УДК 519.21

Оценивание преимущества вероятностного подхода к анализу систем по отношению к гарантирующему в присутствии малого случайного параметра*)

А.В. Сысуев

Аннотация

Проводится сравнение характеристик вероятностного и гарантирующего подходов к анализу качества систем в условиях статистической неопределенности при наличии малого случайного параметра. Получены приблизительные аналитические оценки для абсолютной и относительной эффективностей. Неопределенность задается распределениями из класса Бармиша. Выясняется, что в данных условиях использование квантильного критерия является более эффективным, чем использование гарантирующего. Данный эффект оказывается не менее чем 39%.

Ключевые слова

Класс Бармиша; квантильный подход; гарантирующий подход; функция потерь; статистическая неопределенность.

Введение

При проектировании систем управления в различных областях деятельности возникает необходимость учета различных неконтролируемых факторов, действующих на систему. В зависимости от принятых допущений по отношению к исходной информации об этих факторах обычно используют либо стохастическую, либо минимаксную (гарантирующую) постановки задачи. Стохастическая постановка предполагает, что имеется априорная статистическая информация, а минимаксная применяется в случаях, когда априори лишь известны пределы изменения неконтролируемых факторов.

Каждая из этих постановок имеет право на существование. Например, если имеется информация о распределении вероятностей неопределенных факторов системы, то использование гарантирующего подхода не целесообразно. И наоборот, при отыскании решения, гарантирующего достижения поставленной цели при возможном наихудшем сочетании неопределенных факторов, использование стохастической постановки может оказаться неоправданным.

При минимаксном подходе показатель качества системы получается из наихудшего сочетания всех неопределенных параметров. Поэтому минимаксный подход является гарантирующим. Сущность его состоит в интерпретации всех неконтролируемых факторов, включая и случайные, о которых известна некоторая статистическая информация, как неопределенных факторов, о которых известными считаются лишь диапазоны их измерения или, более точно, некоторые предельные (доверительные) множества. В конечном счете, оптимальная стратегия управления определяется как стратегия, гарантирующая достижение наилучшего результата при наихудшем сочетании неопределенных факторов. Если при этом доверительное множество неопределенных факторов выбрать априори так, что его вероятностная мера будет не ниже заданной, то минимаксная стратегия управления будет, естественно, гарантировать достижение результата с такой же вероятностью.

Основной недостаток гарантирующего подхода заключается в том, что соответствующая ему стратегия, как правило, оказывается слишком «осторожной», а величина получаемой при этом оценки результата сильно завышенной. Это объясняется тем, с одной стороны, тем, что решение выбирается из расчета наихудшего сочетания неопределенных факторов (а это событие является маловероятным), а с другой, - тем, что статистическая информация о случайных факторах при данном подходе используется частично и далеко не лучшим образом. Отмеченные недостатки гарантирующего подхода привели к тому, что этот подход не нашел широкого практического применения.

Другой постановкой задач анализа является вероятностная, которая в качестве критериев оптимальности рассматривает функции вероятности или квантили. Использование функционалов вероятности или квантили позволяет обобщить понятие гарантирующего решения. В этом случае можно говорить о решении, которое гарантирует достижение конечной цели одновременно по всем неконтролируемым факторам – случайным и неопределенным. Например, во многих практических задачах используют такую статистическую характеристику целевой функции, как вероятность выполнения некоторых ограничений, например, вероятность успешной посадки летательного аппарата, вероятность попадания управляемого объекта в цель, вероятность получения требуемой прибыли. Таким образом, данная постановка позволяет учесть риск появления нежелательного результата.

Во многих практических задачах анализа систем, в которых присутствуют случайные величины, распределение этих величин бывает известно лишь частично, с точностью до некоторого класса. По этой причине перед исследователем встает проблема выбора такого распределения, которое для решения задачи было бы наименее благоприятным, тем самым страхуясь от наихудшего случая.

В монографии [1] изложен подход к решению задач анализа и синтеза высокоточных алгоритмов управления летательными аппаратами, на движение которых оказывают влияние различные случайные и неопределенные факторы. Установлена связь между традиционным стохастическим подходом, основанным на минимизации усредненной функции потерь, и минимаксным подходом. В книге [1] исследованы задачи стохастического программирования с вероятностным и квантильным критериями. Исследованы прикладные модели в производстве и экономике с критериями в виде функций вероятности и квантили, свойства функции вероятности и квантили, в том числе их непрерывность и дифференцируемость, выпуклость для некоторых классов задач. Кроме того, изложены методы нахождения функций вероятности и квантили, определения нижних и верхних границ для данных функций, условия эквивалентности вероятностной и квантильной постановок, соотношение задачи квантильной оптимизации с минимаксной, описаны методы численной оптимизации функций вероятности и квантили.

