

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

На правах рукописи



НГУЕН ЛЕ ХУНГ

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ
ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ
ТЕОРИИ**

Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин, приборов и аппаратуры

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
заслуженный работник высшей школы РФ
д.т.н., профессор
Фирсанов Валерий Васильевич

Москва – 2022

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ.....	14
1.1. Обзор литературы	14
1.2. Постановка задачи расчета электромеханического состояния произвольных оболочек по уточненной теории.....	24
1.3. Основные уравнения и граничные условия теории оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта.....	29
1.4. Выводы к первой главе.....	41
ГЛАВА II. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПЬЕЗОЭФФЕКТА	42
2.1. Электроупругое состояние цилиндрических оболочек из пьезоматериалов.....	42
2.2. Решение сформулированной краевой задачи электроупругости цилиндрических оболочек.....	51
2.2.1. Приведение краевой задачи электроупругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений	51
2.2.2. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений уточненной теории электроупругости операционным методом.....	53
2.3. Электромеханическое состояние цилиндрических оболочек под действием осесимметричных нагрузок.....	61
2.4. НДС цилиндрических оболочек под действием электрических и механических нагрузок.....	64
2.5. Выводы ко второй главе	69
ГЛАВА III. ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПЬЕЗОЭФФЕКТА.....	70

3.1. Основные уравнения теории композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта.....	70
3.1.1. Пьезоэлектрические слои	73
3.1.2. Композиционные слои.....	73
3.1.3. Основные уравнения теории композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта	75
3.2. Решение сформулированной краевой задачи.....	87
3.3. Анализ результатов параметрических исследований.....	91
3.3.1. НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек без учета пьезоэлектрического эффекта.....	91
3.3.2. НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта.....	94
3.3.3. НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек с пьезоэлектрическими слоями.....	99
3.4. Выводы к третьей главе.....	105
ГЛАВА IV. НДС МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ.....	107
4.1. Уточненная математическая модель теории композитных цилиндрических оболочек с учетом термоэлектрического воздействия.....	107
4.2. Решение краевой термоэлектромеханической задачи.....	116
4.3. Параметрические исследования НДС цилиндрической оболочки с учетом термоэлектрического воздействия	119
4.3.1. НДС цилиндрической композиционной оболочки при термоэлектрическом воздействии	119
4.3.2. НДС композиционной цилиндрической оболочки при термомеханическом	

нагрузении	121
4.4. Выводы к четвертой главе.....	125
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	127
СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	129
СПИСОК ТАБЛИЦ.....	130
СПИСОК РИСУНКОВ.....	131
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	134

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы значительное внимание в механике сплошной среды уделяется исследованиям связи между напряженно-деформированным состоянием (НДС) при действии механических нагрузок с физическими полями другой среды - электромагнетическими, тепловыми. Одно из направлений, называемое электроупругостью, базируется на явлении пьезоэлектрического эффекта. Сущность пьезоэффекта заключается в том, что на телах, обладающих свойством поляризации под действием приложенных внешних сил возникают электрические заряды на их поверхностях, и наоборот, наличие деформаций при нахождении этих тел в электрическом поле.

В настоящее время пьезоматериалы активно применяются в различных областях техники и технологии. В авиационной и космической отрасли пьезоматериалы используются в качестве сенсоров и актюаторов в виде корпусных элементов конструкций на адаптивных системах летательных аппаратов (ЛА) с целью повышения качества аэродинамики и эффективного управления их деформациями. Кроме того, для снижения массы и повышения прочности ЛА широко используются композиционные материалы. Сочетание пьезоэлектрических и композиционных материалов позволяет улучшить свойства современных ЛА как управляемых систем. Поэтому исследование и расчёт электроупругостного состояния композиционных элементов конструкций с пьезоэлектрическими слоями является актуальной проблемой.

Основными расчетными схемами элементов конструкций ЛА являются тонкие пластинки и оболочки. Расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) корпусных элементов ЛА базируются на результатах классической теории Кирхгофа-Лява, Тимошенко-Рейсснера, в основу которой была положена гипотеза о сохранении нормального к срединной поверхности элемента, позволившая привести трехмерную проблему теории упругости к двумерной. Практика и опыт эксплуатации ЛА показывают, что в зонах скачкообразного изменения

жесткостных характеристик, т.е. вблизи соединений, стыков конструкций из пьезоэлектрических и обычных материалов, а также при действии локальных и быстро изменяющихся нагрузок, наиболее часто происходят разрушения из-за наличия дополнительных напряжений типа “погранслои”. Расчёты НДС в этих зонах его искажения по классической теории оболочек не дают удовлетворительного соответствия с практикой.

Здесь возникают также важная задача исследования НДС композиционных цилиндрических оболочек при совместном действии термомеханических нагрузок, так как при нагреве возникают дополнительные деформации, обусловленные всесторонним тепловым расширением.

Следствием нагрева и всестороннего теплового расширения в упругих телах существует дополнительные деформации. Поэтому также возникает задача исследования влияния термомеханических и термоэлектрических нагрузок на НДС композиционных цилиндрических оболочек. Данные совместные проблемы термоэлектростатости учитываются при формулировке задач диссертации.

Следовательно, для описания объемного НДС композиционных цилиндрических оболочек в совместных задачах термоэлектростатости необходимо построить уточненную математическую модель, базирующуюся на законе электростатики Максвелла и уравнениях трехмерной теории упругости, а так же позволяющую повысить достоверность результатов расчета НДС тонкостенных конструкций в зонах его искажения, т.е. определить НДС типа “погранслои”.

Поэтому разработка уточненной математической модели, алгоритмов расчетов и прогнозирования НДС композиционных цилиндрических оболочек с учетом электротермомеханических нагрузок, уточняющих результаты классической теории и применяемых на этапах проектирования перспективной техники, представляет собой **актуальную проблему**.

Объект диссертационного исследования – цилиндрические оболочки из изотропных и многослойных композиционных материалов с учетом

пьезоэлектрического эффекта.

Предмет исследования - уточненная математическая модель и алгоритм расчета НДС цилиндрических оболочек при совместном действии термомеханических нагрузок, позволяющие уточнить результаты классической теории.

Целью диссертации является построение уточненной математической модели определения электромеханического состояния (ЭМС) анизотропных и многослойных композиционных цилиндрических оболочек с различными краевыми условиями, находящихся в электрическом поле при действии механических и электрических нагрузок, с учетом влияния температурного воздействия на их НДС.

Задачи работы, решаемые для достижения поставленной цели:

1. Построение системы дифференциальных уравнений равновесия произвольных оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта на основе трехмерных уравнений теории упругости, закона электростатики Максвелла и применение вариационного принципа Лагранжа.

2. Проведение параметрических исследований и сравнение результатов расчета напряженного состояния с учетом пьезоэффекта, в том числе поперечных напряжений, полученных в диссертационной работе с данными классической теории типа Кирхгофа-Лява. Исследование влияния типа электромеханического нагружения, условий закрепления и изменения геометрических параметров цилиндрической оболочки с учетом пьезоэлектрического эффекта на ее НДС.

3. Построение уточненной математической модели с соответствующими граничными условиями и алгоритма для определения ЭМС многослойных композиционных цилиндрических оболочек при действии электрических потенциалов и механических сил.

4. Разработка метода расчета ЭМС многослойной композиционной цилиндрической оболочки, находящейся под действием электрических и механических нагрузок, при различных краевых условиях с помощью

тригонометрических рядов Фурье и преобразования Лапласа.

5. На основе разработанной уточненной модели электроупругости оболочек проведение исследований и расчетов НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэффекта. Сравнение результатов расчета НДС, полученных в диссертационной работе, с данными классической теории оболочек, а также другими вариантами уточненной теории, опубликованными в журналах, цитируемых международными базами Web of Science и SCOPUS.

6. Построение системы уравнений равновесия и разработка метода для определения влияния термомеханического нагружения на НДС композиционных цилиндрических оболочек.

Методы исследования:

Вариационный принцип Лагранжа для полной электромеханической энергии с учетом пьезоэффекта. Компоненты механических перемещений и электрических потенциалов представляются полиномами по нормальной к срединной поверхности оболочки координате на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява.

Приведение системы трехмерных уравнений электроупругости оболочек в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью тригонометрических рядов.

Решение сформулированной краевой задачи уточненной модели электроупругости оболочек основано на преобразования Лапласа.

Достоверность и обоснованность научных положений и результатов обеспечивается корректным использованием законов и уравнений механики деформируемого твердого тела в совместных задачах электроупругости, применением для решения краевых задач строгих математических методов, а также сравнением результатов расчета с данными классической теории и другими вариантами уточненной теории, опубликованными в журналах, цитируемых международными базами Web of Science и Scopus.

Научная новизна диссертационной работы заключается в следующем:

1. Впервые построена уточненная математическая модель для расчета НДС произвольных оболочек из пьезоматериалов, находящихся в электрическом поле при механическом нагружении на основе применения вариационного принципа Лагранжа с помощью представления электрических потенциалов и перемещений полиномами по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява.

2. Впервые построена система дифференциальных уравнений равновесия в электрических потенциалах и механических перемещениях, а также сформулированы граничные условия для всех случаев закрепления для определения электромеханического состояния композиционных цилиндрических оболочек, основанные на трехмерных уравнениях теории упругости и законе электростатики Максвелла.

3. Разработана методика определения электромеханического состояния многослойных композиционных цилиндрических оболочек и с учетом пьезоэффекта, находящихся под действием различных видов электрических воздействий и механических нагрузок на внешней и внутренней поверхностях оболочки, что позволило существенно уточнить НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек и доказать наличие дополнительных напряжений типа “погранслои”.

4. Представлена уточненная математическая модель для исследования НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек при действии термоэлектромеханического нагружения, дан анализ НДС композиционной цилиндрической оболочки для нескольких вариантов действия электрического поля и температурного нагрева.

Практическая значимость диссертационной работы составляют:

1. Предлагаемые математические модели уточненной теории, алгоритм решения краевой задачи электроупругости для определения НДС оболочек из изотропных и многослойных композиционных материалов с учетом

пьезоэффекта, позволяющие существенно уточнить результаты расчетов электромеханического состояния оболочек в зонах искажения НДС.

2. Разработанные математические модели, методы и алгоритмы расчета, позволяющие существенно уточнить НДС многослойных цилиндрических оболочек в зонах «погранслоя» при совместном действии термоэлектромеханических нагрузок.

3. В проведении качественного и количественного анализа влияния вида нагружения, условий закрепления, геометрических параметров композиционных цилиндрических оболочек, пьезоэлектрических, диэлектрических и упругих свойств материала на их НДС.

4. В доказательстве наличия НДС типа «погранслоя» вблизи жестко заземленных краев, величины которых значительно отличаются от аналогов, соответствующих классической теории, особенно в части поперечных нормальных и касательных напряжений.

5. Результаты, полученные на основе теоретических и численных исследований, могут быть использованы на этапе проектирования при оценке прочности и долговечности конструкций расчетными и экспериментальными методами.

Основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту

1. Уточненные математические модели НДС произвольных оболочек из пьезоматериалов, находящихся в электрическом поле под действием механических нагрузок, в том числе цилиндрических оболочек, позволяющие существенно уточнить НДС, особенно в зонах искажения напряженного состояния.

2. Уточненная теория и алгоритм решения задачи определения ЭМС цилиндрических оболочек, изготовленных из однослойных и многослойных композиционных материалов с учетом пьезоэлектрического эффекта.

3. Методика расчета электромеханического состояния цилиндрической оболочки под действием различных механических и электрических нагрузок,

основанная на аппарате операционного исчисления, упрощающая решение соответствующих краевых задач.

4. Методика определения НДС и параметрические исследования многослойных цилиндрических оболочек при совместном действии термоэлектромеханических нагрузок.

5. Доказательство существования дополнительного быстро затухающего при удалении от жестко заземленного края композиционных цилиндрических оболочек напряженного состояния типа “погранслоя”, компоненты которого по величине одного порядка с величинами основного (внутреннего) напряженного состояния, определяемого по классической теории, при совместном действии термоэлектромеханических нагрузок.

Апробация основных результатов работы. Основные положения и результаты работы докладывались и обсуждались на следующих конференциях и семинарах:

- XXVI-й, XXVII-й международные симпозиумы “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” им. А.Г. Горшкова. Московская обл., 2020, 2021 г.г.

- 18-я, 19-я международная конференция “Авиация и космонавтика”, МАИ. Москва, 2019, 2020 г.г.

- XLVI-я, XLVII-я международная молодежная научная конференция “Гагаринские чтения”, МАИ. Москва, 2020, 2021 г.г.

- Первая международная конференция “Композитные материалы и конструкции” КМК, МАИ. Москва, 2020 г.

- XXII Международная конференция по “Вычислительной механике и современным прикладным программным системам” (ВМСППС'2021), Алушта, Крым, 2021 г.

- Научный семинар института № 9 “Общеинженерной подготовки”, Московского авиационного института, 2022 г.

Работа в целом обсуждалась на заседании кафедры № 914, научном

семинаре института № 9 «Общеинженерной подготовки» Московского авиационного института (национального исследовательского университета).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 статьях [85-88, 115-116], в том числе 3 статьях из Перечня ВАК РФ и 3 статьях в международных базах данных SCOPUS.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений, списка таблиц, списка рисунков и списка литературы. Работа содержит 148 страниц, 44 рисунка, 12 таблиц. Список литературы содержит 142 наименования.

Во введении обоснована актуальность темы диссертации, представлены объект и предмет научных исследований, сформулированы цель и задачи исследования, определена научная новизна и практическая ценность полученных автором результатов, приведены основные положения, выносимые на защиту, дано краткое содержание работы по главам.

В первой главе приведены обзор литературы и общие положения по тематике диссертации; дана постановка задачи исследования; построены математические модели по определению уточненного НДС произвольных оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта.

Во второй главе на основе полученных в первой главе математических моделей построены уравнения равновесия и граничные условия для круговой цилиндрической оболочки с учетом пьезоэлектрического эффекта. С помощью тригонометрических рядов по окружной координате уравнения в частных производных приведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены аналитические решения сформулированной краевой задачи.

Приведены результаты параметрических расчетов НДС по уточненной математической модели и дано сравнение полученных в диссертации результатов с данными классической теории.

В третьей главе на основе вариационного принципа Лагранжа построены математические модели по определению уточненного НДС многослойных

цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта, а также композиционных цилиндрических оболочек со встроенными пьезоэлектрическими накладками на верхних и нижних поверхностях оболочки. С помощью тригонометрических рядов по окружной координате уравнения в частных производных приведены к системам обыкновенных дифференциальных уравнений. Получены аналитические решения сформулированной краевой задачи.

Представлены результаты параметрических расчетов НДС по уточненной математической модели и дано сравнение полученных в диссертации результатов с данными классической теории и других уточненных теорий, опубликованными в журналах, цитируемых международными базами Web of Science и Scopus.

В четвертой главе построены математические модели по определению уточненного НДС многослойных цилиндрических оболочек при воздействии различных механико-термо-электрических нагрузок. Получены аналитические решения сформулированных краевых задач. Приведены результаты параметрических расчетов НДС по уточненной теории и дано сравнение полученных в диссертации результатов с данными классической теории.

ГЛАВА I. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ НА ОСНОВЕ УТОЧНЕННОЙ ТЕОРИИ

В настоящее время направлению электроупругости уделяется значительное внимание в механике твердого деформируемого тела. Задачи определения электромеханического состояния построены на основании уравнений теории упругости, электростатики и электродинамики, кристаллографии и кристаллофизики. Одно из направлений электроупругости состоит в исследовании НДС в изотропных пьезоэлектрических средах.

В данной главе рассматривается обзор литературы, общие положения по тематике диссертации на современном этапе, дано построение новой, по отношению к классической теории типа Кирхгофа-Лява, математической модели электроупругости произвольных оболочек, позволяющей существенно уточнить результаты расчета их НДС.

1.1. Обзор литературы

Впервые пьезоэлектрический эффект был открыт братьями Пьером и Жаком Кюри в 1880 году. Они обнаружили, что при действии механических нагрузок на поверхности кристалла в последнем появлялись свободные электрические заряды противоположных знаков. Это явление называется прямым пьезоэлектрическим эффектом. Подтверждено существование обратного пьезоэлектрического эффекта, состоящего в том, что если к таким кристаллам приложить электрическое поле, то они деформируются. Сущность этого явления наблюдается только на кристаллах диэлектриков, обладающих свойствами поляризации.

В первых работах по пьезоэлектрическому эффекту рассматривается применение пьезокварца в различных областях техники: устройства для излучателей и приемников звука в гидроакустике, пьезотрансформаторы,

устройства для ультразвуковых томографов, различные измерительные приборы, датчики, аппаратура связи. Пьезоэлементы применяются в медицине, геологии, легкой промышленности и многих других областях науки и техники.

На сегодняшний день большинство современных технических устройств, использующих пьезоэффект, создается на базе однослойных или многослойных элементов с применением пьезокерамики. Это связано с тем, что такие устройства обладают высокой механической прочностью, повышенной чувствительностью и температурной стабильностью, высокой эффективностью преобразования электрической энергии в механическую, а также низкой себестоимостью и простотой конструкции. Особенно активно пьезоэффекты исследуются и применяются в авиационных и космических отраслях техники. Пьезоэлементы используются на летательных аппаратах (ЛА) в виде корпусных элементов, панелей (рис 1.1), в устройствах систем активного управления для адаптивных конструкций [37-38, 102, 106]. Они часто называются “умными” или “интеллектуальными” материалами (smart-материал). С помощью различных сенсоров и актюаторов, изготовленных из smart-материалов, ЛА можно обеспечить необходимое распределение аэродинамических нагрузок по размаху упругого крыла, уменьшить аэродинамические нагрузки при маневрах и порывах ветра, подавить флаттер, понизить уровень вибраций. Следовательно, использование пьезоэлементов помогает ЛА при гашении аэроупругих колебаний, повышении качества аэродинамики и эффективном управлении их деформациями. Поэтому задачи исследования электромеханических свойств различных материалов, изучение влияния на эти свойства дефектов материалов и разработка методов, моделирующих такого рода явления, в последнее время являются одними из самых актуальных.

Оболочка из композиционного материала, являющаяся наиболее распространенной формой несущих конструкций летательных аппаратов, по условиям эксплуатации находится под действием различных физических полей, таких, как механические, электрические, магнитные и тепловые. Инженерные

расчеты напряженно-деформированного состояния (НДС) оболочек проводятся на основе классической теории типа Кирхгофа-Лява и Тимошенко-Рейсснера. Практика показывает, что эти теории, основанные на гипотезах отсутствия поперечных деформаций, не всегда дают результаты расчета напряженного состояния в зонах его искажения (соединения, локальные нагрузки и др.), соответствующие данным экспериментальных исследований.

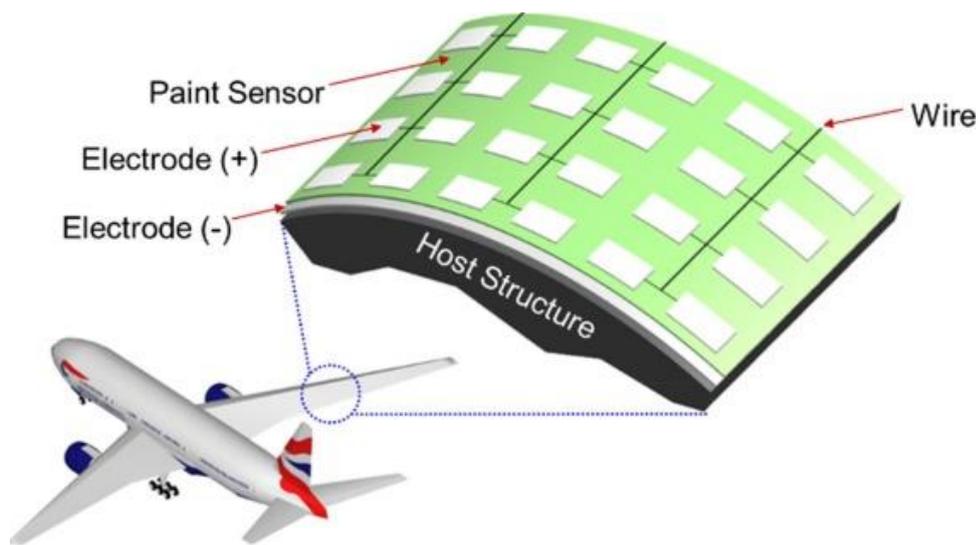


Рис.1. 1. Пьезоэлементы на крыльях самолетов [102]

Классическая теория оболочек, основанная на гипотезах Кирхгофа – Лява, была построена в конце XIX века. Оформление этой теории было в основном завершено примерно 50 лет назад. Большой вклад в процессе развития теории оболочек внесли: С П. Тимошенко, Г. Рейсснер, С.А. Амбарцумян, В.В. Болотин, В.З. Власов, А.Л. Гольденвейзер, Э.И. Григолюк, А.И. Лурье, В.В. Новожилов и многие другие. Основным теоретическим результатам, полученным в классической теории оболочек, посвящены известные монографии В.З. Власова [23-24], А.Л. Гольденвейзера [32-36], А.И. Лурье [62-63, 139], В.В. Новожилова [70-73], С П . Тимошенко [76, 129].

В дальнейшем была разработана сдвиговая теория оболочек типа Тимошенко-Рейсснера, в которой деформация поперечного сдвига учитывалась для устранения недостатков классической теории. К этому направлению развития теории оболочек принадлежат работы С.А. Амбарцумяна [1-2], И.Н. Векуа [21], Б.Ф. Власова [22], А.С. Вольмира [25-27], Я.С. Уфлянда [78], М.П. Шереметьева и

Б.А. Пелеха [99]. Основываясь на гипотезах Кирхгофа – Лява и Тимошенко-Рейсснера, авторы [39, 47, 50, 66, 106, 134] расширяют возможности теории упругости на решение задач электроупругости и термоупругости. Однако теория Тимошенко-Рейсснера может давать большую погрешность при определении компонентов НДС анизотропных пластин и оболочек, а также НДС в краевых зонах, где возникает НДС типа “погранслои”. Эта проблема заключается в том, что распределение напряжений по толщине пластин и оболочек аппроксимируется только линейным законом.

В настоящее время с целью снижения массы и повышения прочности конструкций широкое распространение получили композиционные материалы. Теории многослойных анизотропных пластин и оболочек посвящены работы: С.А. Амбарцумяна [1-2], В.В Васильева [13-15], Reddy [132-133], В.В Болотина [9-10], Елпатьевского А.Н [46], Лехницкого С.Г [60-61], Г.А Ванина [12], Н.Б Баничука, Кобелева В.В., Рикардса Р.Б [6], Бакулина В.Н [7]. На сегодняшний день для исследования НДС многослойных пластин и оболочек используются два подхода. Первый подход основан на методах конечных элементов (МКЭ) и заключается в том, что каждый слой оболочки рассматривается отдельно. Второй подход состоит в осреднении характеристик всех слоев с переменными физико-механическими параметрами по толщине оболочки.

