(H-\beta p)^{n+1}}\leftarrow\frac{1}{\beta}\exp(\frac{H}{\beta}t)L^*_n(2\frac{H}{\beta}t), \quad (49)$$

где $L^*_n(t)=(-1)^{n+1}\sum\limits_{m=0}^{n}C_n^m\frac{1}{m!}t^m$ – полином Карташова.

Найдем оригинал изображения $\overline{f}(\sqrt{(p+a)^2-b^2}$, если $\overline{f}(p)\leftarrow f(t)$. Используем для этих целей теорему Эфроса:

$$\overline{f}\left[\overline{\varphi}_1(p)\right]\overline{\varphi_2}(p)\leftarrow\int\limits_0^t f(\tau)\Psi(\tau,t)d\tau,$$
$$\Psi(\tau,t)\rightarrow\exp\left[-\tau\overline{\varphi}_1(p)\right]\overline{\varphi}_2(p). \quad (50)$$

Находим:

$$\overline{f}(\sqrt{(p+a)^2-b^2})\leftarrow$$
$$\leftarrow\exp(-at)\left[f(t)+b\int\limits_0^t yf(y)\frac{I_1(b\sqrt{t^2-y^2})}{\sqrt{t^2-y^2}}dy\right]. \quad (51)$$

Аналогично находим:

$$\frac{1}{p}\overline{f}(\sqrt{(p+a)^2-b^2})\exp\left[-\gamma\sqrt{(p+a)^2-b^2}\right]\leftarrow$$
$$\leftarrow\int\limits_{\gamma}^{t}f(\tau-\gamma)\left[\exp(-a\tau)+\right. \quad (52)$$
$$\left.+b\tau\int\limits_{\tau}^{t}\exp(-ay)\frac{I_1(b\sqrt{y^2-\tau^2})}{\sqrt{y^2-\tau^2}}dy\right]d\tau.$$

Выражение (52) включает ряд частных случаев, в частности, важное в практическом плане соотношение

$$\left.\begin{array}{c}\frac{1}{p}\bar{f}(\sqrt{\beta^2p^2+p})\exp(-\gamma\sqrt{\beta^2p^2+p})\leftarrow\\ \leftarrow\int_0^t\exp(-\frac{\tau}{2\beta^2})\varphi(\gamma,\tau)d\tau\\ \varphi(\gamma,t)=f^*(t-\gamma\beta)+\\ +\frac{1}{2\beta^2}\int_0^t yf^*(y-\gamma\beta)\frac{I_1(\frac{1}{2\beta^2}\sqrt{t^2-y^2})}{\sqrt{t^2-y^2}}dy\\ f^*(t)=\frac{1}{\beta}f(t/\beta)\eta(t)\end{array}\right\}. \quad (53)$$

Пусть теперь $\bar{s}(p)=\sqrt{\beta^2p^2+p}$ или $\bar{s}(p)=$ $=\beta\sqrt{(p+\frac{1}{2\beta^2})^2-\frac{1}{4\beta^4}}$.

Формулы (48), (51), (52) дают следующие оригиналы:

$$\frac{\left[H-\bar{s}(p)\right]^n}{\left[H+\bar{s}(p)\right]^{n+1}}\leftarrow\exp(-\frac{t}{2\beta^2})\times$$

$$\times\left[f(t)+\frac{1}{2\beta^2}\int_0^t f(\sqrt{t^2-y^2})I_1(\frac{y}{2\beta^2})dy\right],$$

где

$$f(t)=(-1)^n\frac{1}{\beta}\exp(-\frac{H}{\beta}t)L_n(2\frac{H}{\beta}t). \quad (54)$$

$$\frac{1}{p}\frac{\left[H-\bar{s}(p)\right]^n}{\left[H+\bar{s}(p)\right]^{n+1}}\leftarrow$$

$$\leftarrow\int_0^t\left[f(\tau)+\frac{1}{2\beta^2}\int_0^\tau f(\sqrt{\tau^2-y^2})\times \right. \quad (55)$$

$$\left.\times I_1(\frac{1}{2\beta^2}y)dy\right]\exp(-\frac{\tau}{2\beta^2})d\tau,$$

где $f(t)$ – функция (54).