В частности, в инженерной практике часто предполагают, что если о некотором случайном векторе известно лишь множество его возможных значений, то распределение вектора является равномерным на этом множестве. Из теории статистических решений известны примеры, когда наихудшее распределение в классе распределений с фиксированным компактным носителем для задачи вычисления среднего значения некоторой функции сосредоточено в крайних точках носителя [2]. В связи с этим в [3] был сформулирован и доказан следующий принцип равномерности. В единичном кубе с центром в начале координат и со сторонами, параллельными координатным осям, имеется выпуклое множество, симметричное относительно начала координат. Куб рассматривается как носитель семейства вероятностных распределений, соответствующих непрерывным случайным векторам с независимыми компонентами. Плотность вероятности каждой компоненты удовлетворяет некоторым условиям симметрии и монотонности. Тогда минимум вероятностной меры указанного выпуклого множества по всем распределениям из рассматриваемого семейства достигается на равномерном распределении, носителем которого является исходный единичный куб. Дальнейшее развитие принцип равномерности получил в [4], а также в [5], где впервые предложено его строгое доказательство. В [5] также приведен анализ чувствительности принципа к нарушению исходных предположений распределении неопределенных параметров системы и о геометрии целевого множества.

При анализе функционирования систем в условиях неопределенности часто известно, что неопределенные параметры имеют стохастическую природу, однако их распределения почти неизвестны. Но некоторая априорная информация о них все-таки имеется. Например, инженеры часто уверены, что разные неопределенные параметры независимы, они изменяются в известных допустимых диапазонах, их малые отклонения от среднего значения более вероятны, чем большие, и, кроме того, распределения этих параметров симметричны. Возникает вопрос, как выбрать в такой ситуации критерий качества системы, чтобы наиболее адекватно учесть весь объем априорной информации такого рода. Эта проблема не тривиальна, поскольку упомянутая выше априорная информация является непараметрической. По этой причине инженеры зачастую игнорируют априорную информацию и определяют только наихудшее значение функции потерь, принимая во внимание только диапазоны изменения неопределенных параметров. В дальнейшем это значение будет называться *максимум потерь*. Этот максимум достигается на некоторой наихудшей совокупности значений неопределенных параметров и является, как правило, единственным. Если число неопределенных параметров велико, то реализация такой наихудшей совокупности на практике представляется маловероятной, что порождает определенный пессимизм максимума потерь как оценки качества системы в условиях неопределенности. Использование вероятностных критериев качества может в рассматриваемой ситуации дать эффект, так как эти критерии игнорируют некоторые пессимистические маловероятные комбинации. Исследование преимущества квантильного подхода перед гарантирующим в условиях статистической неопределенности описано в статье [6]. Однако в [6] все оценки эффективностей справедливы для линейной функции потерь. В более менее реалистичных системах функция потерь может быть существенно нелинейной. В данной статье предпринимается попытка ухода от линейности функции потерь.

Квантильный критерий относится к семейству вероятностных критериев. Он представляет собой некоторое гарантирующее значение исследуемой величины на заданном уровне доверительной вероятности. Таким образом, при анализе систем по квантильному критерию, в наше рассмотрение не попадают некоторые маловероятные сочетания реализаций неопределенных параметров, оставаясь за пределами доверительного диапазона значений.

В данной работе предлагается сравнение показателей качества квантильного и гарантирующего подходов к анализу систем. Оцениваются абсолютная и относительная характеристики эффективности. Выясняется, что в условиях стохастической неопределенности при использовании квантильных оценок качества система является в среднем на 39% более оптимистичной, чем при использовании гарантирующего критерия. Оценивание эффективностей проводится явно в рамках первого приближения (линейная функция потерь).

Постановка задачи

Перед тем, как перейти к постановке задачи введем основные обозначения и дадим несколько определений, которые будут использоваться в дальнейшем.

Пусть ξ - n-мерный случайный вектор со значениями в пространстве R^n, $\mu > 0$ - малый скалярный параметр, присутствующий в системе, P - вероятностная мера борелевских подмножеств R^n, определяющая распределение вектора ξ и заданная соотношением

$$\mathrm{P}\left(A\right) = \int\limits_{A} p(x)dx\,, \tag{1}$$

где A - произвольное борелевское множество. Относительно плотности вероятности $p(x)$ известно лишь, что она удовлетворяет следующим условиям ее принадлежности классу Бармиша.