Модификации асимптотических методов применяются для решения многих пространственных задач теории пластин, оболочек. Сущность этих методов состоит в том, что трехмерная задача теории упругости решается с помощью малого параметра – относительной толщины пластин и оболочек. При этом краевая задача упругости разделяется на две отдельные задачи. Первая задача определяет основное напряженно-деформированное состояние. Вторая задача позволяет рассчитать дополнительные напряжения типа “погранслои” и решается с помощью краевых и начальных условий. Поэтому асимптотические методы широко используются во всех вариантах и являются сильным инструментом и полезным средством для исследования НДС пластин и оболочек с высокой

достоверностью. Фактически, этот подход сталкивается с существенными вычислительными трудностями. Успешное применение асимптотических методов можно найти в работах А.Л.Гольденвейзера [32, 34], К.О.Фридрикса [121], В.В. Болотина [10], Дудченко А.А. и Лурье С.А. [44], Edward R.L [135], Reissner E [136], А. Грина [118], Л.А. Агаловяна [3-4] и других авторов [41-42,]. В рамках вариационно-асимптотического и вариационно-полиномиального методов с помощью специально построенной аппроксимирующей полиномиальной функции Вал. В. Фирсановым и его учениками [79-98, 109, 111-116] была разработана уточненная теория расчета НДС пластин, цилиндрических, сферических и конических оболочек постоянной и переменной толщины при термомеханическом воздействии вблизи жестко и упруго защемленных краев. На основе асимптотического метода в работах Б.В. Нерубайло [68-69] рассматривается задача о локальном воздействии нормального давления на тонкую круговую оболочку и даны примеры расчета НДС конической оболочки, находящейся под действием локальных радиальных нагрузок. Асимптотические методы также применялись зарубежными учеными и исследователями не только с использованием трехмерных уравнений теории упругости, но и теорий электроупругости и анизотропных материалов [105, 107, 117, 123-124].

В последние годы получили значительное развитие исследования НДС композиционных оболочек методами механики деформируемой сплошной среды, лежащие на стыке физических проблем, функционально связанных с механическими напряжениями и деформациями, вызванными электрическими, магнитными и тепловыми полями. Совместная задача электроупругости представляет собой сочетание теории упругости и теории электричества. Большой вклад в развитие теории динамических и статических контактных задач теории электроупругости внесли В.З. Партон, В.Т. Гринченко, А.Ф. Улитко, В.А. Кудрявцев, А.С. Космодамианский, В.Н.Ложкин, Н.А Шульги, А.О Ватульян, H.S Tzou, Reddy, Baker A, Dutton S, Carrera E...

В работах Партона В.З и Б.А Кудрявцева [66-67], H.S Tzou [120], основанных

на классической теории типа Кирхгофа-Лява, построены системы уравнений электромеханического состояния тонких пластин и оболочек с учетом пьезоэффекта путем совместного решения основных трехмерных уравнений теории упругости и электростатики Максвелла. В работах [65, 101, 133, 137] исследовались статические, динамические задачи в пьезоэлектрических средах, а также механики разрушения пьезоматериалов при совместном действии термо- и электромеханических нагрузок.

В монографии В.Т. Гриченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульги [39] сформулированы основные пространственные задачи для описания электроупругих процессов в общем случае и при их решении показана возможность использования метода собственных векторных функций, развитого применительно к краевым задачам для идеально упругого тела. В этой работе также рассматривается распространение осесимметричных и неосесимметричных волн в пьезокерамических цилиндрах с разными видами поляризации. В книге [130] представлена система трехмерных уравнений электроупругости конструкций, изготовленных из интеллектуальных композиционных материалов и методы решения дифференциальных уравнений в частных производных с различными степенями свободы.

Mindlin [126] и Гольденвейзер [33-34] развивают теорию учета сдвиговых деформаций для решения проблемы пространственных задач классической теории оболочек. Reddy [131-134] и Mitchell [127] предложили теории сдвиговых деформаций первых, третьих и высших порядков (FSDT, TSDT и HSDT) с использованием рядов нелинейных полиномиальных функций для исследования НДС и электромеханического состояния (ЭМС) изотропных и анизотропных материалов с учетом термомеханических нагрузок и магнито-электрического эффекта. Основываясь на идее Mindlin, авторы Lin Liao [125], Wenbin Yu [142] построили модели электромеханического состояния композиционных пластин и оболочек с учетом пьезоэффекта. Модификации теорий HSDT можно найти в работах [108-110, 122, 131].

В серии работ [51-54] Коваленко А.Д рассмотрены постановки задачи термоупругости и приведены основные уравнения статической и квазистатической задачи термоупругости на основе трехмерных уравнений теории упругости и законов теплопроводности. Задача термоупругости в композиционных конструкциях представлена в книге В.А Гнездилова, А.А Дудченко, С.А Лурье, Вик.В Фирсанова [39]. Здесь дана физическая модель композиционного материала с учетом температурного воздействия и разработана методика определения НДС в многослойных структурах. Исследование поведения пластин и оболочек при воздействии теплового процесса в материалах, обладающих пьезоэлектрическими свойствами, изложены в [17, 100, 101, 119, 133].

На основании обобщенного закона Гука и уравнений электростатики И.А. Вековищева [28-30] представила результаты исследований физической сущности явления пьезоэлектрического эффекта, а также систему уравнений и граничные условия, описывающие механическое и электрическое состояние твердого тела. В статье [31] рассмотрены некоторые допущения для получения плоской задачи теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта.

В работах [103, 137] представлены расчетные модели, основанные на FSDT и МКЭ, для статистического и динамического анализов НДС многослойных композиционных оболочек, находящихся под действием электрических, механических и термических нагрузок. С помощью вариационного принципа Гамильтона в работе [104] получена система уравнений движения пластин с накладками из пьезоэлектрических слоев. Авторы Baker A, Dutton S [102], Carrera E, Brischetto S [106], Elhajjar R, La Saponara [130] опубликовали книги, описывающие НДС пластин и оболочек с учетом пьезоэффекта, для моделирования, анализа состояния и проектирования интеллектуальных конструкций в авиационных отраслях. В публикациях [105, 107, 117, 124] даны асимптотические методы для решения связанной задачи электроупругости композиционных оболочек и оболочек, изготовленных из функционально-

градиентных материалов.

В работах [37-38, 100] Ф.Н. Шклярчука и Т.В. Гришаниной рассматривалась важная задача аэроавтоупругости для современных самолетов. Оновываясь на динамической теории электроупругости, авторы представили варианты проектирования адаптивных систем автоматизированного управления с целью повышения устойчивости и маневренности движения ЛА и КА под действием различных возмущений с использованием пьезокерамических элементов. В этих книгах также изложены принципы и даны теоретические основы динамики упругих адаптивных конструкций различных форм (троссы, стержни, пластины, оболочки...) с активными элементами и управляемыми деформациями.

В статье [74] Д.В. Тарлаковского построено аналитическое решение задачи об антиплоском распространении нестационарных поверхностных возмущений в анизотропной однородной электромагнитоупругой среде с учетом пьезоэлектрических эффектов. Для решения этой задачи применяются преобразование Фурье по пространственной координате, а также метод малого параметра. В работе [75] дана математическая модель связанных нестационарных продольных колебаний электромагнитоупругих стержней, изготовленных из однородных изотропных проводников. В работах Вестяка В.А. и Тарлаковского Д.В. [19-20] представлены результаты исследования нестационарных волн в толстостенной электромагнитоупругой сфере под действием поверхностных возмущений.

В работах [45, 47-49] В.В. Калинчука с соавторами решались задачи электроупругости на основе линеаризации нелинейных уравнений механики электромагнитной сплошной среды и построение линеаризованной теории контактного взаимодействия полуограниченных предварительно напряженных пьезоактивных тел, а также представлены решения задач о колебаниях пьезоактивной среды с прямолинейными границами. Аналогичной проблеме посвящена работа [8] Баженова В.М., Улитко А.Ф при исследовании поведения пьезокерамического слоя мгновенными электрическими нагрузками. Показано

влияние эффекта связанности полей на процессы статического и динамического деформирования электроупругих сред.

Методы, связанные с изучением поведения тонкостенных элементов с учетом пиротермоэлектроупругости анализировались в работах Ватульяна А.О. В [17] сформирован вариационный принцип для постановки задачи термоэлектроупругости с использованием ряда гипотез о распределении компонент физических полей по толщине элемента. В [11] представлен асимптотический подход, основанный на МКЭ, развит численный метод для анализа уравнений термоэлектроупругости и исследования некоторых закономерностей нестационарного движения в совместной физической среде. Работы [16, 18] посвящены формулировке граничных интегральных уравнений для моделей связанной термоэлектроупругости.

В работах А.С. Космодамианского [55-57] и В.Н.Ложкина [58] применяется асимптотический метод А.Л.Гольденвейзера для решения трехмерных задач электроупругости сведением к двумерным уравнениям пьезокерамических оболочек. Электроупругое равновесие тонкого анизотропного пьезоэлектрического слоя рассмотрено в [59] на основе построения основного итерационного процесса.

Вместе с тем, технический прогресс и внедрение новых технологий предъявляют повышенные требования к более точным моделям для описания поведения пластин и оболочек. В настоящее время, благодаря совершенствованию современной вычислительной техники, численные методы получили широкое распространение. Среди численных методов расчета оболочек выделяется основная группа – метод конечных элементов (МКЭ), метод конечных разностей и метод граничных элементов. В серии работ [103, 128, 132-134] представлен расчетный аппарат, основанный на МКЭ с разными погрешностями и геометрическими элементами, для исследования НДС, ЭМС и расчетов прочности конструкций. Используя известные программные пакеты Ansys, Nastran, Acelan и др. в публикациях [43, 64] проведено моделирование и оптимизация структур

изотропных и многослойных композиционных конструкций, изготовленных из пьезоматериалов. Однако, при применении численных методов требуется высокая конфигурация ЭВМ.

Следует отметить, что приведенный обзор литературы показывает отсутствие работ, посвященных уточненной математической модели расчетов НДС оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта и анализу его влияния на прочность и НДС типа “погранслои” в зонах его искажения.

Для развития данного направления в теории оболочек можно поставить следующие задачи:

- построение уточненной математической модели НДС произвольных оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта.
- построение уточненной математической модели НДС композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта.
- разработка методов и алгоритмов расчета НДС композиционных цилиндрических оболочек с пьезоэлектрическими слоями.
- исследование электромеханического состояния типа “погранслои” однослойных и многослойных композиционных цилиндрических оболочек, состоящих из пьезоматериалов.
- построение уточненной математической модели композиционных цилиндрических оболочек и исследование их НДС при воздействии термо-электро-механических нагрузок.
- количественная оценка результатов расчета по уточненной математической модели расчетов НДС тонких оболочек относительно классической теории.

Полученные в диссертации результаты могут быть использованы в методиках инженерных расчетов типовых авиационных конструкций и их соединений, а также при проектировании и оценке прочности машиностроительных и строительных конструкций с учетом пьезоэффекта.

Таким образом, несмотря на известные достижения в теории и методах

расчета произвольных оболочек, для композиционных цилиндрических оболочек для учета пьезоэлектрического эффекта и температурного воздействия, имеется еще ряд нерешенных задач. Поэтому исследование их НДС по уточненной теории с целью повышения достоверности расчетов продолжает сохранять свою актуальность. Решению этой проблемы и посвящена диссертация.

1.2. Постановка задачи расчета электромеханического состояния произвольных оболочек по уточненной теории

Рассматривается произвольная оболочка, обладающая пьезоэлектрическим эффектом как трехмерное упругое тело толщиной $2h$, отнесенное к триортогональной криволинейной системе координат $O\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ (рис. 1.2). Координатные оси α_1 и α_2 совпадают с главными направлениями срединной поверхности оболочки, а ось α_3 направлена по наружной нормали к этой поверхности. Оболочка находится под действием механических нагрузок $q_{i3}^\pm (i = \overline{1,3})$ и электрических потенциалов $\varphi = \varphi^\pm$ на лицевых поверхностях оболочки.

На торцевых поверхностях оболочки заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{ij} = q_{ij}, \quad (i = \overline{1,2}, j = \overline{1,3})$$

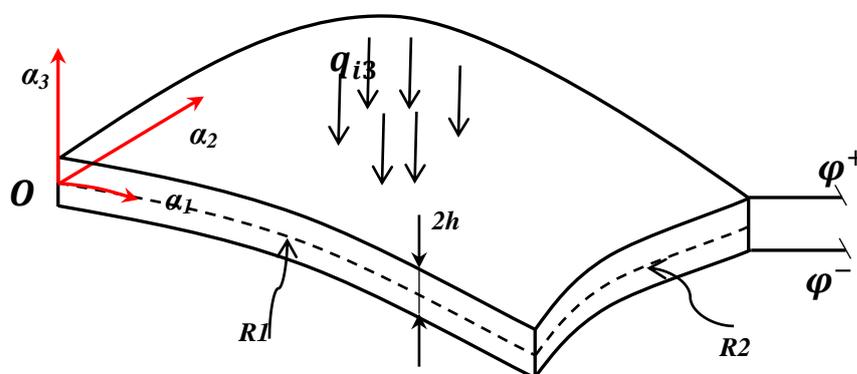


Рис. 1. 2. Криволинейная система координат произвольной оболочки

Уравнения состояния пьезоматериалов при деформации [66, 106, 120] с учетом сопряженного электрического поля можно записать в виде

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [F]\{\sigma\} - [d]^T \{E\}, \\ \{D\} &= [d]\{\sigma\} + [\eta_\sigma]^T \{E\}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\sigma = \{\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12}\}$ - вектор напряжения, $\varepsilon = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}\}$ - вектор деформации, $D = \{D_{11}, D_{22}, D_{33}\}$ - вектор электрической индукции, $E = \{E_{11}, E_{22}, E_{33}\}$ - вектор напряженности электрического поля вдоль осей координата, F - симметричная матрица коэффициентов податливости при постоянном нулевом электрическом поле, d - матрица пьезоэлектрических постоянных, η_σ - симметричная матрица диэлектрических проницаемостей при нулевой деформации. Вид указанных матриц приведен ниже:

$$F = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & 0 & 0 & 0 \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} & 0 & 0 & 0 \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & F_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix};$$

$$d = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix}; \quad \eta_\sigma = \begin{bmatrix} \eta_{11\sigma} & \eta_{12\sigma} & \eta_{13\sigma} \\ \eta_{21\sigma} & \eta_{22\sigma} & \eta_{23\sigma} \\ \eta_{31\sigma} & \eta_{32\sigma} & \eta_{33\sigma} \end{bmatrix}$$

Уравнения (1.1) можно также записать в другом виде:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [C]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\}, \\ \{D\} &= [e]\{\varepsilon\} + [\eta]^T \{E\}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} = F^{-1},$$

где коэффициенты C_{ij} представляют собой упругие постоянные ортотропного материала оболочки, определяемые соотношениями

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{EI(\mu-1)}{(2\mu-1)(\mu+1)}, C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{EI}{2(\mu+1)},$$

$$C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} = -\frac{EI\mu}{(2\mu-1)(\mu+1)},$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = dF^{-1},$$

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} \end{bmatrix} = \eta_{\sigma} - dF^{-1}d^T,$$

EI - модуль Юнга, μ - коэффициент Пуассона.

Формулы для деформации произвольных оболочек записываются в виде

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial u}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} v + \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} w,$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} u + \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} w,$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial \alpha_3},$$

$$\gamma_{12} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial u}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{H_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{H_1 H_2} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \alpha_2} u + \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_1} v \right),$$

$$\begin{aligned}\gamma_{13} &= \frac{1}{H_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial u}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_1} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha_3} u, \\ \gamma_{23} &= \frac{1}{H_2} \frac{\partial w}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial v}{\partial \alpha_3} - \frac{1}{H_2} \frac{\partial H_2}{\partial \alpha_3} v.\end{aligned}\quad (1.3)$$

где коэффициенты Ламе определяются равенствами

$$H_i = A_i a_i; H_3 = 1; a_i = 1 + \alpha_3 r_i; r_i = 1 / R_i; (i = \overline{1, 2})$$

и R_i – радиусы оболочки, A_i, r_i – соответственно коэффициенты первой квадратичной формы и главные кривизны срединной поверхности оболочки.

При дифференцировании коэффициентов Ламе справедливы равенства

$$\begin{aligned}\frac{\partial H_i}{\partial \alpha_i} &= \frac{\partial A_i}{\partial \alpha_i} a_i, \quad \frac{\partial H_i}{\partial \alpha_3} = \frac{A_i}{R_i}, \\ \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_1} &= \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial H_3}{\partial \alpha_3} = 0.\end{aligned}\quad (1.4)$$

Для описания электроупругостного состояния оболочки из пьезоматериалов [37, 66, 102, 133] используется энтальпия

$$H = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} - \{\varepsilon\}^T [e]^T \{E\} - \frac{1}{2} \{E\}^T [e] \{E\}.\quad (1.5)$$

Тогда компоненты НДС и напряженности электрического поля оболочки определяются по формулам

$$\sigma = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon}, \quad D = -\frac{\partial H}{\partial E}.\quad (1.6)$$

Уравнения Максвелла для электрического поля в материальных средах, пренебрегая в них магнитными эффектами, можно привести к следующим уравнениям электростатики:

$$\operatorname{div}(D) = 0, \quad \operatorname{rot}(E) = 0.$$

Отсюда следует что, вектор напряженности E является потенциальным и может быть выражен через скалярную функцию, называемую потенциалом $E = -\operatorname{grad}(\varphi)$ и представляется в виде

$$E_{11} = -\frac{\partial\varphi}{H_1\partial\alpha_1}, E_{22} = -\frac{\partial\varphi}{H_2\partial\alpha_2}, E_{33} = -\frac{\partial\varphi}{H_3\partial\alpha_3}. \quad (1.7)$$

Равенства (1.2) могут быть переписаны следующим образом:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{cccccc} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{array} \right\} - \\ &- \left[\begin{array}{ccc} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} -\frac{\partial\varphi}{H_1\partial\alpha_1} \\ -\frac{\partial\varphi}{H_2\partial\alpha_2} \\ -\frac{\partial\varphi}{H_2\partial\alpha_3} \end{array} \right\}; \\ \left. \begin{array}{l} D_{11} \\ D_{22} \\ D_{33} \end{array} \right\} &= \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{23} \end{array} \right\} + \\ &+ \left[\begin{array}{ccc} \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} -\frac{\partial\varphi}{H_1\partial\alpha_1} \\ -\frac{\partial\varphi}{H_2\partial\alpha_2} \\ -\frac{\partial\varphi}{H_3\partial\alpha_3} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.3. Основные уравнения и граничные условия теории оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта

В данной работе перемещения оболочки представляются в виде полиномов по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше, чем в классической теории типа Кирхгофа-Лява и определяются как:

$$\begin{aligned} u(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= u_0(\alpha_1, \alpha_2) + u_1(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3 + u_2(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^2}{2!} + u_3(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^3}{3!}, \\ v(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= v_0(\alpha_1, \alpha_2) + v_1(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3 + v_2(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^2}{2!} + v_3(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^3}{3!}, \\ w(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= w_0(\alpha_1, \alpha_2) + w_1(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3 + w_2(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^2}{2!}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Подставляя (1.9) в (1.3), находим выражения деформаций оболочки, зависящих от перемещений

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{v_k}{A_2} \right) \frac{\alpha_3^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{w_k}{R_1 a_1} \frac{\alpha_3^k}{k!}; \\ \varepsilon_{22} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{u_k}{A_1} \right) \frac{\alpha_3^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{w_k}{R_2 a_2} \frac{\alpha_3^k}{k!}; \\ \varepsilon_{33} &= w_1(\alpha_1, \alpha_2) + w_2(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3; \\ \gamma_{12} &= \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} v_k \right) \frac{\alpha_3^k}{k!} + \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} u_k \right) \frac{\alpha_3^k}{k!}; \\ \gamma_{13} &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_1 a_1} \frac{\partial w_k}{\partial \alpha_1} \frac{\alpha_3^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 u_k \frac{\alpha_3^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{u_k}{R_1 a_1} \frac{\alpha_3^k}{k!}; \\ \gamma_{23} &= \sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_2 a_2} \frac{\partial w_k}{\partial \alpha_2} \frac{\alpha_3^k}{k!} + \sum_{k=1}^3 v_k \frac{\alpha_3^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{v_k}{R_2 a_2} \frac{\alpha_3^k}{k!}. \end{aligned}$$

Электрический потенциал можно разложить по толщине оболочки в виде полинома по координате следующего вида:

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \varphi_0(\alpha_1, \alpha_2) + \varphi_1(\alpha_1, \alpha_2)\alpha_3 + \varphi_2(\alpha_1, \alpha_2)\frac{\alpha_3^2}{2!}. \quad (1.10)$$

Для получения основных уравнений равновесия уточненной теории произвольных оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта используется вариационный принцип Лагранжа

$$\delta\Pi = \delta U - \delta A = 0. \quad (1.11)$$

В уравнении (1.11) вариация потенциальной энергии δU состоит из энергии механической деформации и энергии электрического поля и определяется как

$$\delta U = \iiint (\sigma \delta \varepsilon + D \delta E) dV. \quad (1.12)$$

Работа внешних нагрузок представляется суммой работ механических нагрузок и электрических зарядов Q^\pm на поверхности оболочки, тогда вариация δA находится по формуле

$$\delta A = \sum \iint q_{i3} (\delta u + \delta v + \delta w) dS + \sum \iint Q \delta \varphi dS, \quad (i = \overline{0,3}). \quad (1.13)$$

Подставляя (1.12) и (1.13) в (1.11) получим

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \iiint (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \sigma_{33} \delta \varepsilon_{33} + \sigma_{12} \delta \gamma_{12} + \sigma_{13} \delta \gamma_{13} + \\ & + \sigma_{23} \delta \gamma_{23}) A_1 A_2 a_1 a_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 + \iiint (D_{11} \delta E_{11} + D_{22} \delta E_{22} + \\ & + D_{33} \delta E_{33}) A_1 A_2 a_1 a_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 - \iint (q_{11} \delta U_1 + q_{12} \delta U_2 + \\ & + q_{13} \delta U_3) A_2 a_2 d\alpha_2 d\alpha_3 - \iint (q_{21} \delta u + q_{22} \delta v + q_{23} \delta w) A_1 a_1 d\alpha_1 d\alpha_3 - \\ & - \iint \left\{ q_{13}^+ [a_1 a_2 \delta u]_{(\alpha_3=+h)} - q_{13}^- [a_1 a_2 \delta u]_{(\alpha_3=-h)} + \right. \\ & + q_{23}^+ [a_1 a_2 \delta v]_{(\alpha_3=+h)} - q_{23}^- [a_1 a_2 \delta v]_{(\alpha_3=-h)} + \\ & \left. + q_{33}^+ [a_1 a_2 \delta w]_{(\alpha_3=+h)} - q_{33}^- [a_1 a_2 \delta w]_{(\alpha_3=-h)} \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 + \\ & - \iint \left\{ Q^+ [a_1 a_2 \delta w]_{(\alpha_3=+h)} - Q^- [a_1 a_2 \delta w]_{(\alpha_3=-h)} \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Подставляя соотношения (1.3) и выражения (1.7) с учетом разложений (1.9) в (1.14), находим