$$\frac{\left[H-\bar{s}(p)\right]^n}{\left[H+\bar{s}(p)\right]^{n+1}}\exp\left[-\gamma\bar{s}(p)\right]\leftarrow$$

$$\leftarrow\left[f(t-\gamma\beta)+\frac{1}{2\beta^2}\int_0^t f(\tau-\gamma\beta)\times\right. \quad (56)$$

$$\left.\times\frac{\tau I_1(\frac{1}{2\beta^2}\sqrt{t^2-\tau^2})}{\sqrt{t^2-\tau^2}}d\tau\right]\exp(-\frac{t}{2\beta^2}),$$

$$f(t)=$$

$$=\frac{(-1)^n}{\beta}\exp(-\frac{H}{\beta}t)L_n(2\frac{H}{\beta}t)\eta(t); \quad (57)$$

$$\frac{1}{p}\frac{\left[H-\bar{s}(p)\right]^n}{\left[H+\bar{s}(p)\right]^{n+1}}\exp\left[-\gamma\bar{s}(p)\right]\leftarrow$$

$$\leftarrow\int_0^t\left[f(\tau-\gamma\beta)+\frac{1}{2\beta^2}\int_0^\tau f(\tau'-\gamma\beta)\times\right. \quad (58)$$

$$\left.\times\frac{\tau' I_1(\frac{1}{2\beta^2}\sqrt{\tau^2-\tau'^2})}{\sqrt{\tau^2-\tau'^2}}d\tau'\right]\exp(-\frac{\tau}{2\beta^2})d\tau,$$

где $f(t)$ – функция (57);

$$\frac{1}{p}\exp(-\frac{\tau'}{\beta}\sqrt{\frac{p}{p+1/\beta^2}})\leftarrow$$

$$\leftarrow 1-\frac{1}{\pi}\int_0^{1/\beta^2}\frac{1}{\rho}\exp(-\rho\tau)\sin\frac{\tau'}{\beta}\sqrt{\frac{\rho}{1/\beta^2-\rho}}d\rho= \quad (60)$$

$$=\Psi_1(\tau,\tau'),$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{Bi^*}{p}\frac{\left[Bi^*-\frac{\bar{s}(p)}{\beta^2p+1}\right]^k}{\left[Bi^*+\frac{\bar{s}(p)}{\beta^2p+1}\right]^{k+1}}\leftarrow\int_0^\infty f_k(\tau')\Psi_1(\tau,\tau')d\tau'\\ \\ f_k(\tau)=(-1)^k Bi^*\exp(-Bi^*\tau)L_k(2Bi^*\tau);\\ \bar{s}(p)=\sqrt{\beta^2p^2+p}.\end{array}\right\} \quad (61)$$

В качестве приложения полученных результатов рассмотрим две характерные для теплового удара модели:

$$\frac{\partial W_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W_i}{\partial \xi^2} - \beta^2 \frac{\partial^2 W_i}{\partial \tau^2}, 0 < \xi < \xi_0, \tau > 0, \quad (i = 1,2), \tag{62}$$

$$W_i\Big|_{\tau=0} = (\partial W_i / \partial \tau)_{\tau=0} = 0, 0 \le \xi \le \xi_0,$$

$$W_1\Big|_{\xi=0} = 1, W_1\Big|_{\xi=\xi_0} = 0, \tau > 0, \tag{63}$$

$$W_2\Big|_{\xi=0} = 1, (\partial W_2 / \partial \xi)_{\xi=\xi_0} = 0, \tau > 0. \tag{64}$$

Находим в пространстве изображений по Лапласу:

$$\overline{W}_1(\xi, p) = \frac{1}{p} \frac{sh\left[(\xi_0 - \xi)\overline{S}(p)\right]}{sh\left[\xi_0 \overline{S}(p)\right]},$$

$$\overline{W}_2(\xi, p) = \frac{1}{p} \frac{ch\left[(\xi - \xi_0)\overline{S}(p)\right]}{ch\left[\xi_0 \overline{S}(p)\right]}.$$

Раскроем дроби:

$$\overline{W}_1(\xi, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p} \left\{ \exp\left[-\gamma_{1k} \overline{S}(p)\right] - \exp\left[-\gamma_{2k} \overline{S}(p)\right] \right\},$$

$$\overline{W}_2(\xi, p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p} \left\{ \exp\left[-\gamma_{1k} \overline{S}(p)\right] + \exp\left[-\gamma_{2k} \overline{S}(p)\right] \right\},$$