Определение 1. *Класс Бармиша* содержит распределения, плотности вероятности которых удовлетворяют следующим трем условиям:

1) $p(x) = p_1(x_1)...p_n(x_n)$, где $p_i(x_i)$ - частная плотность вероятности i-й компоненты ξ_i вектора ξ, т.е. компоненты $\xi_1,...,\xi_n$ вектора ξ независимы;
2) для любого i $p_i(x_i) = 0$ при $|x_i| > 1/2$;
3) для любого i $p_i(x_i)$ является четной и квазивогнутой по x_i.

Множество вероятностных мер Р вида (1), соответствующих всевозможным плотностям из класса Бармиша, обозначим посредством $\Pi_{\rm B}$. Легко заметить, что при $\mathrm{P} \in \Pi_{\rm B}$ распределение случайного вектора ξ сосредоточено на единичном кубе

$$I_n = \left\{ x \in R^n : |x| \le \frac{1}{2}, \, i = 1, \ldots, n \right\} \qquad (2).$$

Рассматривается дважды непрерывно дифференцируемая функция потерь $f(u, \mu\xi) : U \times R^n \to R$, где U - множество допустимых стратегий. Здесь и далее будем предполагать, что выбрано некоторое управление, которое подвергается анализу. Поэтому будем считать вектор $u \in U$ фиксированным. В связи с этим, из введенной функции $f(u, \mu\xi)$ можно исключить параметр u, так как его наличие на рассуждения принципиально влиять не будет. Таким образом, далее будем рассматривать функцию потерь $f(\mu\xi)$, где подчеркивается зависимость от неопределенного параметра.

Определение 2. *Функцией вероятности* $P_\varphi(u)$ называется вероятность непревышения исходным целевым функционалом $f(u, \xi)$ некоторого заранее заданного уровня φ:

$$P_\varphi(u) = \mathrm{P}\big(f(u, \xi) \le \varphi\big).$$

Эта вероятность зависит в общем случае функционально от стратегии управления, что и подчеркивается зависимостью $P_\varphi(u)$ от u.

Определение 3. *Функцией квантили* $\big(f(u, \xi)\big)_\alpha$ называется минимальное значение уровня φ, при котором функционал вероятности будет не ниже заданного уровня α:

$$\big(f(u, \xi)\big)_\alpha = \min\left\{\varphi : P_\varphi(u, \xi) \ge \alpha\right\}.$$

$\big(f(u, \xi)\big)_\alpha$ - это наилучшая гарантированная по вероятности величина при фиксированном управлении u.

В силу дважды непрерывной дифференцируемости функции $f(\cdot)$ по аргументу можем разложить ее до линейного члена по формуле Тейлора. Получим

$$f(\mu x) = f(0) + \mu \frac{\partial f(x)}{\partial x}\bigg|_{x=0}^{T} x + \frac{\partial^2 f(y)}{\partial x^2}(\mu x)^2,$$

где $y \in Y \subset \prod_{i=1}^{n}(0, x_i)$. Или, с учетом присутствия в системе случайного параметра, можем представить функцию потерь в следующем виде

$$f(\mu\xi) = f(0) + \mu a^T \xi + O(\mu^2), \qquad (3)$$

где $a = \left.\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=0}$.

Задачей данной статьи является сравнение характеристик квантильного и гарантирующего подходов, которые применяются при анализе систем в условиях неопределенности. Такими характеристиками являются соответственно наихудшая квантиль из распределений, принадлежащих Классу Бармиша на единичном кубе I_n, и максимум потерь на том же единичном кубе I_n.

Введем понятие максимума потерь. Максимум потерь – это наибольшие потери на исследуемом множестве возможных реализаций неопределенных параметров. Тогда

$$\max_{x\in I_n} f(\mu\xi) = \max_{x\in I_n}\left(f(0) + \mu a^T x\right) + O(\mu^2) = f(0) + \mu \max_{x\in I_n} a^T x + O(\mu^2). \quad (4)$$

Пусть вектор c, такой что $c_i = \mu \dfrac{a_i}{\|a\|}, i = 1,...,n$, а $a_0 = 2f(0)$, где $a = \left(a_{0,} a_1, ...a_n\right)^T$.

Очевидно, что максимум на кубе I_n достигается в какой-то его вершине. Поэтому с учетом последней замены переменных запишем

$$m(c,\mu) == \frac{1}{2}\left(|a_0| + \mu\sum_{i=1}^{n}|a_i|\right) + O(\mu^2) = \frac{\|a\|}{2}\left(|c_0| + \sum_{i=1}^{n}|c_i(\mu)|\right) + O(\mu^2).$$

Часто на практике эта величина принимается как гарантирующая оценка качества системы, так как истинное распределение вектора ξ неизвестно.