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \int_{-h}^{+h} \left\{ \sigma_{11} \left(\sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\delta v_k}{A_2} \right) \frac{\alpha_3^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{\delta w_k}{R_1 a_1} \frac{\alpha_3^k}{k!} \right) + \right. \\
& + \sigma_{22} \left[\sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial \delta v_k}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\delta u_k}{A_1} \right) \frac{\alpha_3^k}{k!} + \sum_{k=0}^2 \frac{\delta w_k}{R_2 a_2} \frac{\alpha_3^k}{k!} \right] + \\
& + \sigma_{33} \sum_{k=1}^2 \delta w_k \frac{\alpha_3^{k-1}}{(k-1)!} + \sigma_{12} \left\{ \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_2 a_2} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v_k \right) \frac{\alpha_3^k}{k!} + \right. \\
& + \sum_{k=0}^3 \frac{1}{A_1 a_1} \left(\frac{\partial \delta v_k}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_k \right) \frac{\alpha_3^k}{k!} \left. \right\} + \sigma_{13} \left\{ \sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_1 a_1} \frac{\partial \delta w_k}{\partial \alpha_1} \frac{\alpha_3^k}{k!} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^3 \delta u_k \frac{\alpha_3^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{\delta u_k}{R_1 a_1} \frac{\alpha_3^k}{k!} \left. \right\} + \sigma_{23} \left\{ \sum_{k=0}^2 \frac{1}{A_2 a_2} \frac{\partial \delta w_k}{\partial \alpha_2} \frac{\alpha_3^k}{k!} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^3 \delta v_k \frac{\alpha_3^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^3 \frac{\delta v_k}{R_2 a_2} \frac{\alpha_3^k}{k!} \left. \right\} \left. \right\} A_1 A_2 a_1 a_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 - \tag{1.15} \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \int_{-h}^{+h} \left\{ D_{11} \sum_{k=0}^2 \frac{1}{H_1} \left(\frac{\partial \delta \varphi_k}{\partial \alpha_1} \frac{\alpha_3^k}{k!} \right) + D_{22} \left(\sum_{k=0}^2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial \delta \varphi_k}{\partial \alpha_2} \frac{\alpha_3^k}{k!} \right) + \right. \\
& + D_{33} \left(\sum_{k=1}^2 \frac{1}{H_3} \delta \varphi_k \frac{\alpha_3^{k-1}}{(k-1)!} \right) \left. \right\} A_2 a_1 a_2 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 - \\
& - \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \int_{-h}^{+h} \left(q_{11} \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\alpha_3^k}{k!} + q_{12} \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\alpha_3^k}{k!} + q_{13} \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\alpha_3^k}{k!} \right) A_2 a_2 d\alpha_2 d\alpha_3 - \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{-h}^{+h} \left(q_{21} \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\alpha_3^k}{k!} + q_{22} \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\alpha_3^k}{k!} + q_{23} \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\alpha_3^k}{k!} \right) A_1 a_1 d\alpha_1 d\alpha_3 - \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left\{ q_{13}^+ \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\alpha_3^k}{k!} \right]_{(\alpha_3=+h)} - q_{13}^- \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta u_k \frac{\alpha_3^k}{k!} \right]_{(\alpha_3=-h)} \right\} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + q_{23}^+ \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\alpha_3^k}{k!} \right]_{(\alpha_3=+h)} - q_{23}^- \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^3 \delta v_k \frac{\alpha_3^k}{k!} \right]_{(\alpha_3=-h)} + \\
& + q_{33}^+ \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\alpha_3^k}{k!} \right]_{(\alpha_3=+h)} - q_{33}^- \left[a_1 a_2 \sum_{k=0}^2 \delta w_k \frac{\alpha_3^k}{k!} \right]_{(\alpha_3=-h)} + \\
& + Q^+ a_1 a_2 \left[\sum_{k=0}^2 \delta \varphi_k \frac{\alpha_3^k}{k!} \right]_{(\alpha_3=h)} - Q^+ a_1 a_2 \left[\sum_{k=0}^2 \delta \varphi_k \frac{\alpha_3^k}{k!} \right]_{(\alpha_3=-h)} \left. \vphantom{\sum_{k=0}^2} \right\} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = 0.
\end{aligned}$$

Введем в рассмотрение внутренние силовые факторы по формулам

$$(N_1, N_{12}, Q_{13}, \overline{N_1}, \overline{N_{12}}, \overline{Q_{13}}) = \int_{-h}^{+h} a_2 (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) d\alpha_3,$$

$$(M_1^{(k)}, M_{12}^{(k)}, M_{13}^{(k)}, \overline{M_1^{(k)}}, \overline{M_{12}^{(k)}}, \overline{M_{13}^{(k)}}) = \int_{-h}^{+h} a_2 (\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, q_{11}, q_{12}, q_{13}) \frac{\alpha_3^k}{k!} d\alpha_3,$$

$$(N_2, N_{21}, Q_{23}, \overline{N_2}, \overline{N_{21}}, \overline{Q_{23}}) = \int_{-h}^{+h} a_1 (\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, q_{22}, q_{12}, q_{23}) d\alpha_3,$$

$$(M_2^{(k)}, M_{21}^{(k)}, M_{23}^{(k)}, \overline{M_2^{(k)}}, \overline{M_{21}^{(k)}}, \overline{M_{23}^{(k)}}) = \int_{-h}^{+h} a_1 (\sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_{23}, q_{22}, q_{12}, q_{23}) \frac{\alpha_3^k}{k!} d\alpha_3,$$

$$(T_1^{(k)}, T_2^{(k)}, T_3^{(k)}) = \int_{-h}^{+h} a_1 a_2 (\sigma_{13}, \sigma_{23}, \sigma_{33}) \frac{\alpha_3^{k-1}}{(k-1)!} d\alpha_3,$$

$$(ND_{11}^{(0)}, ND_{22}^{(0)}, ND_{33}^{(0)}) = \int D_i d\alpha_3, \quad (i = \overline{1, 3}),$$

$$(MD_{11}^{(k)}, MD_{22}^{(k)}, MD_{33}^{(k)}) = \int_{-h}^{+h} D_k \frac{\alpha_3^k}{(k-1)!} d\alpha_3, \quad (k = \overline{2, 3}), \quad (1.16)$$

$$p_1^{(i)} = q_{13}^+ a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=h} - q_{13}^- a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=-h}, \quad (i = \overline{0, 3}),$$

$$p_2^{(i)} = q_{23}^+ a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=h} - q_{23}^- a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=-h}, (i = \overline{0,3}),$$

$$p_3^{(i)} = q_{33}^+ a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=h} - q_{33}^- a_1 a_2 \frac{\alpha_3^i}{i!} \Big|_{\alpha_3=-h}, (i = \overline{0,2}),$$

$$\psi_1^{(i)} = Q^+ a_1 a_2 \alpha_3^i \Big|_{z=h} - Q^- a_1 a_2 \alpha_3^i \Big|_{\alpha_3=-h}, (i = \overline{0,2}).$$

С учетом (1.16) уравнение (1.15) принимает вид

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left\{ A_2 N_1 \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\delta v_0}{A_2} \right) + \frac{A_1 A_2 N_1}{R_1} \delta w_0 + \right. \\ & + \sum_{k=1}^3 A_2 M_1^{(k)} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \frac{\delta v_k}{A_2} \right) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_1 A_2 M_1^{(k)}}{R_1} \delta w_k + \\ & + A_1 N_2 \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\delta u_0}{A_1} \right) + \frac{A_1 A_2 N_2}{R_2} \delta w_0 + \\ & + \sum_{k=1}^3 A_1 M_2^{(k)} \left(\frac{\partial \delta v_k}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \frac{\delta u_k}{A_1} \right) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_1 A_2 M_2^{(k)}}{R_2} \delta w_k + \sum_{k=1}^2 A_1 A_2 T_3^{(k)} \delta w_k + \\ & + A_1 N_{21} \left(\frac{\partial \delta u_0}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v_0 \right) + A_2 N_{12} \left(\frac{\partial \delta v_0}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_0 \right) + \\ & + \sum_{k=1}^3 A_1 M_{21}^{(k)} \left(\frac{\partial \delta u_k}{\partial \alpha_2} - \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v_k \right) + \sum_{k=1}^3 A_2 M_{12}^{(k)} \left(\frac{\partial \delta v_k}{\partial \alpha_1} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_k \right) + \\ & + A_2 Q_{13} \frac{\partial \delta w_0}{\partial \alpha_1} - Q_{13} \frac{A_1 A_2 \delta u_0}{R_1} + \sum_{k=1}^2 A_2 M_{13}^{(k)} \frac{\partial \delta w_k}{\partial \alpha_1} + \sum_{k=1}^3 A_1 A_2 T_1^{(k)} \delta u_k + \\ & - \sum_{k=1}^3 \frac{A_1 A_2}{R_1} M_{13}^{(k)} \delta u_k + A_1 Q_{23} \frac{\partial \delta w_0}{\partial \alpha_2} - Q_{23} \frac{A_1 A_2 \delta v_0}{R_2} + \sum_{k=1}^2 A_1 M_{23}^{(k)} \frac{\partial \delta w_k}{\partial \alpha_2} + \\ & \left. + \sum_{k=1}^3 A_1 A_2 T_2^{(k)} \delta v_k - \sum_{k=1}^3 \frac{A_1 A_2}{R_2} M_{23}^{(k)} \delta v_k \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left\{ ND_{11}^{(0)} \frac{\partial A_2 \delta \varphi_0}{\partial \alpha_1} + \sum_{k=1}^2 MD_{11}^{(k)} \frac{\partial A_2 \delta \varphi_k}{\partial \alpha_1} + ND_{22}^{(0)} \frac{\partial A_1 \delta \varphi_0}{\partial \alpha_2} + \right. \\
& + \sum_{k=1}^2 MD_{22}^{(k)} \frac{\partial A_1 \delta \varphi_k}{\partial \alpha_2} - ND_3^{(0)} A_1 A_2 \delta \varphi_1 + MD_2^{(2)} \frac{\partial A_1 \delta \varphi_2}{\partial \alpha_2} - \\
& \left. - 2MD_3^{(1)} A_1 A_2 \delta \varphi_2 \right\} d\alpha_1 d\alpha_2 - \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left(\overline{N_1} \delta u_0 + \sum_{k=1}^3 \overline{M_1^{(k)}} \delta u_k + \overline{N_{12}} \delta v_0 + \right. \\
& \left. - \sum_{k=1}^3 \overline{M_{12}^{(k)}} \delta v_k + \overline{Q_{13}} \delta w_0 + \sum_{k=1}^2 \overline{M_{13}^{(k)}} \delta w_k \right) A_2 d\alpha_2 - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \left(\overline{N_{21}} \delta u_0 + \sum_{k=1}^3 \overline{M_{21}^{(k)}} \delta u_k + \right. \\
& \left. + \overline{N_2} \delta v_0 + \sum_{k=1}^3 \overline{M_2^{(k)}} \delta v_k + \overline{Q_{23}} \delta w_0 + \sum_{k=1}^2 \overline{M_{23}^{(k)}} \delta w_k \right) A_1 d\alpha_1 - \\
& \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left(\sum_{k=0}^3 P_1^{(k)} \delta u_k + \sum_{k=0}^3 P_2^{(k)} \delta v_k + \sum_{k=0}^2 P_3^{(k)} \delta w_k \right) A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left(A_1 A_2 (Q^+ + Q^-) \delta \varphi_0 - A_1 A_2 (hQ^+ - hQ^-) \delta \varphi_1 + \right. \\
& \left. - A_1 A_2 (h^2 Q^+ + h^2 Q^-) \delta \varphi_2 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 = 0.
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Интегрируя слагаемые в уравнении (1.17) по частям, находим

$$\begin{aligned}
& \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left(- \frac{\partial (A_2 N_1)}{\partial \alpha_1} \delta u_0 + N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta v_0 + \frac{A_1 A_2 N_1}{R_1} \delta w_0 + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^3 \left(- \frac{\partial (A_2 M_1^{(k)})}{\partial \alpha_1} \delta u_k + M_1^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta v_k \right) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_1 A_2 M_1^{(k)}}{R_1} \delta w_k - \right. \\
& \left. - \frac{\partial (A_1 N_2)}{\partial \alpha_2} \delta v_0 + N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta u_0 + \frac{A_1 A_2 N_2}{R_2} \delta w_0 + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^3 \left(- \frac{\partial (A_1 M_2^{(k)})}{\partial \alpha_2} \delta v_k + M_2^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta u_k \right) + \sum_{k=1}^2 \frac{A_1 A_2 M_2^{(k)}}{R_2} \delta w_k + \sum_{k=1}^2 A_1 A_2 T_3^{(k)} \delta w_k + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial(A_1 N_{21})}{\partial \alpha_2} \delta u_0 - N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v_0 - \frac{\partial(A_2 N_{12})}{\partial \alpha_1} \delta v_0 - N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_0 + \\
& -\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial(A_1 M_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2} \delta u_k + M_{21}^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \delta v_k \right) - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial(A_2 M_{12}^{(k)})}{\partial \alpha_1} \delta v_k + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \delta u_k \right) - \\
& -\frac{\partial(A_2 Q_{13})}{\partial \alpha_1} \delta w_0 - Q_{13} \frac{A_1 A_2 \delta u_0}{R_1} - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial(A_2 M_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1} \delta w_k + \sum_{k=1}^3 A_1 A_2 T_1^{(k)} \delta u_k + \\
& -\sum_{k=1}^3 \frac{A_1 A_2}{R_1} M_{13}^{(k)} \delta u_k - \frac{\partial(A_1 Q_{23})}{\partial \alpha_2} \delta w_0 - Q_{23} \frac{A_1 A_2 \delta v_0}{R_2} - \sum_{k=1}^2 \frac{\partial(A_1 M_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2} \delta w_k + \\
& + \sum_{k=1}^3 A_1 A_2 T_2^{(k)} \delta v_k - \sum_{k=1}^3 \frac{A_1 A_2}{R_2} M_{23}^{(k)} \delta v_k - \\
& -A_1 A_2 \left(\sum_{k=0}^3 P_1^{(k)} \delta u_k + \sum_{k=0}^3 P_2^{(k)} \delta v_k + \sum_{k=0}^2 P_3^{(k)} \delta w_k \right) \Big) d\alpha_1 d\alpha_2 - \\
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left(\frac{\partial(A_2 N D_{11}^{(0)})}{\partial \alpha_1} \delta \varphi_0 + \frac{\partial(A_2 M D_{11}^{(1)})}{\partial \alpha_1} \delta \varphi_1 + \frac{\partial(A_2 M D_{11}^{(2)})}{\partial \alpha_1} \delta \varphi_2 + \right. \\
& + \frac{\partial(A_1 N D_{22}^{(0)})}{\partial \alpha_2} \delta \varphi_0 + \frac{\partial(A_1 M D_{22}^{(1)})}{\partial \alpha_2} \delta \varphi_1 - A_1 A_2 N D_3^{(0)} \delta \varphi_1 + \\
& \left. + \frac{\partial(A_1 M D_{22}^{(2)})}{\partial \alpha_2} \delta \varphi_2 - 2A_1 A_2 M D_3^{(1)} \delta \varphi_2 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 + \\
& + \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left((N_1 - \overline{N_1}) \delta u_0 + \sum_{k=1}^3 (M_1^{(k)} - \overline{M_1^{(k)}}) \delta u_k + (N_{12} - \overline{N_{12}}) \delta v_0 + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^3 (M_{12}^{(k)} - \overline{M_{12}^{(k)}}) \delta v_k + (Q_{13} - \overline{Q_{13}}) \delta w_0 + \sum_{k=1}^2 (M_{13}^{(k)} - \overline{M_{13}^{(k)}}) \delta w_k \right) A_2 d\alpha_2 + \\
& + \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \left((N_{21} - \overline{N_{21}}) \delta u_0 + \sum_{k=1}^3 (M_{21}^{(k)} - \overline{M_{21}^{(k)}}) \delta u_k + (N_2 - \overline{N_2}) \delta v_0 + \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^3 (M_2^{(k)} - \overline{M_2^{(k)}}) \delta v_k + (Q_{23} - \overline{Q_{23}}) \delta w_0 + \sum_{k=1}^2 (M_{23}^{(k)} - \overline{M_{23}^{(k)}}) \delta w_k \right) A_1 d\alpha_1 -
\end{aligned} \tag{1.18}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\alpha_1^{(1)}}^{\alpha_1^{(2)}} \int_{\alpha_2^{(1)}}^{\alpha_2^{(2)}} \left(A_1 A_2 (Q^+ + Q^-) \delta\varphi_0 - A_1 A_2 (hQ^+ - hQ^-) \delta\varphi_1 - \right. \\
& \left. - A_1 A_2 (h^2 Q^+ + h^2 Q^-) \delta\varphi_2 \right) d\alpha_1 d\alpha_2 = 0.
\end{aligned}$$

В силу независимости и произвольности вариаций искомым обобщенных перемещений, из последнего выражения получим систему уравнений равновесия

$$\frac{\partial(A_2 N_1)}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{21})}{\partial\alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{13}}{R_1} + P_1^{(0)} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial(A_2 M_1^{(k)})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{21}^{(k)})}{\partial\alpha_2} - M_2^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{13}^{(k)}}{R_1} - T_1^{(k)} + P_1^{(k)} \right) = 0,$$

$$k = \overline{1, 3},$$

$$\frac{\partial(A_1 N_2)}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial(A_2 N_{12})}{\partial\alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{23}}{R_2} + P_2^{(0)} \right) = 0, \tag{1.19}$$

$$\frac{\partial(A_1 M_2^{(k)})}{\partial\alpha_2} + \frac{\partial(A_2 M_{12}^{(k)})}{\partial\alpha_1} - M_1^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2} + M_{21}^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{23}^{(k)}}{R_2} - T_2^{(k)} + P_2^{(k)} \right) = 0,$$

$$k = \overline{1, 3},$$

$$\frac{\partial(A_2 Q_{13})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1 Q_{23})}{\partial\alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - P_3^{(0)} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial(A_2 M_{13}^{(k)})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{23}^{(k)})}{\partial\alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{M_1^{(k)}}{R_1} + \frac{M_2^{(k)}}{R_2} + T_3^{(k)} - P_3^{(k)} \right) = 0,$$

$$k = \overline{1, 2}.$$

$$\frac{\partial(A_2 N D_{11}^{(0)})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_2 N D_{22}^{(0)})}{\partial\alpha_2} + A_1 A_2 (Q^+ + Q^-) = 0,$$

$$\frac{\partial(A_2 M D_{11}^{(1)})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_2 M D_{22}^{(1)})}{\partial\alpha_2} - A_1 A_2 N D_{33}^{(0)} + A_1 A_2 (hQ^+ - hQ^-) = 0,$$

$$\frac{\partial(A_2 M D_{11}^{(2)})}{\partial\alpha_1} + \frac{\partial(A_2 M D_{22}^{(1)})}{\partial\alpha_2} - 2A_1 A_2 M D_{33}^{(1)} + A_1 A_2 (h^2 Q^+ + h^2 Q^-) = 0.$$

Обозначим электрический потенциал на верхней φ^+ и нижней φ^- поверхностях оболочки соответственно, т.е

$$\varphi \Big|_{\alpha_3=h} = \varphi^+, \quad \varphi \Big|_{\alpha_3=-h} = \varphi^-. \quad (1.20)$$

Подставляя (1.20) в (1.10), получим

$$\varphi_1 = \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2h}, \quad \varphi_2 = -\frac{\varphi_0}{h^2} + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2h^2}. \quad (1.21)$$

На основании (1.21) три последние уравнения системы (1.19) упрощаются, уменьшаются на одно уравнение и электрический потенциал оболочки будет зависеть только от величины φ_0 ,

$$\left(\frac{2h^2 \partial(A_2 ND_{11}^{(0)})}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial(A_2 MD_{11}^{(2)})}{\partial \alpha_1} \right) + \left(\frac{h^2 \partial(A_2 ND_{22}^{(0)})}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial(A_2 MD_{22}^{(1)})}{\partial \alpha_2} \right) - A_1 A_2 ND_{33}^{(0)} = 0.$$

Система уравнений электромеханического равновесия произвольных оболочек представляется в виде:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(A_2 N_1)}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 N_{21})}{\partial \alpha_2} - N_2 \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + N_{12} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{13}}{R_1} + P_1^{(0)} \right) = 0, \\ & \frac{\partial(A_2 M_1^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{21}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - M_2^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + M_{12}^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{13}^{(k)}}{R_1} - T_1^{(k)} + P_1^{(k)} \right) = 0, \\ & k = \overline{1,3}, \\ & \frac{\partial(A_1 N_2)}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 N_{12})}{\partial \alpha_1} - N_1 \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + N_{21} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{Q_{23}}{R_2} + P_2^{(0)} \right) = 0, \\ & \frac{\partial(A_1 M_2^{(k)})}{\partial \alpha_2} + \frac{\partial(A_2 M_{12}^{(k)})}{\partial \alpha_1} - M_1^{(k)} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} + M_{21}^{(k)} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} + A_1 A_2 \left(\frac{M_{23}^{(k)}}{R_2} - T_2^{(k)} + P_2^{(k)} \right) = 0, \\ & k = \overline{1,3}, \\ & \frac{\partial(A_2 Q_{13})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 Q_{23})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{N_1}{R_1} + \frac{N_2}{R_2} - P_3^{(0)} \right) = 0, \\ & \frac{\partial(A_2 M_{13}^{(k)})}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial(A_1 M_{23}^{(k)})}{\partial \alpha_2} - A_1 A_2 \left(\frac{M_1^{(k)}}{R_1} + \frac{M_2^{(k)}}{R_2} + T_3^{(k)} - P_3^{(k)} \right) = 0, k = \overline{1,2}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\left(\frac{2h^2 \partial(A_2 D_{11}^{(0)})}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial(A_2 D_{11}^{(2)})}{\partial \alpha_1} \right) + \left(\frac{h^2 \partial(A_2 D_{22}^{(0)})}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial(A_2 D_{22}^{(1)})}{\partial \alpha_2} \right) - A_1 A_2 D_{33}^{(0)} = 0.$$

Граничные условия представляются в следующем виде:

на краях $\alpha_1 = \alpha_1^{(1)}$ и $\alpha_1 = \alpha_1^{(2)}$:

$$u_0 = \overline{u}_0 \vee N_1 = \overline{N}_1; v_0 = \overline{v}_0 \vee N_{12} = \overline{N}_{12}; w_0 = \overline{w}_0 \vee Q_{13} = \overline{Q}_{13};$$

$$u_k = \overline{u}_k \vee M_1^{(k)} = \overline{M}_1^{(k)}; v_k = \overline{v}_k \vee M_{12}^{(k)} = \overline{M}_{12}^{(k)}; k = \overline{1, 3};$$

$$w_k = \overline{w}_k \vee M_{13}^{(l)} = \overline{M}_{13}^{(l)}; l = \overline{1, 2};$$

$$\varphi_i^{(k)} = 0 \cup ND_{ii}^{(0)} = MD_{ii}^{(k)} = 0;$$

на краях $\alpha_2 = \alpha_2^{(1)}$ и $\alpha_2 = \alpha_2^{(2)}$

$$u_0 = \overline{u}_0 \vee N_{21} = \overline{N}_{21}; v_0 = \overline{v}_0 \vee N_2 = \overline{N}_2; w_0 = \overline{w}_0 \vee Q_{23} = \overline{Q}_{23};$$

$$u_k = \overline{u}_k \vee M_{21}^{(k)} = \overline{M}_{21}^{(k)}; v_k = \overline{v}_k \vee M_2^{(k)} = \overline{M}_2^{(k)}, k = \overline{1, 3};$$

$$w_k = \overline{w}_k \vee M_{23}^{(l)} = \overline{M}_{23}^{(l)}; l = \overline{1, 2};$$

$$\varphi_i^{(k)} = 0 \cup ND_{ii}^{(0)} = MD_{ii}^{(k)} = 0,$$

где $\overline{u}_k, \overline{v}_k, \overline{w}_l, k = 0..3, l = 0..2$ – перемещения, заданные на краях оболочки в соответствии с граничными условиями.