где

$$\gamma_{1k} = 2k\xi_o + \xi, \gamma_{2k} = 2(k+1)\xi_0 + \xi,$$

$$\overline{S}(p) = \sqrt{\beta^2 p^2 + p}.$$

Переходя к оригиналам по приведенным выше соотношениям, находим:

$$W_1(\xi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \Psi\left[\gamma_{1k}(\xi), \tau\right] - \Psi\left[\gamma_{2k}(\xi), \tau\right] \right\}, \tag{65}$$

$$W_2(\xi, \tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left\{ \Psi\left[\gamma_{1k}(\xi), \tau\right] + \Psi\left[\gamma_{2k}(\xi), \tau\right] \right\}, \tag{66}$$

где

$$\Psi(\gamma_{ik}, \tau) = \left[\exp\left(-\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right) + \frac{\gamma_{ik}}{2\beta} \times \int_{\gamma_{ik}/2\beta}^{\tau/2\beta^2} \exp(-y) \frac{I_1\left(\sqrt{y^2 - \left(\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right)^2}\right)}{\sqrt{y^2 - \left(\frac{\gamma_{ik}}{2\beta}\right)^2}} dy \right] \eta(\tau - \gamma_{ik}\beta). \tag{67}$$

Заметим, что решения (65)–(67) в аналитической теплофизике ранее были неизвестны. Аналогично могут быть рассмотрены все 9 граничных условий для $W(\xi,\tau)$ в области $\xi \in [0, \xi_0], \tau \ge 0$, и, таким образом, указанная проблема для ограниченной области может считаться закрытой. В то же время следует заметить, что здесь также, как и выше, можно получить аналитические решения в виде других функциональных конструкций, эквивалентных приведенным. Последнее составляет одну из особенностей гиперболических моделей переноса. Численная реализация полученных соотношений не вызывает принципиальных трудностей, учитывая развитое программное обеспечение для целей аналитической теплофизики.

Заключение

Представлены оригиналы нестандартных операционных изображений нового вида (по Лапласу), а также для полноты изложения полученные ранее, входящие в операционные решения широкого класса задач локально неравновесных процессов переноса (теплоты, массы, импульса), электрических цепей, гидродинамики, теории колебаний, термомеханики и других областей. Приведены иллюстративные примеры и показана возможность построения аналитических решений краевых задач нестационарной теплопроводности в частично ограниченной области в виде различных функциональных конструкций, для которых доказана эквивалентность. Представленные аналитические решения в областях канонического типа являются новыми в аналитической теплофизике.

Список литературы

1. **Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.** Математические модели термомеханики. Москва: Физматгиз, 2002. 168 с.
2. **Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н.** Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. 512 с.