Рассмотрим квантильный подход для анализа систем в условиях статистической неопределенности, описанной классом Π_B. Введем в рассмотрение наихудшую квантиль

$$y_\alpha^*(c,\mu) = \sup_{P\in\Pi_B} \min\left\{y : \mathrm{P}\left(f(\mu\xi) \le y\right) \ge \alpha\right\}, \quad (5)$$

где $\alpha \in (0,1)$ - заданный уровень надежности. Данная величина несет в себе смысл гарантирующих потерь на некотором доверительном уровне α. Эффективность такого подхода по отношению к максимуму потерь в абсолютном смысле равен

$$h_\alpha(c,\mu) = m(c,\mu) - y_\alpha^*(c,\mu). \quad (6)$$

Определение 4. Абсолютным *эффектом* или *оптимизмом* квантильного подхода по отношению к гарантирующему в условиях неопределенности будем назвать величину $h_\alpha(c,\mu)$, заданной формулой (6).

Также рассмотрим величину

$$k_{\alpha}(c,\mu)=\frac{h_{\alpha}(c,\mu)}{m(c,\mu)}, \qquad (7)$$

которая характеризует относительную величину эффективности квантильного подхода по сравнению с гарантирующим. Если эту функцию усреднить по вектору c, т.е. ввести в рассмотрение величину

$$L_{\alpha}(\mu)=\frac{1}{s(B)}\int\limits_{B}k_{\alpha}(c,\mu)dS=\mathrm{M}_{\eta}\left[k_{\alpha}(\eta,\mu)\right], \qquad (8)$$

где предполагается, что $\eta \sim R(B)$, B - единичная сфера, а $s(B)$ - площадь поверхности единичной сферы.

Определение 5. Относительным *эффектом* или *оптимизмом* квантильного подхода по отношению к гарантирующему в условиях неопределенности будем назвать величину $k_{\alpha}(c,\mu)$, заданной формулой (7). Относительным средним *эффектом* или *оптимизмом* квантильного подхода по отношению к гарантирующему назовем величину $L_{\alpha}(\mu)$. Средний эффект задан формулой (8).

Таким образом, можно оценить каков «в среднем» указанный относительный эффект, если рассмотреть все задачи анализа, встречающиеся на практике, каждая из которых характеризуется своим вектором c.

Вспомогательные результаты

Приведем формулировку так называемого принципа равномерности Бармиша-Лагоа. На основе этого принципа были доказаны основные результаты, касающиеся сравнения квантильного и гарантирующего подходов к анализу систем в статье [6].

Теорема 1 (принцип равномерности Бармиша-Лагоа) [3]. *Если E - выпуклое множество, и $E=-E$, то*

$$\min_{p_1(\cdot),\dots,p_n(\cdot)\in\Pi_B} P\left(p_1(\cdot),\dots,p_n(\cdot)\right)=P\left(r(\cdot),\dots,r(\cdot)\right), \tag{9}$$

где плотность $r(\cdot)$ *соответствует равномерному распределению на множестве* I .

В условиях статистической неопределенности, заданной классом Бармиша, данный принцип позволяет выбрать наихудшее распределение. Тем самым, лицо принимающее решение перестраховывается от наихудшего варианта развития событий в процессе функционирования системы.

Ранее был получен и доказан следующий результат.

Лемма 1 [6]. *Пусть функция потерь имеет линейную структуру*

$$\tilde{f}(c_0,c,\xi)=\frac{c_0}{2}+c^{\mathrm{T}}\xi ,$$

где $c_0{}^2+\|c\|^2=1$. *Кроме того, пусть случайный вектор* ξ *имеет распределение из класса Бармиша, заданного на единичном кубе с центром в начале координат,* $\alpha\in(0,1)$ *- доверительная вероятность. Тогда характеристика* $h_\alpha(c)$ *абсолютного эффекта квантильного подхода к анализу систем по отношению к гарантирующему может быть оценена снизу следующим образом:*

$$h_\alpha(c)\geq\hat{h}_\alpha(c)=\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n}c_j\right)^{1/n}.$$

Замечание 1. Нижняя оценка для абсолютного преимущества квантильного подхода по отношению к гарантирующему, полученная в [6], есть ни что иное, как оценка снизу расстояния от наихудших значений квантильного и гарантирующего критериев. Данная оценка была получена с помощью геометрических соображений в n-мерном пространстве и являлась по сути высотой n-мерной пирамиды, образованной ребрами единичного куба I_n.