Для края $\alpha_1 = const$ имеем следующие варианты граничных условий:

$$\sigma_{11}^{(k)} = \sigma_{11}^{\Gamma(k)} \cup u_k = u_k^{\Gamma}; \sigma_{21}^{(k)} = \sigma_{21}^{\Gamma(k)} \cup v_k = v_k^{\Gamma}; k = \overline{0, 3};$$

$$\varphi_i^{(k)} = 0 \cup D_{ii}^{(k)} = 0; \sigma_{13}^{(k)} = \sigma_{13}^{\Gamma(k)} \cup w_k = w_k^{\Gamma}; k = \overline{0, 2}.$$

Граничные условия на краю $\alpha_2 = const$ принимаются как

$$\sigma_{22}^{(k)} = \sigma_{22}^{\Gamma(k)} \cup u_k = u_k^{\Gamma}; \sigma_{12}^{(k)} = \sigma_{12}^{\Gamma(k)} \cup v_k = v_k^{\Gamma}; k = \overline{0, 3};$$

$$\varphi_i^{(k)} = 0 \cup D_{ii}^{(k)} = 0; \sigma_{23}^{(k)} = \sigma_{23}^{\Gamma(k)} \cup w_k = w_k^{\Gamma}; k = \overline{0, 2}.$$

Краевые условия (1.22), (1.23) охватывают все возможные условия закрепления оболочки и их количество полностью соответствует порядку системы дифференциальных уравнений (1.11) уточненной теории.

При стандартном закреплении краев оболочки воспользуемся стандартными краевыми условиями трехмерной теории электроупругости:

свободный край

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(1)} \text{ и } \alpha_1 = \alpha_1^{(2)}:$$

$$\overline{N}_1 = \overline{N}_{12} = \overline{M}_1^{(k)} = \overline{M}_{12}^{(k)} = \overline{Q}_{13} = \overline{M}_{13}^{(l)} = \varphi_k = 0; \quad k = \overline{1,3}, \quad l = \overline{1,2};$$

$$\alpha_2 = \alpha_2^{(1)} \text{ и } \alpha_2 = \alpha_2^{(2)}:$$

$$\overline{N}_{21} = \overline{N}_2 = \overline{M}_{21}^{(k)} = \overline{M}_2^{(k)} = \overline{Q}_{23} = \overline{M}_{23}^{(l)} = \varphi_k = 0; \quad k = \overline{1,3}, \quad l = \overline{1,2};$$

шарнирно опертый край

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(1)} \text{ и } \alpha_1 = \alpha_1^{(2)}:$$

$$\overline{N}_1 = \overline{N}_{12} = \overline{M}_1^{(k)} = \overline{M}_{12}^{(k)} = w_l = \varphi_k = 0 \text{ или}$$

$$\overline{N}_1 = \overline{M}_1^{(k)} = v_0 = v_k = w_l = \varphi_k = 0; \quad k = \overline{1,3}, \quad l = \overline{0,2};$$

$$\alpha_2 = \alpha_2^{(1)} \text{ и } \alpha_2 = \alpha_2^{(2)}:$$

$$\overline{N}_{21} = \overline{N}_2 = \overline{M}_{21}^{(k)} = \overline{M}_2^{(k)} = w_l = \varphi_k = 0 \text{ или}$$

$$\overline{N}_2 = \overline{M}_2^{(k)} = u_0 = u_k = w_l = \varphi_k = 0; \quad k = \overline{1,3}; \quad l = \overline{0,2};$$

жестко защемленный край

$$\alpha_1 = \alpha_1^{(1)} \text{ и } \alpha_1 = \alpha_1^{(2)}: \quad u_0 = u_k = v_0 = v_k = w_l = \varphi_k = 0 \text{ или}$$

$$u_0 = u_k = \overline{N}_{12} = \overline{M}_{12}^{(k)} = w_l = \varphi_k = 0; \quad k = \overline{1,3}; \quad l = \overline{1,2};$$

$$\alpha_2 = \alpha_2^{(1)} \text{ и } \alpha_2 = \alpha_2^{(2)}: \quad u_0 = u_k = v_0 = v_k = w_l = \varphi_k = 0 \text{ или}$$

$$v_0 = v_k = \overline{N}_{21} = \overline{M}_{21}^{(k)} = w_l = \varphi_k = 0; \quad k = \overline{1,3}; \quad l = \overline{1,2}.$$

В случае, если оболочка является частично или полностью замкнутой, краевые условия по направлению замкнутых координат заменяются условиями периодичности, обеспечивающими однозначность перемещений в любой точке замкнутой системы координат.

Алгоритм определения напряженно-деформированного состояния

Подставляя компоненты напряжений и электрических индукций из уравнений электроупругости (1.8) с учетом формул (1.3), (1.7) и (1.21) в выражения для обобщенных усилий и моментов (1.16), а затем полученные выражения в уравнения равновесия (1.22), находим систему дифференциальных уравнений в частных производных 24-го порядка относительно 11 обобщенных перемещений ($u_k, v_k, w_l, k = \overline{0..3}; l = \overline{0..2}$) и электрический потенциал φ_0 . Решая сформулированную систему уравнений с учетом граничных условий (1.23), (1.24), получим искомые обобщенные перемещения и электрический потенциал.

Компоненты деформации оболочки определяются при подстановке найденных перемещений в геометрические соотношения (1.3). Тангенциальные напряжения получаются из уравнений (1.8).

Поперечные компоненты напряжения оболочки [84, 98, 111-114] находятся интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории электроупругости, т.е. в виде

$$\begin{aligned}
 \sigma_{13} = & -\frac{1}{a_1^2 a_2} \int_{-h}^{\alpha_3} \left[\frac{a_1 a_2}{A_1} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \alpha_1} + \frac{a_1^2}{A_2} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha_2} + \frac{a_1^2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \right. \\
 & \left. + \frac{2a_1 a_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{12} \right] d\alpha_3 + \frac{(a_1^2 a_2)_{\alpha_3=-h}}{a_1^2 a_2} q_{13}^-, \\
 \sigma_{23} = & -\frac{1}{a_1 a_2^2} \int_{-h}^{\alpha_3} \left[\frac{a_1 a_2}{A_2} \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial \alpha_2} + \frac{a_2^2}{A_1} \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \alpha_1} + \frac{a_2^2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} (\sigma_{22} - \sigma_{11}) + \right. \\
 & \left. + \frac{2a_1 a_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{12} \right] d\alpha_3 + \frac{(a_1 a_2^2)_{\alpha_3=-h}}{a_1 a_2^2} q_{23}^-, \\
 \sigma_{33} = & -\frac{1}{a_1 a_2} \int_{-h}^{\alpha_3} \left[\frac{a_2}{A_1} \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial \alpha_1} + \frac{a_1}{A_2} \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial \alpha_2} - \frac{a_2}{R_1} \sigma_{11} - \frac{a_1}{R_2} \sigma_{22} + \frac{a_1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1} \sigma_{13} + \right. \\
 & \left. + \frac{a_2}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2} \sigma_{23} \right] d\alpha_3 + \frac{(a_1 a_2)_{\alpha_3=-h}}{a_1 a_2} q_{33}^-.
 \end{aligned} \tag{1.25}$$

С помощью данного алгоритма напряженно-деформированное состояние оболочек полностью определяется. При этом удовлетворяются уравнения равновесия теории упругости во всех внутренних точках оболочки и выполняются граничные условия на всей ее поверхности.

1.4. Выводы к первой главе

1. Представлен обзор литературы по основным направлениям развития теории пластин и оболочек, показана актуальность темы диссертации и намечены основные задачи исследования напряженно-деформированного состояния произвольных оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта.

2. На основе трехмерных уравнений теории упругости и закона электростатики в ортогональной криволинейной системе координат с помощью вариационного принципа Лагранжа построена математическая модель расчета электромеханического состояния произвольных оболочек, обладающих свойством поляризации и сформулированы соответствующие граничные условия.

3. Разработан алгоритм определения НДС произвольных оболочек с учетом пьезоэффекта, при котором удовлетворяются уравнения равновесия трехмерной теории электроупругости во всех внутренних точках оболочки и выполняются граничные условия на лицевых и торцевых поверхностях.

ГЛАВА II. ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОЕ СОСТОЯНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПЬЕЗОЭФФЕКТА

В данной главе представлена математическая модель электромеханического состояния цилиндрических оболочек с учетом пьезоэффекта. Сформулированная задача электроупругости решается путем приведения трехмерных уравнений к двумерным.

Система уравнений равновесия в перемещениях и электрических потенциалах приведена к обыкновенным дифференциальным уравнениям с помощью метода разложения компонентов электроупругостного состояния и внешних нагрузок в тригонометрические ряды по продольной координате. Решение краевой задачи осуществляется операционным методом, основанном на преобразовании Лапласа.

Приведены результаты параметрических исследований НДС цилиндрических оболочек с учетом пьезоэффекта под действием произвольных механических нагрузок и электрических потенциалов на верхних и нижних поверхностях оболочки.

Указанная математическая модель цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта по сравнению с классической теорией дает более достоверные результаты. Кроме того, установлено, что имеют место значительные по величине поперечные нормальные напряжения типа “погранслои” вблизи жестко закрепленных краев, которыми в классической теории пренебрегают.

2.1. Электроупругое состояние цилиндрических оболочек из пьезоматериалов

Рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку из пьезоэлектрического материала радиуса R , длиной L , толщиной $2h$, отнесенную к триортогональной криволинейной системе координат $\xi\theta z$ (рис.2.1). Относительная толщина оболочки $S = R/2h$.

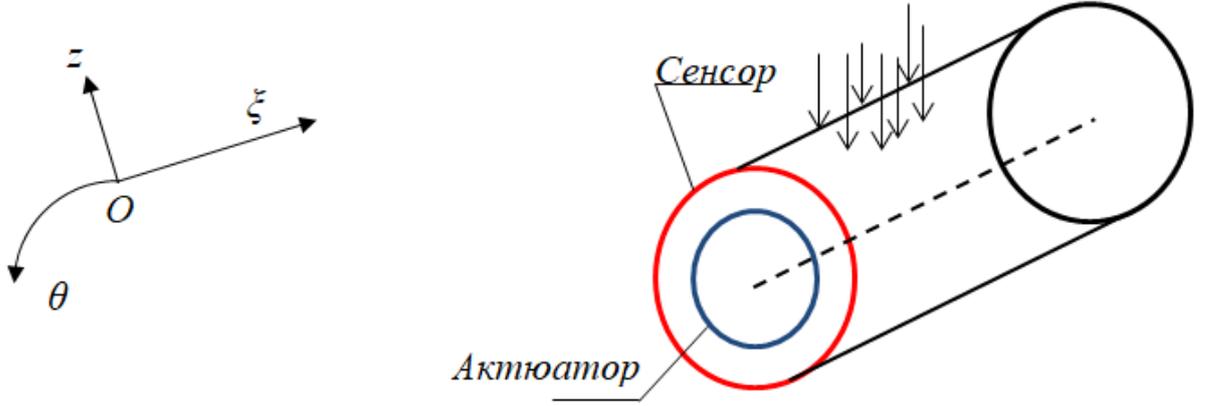


Рис.2. 1. Цилиндрическая оболочка с сенсором и акьюатором

При замене $R_2 = R$, $R_1 = \infty$ и $H_2 = R$, $H_1 = R + z$ в системе уравнений равновесия произвольных оболочек с учетом пьезоэффекта (1.22) получим модель электромеханического состояния цилиндрических оболочек

$$\begin{aligned}
 & \left(K_{d2\xi}^{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{d2\theta}^{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + K_{d1\xi}^{\varphi} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 \left(K_{d2\xi}^{u_j} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{d2\theta}^{u_j} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + K_{d1\xi}^{u_j} \right) u_j + \\
 & + \sum_{j=0}^3 K_{d2\xi}^{v_j} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_j + \sum_{j=0}^2 K_{d1\xi}^{w_j} \frac{\partial}{\partial \xi} w_j + \left(K_i^{q_{13}^+} q_{13}^+ + K_i^{q_{13}^-} q_{13}^- \right) = 0, \quad (i=\overline{1,4}) \\
 & \left(K_{d2\xi\theta}^{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} + K_{d1\theta}^{\varphi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 K_{d2\xi\theta}^{u_j} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_j + \sum_{j=0}^3 \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{d2\theta}^{v_j} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + K_{d1\theta}^{v_j} \right) v_j + \\
 & + \sum_{j=0}^2 K_{d1\theta}^{w_j} \frac{\partial}{\partial \theta} w_j + \left(K_i^{q_{23}^+} q_{23}^+ + K_i^{q_{23}^-} q_{23}^- \right) = 0, \quad (i=\overline{5,8}) \\
 & \left(K_{d2\xi}^{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{d1\xi}^{\varphi} \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 K_{d1\xi}^{u_j} \frac{\partial}{\partial \xi} u_j + \sum_{j=0}^2 \left(K_{d2\xi}^{w_j} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{d2\theta}^{w_j} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + K_{d1\xi}^{w_j} \right) w_j + \\
 & + \sum_{j=0}^3 K_{d1\theta}^{v_j} \frac{\partial}{\partial \theta} v_j + \left(K_i^{q_{33}^+} q_{33}^+ + K_i^{q_{33}^-} q_{33}^- \right) + \left(K_i^{\varphi^+} \varphi^+ + K_i^{\varphi^-} \varphi^- \right) = 0, \quad (i=\overline{9,11}) \quad (2.1) \\
 & \left(K_{12d2\xi}^{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + K_{12d2\theta}^{\varphi} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + K_{12}^{\varphi_0} \right) \varphi_0 + \sum_{j=0}^3 K_{12d1\xi}^{u_j} \frac{\partial}{\partial \xi} u_j + \sum_{j=1}^3 K_{12d1\theta}^{v_j} \frac{\partial}{\partial \theta} v_j + \sum_{j=0}^2 K_{12}^{w_j} w_j + \\
 & + \left(K_{12}^{\varphi^+} \varphi^+ + K_{12}^{\varphi^-} \varphi^- \right) = 0.
 \end{aligned}$$

где электромеханические коэффициенты принимают следующие значения:

$$K_{1d2\xi}^{\varphi_o} = 0; \quad K_{1d2\theta}^{\varphi_o} = \frac{2}{3} \frac{e_{24}}{S}; \quad K_{1d2\xi}^{u_o} = \frac{C_{11}}{S}; \quad K_{1d2\theta}^{u_o} = \frac{1}{80} \frac{C_{44}(80S^4 - 1)}{S^5};$$

$$K_{1d2\xi}^{u_3} = \frac{1}{480} \frac{C_{11}R^3}{S^5}; \quad K_{1d2\xi}^{u_1} = \frac{1}{12} \frac{C_{11}R}{S^3}; \quad K_{1d2\theta}^{u_1} = \frac{1}{80} \frac{C_{44}R}{S^5};$$

$$K_{1d2\xi}^{u_2} = \frac{1}{24} \frac{C_{11}R^2}{S^3}; \quad K_{1d2\theta}^{u_2} = \frac{1}{480} \frac{C_{44}R^2(20S^2 - 3)}{S^5}; \quad K_{1d2\theta}^{u_3} = \frac{1}{480} \frac{C_{44}R^3}{S^5};$$

$$K_{1d2\xi\theta}^{v_o} = \frac{1}{80} \frac{80C_{12}S^4 + 80C_{44}S^4 - C_{12}}{S^5}; \quad K_{1d2\xi\theta}^{v_1} = \frac{1}{240} \frac{R(20C_{44}S^2 + 3C_{12})}{S^5};$$

$$K_{1d2\xi\theta}^{v_2} = \frac{1}{480} \frac{R^2(20C_{12}S^2 + 20C_{44}S^2 - 3C_{12})}{S^5}; \quad K_{1d2\xi\theta}^{v_3} = \frac{1}{480} \frac{R^3(C_{12} + C_{44})}{S^5};$$

$$K_{1d1\xi}^{w_o} = \frac{1}{80} \frac{C_{12}(80S^4 - 1)}{S^5}; \quad K_{1d1\xi}^{w_1} = \frac{1}{80} \frac{R(80C_{13}S^4 + C_{12})}{S^5};$$

$$K_{1d1\xi}^{w_2} = \frac{1}{480} \frac{R^2(20C_{12}S^2 + 40C_{13}S^2 - 3C_{12})}{S^5}; \quad K_{1d1\xi}^{\varphi_0} = -\frac{2}{3} \frac{e_{31}}{S};$$

$$K_1^{u_o} = 0; \quad K_1^{u_1} = 0; \quad K_1^{u_2} = 0; \quad K_1^{u_3} = 0; \quad K_{2d2\xi}^{u_o} = \frac{1}{12} \frac{C_{11}R}{S^3}; \quad K_{2d2\theta}^{u_o} = 0;$$

$$K_{2d2\xi}^{\varphi_o} = 0; \quad K_{2d2\theta}^{\varphi_o} = -\frac{1}{448} \frac{Re_{24}(2S - 1)(2S + 1)}{S^7}; \quad K_{2d2\xi}^{u_1} = \frac{1}{12} \frac{C_{11}R^2}{S^3}; \quad K_{2d2\theta}^{u_1} = \frac{1}{12} \frac{C_{44}R^2}{S^3};$$

$$K_{2d2\xi}^{u_2} = \frac{1}{160} \frac{C_{11}R^3}{S^5}; \quad K_{2d2\theta}^{u_2} = 0; \quad K_{2d2\xi}^{u_3} = \frac{1}{480} \frac{C_{11}R^4}{S^5}; \quad K_{2d2\theta}^{u_3} = \frac{1}{480} \frac{C_{44}R^4}{S^5}; \quad K_{2d2\xi\theta}^{v_o} = \frac{1}{12} \frac{C_{44}R}{S^3};$$

$$K_{2d2\xi\theta}^{v_1} = \frac{1}{12} \frac{R^2(C_{44} + C_{12})}{S^3}; \quad K_{2d2\xi\theta}^{v_2} = \frac{1}{160} \frac{R^3C_{44}}{S^5}; \quad K_{2d2\xi\theta}^{v_3} = \frac{1}{480} \frac{R^4(C_{44} + C_{12})}{S^5};$$

$$K_{2d1\xi}^{w_o} = \frac{RC_{55}}{S}; \quad K_{2d1\xi}^{w_1} = \frac{1}{12} \frac{R^2(C_{12} + C_{13} - C_{55})}{S^3}; \quad K_{2d1\xi}^{w_2} = \frac{1}{24} \frac{R^3(2C_{13} - C_{55})}{S^3};$$

$$K_{2d1\xi}^{\varphi_o} = -\frac{2}{3} \frac{R(e_{15} + e_{31})}{S}; \quad K_2^{u_o} = 0; \quad K_2^{u_1} = -\frac{C_{55}R^2}{S}; \quad K_2^{u_2} = -\frac{1}{12} \frac{C_{55}R^3}{S^3}; \quad K_2^{u_3} = -\frac{1}{24} \frac{C_{55}R^4}{S^3};$$