3. **Савельева И.Ю.** Разработка и анализ математических моделей термомеханики структурно-чувствительных материалов: дисс. … на соискание уч. степени д-ра физ.-мат. наук. Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2023. 375 с.
4. **Карташов Э.М., Кудинов В.А.** Аналитическая теория теплопроводности и прикладной термоупругости. Москва: URSS, 2012. 656 с.
5. **Карташов Э.М., Кудинов В.А.** Математические модели теплопроводности и термоупругости. Москва: Изд-во МИРЭА, 2013. 1200 с.
6. **Sobolev S.L.** On hyperbolic heat-mass transfer equation // International journal of Heat and Mass Transfer. 2018. No. 122. P. 629–630.
7. **Кудинов И.В., Кудинов В.А.** Математическая модель локально-неравновесного теплопереноса с учетом пространственно-временной нелокальности // Инженерно-физический журнал. 2015. Т. 88. № 2. P. 393–408.
8. **Кудинов В.А., Еремин А.В., Кудинов И.В.** Разработка и исследование сильно неравновесной модели теплообмена в жидкости с учетом пространственно-временной нелокальности // Теплофизика и аэромеханика. 2017. № 6. С. 929–935.
9. **Кирсанов Ю.А., Кирсанов А.Ю.** Об измерении времени тепловой релаксации твердых тел // Известия РАН. Энергетика. 2015. № 1. С. 113–122.
10. **Синкевич О.А., Семенов А.М.** Решение уравнения Больцмана методом разложения функции распределения в ряд Энскога по параметру Кнудсена в случае наличия нескольких масштабов зависимости функции распределения от времени и координат // Журнал технической физики. 2003. Т. 73. № 10. С. 1–5.
11. **Maxwell J.C.** On the Dynamical Theory of Gases. Philosophical Transactions of the Royal Society of London. 1967. Vol. 157. P. 49–88.
12. **Лыков А.В.** Теплопроводность и диффузия. Москва: Гизлегпром, 1941. 196 с.
13. **Cattaneo C.** Sulla Conduzione de Calore. Atti dei Seminaro Matematiko c Fisico dell. Universita di Modena. 1948. Vol. 3. P. 83–101.
14. **Vernotte P.** Les paradoxes de la theorie continue de l’eguation de lachaleur. Comple Rendus. Acad. Sci. Paris. 1958. Vol. 246. No. 22. P. 3154–3155.
15. **Кирсанов Ю.А.** Циклические тепловые процессы и теория теплопроводности в регенеративных воздухоподогревателях. Москва: Физматгиз, 2007. 240 с.
16. **Карташов Э.М.** Аналитические решения гиперболических моделей теплопроводности // Инженерно-физический журнал. 2014. Т. 87. № 5. С. 1072–1081.
17. **Фок И.А.** Решение задачи теории диффузии методом конечных разностей и его применение для рассеивания света // Труды Государственного оптического института. 1926. № 4. С. 1–31.
18. **Давыдов Б.И.** Диффузионное уравнение с учетом молекулярной скорости // Доклады Академии наук СССР. 1935. № 2б. С. 474–475.
19. **Предводителев А.С.** Проблемы тепло- и массопереноса. Москва: Энергия, 1970. С. 151–192.
20. **Карслоу Х., Егер Д.** Операционные методы в прикладной математике. Москва: Иностранная литература, 1948. 290 с.
21. **Карташов Э.М.** Развитие обобщенных модельных представлений теплового удара для локально-неравновесных процессов переноса теплоты // Российский технологический журнал. 2023. Т. 11. № 3. С. 70–85.
22. **Формалев В.Ф.** Уравнения математической физики. Москва: URSS, 2020. 646 с.
23. **Баумейстер К., ХамиллТ.** Гиперболическое уравнение теплопроводности. Решение задачи о полубесконечном теле // Теплопередача. 1969. № 4. С. 112–119.
24. **Карташов Э.М.** Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел. Москва: Высшая школа, 2001. 540 с.
25. **Карташов Э.М. Кудинов В.А.** Аналитические методы теплопроводности и ее приложения. Москва: URSS, 2012. 1080 с.
26. **Подстригач Я.С. Коляно Ю.М.** Обобщенная термомеханика. Киев: Наукова Думка, 1978. 310 с.
27. **Диткин В.А., Прудников А.П.** Справочник по операционному исчислению. Москва: Высшая школа, 1966. 466 с.

References

1. **Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N.** Matematicheskie modeli termomekhaniki [Mathematical models of thermomechanics]. Moscow: Fizmatgiz, 2002, 168 p.
2. **Zarubin V.S., Kuvyrkin G.N.** Mathematical models of mechanics and electrodynamics of a continuous medium [Matematicheskie modeli mekhaniki i ehlektrodinamiki sploshnoi sredy]. Moscow: Bauman MSTU, 2008, 512 p.
3. **Savelyeva I.Yu.** Razrabotka i analiz matematicheskikh modelei termomekhaniki strukturno-chuvstvitel’nykh materialov [Development and analysis of mathematical models of thermomechanics of structure-sensitive materials]. Doctor of physical and mathematical sciences. Moscow: Bauman MSTU, 2023, 375 p.
4. **Kartashov E.M., Kudinov V.A.** Analiticheskaya teoriya teploprovodnosti i prikladnoi termouprugosti [Analytical theory of thermal conductivity and applied thermoelasticity]. Moscow: URSS, 2012, 656 p.
5. **Kartashov E.M., Kudinov V.A.** Mathematical models of thermal conductivity and thermoelasticity [Matematicheskie modeli teploprovodnosti i termouprugosti]. Moscow: MIREA, 2013, 1200 p.
6. **Sobolev S.L.** On hyperbolic heat-mass transfer equation. *International journal of Heat and Mass Transfer*, 2018, no. 122, pp. 629–630.
7. **Kudinov I.V., Kudinov V.A.** Mathematical model of locally nonequilibrium heat transfer taking into account spatiotemporal nonlocality. *Engineering physics journal*, 2015, vol. 88, no. 2, pp. 393–408.