Теорема 2 [6]. *Пусть функция потерь имеет линейную структуру*

$$f(c,\xi)=c^{\mathrm{T}}\xi ,$$

где $\|c\|^2=1$. *Кроме того, пусть случайный вектор* ξ *имеет распределение из класса Бармиша, заданного на единичном кубе с центром в начале координат,* $\alpha\in(0,1)$ *- доверительная вероятность. Тогда характеристика* L_α *среднего относительного эффекта* *квантильного подхода к анализу систем по отношению к гарантирующему может быть оценена снизу следующим образом:*

$$L_\alpha \geq \text{€}_\alpha,$$

где $$\text{€}_\alpha = \frac{2\sqrt[n]{n!(1-\alpha)}}{\pi^{\frac{n}{2}}\sqrt{n}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\prod_{j=1}^{n-1}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2n},\frac{(n-j)(n+1)}{2n}\right), \qquad (10)$$

а Γ *и* B *- гамма- и бета-функции соответственно* [7].

Теорема 3 [6]. *Пусть функция потерь имеет линейную структуру*

$$\tilde{f}(c_0, c, \xi) = \frac{c_0}{2} + c^{\mathrm{T}}\xi,$$

где $c_0^{\;2} + \|c\|^2 = 1$. *Кроме того, пусть случайный вектор* ξ *имеет распределение из класса Бармиша, заданного на единичном кубе с центром в начале координат,* $\alpha \in (0,1)$ *- доверительная вероятность. Тогда характеристика* $\tilde{L}_\alpha$ *среднего относительного эффекта квантильного подхода к анализу систем по отношению к гарантирующему может быть оценена снизу следующим образом:*

$$\tilde{L}_\alpha \geq L_\alpha^{\;*},$$

где $$L_\alpha^{\;*} = \frac{2\sqrt[n]{n!(1-\alpha)}}{\pi^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n+1}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)\prod_{j=1}^{n-1}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2n},\frac{(n-j)(n+1)}{2n}\right).$$

Замечание 2. Исследование сходимости оценок $\tilde{L}_\alpha$ и L^*_α не представляется возможным, так как эти оценки имеют сложный и неявный вид и зависят от функций, представимых только в интегральной форме - Γ *и* B - гамма- и бета-функции. Однако при численном вычислении этих оценок оказалось, что при бесконечном увеличении размерности пространства n оценка $\tilde{L}_\alpha$ стремиться к значению 40%, а L^*_α к 39%. Таким образом, в случае, если число неопределенных параметров в системе велико, квантильный критерий является не менее чем на 40% (39%) эффективнее гарантирующего. Кроме того, при больших n данные оценки практически не зависят от доверительной вероятности α. Результаты численных расчетов вышеуказанных оценок приведены в табл. 1 и 2 в Приложении.

Замечание 3. Величину относительного эффекта $k_\alpha(c)$ можно оценить снизу [6]:

$$k_\alpha(c) \ge \hat{k}_\alpha(c) = \frac{2\hat{h}_\alpha}{\sum\limits_{i=1}^{n} c_i}. \qquad (11)$$

Обратим внимание, что с учетом известного неравенства

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} c_i \ge \left(\prod_{i=1}^{n} c_i\right)^{1/n}$$

из (19) следует

$$\hat{k}_\alpha(c) \le \frac{2\left(n!(1-\alpha)\right)^{1/n}}{n} \to \frac{2}{e} \approx 0{,}7358 \qquad (12)$$

при $n \to \infty$. Из последней оценки видно, что верхняя граница относительной эффективности при больших n не зависит от вектора c. Кроме того, при неограниченном увеличении размерности пространства R^n, верхняя оценка эффекта квантильного подхода по отношению к гарантирующему сходится к детерминированной константе, приблизительно равной 73,5 %.

Нижние границы для характеристик эффекта в системах с малым параметром

На основе леммы 1 был получен следующий результат.

Теорема 4. *Пусть функция потерь* $f(\mu\xi)$*, описывающая систему, является дважды непрерывно дифференцируемой в пространстве* R^n*. Тогда нижняя оценка абсолютной эффективности квантильного подхода по отношению к гарантирующему в условиях неопределенности, которая задана классом распределений Бармиша, есть величина*

$$h_\alpha(a,\mu) \ge \mu\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{1/n} + O(\mu^2), \qquad (13)$$

$$h_\alpha(c,\mu) \ge \|a\|\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} c_j(\mu)\right)^{1/n} + O(\mu^2), \qquad (14)$$

где $a = \left.\dfrac{\partial f(x)}{\partial x}\right|_{x=0}$.