$$\begin{aligned}
K_{3d2\xi}^{\varphi_o} &= 0; \quad K_{3d2\theta}^{\varphi_o} = \frac{1}{60} \frac{R^2 e_{24}}{S^3}; \quad K_{3d2\xi}^{u_o} = \frac{1}{24} \frac{C_{11} R^2}{S^3}; \quad K_{3d2\theta}^{u_o} = \frac{1}{2688} \frac{R^2 C_{44} (112S^4 - 3)}{S^5}; \\
K_{3d2\xi}^{u_1} &= \frac{1}{160} \frac{C_{11} R^3}{S^5}; \quad K_{3d2\theta}^{u_1} = \frac{1}{896} \frac{R^3 C_{44}}{S^7}; \quad K_{3d2\xi}^{u_2} = \frac{1}{320} \frac{C_{11} R^4}{S^5}; \quad K_{3d2\theta}^{u_2} = \frac{1}{8690} \frac{R^4 C_{44} (28S^2 - 5)}{S^5}; \\
K_{3d2\xi\theta}^{v_o} &= \frac{1}{2688} \frac{R^2 (112C_{12}S^4 + 112C_{44}S^4 - 3C_{12})}{S^7}; \quad K_{3d2\xi\theta}^{v_1} = \frac{1}{4480} \frac{R^3 (28C_{44}S^2 + 5C_{12})}{S^7}; \\
K_{3d2\xi\theta}^{v_2} &= \frac{1}{8960} \frac{R^4 (28C_{12}S^2 + 28C_{44}S^2 - 5C_{12})}{S^5}; \quad K_{3d2\xi\theta}^{v_3} = \frac{1}{5376} \frac{R^5 (C_{12} + C_{44})}{S^7}; \\
K_{3d1\xi}^{w_o} &= \frac{1}{2688} \frac{R^2 (112C_{13}S^4 - 224C_{55}S^4 - 3C_{12})}{S^7}; \quad K_{3d1\xi}^{w_1} = \frac{1}{2688} \frac{R^3 (112C_{13}S^4 - 224C_{55}S^4 + 3C_{12})}{S^7}; \\
K_{3d1\xi}^{w_2} &= \frac{1}{8960} \frac{R^4 (28C_{12}S^2 + 56C_{13}S^2 - 56C_{55}S^2 - 5C_{12})}{S^7}; \quad K_{3d1\xi}^{\varphi_o} = -\frac{1}{60} \frac{R^2 (2e_{15} + 3e_{31})}{S^3}; \\
K_3^{u_o} &= 0; \quad K_3^{u_1} = -\frac{1}{12} \frac{C_{55} R^3}{S^3}; \quad K_3^{u_2} = -\frac{1}{12} \frac{C_{55} R^4}{S^3}; \quad K_3^{u_3} = -\frac{1}{160} \frac{C_{55} R^5}{S^5}; \\
K_{4d2\xi}^{\varphi_o} &= 0; \quad K_{4d2\theta}^{\varphi_o} = -\frac{1}{13824} \frac{R^3 e_{24} (2S-1)(2S+1)}{S^9}; \quad K_{4d2\xi}^{u_o} = \frac{1}{480} \frac{C_{11} R^3}{S^5}; \quad K_{4d2\theta}^{u_o} = 0; \\
K_{4d2\xi}^{u_1} &= \frac{1}{480} \frac{C_{11} R^4}{S^5}; \quad K_{4d2\theta}^{u_1} = \frac{1}{480} \frac{C_{44} R^4}{S^5}; \quad K_{4d2\xi}^{u_2} = \frac{1}{5376} \frac{C_{11} R^5}{S^7}; \quad K_{4d2\theta}^{u_2} = 0; \\
K_{4d2\xi}^{u_3} &= \frac{1}{16128} \frac{C_{11} R^6}{S^7}; \quad K_{4d2\theta}^{u_3} = \frac{1}{16128} \frac{C_{44} R^6}{S^7}; \quad K_{4d1\xi}^{w_o} = -\frac{1}{24} \frac{R^3 C_{55}}{S^3}; \\
K_{4d1\xi}^{w_1} &= \frac{1}{480} \frac{R^4 (C_{12} + C_{13} + 3C_{55})}{S^5}; \quad K_{4d1\xi}^{w_2} = \frac{1}{960} \frac{R^5 (2C_{13} - 3C_{55})}{S^5}; \quad K_4^{u_3} = -\frac{1}{320} \frac{R^6 C_{55}}{S^5}; \\
K_{4d1\xi}^{\varphi_o} &= -\frac{1}{60} \frac{R^3 (e_{15} + e_{31})}{S^3}; \quad K_4^{u_o} = 0; \quad K_4^{u_1} = -\frac{1}{24} \frac{R^4 C_{55}}{S^3}; \quad K_4^{u_2} = -\frac{1}{160} \frac{R^5 C_{55}}{S^5}; \\
K_{5d2\xi}^{\varphi_o} &= 0; \quad K_{5d2\theta}^{\varphi_o} = 0; \quad K_{5d2\xi\theta}^{\varphi_o} = \frac{1}{240} \frac{e_{24} (160S^4 + 8S^2 + 3)}{S^5}; \quad K_{5d2\xi\theta}^{u_2} = 0;
\end{aligned}$$

$$K_{5d2\xi\theta}^{u_0} = \frac{1}{12} \frac{12C_{21}S^2 + 12C_{44}S^2 + C_{44}}{S^3}; K_{5d2\xi\theta}^{u_1} = -\frac{1}{12} \frac{RC_{44}}{S^3}; K_{5d2\xi\theta}^{u_2} = \frac{1}{24} \frac{R^2(C_{21} + C_{44})}{S^3};$$

$$K_{5d2\xi}^{v_0} = \frac{C_{44}}{S}; K_{5d2\theta}^{v_0} = \frac{1}{12} \frac{C_{22}(12S^2 + 1)}{S^3}; K_{5d2\xi}^{v_1} = 0; K_{5d2\theta}^{v_1} = -\frac{1}{12} \frac{C_{22}R}{S^3};$$

$$K_{5d2\xi}^{v_2} = \frac{1}{24} \frac{R^2C_{44}}{S^3}; K_{5d2\theta}^{v_2} = \frac{1}{24} \frac{R^2C_{22}}{S^3}; K_{5d2\xi}^{v_3} = 0; K_{5d2\theta}^{v_3} = 0;$$

$$K_{5d1\theta}^{w_0} = \frac{1}{12} \frac{(C_{22} + C_{66})(12S^2 + 1)}{S^3}; K_{5d1\theta}^{w_1} = -\frac{1}{12} \frac{(C_{22} + C_{66} - 12C_{23}S^2)R}{S^3};$$

$$K_5^{v_3} = \frac{1}{24} \frac{C_{66}R^3}{S^3}; K_{5d1\theta}^{w_2} = \frac{1}{24} \frac{(C_{22} + C_{66})R^2}{S^3};$$

$$K_5^{v_0} = -\frac{1}{12} \frac{C_{66}(12R^2 + 1)}{S^3}; K_5^{v_1} = \frac{1}{12} \frac{C_{66}R(12R^2 + 1)}{S^3}; K_5^{v_2} = -\frac{1}{24} \frac{C_{66}R^2}{S^3};$$

$$K_{6d2\xi}^{\phi_0} = 0; K_{6d2\theta}^{\phi_0} = 0; K_{6d2\xi\theta}^{\phi_0} = -\frac{1}{240} \frac{Re_{24}(8S^2 + 3)}{S^5}; K_{6d2\xi\theta}^{u_0} = -\frac{1}{240} \frac{RC_{24}(20S^2 + 3)}{S^5};$$

$$K_{6d2\xi\theta}^{u_1} = \frac{1}{240} \frac{R^2(20C_{21}S^2 + 20C_{44}S^2 + 3C_{44})}{S^5}; K_{6d2\xi\theta}^{u_2} = \frac{1}{240} \frac{R^3C_{44}}{S^5};$$

$$K_{6d2\xi\theta}^{u_3} = \frac{1}{480} \frac{R^4(C_{44} + C_{21})}{S^5}; K_{6d2\xi}^{v_0} = 0; K_{6d2\xi}^{v_1} = \frac{1}{12} \frac{R^2C_{44}}{S^3};$$

$$K_{6d2\xi}^{v_2} = 0; K_{6d2\xi}^{v_3} = \frac{1}{480} \frac{R^4C_{44}}{S^5}; K_{6d2\theta}^{v_0} = -\frac{1}{240} \frac{RC_{22}(20S^2 + 3)}{S^5};$$

$$K_{6d2\theta}^{v_1} = \frac{1}{240} \frac{RC_{22}(20S^2 + 3)}{S^5}; K_{6d2\theta}^{v_2} = -\frac{1}{160} \frac{R^3C_{22}}{S^5}; K_{6d2\theta}^{v_3} = \frac{1}{480} \frac{R^4C_{22}}{S^5};$$

$$K_{6d1\theta}^{\phi_0} = -\frac{2}{3} \frac{Re_{32}}{S}; K_{6d1\theta}^{w_0} = -\frac{1}{240} \frac{R(240C_{66}S^4 + 20C_{22}S^2 + 20C_{66}S^2 + 3C_{22})}{S^5};$$

$$K_{6d1\theta}^{w_1} = \frac{1}{240} \frac{R^2(20C_{22}S^2 + 20C_{66}S^2 + 3C_{22})}{S^5}; K_{6d1\theta}^{w_2} = -\frac{1}{480} \frac{R^3(-40C_{23}S^2 + 20C_{66}S^2 + 3C_{22})}{S^5};$$

$$K_6^{v_0} = \frac{1}{12} \frac{C_{66}R(12S^2+1)}{S^3}; K_6^{v_1} = -\frac{1}{12} \frac{C_{66}R^2(12S^2+1)}{S^3}; K_6^{v_2} = \frac{1}{24} \frac{C_{66}R^3}{S^3}; K_6^{v_3} = -\frac{1}{24} \frac{C_{66}R^4}{S^3};$$

$$K_{7d2\xi}^{\varphi_0} = 0; K_{7d2\theta}^{\varphi_0} = 0; K_{7d2\xi\theta}^{\varphi_0} = \frac{1}{13440} \frac{R^2 e_{24}(224S^4+8S^2+15)}{S^5}; K_{7d2\xi\theta}^{u_1} = -\frac{1}{160} \frac{R^3 C_{44}}{S^5}; K_{7d2\xi\theta}^{u_3} = 0;$$

$$K_{7d2\xi\theta}^{u_0} = \frac{1}{480} \frac{R^2(20C_{21}S^4+20C_{44}S^2+3C_{44})}{S^5}; K_{7d2\xi\theta}^{u_2} = \frac{1}{320} \frac{R^4(C_{21}+C_{44})}{S^5}; K_{7d2\xi}^{v_0} = \frac{1}{24} \frac{R^2 C_{44}}{S^3};$$

$$K_{7d2\xi}^{v_1} = 0; K_{7d2\xi}^{v_2} = \frac{1}{320} \frac{R^4 C_{44}}{S^5}; K_{7d2\xi}^{v_3} = 0; K_{7d2\theta}^{v_0} = \frac{1}{480} \frac{R^2 C_{22}(20S^2+3)}{S^5}; K_{7d2\theta}^{v_1} = -\frac{1}{160} \frac{R^3 C_{22}}{S^5};$$

$$K_{7d2\theta}^{v_2} = \frac{1}{320} \frac{R^4 C_{22}}{S^5}; K_{7d2\theta}^{v_3} = 0; K_{7d1\theta}^{w_0} = \frac{1}{480} \frac{R^2(20S^2+1)(C_{22}+C_{66})}{S^5}; K_{7d1\theta}^{w_2} = \frac{1}{320} \frac{R^4(C_{22}+C_{66})}{S^5};$$

$$K_{7d1\theta}^{w_1} = -\frac{1}{480} \frac{R^3(-20C_{23}S^2+40C_{66}S^2+3C_{22}+3C_{66})}{S^5}; K_7^{v_0} = -\frac{1}{480} \frac{C_{66}R^2(20S^2+3)}{S^5};$$

$$K_7^{v_1} = \frac{1}{480} \frac{C_{66}R^3(20S^2+3)}{S^5}; K_7^{v_2} = -\frac{1}{960} \frac{C_{66}R^4(80S^2+3)}{S^5}; K_7^{v_3} = -\frac{1}{960} \frac{C_{66}R^5}{S^5};$$

$$K_{8d2\xi}^{\varphi_0} = 0; K_{8d2\theta}^{\varphi_0} = 0; K_{8d2\xi\theta}^{\varphi_0} = -\frac{1}{13440} \frac{R^3 e_{24}(8S^2+5)}{S^7};$$

$$K_{8d2\xi\theta}^{u_0} = -\frac{1}{13440} \frac{R^3 C_{44}(28S^2+5)}{S^7}; K_{8d2\xi\theta}^{u_3} = \frac{1}{16128} \frac{R^6(C_{44}+C_{21})}{S^7};$$

$$K_{8d2\xi\theta}^{u_1} = \frac{1}{13440} \frac{R^4(28C_{21}S^2+28C_{44}S^2+5C_{44})}{S^7}; K_{8d2\xi\theta}^{u_2} = -\frac{1}{5376} \frac{R^5 C_{44}}{S^7};$$

$$K_{8d2\xi}^{v_0} = 0; K_{8d2\xi}^{v_1} = \frac{1}{480} \frac{R^4 C_{44}}{S^5}; K_{8d2\xi}^{v_2} = 0; K_{8d2\xi}^{v_3} = \frac{1}{16128} \frac{R^6 C_{44}}{S^7};$$

$$K_{8d2\theta}^{v_0} = -\frac{1}{13440} \frac{R^3 C_{22}(28S^2+5)}{S^7}; K_{8d2\theta}^{v_3} = \frac{1}{16128} \frac{R^6 C_{22}}{S^7};$$

$$K_{8d2\theta}^{v_1} = \frac{1}{13440} \frac{R^4 C_{22}(28S^2+5)}{S^7}; K_{8d2\theta}^{v_2} = -\frac{1}{5376} \frac{R^5 C_{22}}{S^7};$$

$$K_{8d1\theta}^{\phi_o} = -\frac{1}{60} \frac{R^3 e_{32}}{S^3}; K_{8d1\theta}^{w_o} = -\frac{1}{13440} \frac{R^3(560C_{66}S^4 + 28C_{22}S^2 + 28C_{66}S^2 + 5C_{22} - 10C_{66})}{S^7};$$

$$K_{8d1\theta}^{w_1} = \frac{1}{13440} \frac{R^4(28C_{22}S^2 + 28C_{66}S^2 + 5C_{22} - 10C_{66})}{S^7}; K_8^{v_1} = -\frac{1}{6720} \frac{C_{66}R^4(280S^4 + 20S^2 - 5)}{S^7};$$

$$K_{8d1\theta}^{w_2} = -\frac{1}{26880} \frac{R^5(-56C_{23}S^2 + 84C_{66}S^2 + 5C_{22} - 10C_{66})}{S^7};$$

$$K_8^{v_0} = \frac{1}{6720} \frac{C_{66}R^3(280S^4 + 14S^2 - 5)}{S^7}; K_8^{v_2} = -\frac{1}{13440} \frac{C_{66}R^5(14S^2 + 5)}{S^7};$$

$$K_8^{v_3} = -\frac{1}{40320} \frac{C_{66}R^6(12S^2 - 5)}{S^7}; K_{9d2\xi}^{\phi_o} = \frac{2}{3} \frac{e_{15}}{S}; K_{9d2\xi}^{w_o} = \frac{C_{55}}{S};$$

$$K_{9d2\xi}^{w_1} = \frac{1}{12} \frac{C_{55}R}{S^3}; K_{9d2\xi}^{w_2} = \frac{1}{24} \frac{C_{55}R^2}{S^3}; K_{9d1\theta}^{v_2} = -\frac{1}{24} \frac{(C_{66} + C_{22})R^2}{S^3};$$

$$K_{9d2\theta}^{w_o} = \frac{1}{12} \frac{C_{66}(12S^2 + 1)}{S^3}; K_{9d2\theta}^{w_1} = -\frac{1}{12} \frac{C_{66}R}{S^3}; K_{9d2\theta}^{w_2} = \frac{1}{24} \frac{C_{66}R^2}{S^3}; K_{9d1\xi}^{u_o} = -\frac{C_{21}}{S};$$

$$K_{9d1\xi}^{u_1} = \frac{C_{55}R}{S}; K_{9d1\xi}^{u_2} = -\frac{1}{24} \frac{(C_{21} - 2C_{55})R^2}{S^3}; K_{9d1\xi}^{u_3} = \frac{1}{24} \frac{C_{55}R^2}{S^3}; K_{9d1\theta}^{v_3} = \frac{1}{24} \frac{C_{66}R^3}{S^3};$$

$$K_{9d1\theta}^{v_o} = -\frac{1}{12} \frac{(C_{22} + C_{66})(12S^2 + 1)}{S^3}; K_{9d1\theta}^{v_1} = \frac{1}{12} \frac{(C_{22} + C_{66} + 12S^2C_{66})R}{S^3};$$

$$K_9^{\phi^+} = -e_{32}; K_9^{\phi^-} = e_{32}; K_9^{w_o} = -\frac{1}{12} \frac{C_{22}(12S^2 + 1)}{S^3}; K_9^{w_1} = \frac{1}{12} \frac{R(-12C_{23}S^2 + C_{22})}{S^3};$$

$$K_9^{w_2} = -\frac{1}{24} \frac{C_{22}R^2}{S^3}; K_9^{q_{33}^+} = -\frac{1}{2} \frac{(2S - 1)R}{S}; K_9^{q_{33}^-} = \frac{1}{2} \frac{(2S + 1)R}{S};$$

$$K_{10d2\xi}^{\phi_o} = \frac{1}{30} \frac{Re_{15}}{S^3}; K_{10d2\xi}^{w_o} = \frac{1}{12} \frac{RC_{55}}{S^3}; K_{10d2\xi}^{w_1} = \frac{1}{12} \frac{R^2C_{55}}{S^3}; K_{10d2\xi}^{w_2} = \frac{1}{160} \frac{R^3C_{55}}{S^5};$$

$$K_{10d2\theta}^{w_o} = -\frac{1}{240} \frac{RC_{66}(20S^2 + 3)}{S^5}; K_{10d2\theta}^{w_1} = \frac{1}{240} \frac{R^2C_{66}(20S^2 + 3)}{S^5}; K_{10d2\theta}^{w_2} = -\frac{1}{160} \frac{R^3C_{66}}{S^5};$$

$$K_{10d1\xi}^{u_o} = -\frac{RC_{31}}{S}; K_{10d1\xi}^{u_1} = -\frac{1}{12} \frac{R^2(C_{21} + C_{31} - C_{55})}{S^3}; K_{10d1\xi}^{u_2} = -\frac{1}{24} \frac{R^3(C_{31} - 2C_{55})}{S^3};$$

$$K_{10d1\xi}^{u_3} = -\frac{1}{480} \frac{R^4(C_{21} + C_{31} - 3C_{55})}{S^5}; K_{10d1\theta}^{v_3} = -\frac{1}{480} \frac{R^4(C_{22} + C_{32} + C_{66})}{S^5};$$

$$K_{10d1\theta}^{v_o} = \frac{1}{240} \frac{R(-240C_{32}S^4 + 20C_{22}S^2 + 20C_{66}S^2 + 3C_{22} + 3C_{32} + 3C_{66})}{S^5};$$

$$K_{10d1\theta}^{v_1} = -\frac{1}{240} \frac{R^2(20C_{22}S^2 + 20C_{66}S^2 + 3C_{22} + 3C_{32} + 3C_{66})}{S^5};$$

$$K_{10}^{\varphi^+} = -\frac{1}{3} \frac{R(3Se_{33} + e_{32} + e_{33})}{S}; K_{10}^{\varphi^-} = \frac{1}{3} \frac{R(3Se_{33} - e_{32} - e_{33})}{S};$$

$$K_{10d1\theta}^{v_2} = \frac{1}{480} \frac{R^3(-20C_{22}S^2 + 40C_{66}S^2 + 3C_{22} + 3C_{32} + 3C_{66})}{S^5};$$

$$K_{10}^{w_o} = \frac{1}{240} \frac{(-240C_{32}S^4 + 20C_{22}S^2 + 3C_{22} + 3C_{32})R}{S^5}; K_{10}^{w_1} = -\frac{1}{240} \frac{(240C_{33}S^4 + 20C_{22}S^2 + 3C_{22} + 3C_{32})R^2}{S^5};$$

$$K_{10}^{w_2} = \frac{1}{480} \frac{(-40C_{23}S^2 - 20C_{32}S^2 - 40C_{33}S^2 + 3C_{22} + 3C_{32})R^3}{S^5}; K_{10}^{\varphi_o} = \frac{2}{3} \frac{(e_{33} + e_{33})R}{S};$$

$$K_{11d2\xi}^{\varphi_o} = \frac{1}{60} \frac{R^2 e_{15}}{S^3}; K_{11d2\xi}^{w_o} = \frac{1}{24} \frac{R^2 C_{55}}{S^3}; K_{11d2\xi}^{w_1} = \frac{1}{160} \frac{R^3 C_{55}}{S^5}; K_{11d2\xi}^{w_2} = \frac{1}{320} \frac{R^4 C_{55}}{S^5};$$

$$K_{11d2\theta}^{w_o} = \frac{1}{480} \frac{R^2 C_{66} (20S^2 + 3)}{S^3}; K_{11d2\theta}^{w_1} = -\frac{1}{160} \frac{R^3 C_{66}}{S^5}; K_{11d2\theta}^{w_2} = \frac{1}{320} \frac{R^4 C_{66}}{S^5};$$

$$K_{11d1\xi}^{u_o} = -\frac{1}{24} \frac{R^2(2C_{21} + C_{31})}{S^3}; K_{11d1\xi}^{u_1} = -\frac{1}{24} \frac{R^3(2C_{31} - C_{55})}{S^3};$$

$$K_{11d1\xi}^{u_2} = -\frac{1}{320} \frac{R^4(2C_{31} + C_{21} - 2C_{55})}{S^5}; K_{11d1\theta}^{v_3} = \frac{1}{960} \frac{R^5(3C_{66} + 2C_{32})}{S^5};$$

$$K_{11d1\xi}^{u_3} = \frac{1}{960} \frac{R^5(3C_{55} - 2C_{31})}{S^5}; K_{11d1\theta}^{v_o} = -\frac{1}{480} \frac{R^2(C_{22} + C_{66})(20S^2 + 3)}{S^5};$$

$$K_{11d1\theta}^{v_1} = -\frac{1}{480} \frac{R^3(-40C_{22}S^2 + 20C_{66}S^2 + 3C_{22} + 3C_{66})}{S^5}; K_{11d1\theta}^{v_2} = -\frac{1}{320} \frac{R^4(C_{22} + C_{66})}{S^5};$$

$$K_{11}^{\varphi^+} = -\frac{1}{24} \frac{R^2(8Se_{33} + e_{32} + 2e_{33})}{S}; K_{11}^{\varphi^-} = -\frac{1}{24} \frac{R^2(8Se_{33} - e_{32} - 2e_{33})}{S}; K_{11}^{w_o} = -\frac{1}{480} \frac{C_{22}R^2(20S^2 + 3)}{S^5};$$

$$K_{11}^{w_1} = -\frac{1}{480} \frac{R^3(-20C_{23}S^2 - 40C_{32}S^2 - 40C_{33}S^2 + 3C_{22})}{S^5}; K_{11}^{w_1} = -\frac{1}{960} \frac{R^4(80C_{33}S^2 + 3C_{22})}{S^5};$$

$$K_{11}^{\varphi_o} = \frac{2}{3} \frac{R^2 e_{33}}{S}; K_{11}^{q_{33}^+} = -\frac{1}{16} \frac{R^3(2S-1)}{S^3}; K_{11}^{q_{33}^-} = \frac{1}{16} \frac{R^3(2S+1)}{S^3};$$

$$K_{12d2\xi}^{\varphi_o} = -\frac{2}{15} \frac{R^2 \mu_{11}}{S^3}; K_{12d2\theta}^{\varphi_o} = -\frac{1}{3360} \frac{R^2 \mu_{22}(448S^4 + 16S^2 + 3)}{S^3}; K_{12d2\xi\theta}^{\varphi_o} = 0;$$

$$K_{12d2\theta}^{u_o} = \frac{1}{120} \frac{R^2 e_{24}(20S^2 + 1)}{S^3}; K_{12d2\theta}^{u_1} = -\frac{1}{120} \frac{R^3 e_{24}}{S^5}; K_{12d2\theta}^{u_2} = \frac{1}{240} \frac{R^4 e_{24}}{S^5}; K_{12d2\theta}^{u_3} = 0;$$

$$K_{12d2\xi\theta}^{w_o} = \frac{1}{3360} \frac{R^3 e_{15}(560S^4 - 3)}{S^5}; K_{12d2\xi\theta}^{w_1} = \frac{1}{1120} \frac{R^3 e_{15}}{S^7}; K_{12d2\xi\theta}^{w_2} = \frac{1}{6720} \frac{R^4 e_{15}(28S^2 - 3)}{S^7};$$

$$K_{12d2\xi\theta}^{v_o} = \frac{1}{6} \frac{R^3 e_{24}}{S^3}; K_{12d2\xi\theta}^{v_1} = 0; K_{12d2\xi\theta}^{v_2} = \frac{1}{240} \frac{R^4 e_{24}}{S^5}; K_{12d2\xi\theta}^{v_3} = 0;$$

$$K_{12d1\xi}^{u_o} = \frac{1}{6} \frac{R^3 e_{31}}{S^3}; K_{12d1\xi}^{u_1} = \frac{1}{6} \frac{R^3 e_{31}}{S^3}; K_{12d1\xi}^{u_2} = \frac{1}{80} \frac{R^3 e_{31}}{S^5}; K_{12d1\xi}^{u_3} = \frac{1}{240} \frac{R^5 e_{31}}{S^5};$$

$$K_{12d1\xi}^{v_o} = -\frac{1}{3360} \frac{R^3 e_{15}(560S^4 - 3)}{S^7}; K_{12d1\xi}^{v_1} = \frac{1}{3360} \frac{R^3 e_{15}(560S^4 - 3)}{S^7}; K_{12d1\xi}^{v_2} = \frac{1}{6720} \frac{R^4 e_{15}(28S^2 + 3)}{S^7};$$

$$K_{12d1\xi}^{v_3} = \frac{1}{6720} \frac{R^5 e_{15}(28S^2 - 1)}{S^7}; K_{12d1\theta}^{v_o} = 0; K_{12d1\theta}^{v_1} = \frac{1}{6} \frac{R^3 e_{32}}{S^3};$$

$$K_{12d1\theta}^{v_2} = 0; K_{12d1\theta}^{v_3} = \frac{1}{6} \frac{R^3(e_{32} + e_{33})}{S^3}; K_{12}^{\varphi_o^+} = -\frac{1}{6} \frac{R^2 \mu_{33}(4S + 1)}{S^2};$$

$$K_{12}^{\varphi_o^-} = \frac{1}{6} \frac{R^2 \mu_{33}(1 - 4S)}{S^2}; K_{12}^{w_o} = \frac{1}{6} \frac{R^3(e_{32} + e_{33})}{S^3}; K_{12}^{w_2} = \frac{1}{6} \frac{R^4 e_{33}}{S^3}; K_{12}^{\varphi_o} = \frac{4}{3} \frac{R^2 \mu_{33}}{S}.$$