8. **Kudinov V.A., Eremin A.V., Kudinov I.V.** Development and study of a highly nonequilibrium model of heat transfer in a liquid, taking into account spatiotemporal nonlocality. *Thermophysics and aeromechanics*, 2017, no. 6, pp. 929–935.
9. **Kirsanov Yu.A., Kirsanov A.Yu.** Ob izmerenii vremeni teplovoi relaksatsii tverdykh tel [On measuring the thermal relaxation time of solids]. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Ehnergetika*, 2015, no. 1, pp. 113–122.
10. **Sinkevich O.A., Semenov A.M.** Solving the Boltzmann equation by expanding the distribution function into an Enskog series in terms of the Knudsen parameter in the case of the presence of several scales of the dependence of the distribution function on time and coordinates. *Journal of Technical Physics*, 2003, vol. 73, no. 10, pp. 1–5.
11. **Maxwell J.C.** On the Dynamical Theory of Gases. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 1967, vol. 157, pp. 49–88.
12. **Lykov A.V.** Teploprovodnost’ i diffuziya [Thermal conductivity and diffusion]. Moscow: Gizlegprom, 1941, 196 p.
13. **Cattaneo C.** Sulla Conduzione de Calore. Atti dei Seminaro Matematiko c Fisico dell. Universita di Modena, 1948, vol. 3, pp. 83–101.
14. **Vernotte P.** Les paradoxes de la theorie continue de l’eguation de lachaleur. Comple Rendus. Acad. Sci. Paris, 1958, vol. 246, no. 22, pp. 3154–3155.
15. **Kirsanov Yu.A.** Tsiklicheskie teplovye protsessy i teoriya teploprovodnosti v regenerativnykh vozdukhopodogrevatelyakh [Cyclic thermal processes and the theory of thermal conductivity in regenerative air heaters]. Moscow: Fizmatgiz, 2007, 240 p.
16. **Kartashov E.M.** Analiticheskie resheniya giperbolicheskikh modelei teploprovodnosti [Analytical solutions of hyperbolic models thermal conductivity]. *Inzhenerno-fizicheskii zhurnal*. 2014, vol. 87, no. 5, pp. 1072–1081.
17. **Fok I.A.** Reshenie zadachi teorii diffuzii metodom konechnykh raznostei i ego primenenie dlya rasseivaniya sveta [Solving the problem of diffusion theory by the finite difference method and its application to light scattering]. *Trudy Gosudarstvennogo opticheskogo instituta*, 1926, no. 4, pp. 1–31.
18. **Davydov B.I.** Diffuzionnoe uravnenie s uchetom molekulyarnoi skorosti [Diffusion equation taking into account molecular velocity]. *Doklady Akademii nauk USSR*, 1935, no. 2b, pp. 474–475.
19. **Predvoditelev A.S.** Problemy teplo- i massoperenosa [Problems of heat and mass transfer]. Moscow: Energy, 1970, pp. 151–192.
20. **Carslow H., Eger D.** Operatsionnye metody v prikladnoi matematike [Operational methods in applied mathematics]. Moscow: Inostrannaya literature, 1948, 290 p.
21. **Kartashov E.M.** Development of generalized model representations of thermal shock for locally nonequilibrium heat transfer processes. *Russian technological journal*, 2023, vol. 11, no. 3, pp. 70–85.
22. **Formalev V.F.** Uravneniya matematicheskoi fiziki [Equations of mathematical physics]. Moscow: URSS, 2020, 646 p.
23. **Baumeister K., Hamill T.** Hyperbolic heat equation. Solution of the problem of a semi-infinite body. *Teploperedacha*, 1969, no. 4, pp. 112–119.
24. **Kartashov E.M.** Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moscow: Vysshaya shkola, 2001, 540 p.
25. **Kartashov E.M., Kudinov V.A.** Analiticheskie metody teploprovodnosti i ee prilozheniya [Analytical methods of thermal conductivity and its applications]. Moscow: URSS, 2012, 1080 p.
26. **Podstrigach Ya.S., Kolyano Yu.M.** Obobshchennaya termomekhanika [Generalized thermomechanics]. Kyiv: Naukova Dumka, 1978, 310 p.
27. **Ditkin V.A., Prudnikov A.P.** Spravochnik po operatsionnomu ischisleniyu [Handbook of Operational Calculus]. Moscow: Vysshaya shkola, 1966, 466 p.