Доказательство дано в Приложении.

Замечание 4. Видно, что оценка (13) является явно зависящей от малого параметра μ. На первый взгляд может сложиться впечатление, что при достаточной малости μ данная оценка будет показывать то, что квантильный критерий в данном случае является не существенно лучше, чем гарантирующий. Однако, исходя из нормировки $c_0{}^2 + \sum_{i=1}^{n} c_i{}^2(\mu) = 1$, можем записать следующее

$$h_\alpha(c,\mu) \geq \|a\| \left(n!(1-\alpha)\sqrt{1 - c_0{}^2 - \sum_{i=2}^{n} c_i{}^2(\mu)} \prod_{j=2}^{n} c_j(\mu) \right)^{1/n} + O\left(\mu^2\right). \tag{15}$$

Отсюда видно, что не все элементы произведения представимы зависимостью от малого параметра. Поэтому полученная оценка имеет больший порядок малости, чем μ. Таким образом, использование квантильного критерия дает более оптимистичные значения нежели минимаксный критерий.

Теорема 5. *Пусть функция потерь $f(\mu\xi)$, описывающая систему, является дважды непрерывно дифференцируемой в пространстве R^n. Тогда относительная эффективность квантильного подхода по отношению к гарантирующему в условиях неопределенности, которая задана классом распределений Бармиша, может быть оценена снизу*

$$k_\alpha(c,\mu) \geq \tilde{k}_\alpha(c,\mu) = \frac{\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} c_j(\mu) \right)^{1/n} + O\left(\mu^2\right)}{\left(\frac{c_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i(\mu) \right) + O\left(\mu^2\right)}, \tag{16}$$

а средняя относительная эффективность, при достаточной малости μ, оценивается приблизительно как

$$L_\alpha \geq L^*_\alpha,$$

где $L_\alpha{}^* = \dfrac{2\sqrt[n]{n!(1-\alpha)}}{\pi^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n+1}} \Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right) \cdot \mathrm{B}\left(\dfrac{n+1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) \prod_{j=1}^{n-1} \mathrm{B}\left(\dfrac{n+1}{2n}, \dfrac{(n-j)(n+1)}{2n}\right).$

Замечание 5. Отметим, что нижняя грань средней относительной эффективности в точности совпадает с нижней гранью из теоремы 3. Ее численные значения приведены в табл. 2 Приложения. Из таблицы видно, что при больших n значение L^*_α практически не зависит от доверительной вероятности α и близко к 39%.

Заключение

Таким образом, в данной работе сформулированы и доказаны утверждения, касающиеся сравнения квантильного и гарантирующего подходов к анализу систем, в которых присутствует малый параметр. С помощью этих результатов можно сделать выводы о том, что если система находится условиях статистической неопределенности, заданной классом Бармиша, то целесообразно в таком случае выбирать за критерий оценки качества квантильный. Получены конструктивные аналитические выражения для нижних границ абсолютной и относительной эффективностей квантильного подхода по отношению к гарантирующему.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что наихудшая квантиль, характеризующая качество исследуемой системы «в среднем» намного оптимистичней гарантирующей оценки в виде максимума функции потерь. При этом указанный оптимизм оказывается не менее 39%, и для больших n практически не зависит от уровня надежности α.

Проведенные исследования в [3] показывают, что инженеры, основываясь на убеждении, что природа не играет злонамеренно, были недалеки от истины, полагая, что наихудшим для них распределением является равномерное.

Полученные выше оценки эффективностей, а также их численные значения для различных значений параметров, помогают сделать вывод о том, что вероятностный подход является более эффективным при анализе систем, чем гарантирующий.

Приложение

Доказательство теоремы 4. Рассмотрим последовательно каждую из характеристик подходов.

Распишем максимальные потери с учетом представления функции потерь (3). Получим

$$m(a,\mu)=\max_{x\in I_n} f(\mu\xi)=\max_{x\in I_n}\left(f\left(0\right)+\mu a^T x\right)+O(\mu^2)=f\left(0\right)+\mu\max_{x\in I_n} a^T x+O(\mu^2)\,. \quad (\text{П.1})$$