Граничные условия теории цилиндрических оболочек с учетом пьезоэффекта имеют следующий вид:

- на жестко защемленном краю:

$$u_i(x, \theta, z) = v_i(x, \theta, z) = w_i(x, \theta, z) = 0, \quad \varphi_0(x, \theta, z) = 0, \quad (i = \overline{0, 3}), \quad (2.2)$$

- на шарнирно защемленном краю:

$$\sigma_{11}^{(j)}(x, \theta, z) = 0, \quad (j = \overline{0, 3}), \quad v_i(x, \theta, z) = w_i(x, \theta, z) = 0, \quad \varphi_0(x, \theta, z) = 0, \quad (i = \overline{1, 3}), \quad (2.3)$$

- на свободном краю:

$$\sigma_{11}^{(i)}(x, \theta, z) = \sigma_{12}^{(i)}(x, \theta, z) = \sigma_{13}^{(i)}(x, \theta, z) = 0, \quad \varphi_0(x, \theta, z) = 0, \quad (i = \overline{0, 3}). \quad (2.4)$$

2.2. Решение сформулированной краевой задачи электроупругости цилиндрических оболочек

2.2.1. Приведение краевой задачи электроупругости к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

Решение краевой задачи (2.1) - (2.4) на основе приведения ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется разложением перемещений, электрических потенциалов и внешних электромеханических нагрузок, действующих на оболочку, в тригонометрические ряды по окружной координате θ следующего вида:

$$\begin{aligned} q_{i3}^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(Q_{i3m}^{(1)\pm}(\xi) \cos(m\theta) + Q_{i3m}^{(2)\pm}(\xi) \sin(m\theta) \right) + Q_{i30}^{\pm}(\xi); \quad i = \overline{1, 3}; \\ \varphi^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\varphi_m^{(1)\pm}(\xi) \cos(m\theta) + \varphi_m^{(2)\pm}(\xi) \sin(m\theta) \right) + \varphi_0^{\pm}(\xi); \\ u_i(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(u_{im}^{(1)}(\xi) \cos(m\theta) + u_{im}^{(2)}(\xi) \sin(m\theta) \right) + u_{i0}(\xi); \quad i = \overline{0, 3}; \\ v_i(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(v_{im}^{(1)}(\xi) \sin(m\theta) - v_{im}^{(2)}(\xi) \cos(m\theta) \right) + v_{i0}(\xi); \quad i = \overline{0, 3}; \\ w_j(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(w_{jm}^{(1)}(\xi) \cos(m\theta) + w_{jm}^{(2)}(\xi) \sin(m\theta) \right) + w_{j0}(\xi); \quad j = \overline{0, 2}; \\ \varphi_0(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \left(\varphi_{0m}^{(1)}(\xi) \cos(m\theta) + \varphi_{0m}^{(2)}(\xi) \sin(m\theta) \right) + \varphi_{00}(\xi). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Поставим (2.5) в (2.1), получим

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^3 \left(K_{1d2\xi}^{u_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} - m^2 K_{1d2\theta}^{u_i} u_i \right) + \sum_{j=0}^3 m K_{1d2\xi\theta}^{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^2 K_{1d1\xi}^{w_j} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} + K_{1d1\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \xi} = \left(k_1^{q_{13}^+} q_{13}^+ + k_1^{q_{13}^-} q_{13}^- \right), \\
& \sum_{i=0}^3 \left(K_{2d2\xi}^{u_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} - m^2 K_{2d2\theta}^{u_i} u_i + K_2^{u_i} u_i \right) + \sum_{j=0}^3 m K_{2d2\xi\theta}^{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^2 K_{2d1\xi}^{w_j} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} + \\
& + K_{2d1\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \xi} + \left(k_2^{q_{13}^+} q_{13}^+ + k_2^{q_{13}^-} q_{13}^- \right) = 0, \\
& \sum_{i=0}^3 \left(K_{3d2\xi}^{u_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} - m^2 K_{3d2\theta}^{u_i} u_i + K_3^{u_i} u_i \right) + \sum_{j=0}^3 m K_{3d2\xi\theta}^{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^2 K_{3d1\xi}^{w_j} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} + \\
& + K_{3d1\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \xi} + \left(k_3^{q_{13}^+} q_{13}^+ + k_3^{q_{13}^-} q_{13}^- \right) = 0, \\
& \sum_{i=0}^3 \left(K_{4d2\xi}^{u_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} - m^2 K_{4d2\theta}^{u_i} u_i + K_4^{u_i} u_i \right) + \sum_{j=0}^3 m K_{4d2\xi\theta}^{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^2 K_{4d1\xi}^{w_j} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} + \\
& + K_{4d1\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial \varphi_o}{\partial \xi} + \left(k_4^{q_{13}^+} q_{13}^+ + k_4^{q_{13}^-} q_{13}^- \right) = 0, \\
& - \sum_{j=0}^3 m K_{5d2\xi\theta}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{i=0}^3 \left(K_{5d2\xi}^{v_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi^2} + \left(m^2 K_{5d2\theta}^{v_i} + K_5^{v_i} \right) v_i \right) - \sum_{j=0}^2 m K_{5d1\theta}^{w_j} w_j = \left(k_5^{q_{23}^+} q_{23}^+ + k_5^{q_{23}^-} q_{23}^- \right), \\
& - \sum_{i=0}^3 m K_{6d2\xi\theta}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{i=0}^3 \left(K_{6d2\xi}^{v_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi^2} + m^2 K_{6d2\theta}^{v_i} v_i + K_6^{v_i} v_i \right) - \sum_{j=0}^2 m K_{6d1\theta}^{w_j} w_j - \\
& - m K_{6d1\theta}^{\varphi_o} \varphi_o + \left(k_6^{q_{23}^+} q_{23}^+ + k_6^{q_{23}^-} q_{23}^- \right) = 0, \\
& - \sum_{j=0}^3 m K_{7d2\xi\theta}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{i=0}^3 \left(K_{7d2\xi}^{v_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi^2} + \left(m^2 K_{7d2\theta}^{v_i} + K_7^{v_i} \right) v_i \right) - \sum_{j=0}^2 m K_{7d1\theta}^{w_j} w_j = \left(k_7^{q_{23}^+} q_{23}^+ + k_7^{q_{23}^-} q_{23}^- \right), \\
& - \sum_{j=0}^3 m K_{8d2\xi\theta}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{i=0}^3 \left(K_{8d2\xi}^{v_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi^2} + \left(m^2 K_{8d2\theta}^{v_i} + K_8^{v_i} \right) v_i \right) - \sum_{j=0}^2 m K_{8d1\theta}^{w_j} w_j - m K_{8d1\theta}^{\varphi_o} \varphi_o + \\
& + \left(k_8^{q_{23}^+} q_{23}^+ + k_8^{q_{23}^-} q_{23}^- \right) = 0, \\
& \sum_{i=0}^3 K_{9d1\xi}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^3 m K_{9d1\theta}^{v_j} v_j + \sum_{j=0}^2 \left(K_{9d2\xi}^{w_j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \xi^2} - m^2 K_{9d2\theta}^{w_j} w_j \right) + \left(K_{9d1\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial \xi^2} + K_9^{\varphi_o} \varphi_o \right) - \\
& - \left(k_9^{q_{33}^+} q_{33}^+ + k_9^{q_{33}^-} q_{33}^- \right) + \left(k_9^{\varphi_o^+} \varphi_o^+ + k_9^{\varphi_o^-} \varphi_o^- \right) = 0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^3 K_{10d1\xi}^u \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^3 mK_{10d1\theta}^{v_j} v_j + \sum_{j=0}^2 \left(K_{10d2\xi}^{w_j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial^2 \xi} - m^2 K_{10d2\theta}^{w_j} w_j \right) + \left(K_{10d1\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial^2 \xi} + K_{10}^{\varphi_o} \varphi_o \right) - \\
& - \left(k_{10}^{q_{33}^+} q_{33}^+ + k_{10}^{q_{33}^-} q_{33}^- \right) + \left(k_{10}^{\varphi_o^+} \varphi_o^+ + k_{10}^{\varphi_o^-} \varphi_o^- \right) = 0, \\
& \sum_{i=0}^3 K_{11d1\xi}^u \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^3 mK_{11d1\theta}^{v_j} v_j + \sum_{j=0}^2 \left(K_{11d2\xi}^{w_j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial^2 \xi} - m^2 K_{11d2\theta}^{w_j} w_j \right) + \left(K_{11d1\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial^2 \xi} + K_{11}^{\varphi_o} \varphi_o \right) - \\
& - \left(k_{11}^{q_{33}^+} q_{33}^+ + k_{11}^{q_{33}^-} q_{33}^- \right) + \left(k_{11}^{\varphi_o^+} \varphi_o^+ + k_{11}^{\varphi_o^-} \varphi_o^- \right) = 0, \\
& \sum_{i=0}^3 K_{12d1\xi}^u \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^3 mK_{12d1\theta}^{v_j} v_j + \sum_{j=0}^2 K_{12}^{w_j} w_j + \left(K_{12d2\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial^2 \xi} + \left(K_{11}^{\varphi_o} - m^2 K_{12d2\theta}^{\varphi_o} \right) \varphi_o \right) + \\
& + \left(k_{12}^{\varphi_o^+} \varphi_o^+ + k_{12}^{\varphi_o^-} \varphi_o^- \right) = 0.
\end{aligned}$$

2.2.2. Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений уточненной теории электроупругости операционным методом

Для решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.6) применим операционный метод, основанный на преобразовании Лапласа.

Обозначим изображения функций $u_i(\xi), v_i(\xi), w_j(\xi), \varphi_o(\xi), (i = \overline{0,3}, j = \overline{0,2})$ через $LapU_i(\xi), LapV_i(\xi), LapW_j(\xi), Lap\varphi_o(\xi), (i = \overline{0,3}, j = \overline{0,2})$. По теореме дифференцирования оригинала имеем

$$\begin{aligned}
L \left\{ \frac{du_i(\xi)}{d\xi} \right\} &= pLapU_i(p) - C_{ui0}, L \left\{ \frac{d^2 u_i(\xi)}{d\xi^2} \right\} = p^2 LapU_i(p) - pC_{ui0} - C_{ui1}, \\
L \left\{ \frac{dv_i(\xi)}{d\xi} \right\} &= pLapV_i(p) - C_{vi0}, L \left\{ \frac{d^2 v_i(\xi)}{d\xi^2} \right\} = p^2 LapV_i(p) - pC_{vi0} - C_{vi1}, \\
L \left\{ \frac{dw_j(\xi)}{d\xi} \right\} &= pLapW_j(p) - C_{wj0}, L \left\{ \frac{d^2 w_j(\xi)}{d\xi^2} \right\} = p^2 LapW_j(p) - pC_{wj0} - C_{wj1}, \\
L \left\{ \frac{d\varphi_o(\xi)}{d\xi} \right\} &= pLap\varphi_o(p) - C_{\varphi_o0}, L \left\{ \frac{d^2 \varphi_o(\xi)}{d\xi^2} \right\} = p^2 Lap\varphi_o(p) - pC_{\varphi_o0} - C_{\varphi_o1},
\end{aligned} \tag{2.7}$$

где произвольные постоянные с нижними числовыми индексами определяются как

$$\begin{aligned}
C_{ui0} = u_i(0), C_{ui1} = \frac{du_i(0)}{d\xi}, C_{vi0} = v_i(0), C_{vi1} = \frac{dv_i(0)}{d\xi}, \\
C_{wj0} = w_j(0), C_{wj1} = \frac{dw_j(0)}{d\xi}, C_{\varphi00} = \varphi_0(0), C_{\varphi01} = \frac{d\varphi_0(0)}{d\xi}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Переходя от оригиналов к изображениям, дифференциальные уравнения преобразуются в алгебраические уравнения следующего вида:

$$AX = B, \tag{2.9}$$

где A - квадратная матрица коэффициентов размером 12×12 , определяемая следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & \dots & A_{1,12} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & \dots & A_{2,12} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{12,1} & A_{12,2} & A_{12,3} & \dots & A_{12,12} \end{bmatrix},$$

X , B - матрицы изображения функций и постоянных размером 12×1 следующего вида:

$$X = \begin{bmatrix} LapU0 \\ LapU1 \\ LapU2 \\ LapU3 \\ LapV0 \\ LapV1 \\ LapV2 \\ LapV3 \\ LapW0 \\ LapW1 \\ LapW2 \\ Lap\Phi0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \\ B_5 \\ B_6 \\ B_7 \\ B_8 \\ B_9 \\ B_{10} \\ B_{11} \\ B_{12} \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты уравнения (2.9) определяются следующим образом:

$$A_{1,1} = p^2 K_{1d2\xi}^{u_0} - m^2 K_{1d2\theta}^{u_0}; A_{1,2} = p^2 K_{1d2\xi}^{u_1} - m^2 K_{1d2\theta}^{u_1}; A_{1,3} = p^2 K_{1d2\xi}^{u_2} - m^2 K_{1d2\theta}^{u_2};$$

$$A_{1,4} = p^2 K_{1d2\xi}^{u_3} - m^2 K_{1d2\theta}^{u_3}; A_{1,5} = mpK_{1d2\xi\theta}^{v_0}; A_{1,6} = mpK_{1d2\xi\theta}^{v_1}; A_{1,7} = mpK_{1d2\xi\theta}^{v_2};$$

$$A_{1,8} = mpK_{1d2\xi\theta}^{v_3}; A_{1,9} = pK_{1d1\xi}^{w_0}; A_{1,10} = pK_{1d1\xi}^{w_1}; A_{1,11} = pK_{1d1\xi}^{w_2}; A_{1,12} = pK_{1d1\xi}^{\varphi_0};$$

$$\begin{aligned} B_1 = & pK_{1d2\xi}^{u_0} C_{u00} + pK_{1d2\xi}^{u_1} C_{u10} + pK_{1d2\xi}^{u_2} C_{u20} + pK_{1d2\xi}^{u_3} C_{u30} + K_{1d2\xi}^{u_0} C_{u0l} + \\ & + K_{1d2\xi}^{u_1} C_{u1l} + K_{1d2\xi}^{u_2} C_{u2l} + K_{1d2\xi}^{u_3} C_{u3l} + mK_{1d2\xi\theta}^{v_0} C_{v00} + mK_{1d2\xi\theta}^{v_1} C_{v10} + \\ & + mK_{1d2\xi\theta}^{v_2} C_{v20} + mK_{1d2\xi\theta}^{v_3} C_{v30} + K_{1d1\xi}^{w_0} C_{w00} + K_{1d1\xi}^{w_1} C_{w10} + K_{1d1\xi}^{w_2} C_{w20} + \\ & + K_{1d1\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi00}; \end{aligned}$$

$$A_{2,1} = p^2 K_{2d2\xi}^{u_0} - m^2 K_{2d2\theta}^{u_0} + K_2^{u_0}; A_{2,2} = p^2 K_{2d2\xi}^{u_1} - m^2 K_{2d2\theta}^{u_1} + K_2^{u_1};$$

$$A_{2,3} = p^2 K_{2d2\xi}^{u_2} - m^2 K_{2d2\theta}^{u_2} + K_2^{u_2}; A_{2,4} = p^2 K_{2d2\xi}^{u_3} - m^2 K_{2d2\theta}^{u_3} + K_2^{u_3};$$

$$A_{2,5} = mpK_{2d2\xi\theta}^{v_0}; A_{2,6} = mpK_{2d2\xi\theta}^{v_1}; A_{2,7} = mpK_{2d2\xi\theta}^{v_2}; A_{2,8} = mpK_{2d2\xi\theta}^{v_3};$$

$$A_{2,9} = pK_{2d1\xi}^{w_0}; A_{2,10} = pK_{2d1\xi}^{w_1}; A_{2,11} = pK_{2d1\xi}^{w_2}; A_{2,12} = ppK_{2d1\xi}^{\varphi_0};$$

$$\begin{aligned} B_2 = & pK_{2d2\xi}^{u_0} C_{u00} + pK_{2d2\xi}^{u_1} C_{u10} + pK_{2d2\xi}^{u_2} C_{u20} + pK_{2d2\xi}^{u_3} C_{u30} + K_{2d2\xi}^{u_0} C_{u0l} + \\ & + K_{2d2\xi}^{u_1} C_{u1l} + K_{2d2\xi}^{u_2} C_{u2l} + K_{2d2\xi}^{u_3} C_{u3l} + mK_{2d2\xi\theta}^{v_0} C_{v00} + mK_{2d2\xi\theta}^{v_1} C_{v10} + \\ & + mK_{2d2\xi\theta}^{v_2} C_{v20} + mK_{2d2\xi\theta}^{v_3} C_{v30} + K_{2d1\xi}^{w_0} C_{w00} + K_{2d1\xi}^{w_1} C_{w10} + K_{2d1\xi}^{w_2} C_{w20} + \\ & + K_{2d1\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi00}; \end{aligned}$$

$$A_{3,1} = p^2 K_{3d2\xi}^{u_0} - m^2 K_{3d2\theta}^{u_0} + K_3^{u_0}; A_{3,2} = p^2 K_{3d2\xi}^{u_1} - m^2 K_{3d2\theta}^{u_1} + K_3^{u_1};$$

$$A_{3,3} = p^2 K_{3d2\xi}^{u_2} - m^2 K_{3d2\theta}^{u_2} + K_3^{u_2}; A_{3,4} = p^2 K_{3d2\xi}^{u_3} - m^2 K_{3d2\theta}^{u_3} + K_3^{u_3};$$

$$A_{3,5} = mpK_{3d2\xi\theta}^{v_0}; A_{3,6} = mpK_{3d2\xi\theta}^{v_1}; A_{3,7} = mpK_{3d2\xi\theta}^{v_2}; A_{3,8} = mpK_{3d2\xi\theta}^{v_3};$$

$$A_{3,9} = pK_{3d1\xi}^{w_0}; A_{3,10} = pK_{3d1\xi}^{w_1}; A_{3,11} = pK_{3d1\xi}^{w_2}; A_{3,12} = ppK_{3d1\xi}^{\varphi_0};$$

$$\begin{aligned}
B_3 = & pK_{3d2\xi}^{u_0} C_{u00} + pK_{3d2\xi}^{u_1} C_{u10} + pK_{3d2\xi}^{u_2} C_{u20} + pK_{3d2\xi}^{u_3} C_{u30} + K_{3d2\xi}^{u_0} C_{u0l} + \\
& + K_{3d2\xi}^{u_1} C_{u1l} + K_{3d2\xi}^{u_2} C_{u2l} + K_{3d2\xi}^{u_3} C_{u3l} + mK_{3d2\xi\theta}^{v_0} C_{v00} + mK_{3d2\xi\theta}^{v_1} C_{v10} + \\
& + mK_{3d2\xi\theta}^{v_2} C_{v20} + mK_{3d2\xi\theta}^{v_3} C_{v30} + K_{3d1\xi}^{w_0} C_{w00} + K_{3d1\xi}^{w_1} C_{w10} + K_{3d1\xi}^{w_2} C_{w20} + \\
& + K_{3d1\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi00};
\end{aligned}$$

$$A_{4,1} = p^2 K_{4d2\xi}^{u_0} - m^2 K_{4d2\theta}^{u_0} + K_4^{u_0}; \quad A_{4,2} = p^2 K_{4d2\xi}^{u_1} - m^2 K_{4d2\theta}^{u_1} + K_4^{u_1};$$

$$A_{4,3} = p^2 K_{4d2\xi}^{u_2} - m^2 K_{4d2\theta}^{u_2} + K_4^{u_2}; \quad A_{4,4} = p^2 K_{4d2\xi}^{u_3} - m^2 K_{4d2\theta}^{u_3} + K_4^{u_3};$$

$$A_{4,5} = mpK_{4d2\xi\theta}^{v_0}; \quad A_{4,6} = mpK_{4d2\xi\theta}^{v_1}; \quad A_{4,7} = mpK_{4d2\xi\theta}^{v_2}; \quad A_{4,8} = mpK_{4d2\xi\theta}^{v_3};$$

$$A_{4,9} = pK_{4d1\xi}^{w_0}; \quad A_{4,10} = pK_{4d1\xi}^{w_1}; \quad A_{4,11} = pK_{4d1\xi}^{w_2}; \quad A_{4,12} = pK_{4d1\xi}^{\varphi_0};$$

$$\begin{aligned}
B_4 = & pK_{4d2\xi}^{u_0} C_{u00} + pK_{4d2\xi}^{u_1} C_{u10} + pK_{4d2\xi}^{u_2} C_{u20} + pK_{4d2\xi}^{u_3} C_{u30} + K_{4d2\xi}^{u_0} C_{u0l} + \\
& + K_{4d2\xi}^{u_1} C_{u1l} + K_{4d2\xi}^{u_2} C_{u2l} + K_{4d2\xi}^{u_3} C_{u3l} + mK_{4d2\xi\theta}^{v_0} C_{v00} + mK_{4d2\xi\theta}^{v_1} C_{v10} + \\
& + mK_{4d2\xi\theta}^{v_2} C_{v20} + mK_{4d2\xi\theta}^{v_3} C_{v30} + K_{4d1\xi}^{w_0} C_{w00} + K_{4d1\xi}^{w_1} C_{w10} + K_{4d1\xi}^{w_2} C_{w20} + \\
& + K_{4d1\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi00};
\end{aligned}$$

$$A_{5,1} = -mpK_{5d2\xi\theta}^{u_0}; \quad A_{5,2} = -mpK_{5d2\xi\theta}^{u_1}; \quad A_{5,3} = -mpK_{5d2\xi\theta}^{u_2}; \quad A_{5,4} = -mpK_{5d2\xi\theta}^{u_3};$$

$$A_{5,5} = p^2 K_{5d2\xi}^{v_0} - m^2 K_{5d2\theta}^{v_0} + K_5^{v_0}; \quad A_{5,6} = p^2 K_{5d2\xi}^{v_1} - m^2 K_{5d2\theta}^{v_1} + K_5^{v_1};$$

$$A_{5,7} = p^2 K_{5d2\xi}^{v_2} - m^2 K_{5d2\theta}^{v_2} + K_5^{v_2}; \quad A_{5,8} = p^2 K_{5d2\xi}^{v_3} - m^2 K_{5d2\theta}^{v_3} + K_5^{v_3};$$

$$A_{5,9} = -mK_{5d1\theta}^{w_0}; \quad A_{5,10} = -mK_{5d1\theta}^{w_1}; \quad A_{5,11} = -mK_{5d1\theta}^{w_2}; \quad A_{5,12} = 0;$$

$$\begin{aligned}
B_5 = & -mK_{5d2\xi\theta}^{u_0} C_{u00} - mK_{5d2\xi\theta}^{u_1} C_{u10} - mK_{5d2\xi\theta}^{u_2} C_{u20} - mK_{5d2\xi\theta}^{u_3} C_{u30} + pK_{5d2\xi}^{v_0} C_{v00} + \\
& + pK_{5d2\xi}^{v_1} C_{v10} + pK_{5d2\xi}^{v_2} C_{v20} + pK_{5d2\xi}^{v_3} C_{v30} + K_{5d2\xi}^{v_0} C_{v0l} + K_{5d2\xi}^{v_1} C_{v1l} + \\
& + K_{5d2\xi}^{v_2} C_{v2l} + K_{5d2\xi}^{v_3} C_{v3l};
\end{aligned}$$

$$A_{6,1} = -mpK_{6d2\xi\theta}^{u_0}; \quad A_{6,2} = -mpK_{6d2\xi\theta}^{u_1}; \quad A_{6,3} = -mpK_{6d2\xi\theta}^{u_2}; \quad A_{6,4} = -mpK_{6d2\xi\theta}^{u_3};$$

$$A_{6,5} = p^2 K_{6d2\xi}^{v_0} - m^2 K_{6d2\theta}^{v_0} + K_6^{v_0}; A_{6,6} = p^2 K_{6d2\xi}^{v_1} - m^2 K_{6d2\theta}^{v_1} + K_6^{v_1};$$

$$A_{6,7} = p^2 K_{6d2\xi}^{v_2} - m^2 K_{6d2\theta}^{v_2} + K_6^{v_2}; A_{6,8} = p^2 K_{6d2\xi}^{v_3} - m^2 K_{6d2\theta}^{v_3} + K_6^{v_3};$$

$$A_{6,9} = -mK_{6d1\theta}^{w_0}; A_{6,10} = -mK_{6d1\theta}^{w_1}; A_{6,11} = -mK_{6d1\theta}^{w_2}; A_{6,12} = 0;$$

$$B_6 = -mK_{6d2\xi\theta}^{u_0} C_{u00} - mK_{6d2\xi\theta}^{u_1} C_{u10} - mK_{6d2\xi\theta}^{u_2} C_{u20} - mK_{6d2\xi\theta}^{u_3} C_{u30} + pK_{6d2\xi}^{v_0} C_{v00} + \\ + pK_{6d2\xi}^{v_1} C_{v10} + pK_{6d2\xi}^{v_2} C_{v20} + pK_{6d2\xi}^{v_3} C_{v30} + K_{6d2\xi}^{v_0} C_{v0l} + K_{6d2\xi}^{v_1} C_{v1l} + \\ + K_{6d2\xi}^{v_2} C_{v2l} + K_{6d2\xi}^{v_3} C_{v3l};$$

$$A_{7,1} = -mpK_{7d2\xi\theta}^{u_0}; A_{7,2} = -mpK_{7d2\xi\theta}^{u_0}; A_{7,3} = -mpK_{7d2\xi\theta}^{u_2}; A_{7,4} = -mpK_{7d2\xi\theta}^{u_3};$$

$$A_{7,5} = p^2 K_{7d2\xi}^{v_0} - m^2 K_{7d2\theta}^{v_0} + K_7^{v_0}; A_{7,6} = p^2 K_{7d2\xi}^{v_1} - m^2 K_{7d2\theta}^{v_1} + K_7^{v_1};$$

$$A_{7,7} = p^2 K_{7d2\xi}^{v_2} - m^2 K_{7d2\theta}^{v_2} + K_7^{v_2}; A_{7,8} = p^2 K_{7d2\xi}^{v_3} - m^2 K_{7d2\theta}^{v_3} + K_7^{v_3};$$

$$A_{7,9} = -mK_{7d1\theta}^{w_0}; A_{7,10} = -mK_{7d1\theta}^{w_1}; A_{7,11} = -mK_{7d1\theta}^{w_2}; A_{7,12} = 0;$$

$$B_7 = -mK_{7d2\xi\theta}^{u_0} C_{u00} - mK_{7d2\xi\theta}^{u_1} C_{u10} - mK_{7d2\xi\theta}^{u_2} C_{u20} - mK_{7d2\xi\theta}^{u_3} C_{u30} + pK_{7d2\xi}^{v_0} C_{v00} + \\ + pK_{7d2\xi}^{v_1} C_{v10} + pK_{7d2\xi}^{v_2} C_{v20} + pK_{7d2\xi}^{v_3} C_{v30} + K_{7d2\xi}^{v_0} C_{v0l} + K_{7d2\xi}^{v_1} C_{v1l} + \\ + K_{7d2\xi}^{v_2} C_{v2l} + K_{7d2\xi}^{v_3} C_{v3l};$$

$$A_{8,1} = -mpK_{8d2\xi\theta}^{u_0}; A_{8,2} = -mpK_{8d2\xi\theta}^{u_0}; A_{8,3} = -mpK_{8d2\xi\theta}^{u_2}; A_{8,4} = -mpK_{8d2\xi\theta}^{u_3};$$

$$A_{8,5} = p^2 K_{8d2\xi}^{v_0} - m^2 K_{8d2\theta}^{v_0} + K_8^{v_0}; A_{8,6} = p^2 K_{8d2\xi}^{v_1} - m^2 K_{8d2\theta}^{v_1} + K_8^{v_1};$$

$$A_{8,7} = p^2 K_{8d2\xi}^{v_2} - m^2 K_{8d2\theta}^{v_2} + K_8^{v_2}; A_{8,8} = p^2 K_{8d2\xi}^{v_3} - m^2 K_{8d2\theta}^{v_3} + K_8^{v_3};$$

$$A_{8,9} = -mK_{8d1\theta}^{w_0}; A_{8,10} = -mK_{8d1\theta}^{w_1}; A_{8,11} = -mK_{8d1\theta}^{w_2}; A_{8,12} = 0;$$

$$B_8 = -mK_{8d2\xi\theta}^{u_0} C_{u00} - mK_{8d2\xi\theta}^{u_1} C_{u10} - mK_{8d2\xi\theta}^{u_2} C_{u20} - mK_{8d2\xi\theta}^{u_3} C_{u30} + pK_{8d2\xi}^{v_0} C_{v00} + \\ + pK_{8d2\xi}^{v_1} C_{v10} + pK_{8d2\xi}^{v_2} C_{v20} + pK_{8d2\xi}^{v_3} C_{v30} + K_{8d2\xi}^{v_0} C_{v0l} + K_{8d2\xi}^{v_1} C_{v1l} + \\ + K_{8d2\xi}^{v_2} C_{v2l} + K_{8d2\xi}^{v_3} C_{v3l};$$

$$A_{9,1} = pK_{9d1\xi}^{u_0}; A_{9,2} = pK_{9d1\xi}^{u_1}; A_{9,3} = pK_{9d1\xi}^{u_2}; A_{9,4} = pK_{9d1\xi}^{u_3};$$

$$A_{9,5} = mK_{9d1\theta}^{v_0}; A_{9,6} = mK_{9d1\theta}^{v_1}; A_{9,7} = mK_{9d1\theta}^{v_2}; A_{9,8} = mK_{9d1\theta}^{v_3};$$

$$A_{9,9} = p^2 K_{9d2\xi}^{w_0} - m^2 K_{9d2\theta}^{w_0} + K_9^{w_0}; A_{9,10} = p^2 K_{9d2\xi}^{w_1} - m^2 K_{9d2\theta}^{w_1} + K_9^{w_1};$$

$$A_{9,11} = p^2 K_{9d2\xi}^{w_2} - m^2 K_{9d2\theta}^{w_2} + K_9^{w_2}; A_{9,12} = p^2 K_{9d2\xi}^{\varphi_0};$$

$$\begin{aligned} B_9 = & K_{9d1\xi}^{u_0} C_{u00} + K_{9d1\xi}^{u_1} C_{u10} + K_{9d1\xi}^{u_2} C_{u20} + K_{9d1\xi}^{u_3} C_{u30} + pK_{9d2\xi}^{w_0} C_{w00} + \\ & + pK_{9d2\xi}^{w_1} C_{w10} + pK_{9d2\xi}^{w_2} C_{w20} + K_{9d2\xi}^{w_0} C_{w0l} + K_{9d2\xi}^{w_1} C_{w1l} + K_{9d2\xi}^{w_2} C_{w2l} + \\ & + pK_{9d2\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi 00} + K_{9d2\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi 0l} - k_9^{q_{33}^+} Lap Q_{33}^+ - k_9^{q_{33}^-} Lap Q_{33}^0 - \\ & - k_9^{\varphi_0^+} Lap \Phi_o^+ - k_9^{\varphi_0^-} Lap \Phi_o^-; \end{aligned}$$

$$A_{10,1} = pK_{10d1\xi}^{u_0}; A_{10,2} = pK_{10d1\xi}^{u_1}; A_{10,3} = pK_{10d1\xi}^{u_2}; A_{10,4} = pK_{10d1\xi}^{u_3};$$

$$A_{10,5} = mK_{10d1\theta}^{v_0}; A_{10,6} = mK_{10d1\theta}^{v_1}; A_{10,7} = mK_{10d1\theta}^{v_2}; A_{10,8} = mK_{10d1\theta}^{v_3};$$

$$A_{10,9} = p^2 K_{10d2\xi}^{w_0} - m^2 K_{10d2\theta}^{w_0} + K_{10}^{w_0}; A_{10,10} = p^2 K_{10d2\xi}^{w_1} - m^2 K_{10d2\theta}^{w_1} + K_{10}^{w_1};$$

$$A_{10,11} = p^2 K_{10d2\xi}^{w_2} - m^2 K_{10d2\theta}^{w_2} + K_{10}^{w_2}; A_{10,12} = p^2 K_{10d2\xi}^{\varphi_0} + K_{10}^{\varphi_0};$$

$$\begin{aligned} B_{10} = & K_{10d1\xi}^{u_0} C_{u00} + K_{10d1\xi}^{u_1} C_{u10} + K_{10d1\xi}^{u_2} C_{u20} + K_{10d1\xi}^{u_3} C_{u30} + pK_{10d2\xi}^{w_0} C_{w00} + \\ & + pK_{10d2\xi}^{w_1} C_{w10} + pK_{10d2\xi}^{w_2} C_{w20} + K_{10d2\xi}^{w_0} C_{w0l} + K_{10d2\xi}^{w_1} C_{w1l} + K_{10d2\xi}^{w_2} C_{w2l} + \\ & + pK_{10d2\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi 00} + K_{10d2\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi 0l} - k_{10}^{q_{33}^+} Lap Q_{33}^+ - k_{10}^{q_{33}^-} Lap Q_{33}^0 - \\ & - k_{10}^{\varphi_0^+} Lap \Phi_o^+ - k_{10}^{\varphi_0^-} Lap \Phi_o^-; \end{aligned}$$

$$A_{11,1} = pK_{11d1\xi}^{u_0}; A_{11,2} = pK_{11d1\xi}^{u_1}; A_{11,3} = pK_{11d1\xi}^{u_2}; A_{11,4} = pK_{11d1\xi}^{u_3};$$

$$A_{11,5} = mK_{11d1\theta}^{v_0}; A_{11,6} = mK_{11d1\theta}^{v_1}; A_{11,7} = mK_{11d1\theta}^{v_2}; A_{11,8} = mK_{11d1\theta}^{v_3};$$

$$A_{11,9} = p^2 K_{11d2\xi}^{w_0} - m^2 K_{11d2\theta}^{w_0} + K_{11}^{w_0}; A_{11,10} = p^2 K_{11d2\xi}^{w_1} - m^2 K_{11d2\theta}^{w_1} + K_{11}^{w_1};$$

$$A_{11,11} = p^2 K_{11d2\xi}^{w_2} - m^2 K_{11d2\theta}^{w_2} + K_{11}^{w_2}; A_{11,12} = p^2 K_{11d2\xi}^{\varphi_0} + K_{11}^{\varphi_0};$$

$$\begin{aligned} B_{11} = & K_{11d1\xi}^{u_0} C_{u00} + K_{11d1\xi}^{u_1} C_{u10} + K_{11d1\xi}^{u_2} C_{u20} + K_{11d1\xi}^{u_3} C_{u30} + pK_{11d2\xi}^{w_0} C_{w00} + \\ & + pK_{11d2\xi}^{w_1} C_{w10} + pK_{11d2\xi}^{w_2} C_{w20} + K_{11d2\xi}^{w_0} C_{w0l} + K_{11d2\xi}^{w_1} C_{w1l} + K_{11d2\xi}^{w_2} C_{w2l} + \\ & + pK_{11d2\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi 00} + K_{11d2\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi 0l} - k_{11}^{q_{33}^+} Lap Q_{33}^+ - k_{11}^{q_{33}^-} Lap Q_{33}^0 - \\ & - k_{11}^{\varphi_o^+} Lap \Phi_o^+ - k_{11}^{\varphi_o^-} Lap \Phi_o^-; \end{aligned}$$

$$A_{12,1} = pK_{12d1\xi}^{u_0}; A_{12,2} = pK_{12d1\xi}^{u_1}; A_{12,3} = pK_{12d1\xi}^{u_2}; A_{12,4} = pK_{12d1\xi}^{u_3};$$

$$A_{12,5} = mK_{12d1\theta}^{v_0}; A_{12,6} = mK_{12d1\theta}^{v_1}; A_{12,7} = mK_{12d1\theta}^{v_2}; A_{12,8} = mK_{12d1\theta}^{v_3};$$

$$A_{12,9} = K_{12d2\xi}^{w_0}; A_{12,10} = K_{12d2\xi}^{w_1}; A_{12,11} = K_{12d2\xi}^{w_2};$$

$$A_{12,12} = p^2 K_{12d2\xi}^{\varphi_0} - m^2 K_{12d2\theta}^{\varphi_0} + K_{12}^{\varphi_0};$$

$$\begin{aligned} B_{12} = & K_{12d1\xi}^{u_0} C_{u00} + K_{12d1\xi}^{u_1} C_{u10} + K_{12d1\xi}^{u_2} C_{u20} + K_{12d1\xi}^{u_3} C_{u30} + pK_{12d2\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi 00} + \\ & + K_{12d2\xi}^{\varphi_0} C_{\varphi 0l} - k_{12}^{\varphi_o^+} Lap \Phi_o^+ - k_{12}^{\varphi_o^-} Lap \Phi_o^-; \end{aligned}$$

На рис.2.2 приведена схема алгоритма решения краевой задачи.

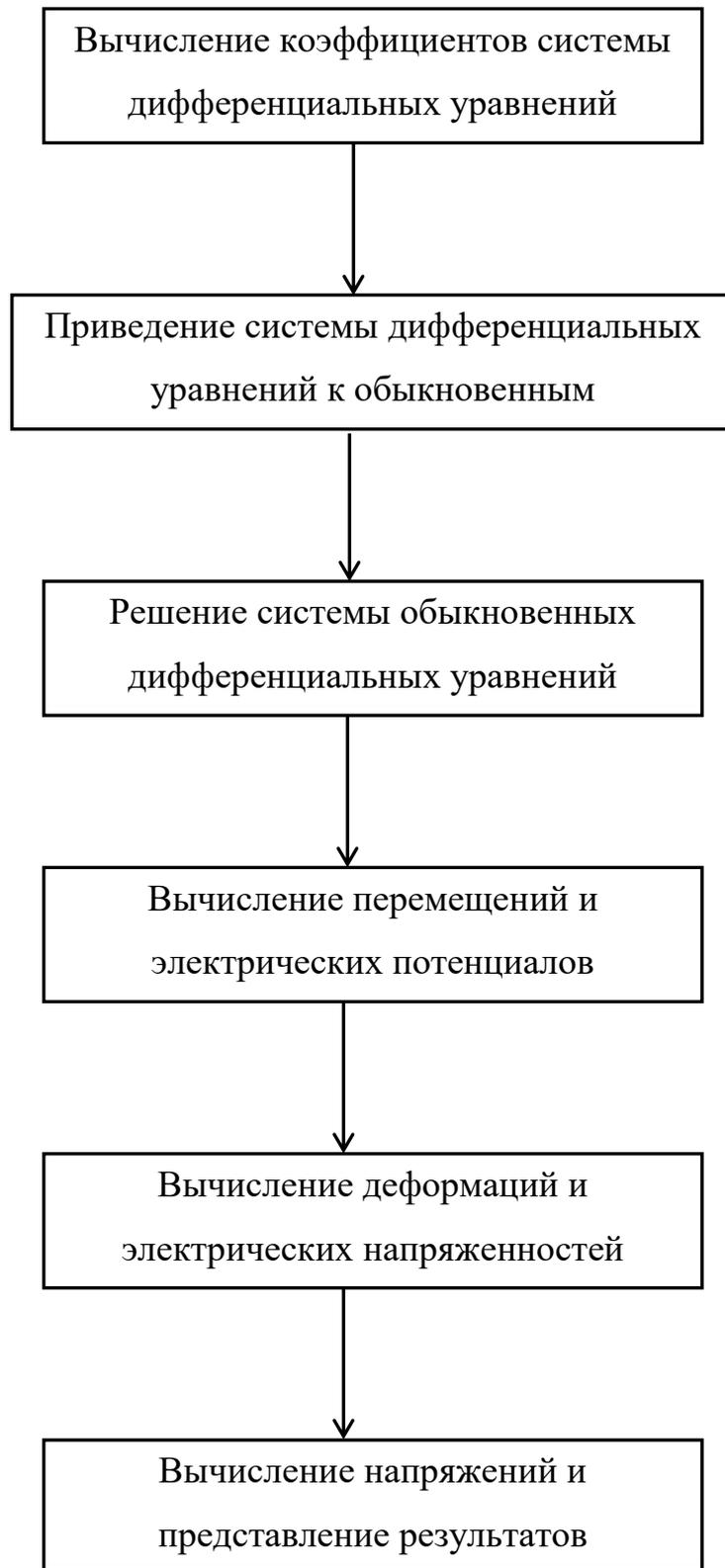


Рис 2.2. Схема алгоритма решения краевой задачи

Поперечные напряжения для цилиндрических оболочек при подстановке параметров Ламе $A_1 = R$, $A_2 = 1 + z/R$ и $r = 1/R$ в (1.25), находим

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi z} &= -\frac{1}{1+rz} \int_{-h}^z \left(\frac{1+rz}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi\theta}}{\partial \theta} \right) dz + \frac{(1+rz)_{z=-h}}{1+rz} q_{13}^-, \\ \sigma_{\theta z} &= -\frac{1}{(1+rz)^2} \int_{-h}^z \left(\frac{1+rz}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{(1+rz)^2}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi\theta}}{\partial \xi} \right) dz + \frac{(1+rz)_{z=-h}^2}{(1+rz)^2} q_{23}^-, \\ \sigma_z &= -\frac{1}{1+rz} \int_{-h}^z \left(\frac{1+rz}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi z}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \sigma_{\xi} \right) dz + \frac{(1+rz)_{z=-h}}{1+rz} q_{33}^-. \end{aligned} \quad (2.10)$$

2.3. Электромеханическое состояние цилиндрических оболочек под действием осесимметричных нагрузок

Рассматривается замкнутая цилиндрическая оболочка из smart-материала *PZT-4* радиусом $R=1\text{ м}$, длиной $L=4R$, относительной толщиной $h/R=1/100$. Электромеханические характеристики материала представлены в таблице 2.1. Оболочка, жестко-защемленная на двух краях, находится под действием осесимметричных механических $Q=Q(\xi)$ и электрических $\Phi=\Phi(\xi)$ нагрузок.

Таблица 2. 1. Электромеханические коэффициенты *PZT-4*

Константы (ГПа)	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}
PZT-4	139	78	74	139	74	139	25.6	25.6	30.6

Константы	e_{15}	e_{24}	e_{31}	e_{32}	e_{33}	μ_{11}	μ_{22}	μ_{33}
PZT-4	12.72	12.72	-5.2	-5.2	15.08	6.5	6.5	5.6

Единица измерения e – Кл.м⁻² и μ – 10⁻⁹ Фм⁻¹.

Результаты расчета ЭМС оболочки при действии осесимметричных электрических нагрузок $\Phi = \Phi(\xi) = V_0 = const$ представлены на рис.2.2-2.3.