Рассмотрим расширенный вектор $\tilde{a}=\left(a_{0,}\mu a_1,...\mu a_n\right)^T$, где $a_0=2f\left(0\right)$. Пусть вектор $c=\left(c_0,c_1,...,c_n\right)^T$, такой что $c_i=\mu\dfrac{a_i}{\|\tilde{a}\|}, i=1,...,n$, Очевидно, что максимум на кубе I_n достигается в какой-то его вершине. Поэтому с учетом последней замены переменных запишем

$$m(c,\mu)=\frac{1}{2}\left(\left|a_0\right|+\mu\sum_{i=1}^{n}\left|a_i\right|\right)+O(\mu^2)=\frac{\|\tilde{a}\|}{2}\left(\left|c_0\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|c_i(\mu)\right|\right)+O(\mu^2)\,. \quad (\text{П.2})$$

Предположим, без ограничения общности, что $c_0\ge 0, c_i(\mu)\ge 0, i=1,...,n$. Тогда

$$m(c,\mu)=\|\tilde{a}\|\left(\frac{c_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}c_i(\mu)\right)+O(\mu^2)\,. \quad (\text{П.3})$$

Наихудшая квантиль по всем распределениям из класса Бармиша представима в виде

$$y_\alpha^*(c,\mu)=\sup_{P\in\Pi_{\text{B}}}\min\left\{y:\text{P}\left(f\left(\mu\xi\right)\le y\right)\ge\alpha\right\}=\sup_{P\in\Pi_{\text{B}}}\left(f\left(\mu\xi\right)\right)_\alpha\,.$$

Подставим в последнее выражение представление функции потерь (3). Тогда получим

$$\begin{aligned}y_\alpha^*(c,\mu)&=\sup_{P\in\Pi_{\text{B}}}\left(f\left(\mu\xi\right)\right)_\alpha=f\left(0\right)+\mu\sup_{P\in\Pi_{\text{B}}}\left(a^T\xi\right)_\alpha+O\left(\mu^2\right)=\\&=\frac{a_0}{2}+\sup_{P\in\Pi_{\text{B}}}\left(\mu a^T\xi\right)_\alpha+O\left(\mu^2\right)=\|\tilde{a}\|\left(\frac{c_0}{2}+\sup_{P\in\Pi_{\text{B}}}\left(c^T(\mu)\xi\right)_\alpha\right)+O\left(\mu^2\right).\end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Теперь воспользуемся принципом равномерности Бармиша-Лагоа. Согласно этому принципу наихудшее распределение из всех на классе Бармиша является равномерное. Тогда характеристика квантильного подхода примет вид

$$y_\alpha^*(c,\mu)=\|\tilde{a}\|\left(\frac{c_0}{2}+\left(c^T(\mu)\tilde{\xi}\right)_\alpha\right)+O\left(\mu^2\right), \quad (\text{П.5})$$

где $\tilde{\xi}$ - случайный вектор с независимыми компонентами, имеющий равномерное распределение на кубе I_n.

Оценим величину абсолютного оптимизма квантильного подхода по отношению к гарантирующему. По определению эффекта

$$h_\alpha(c,\mu)=m(c,\mu)-y_\alpha^*(c,\mu)\,.$$

С учетом вышеприведенных рассуждений, можем записать

$$h_\alpha(c,\mu) = \|\tilde a\|\left(\frac{c_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i(\mu)\right) - \|\tilde a\|\left(\frac{c_0}{2} + \left(c^T(\mu)\tilde\xi\right)_\alpha\right) + O\left(\mu^2\right) =$$
$$= \|\tilde a\|\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i(\mu) - \left(c^T(\mu)\tilde\xi\right)_\alpha\right) + O\left(\mu^2\right).$$

Разность $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i(\mu) - \left(c^T(\mu)\tilde\xi\right)_\alpha$, согласно лемме 1, может быть оценена снизу величиной $\hat h_\alpha(c) = \left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} c_j(\mu)\right)^{1/n}$. Таким образом, абсолютный эффект $h_\alpha(c,\mu)$ можно также оценить снизу:

$$h_\alpha(c,\mu) \ge \|\tilde a\|\left(\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} c_j(\mu)\right)^{1/n}\right) + O\left(\mu^2\right). \qquad (\text{П.6})$$

Сделаем теперь обратную замену переменных: вектор c заменим на $\tilde a$. Получим

$$h_\alpha(c,\mu) \ge \|\tilde a\|\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} \mu\frac{a_j}{\|\tilde a\|}\right)^{1/n} + O\left(\mu^2\right) = \mu\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{1/n} + O\left(\mu^2\right). \quad (\text{П.7})$$

Таким образом, получили нижнюю аналитическую оценку для преимущества квантильного подхода по отношению к гарантирующему.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы 5. Оценим величину относительного эффекта $k_\alpha(c,\mu)$ квантильного подхода по отношению к гарантирующему. Таким образом, требуется оценить величину

$$k_\alpha(c,\mu) = \frac{h_\alpha(c,\mu)}{m(c,\mu)}.$$

Руководствуясь теоремой 4, запишем соотношения

$$m(c,\mu) = \|\tilde a\|\left(\frac{c_0}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i(\mu)\right) + O\left(\mu^2\right), \qquad (\text{П.8})$$

$$h_\alpha(c,\mu) \ge \mu\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{1/n} + O\left(\mu^2\right). \qquad (\text{П.9})$$

Тогда

$$k_\alpha(c,\mu) \le \frac{\mu\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} a_j\right)^{1/n} + O\left(\mu^2\right)}{\|\tilde{a}\|\left(\frac{c_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i(\mu)\right)+O(\mu^2)} = \frac{\|\tilde{a}\|\left(\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} c_j(\mu)\right)^{1/n}\right) + O\left(\mu^2\right)}{\|\tilde{a}\|\left(\frac{c_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i(\mu)\right)+O(\mu^2)} =$$

$$= \frac{\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} c_j(\mu)\right)^{1/n} + O\left(\mu^2\right)}{\left(\frac{c_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i(\mu)\right)+O\left(\mu^2\right)}.$$

Далее, предположим, что параметр μ достаточно мал. Тогда можем пренебречь малыми добавками в числителе и знаменателе в последнем равенстве. Отсюда

$$k_\alpha(c,\mu) \ge \frac{\left(\left(n!(1-\alpha)\prod_{j=1}^{n} c_j(\mu)\right)^{1/n}\right)}{\left(\frac{c_0}{2}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} c_i(\mu)\right)}. \qquad (\text{П}.10)$$

Теперь воспользуемся теоремой 3. Очевидно, что $\|c\| = 1$. Тогда средний относительный эффект может быть оценен снизу следующим образом

$$L_\alpha = \mathrm{M}_\eta\left[k_\alpha(\eta,\mu)\right] \ge L^*_{\ \alpha}, \qquad (\text{П}.11)$$

где $L_\alpha^{\ *} = \frac{2\sqrt[n]{n!(1-\alpha)}}{\pi^{\frac{n+1}{2}}\sqrt{n+1}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\cdot \mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2},\frac{1}{2}\right)\prod_{j=1}^{n-1}\mathrm{B}\left(\frac{n+1}{2n},\frac{(n-j)(n+1)}{2n}\right).$

Теорема доказана.

Таблица 1. Численные значения нижней границы эффективности квантильного подхода по отношению к гарантирующему

α\n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0,6	0,48	0,44	0,42	0,42	0,41	0,41	0,41	0,41	0,40	0,40
0,7	0,46	0,43	0,42	0,41	0,41	0,41	0,41	0,40	0,40	0,40
0,8	0,44	0,42	0,41	0,41	0,41	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40
0,9	0,41	0,41	0,41	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40

Таблица 2. Численные значения нижней границы эффективности квантильного подхода по отношению к гарантирующему в случае функции потерь с детерминированной составляющей

α\n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
0,6	0,43	0,42	0,41	0,41	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40
0,7	0,42	0,41	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40
0,8	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40	0,40
0,9	0,38	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39	0,39

Библиографический список

[1] Малышев В.В., Кибзун А.И. Анализ и синтез высокоточного управления летательными аппаратами. М.: Машиностроение, 1987.

[2] Боровков А.А. Математическая статистика. (Дополнительные главы). М.: Наука, 1984.

[3] Barmish B.R., Lagoa C.M. The uniform distribution: a rigorous justification for its use in robustness analysis. //Math. Control, Signals, Systems. 1997.

[4] Кибзун А.И. О наихудшем распределении в задачах стохастической оптимизации с функцией вероятности. Автоматика и телемеханика, №11, 1998, С. 104-116.

[5] Кан Ю.С. Об обосновании принципа равномерности в задаче оптимизации вероятностного показателя качества. Автоматика и телемеханика, № 1, 2000, С. 54-70.

[6] Кан Ю.С., Сысуев А.В. Сравнение квантильного и гарантирующего подходов при анализе систем. //Автоматика и телемеханика. Принято к публикации в 2007 г.

[7] Зорич В.А. Математический анализ. Часть II. М.: Наука, 1984.

Сведения об авторах

Сысуев Александр Владимирович, младший научный сотрудник Московского авиационного института (государственного технического университета)

г. Москва, ул. Тухачевского, д. 41, корп. 1, кв. 176.

тел. (903)555-60-90

savostyan@yandex.ru