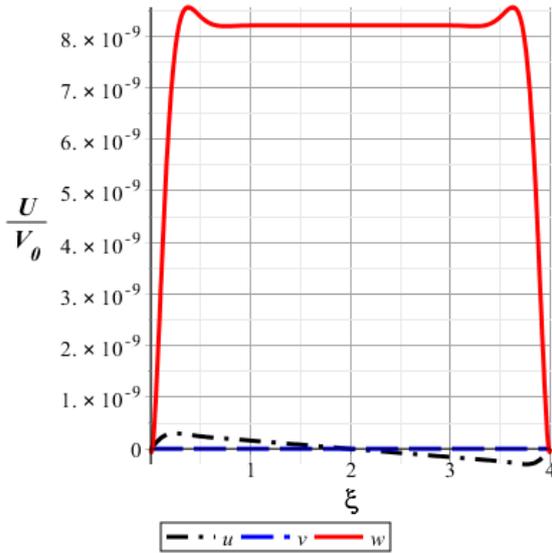


Рис 2.2.а)

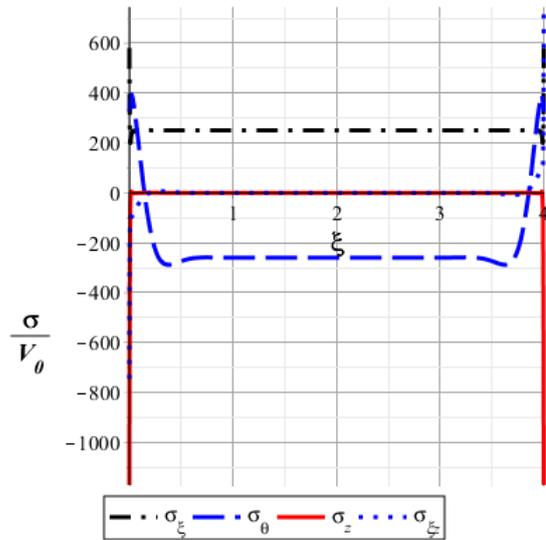


Рис 2.2.б)

Рис.2. 2. Графики перемещений (а) и напряжений (б) оболочки по длине в срединной поверхности

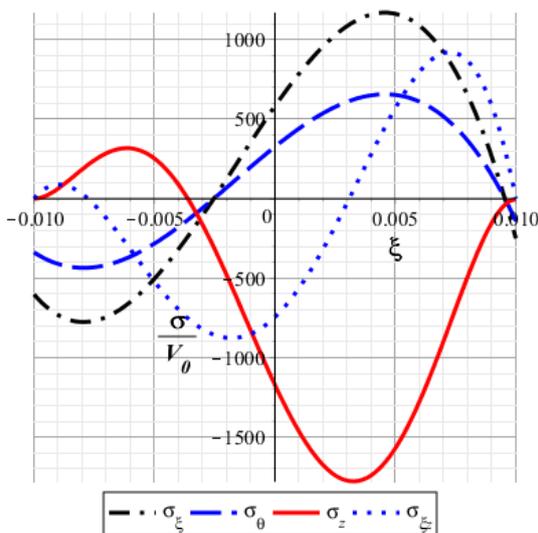


Рис 2.3.а)

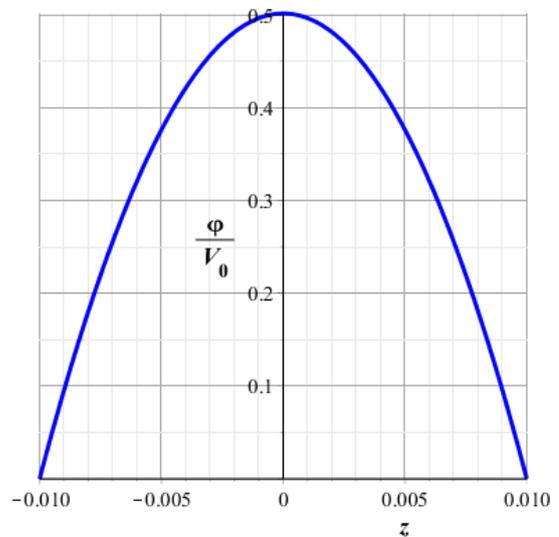


Рис 2.3.б)

Рис.2. 3 Графики напряжений и электрического потенциала оболочки по толщине в краевой зоне

В качестве второго случая ЭМС оболочки рассматривается действие осесимметричных механических нагрузок $Q = Q(\xi) = Q_0 \xi$ ($Q_0 = const$), результаты которого показаны на рис.2.4-2.5.

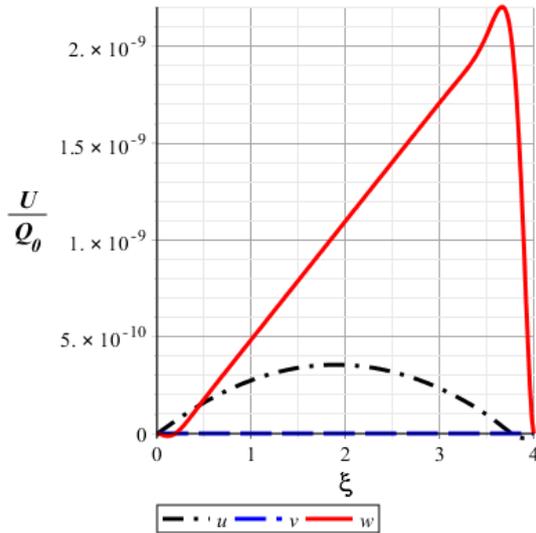


Рис 2.4.а)

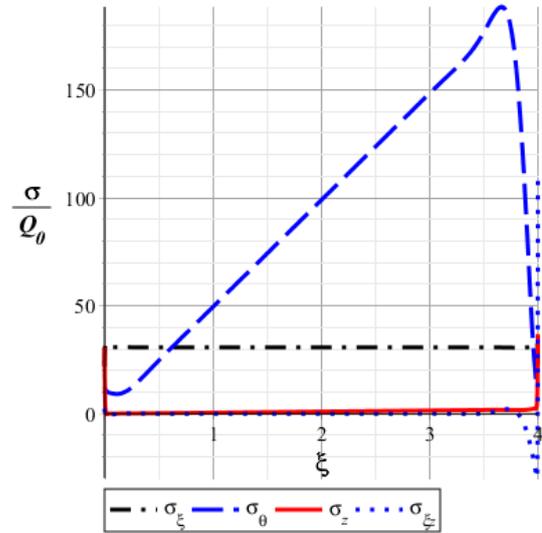


Рис 2.4.б)

Рис.2. 4 Графики перемещений (а) и напряжений (б) оболочки по длине в срединной поверхности

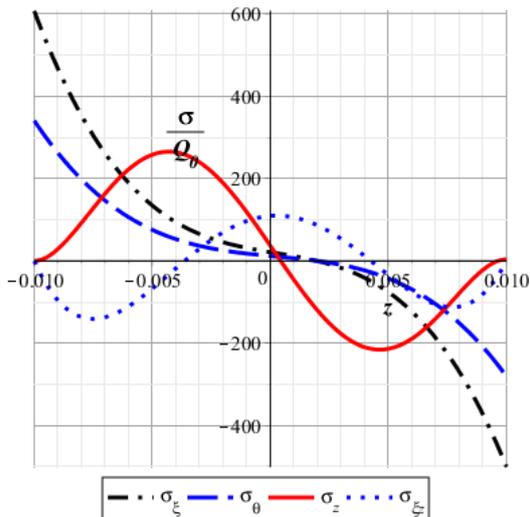


Рис 2.5.а)

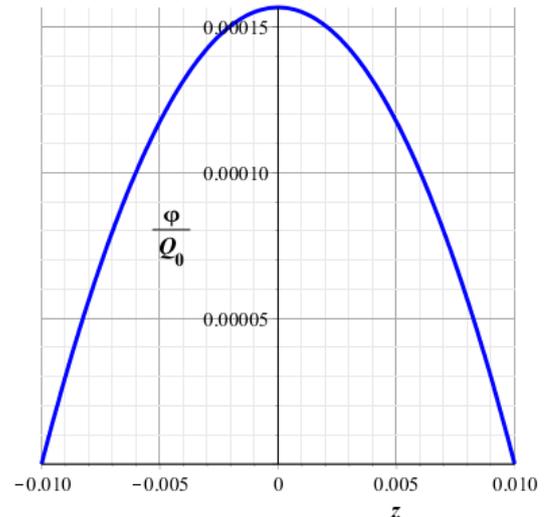


Рис 2.5.б)

Рис.2. 5 Графики напряжений (а) и электрического потенциала (б) оболочки по толщине в краевой зоне

Анализируя графики на рис.2.2 – 2.5 можно установить следующее:

- при незначительном удалении от ее краев, поперечные нормальные напряжения σ_z и $\sigma_{\xi z}$, как и следовало ожидать в соответствии с классической теорией, практически равны нулю (рис.2.2.б и рис.2.4.б) и ими можно пренебречь.

- вблизи жестко заземленных краев значения поперечных напряжений σ_z ($\sigma_{\xi z}$) – значительные и составляют соответственно 43,3% (29,2%) при действии механических нагрузок (рис.2.5.а) от максимальных нормальных напряжений σ_ξ ; с учетом пьезоэффекта максимальное напряжение σ_z (рис.2.3.а) при действии электрических потенциалов превышает величину максимального нормального напряжения σ_ξ на 52%, что необходимо учитывать для повышения достоверности расчетов на прочность и долговечность пьезоконструкций, содержащих непрерывные соединения.

2.4. НДС цилиндрических оболочек под действием электрических и механических нагрузок

Рассматривается замкнутая цилиндрическая оболочка из smart-материала Поливинилиденфторид ПВДФ (PVDF) радиусом $R=1м$, длиной $L=4R$, относительной толщиной $S=R/2h=1/50$. Электромеханические характеристики материала представлены в таблицах 2.2-2.3. Оболочка, жестко-зашемленная на двух краях, находится под действием электрических $\Phi = \Phi(\xi)\cos(m\theta)$ и механических $Q = Q(\xi)\cos(m\theta)$ нагрузок.

Таблица 2.2. Механические коэффициенты PVDF

Константы (ГПа)	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}
PVDF	3.0	1.5	1.5	3.0	1.5	3.0	0.75	0.75	0.75

Результаты расчета НДС оболочки в первом случае при действии электрических потенциалов $\Phi = V_0(\xi)\cos(m\theta)$, ($V_0 = const$, $m=5$) на внешней поверхности представлены на рис 2.6-2.7. Здесь через “кл” и “уточ” обозначены результаты расчетов по классической теории и по предлагаемой в данной работе уточненной теории соответственно.

Таблица 2.3. Пьезоэлектрические константы PVDF

Коэффициенты	e_{15}	e_{24}	e_{31}	e_{32}	e_{33}	μ_{11}	μ_{22}	μ_{33}
PVDF	0	0	-30.0	23.0	3.0	3.14	3.08	3.08

Единица измерения e – Кл.м⁻² и μ – 10⁻⁹ Фм⁻¹.

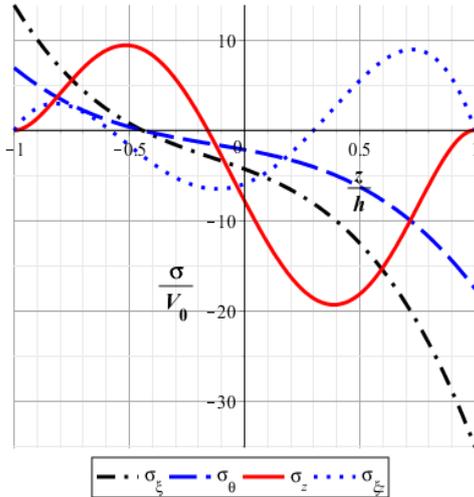


Рис 2.6.а)

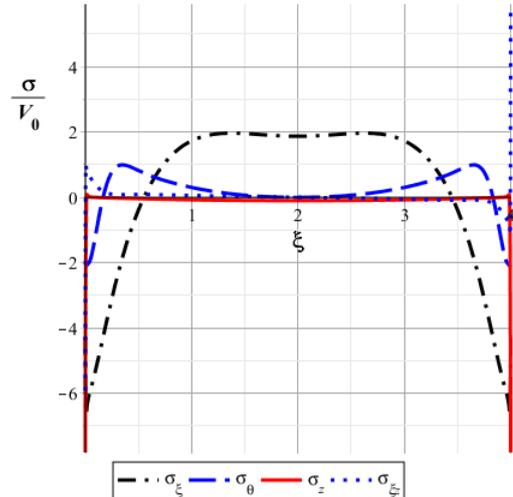


Рис 2.6.б)

Рис.2. 6 Графики основных напряжений по длине (а) в срединной поверхности и по толщине (б) в краевой зоне оболочки

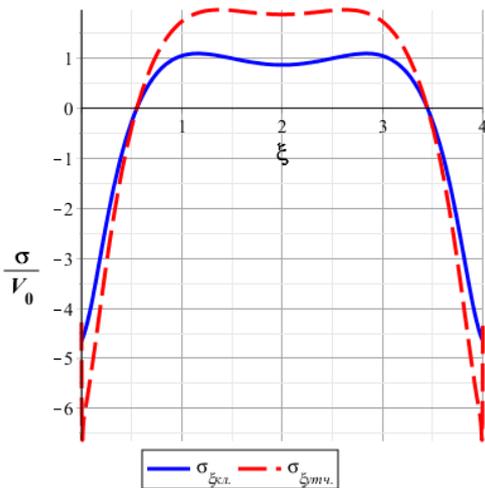


Рис 2.7.а)

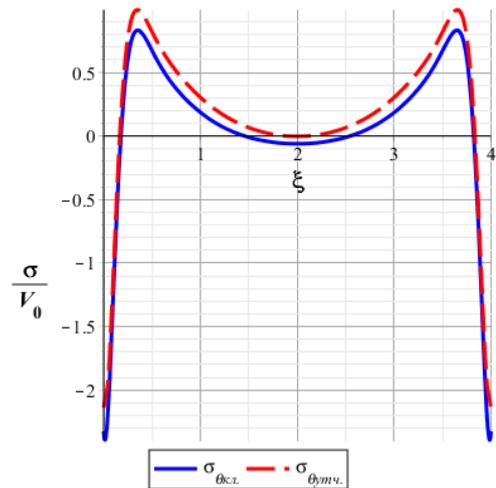


Рис 2.7.б)

Рис.2. 7. Сравнение основных напряжений σ_x (а) и σ_θ (б) по длине оболочки в срединной поверхности по классической и уточненной теориям

Графики нормальных и касательных напряжений во втором случае при действии механических нагрузок $Q = Q_0(\xi)\cos(m\theta)$, ($Q_0 = const, m = 5$) на внешней поверхности оболочки показаны на рис. 2.8-2.9.

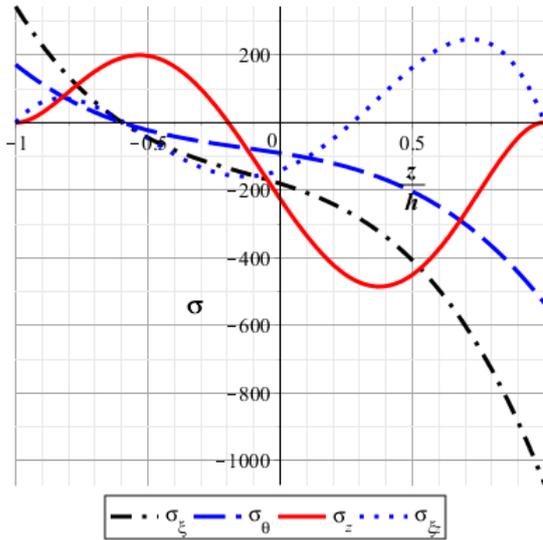


Рис 2.8.а)

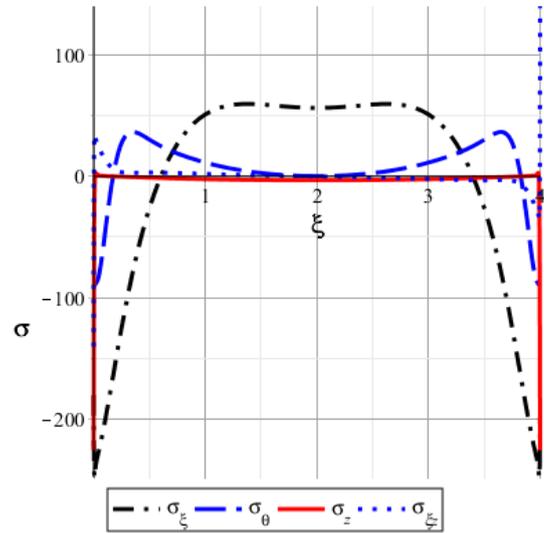


Рис 2.8.б)

Рис.2. 8 Графики основных напряжений по длине (а) в срединной поверхности и по толщине (б) в краевой зоне оболочки

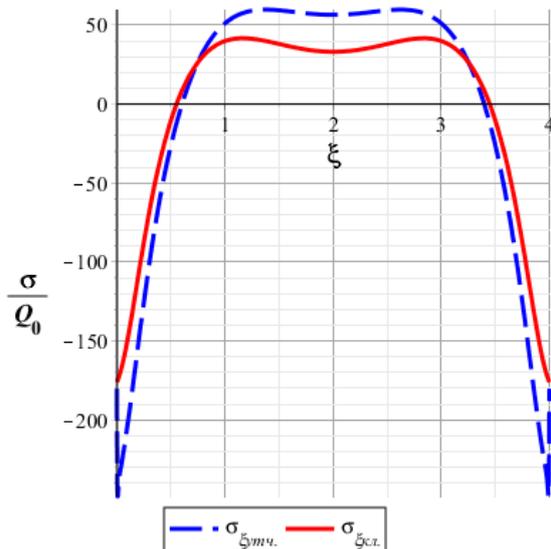


Рис 2.9.а)

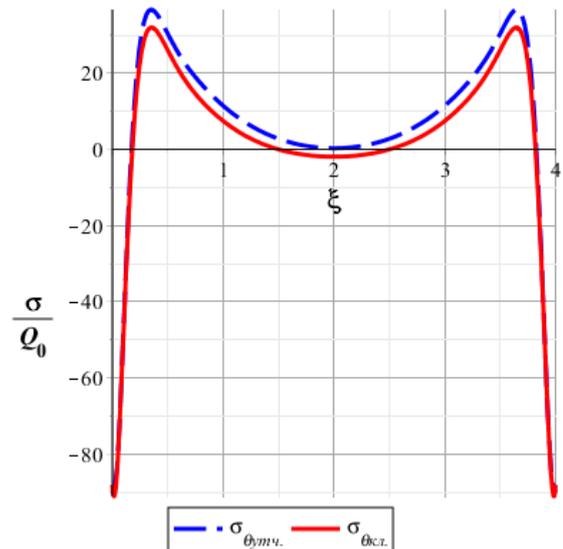


Рис 2.9.б)

Рис.2. 9. Сравнение основных напряжений σ_ξ (а) и σ_θ (б) по длине оболочки в срединной поверхности по классической и уточненной теориям

Анализ полученных результатов распределения напряжений по длине и по толщине в краевой зоне оболочки показывает, что поперечное нормальное напряжение σ_z ($\sigma_{\xi z}$) на жестко заземленных краях оболочки, которыми в классической теории пренебрегают, составляет примерно 55% (27%) в первом случае (рис.2.6.а) и 45% (22%) во втором случае (рис.2.8.а) от максимальных нормальных напряжений σ_ξ . При удалении от краевых зон на расстояние порядка толщины, напряжения типа “погранслои” затухают и практически равны нулю (рис.2.6.б и рис.2.8.б).

Кроме того, следует отметить, что в данной работе распределение основных напряжений σ_ξ и σ_θ во внутренней области оболочки по обоим вариантам расчетов при сравнении с классической теорией (рис.2.7. а,б и рис.2.9.а,б.) практически совпадает, что подтверждает достоверность полученных результатов.

В таблицах 2.5 и 2.6 приведены результаты расчета максимальных напряжений цилиндрических оболочек при различных значениях относительной толщины. Из анализа этих данных, можно установить, что с помощью предлагаемых в данной работе математических моделей расчета НДС, напряжения оболочки существенно уточняются.

Таблица 2.4. Максимальные напряжения оболочки, находящейся под действием механических нагрузок при различных значениях толщины

		σ_ξ / Q_0	σ_θ / Q_0	σ_z / Q_0	$\sigma_{\xi z} / Q_0$
S=150	кл	6071.48	3035.74	0	0
	утч	8454.76	4227.35	3851.26	1835.68
S=100	кл	2808.55	1404.28	0	0
	утч	4124.68	2062.24	1825.56	815.35
S=80	кл	1800.35	900.17	0	0

	утч	2695.94	1347.97	1250.36	601.56
S=50	кл	695.98	347.99	0	0
	утч	1071.01	535.51	501.86	241.35
S=30	кл	243.64	121.82	0	0
	утч	386.72	193.36	179.21	85.36

Таблица 2.5. Максимальные напряжения оболочки, находящейся под действием электрических потенциалов при различных значениях толщины

		σ_{ξ} / V_0	σ_{θ} / V_0	σ_z / V_0	$\sigma_{\xi z} / V_0$
S=150	кл	193.23	96.62	0	0
	утч	288.45	125.61	126.36	57.63
S=100	кл	90.05	45.03	0	0
	утч	136.08	63.04	62.75	30.86
S=80	кл	58.35	29.07	0	0
	утч	88.65	37.79	36.25	17.58
S=50	кл	22.98	11.50	0	0
	утч	35.89	18.01	19.12	8.65
S=30	кл	8.38	4.20	0	0
	утч	13.08	6.55	7.89	3.68

2.5. Выводы ко второй главе

1. На основе уточненной математической модели электроупругости для цилиндрических оболочек получены двумерные уравнения равновесия в перемещениях, электрических потенциалах и соответствующие граничные условия.

2. Сформулированная краевая задача электроупругости оболочки приведена к решению обыкновенных дифференциальных уравнений и соответствующих граничных условий путем разложения компонент перемещений, электрических потенциалов и внешних нагрузок в тригонометрические ряды по окружной координате.

3. Разработан алгоритм определения ЭМС оболочки с применением операционного метода, основанного на преобразовании Лапласа.

4. Приведены примеры расчетов и параметрического анализа НДС цилиндрических оболочек при различных вариантах внешней нагрузки и изменения толщины оболочки. Установлено, что в зоне искажения напряженного состояния нормальные тангенциальные напряжения существенно уточняются и поперечные нормальные напряжения, которыми в классической теории пренебрегают, имеют один порядок с максимальными значениями основного изгибного напряжения. При удалении от края напряжения, полученные по уточненной математической модели расчета НДС и классической теории совпадают, что подтверждает достоверность полученных результатов.

ГЛАВА III. ЭЛЕКТРОУПРУГОЕ СОСТОЯНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ПЬЕЗОЭФФЕКТА

В третьей главе представлена уточненная математическая модель напряженно-деформированного состояния многослойных композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта. Перемещения и электрический потенциал оболочки представляются в виде полиномов по нормальной координате на две степени выше по отношению к классической теории типа Кирхгофа-Лява. Математическая модель электромеханического состояния композиционных оболочек получена с помощью вариационного принципа Лагранжа. Сформулированная краевая задача электроупругости решается на основе сведения трехмерных уравнений к двумерным с помощью тригонометрических рядов по окружной координате. Рассматривается пример расчета напряженного состояния типа “погранслои” композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта с симметричным и ассиметричным распределениями слоев а также задач исследования электромеханического состояния композиционных цилиндрических оболочек с пьезоэлектрическими слоями под действием произвольной механической и электрической нагрузок.

3.1. Основные уравнения теории композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта

Композиционная цилиндрическая оболочка рассматривается как трехмерное твердое тело, отнесенное к триортогональной криволинейной системе координат ξ, θ, z . Оболочка имеет длину L , толщину $2h$, радиус R и состоит из N слоев. Угол армирования каждого слоя k обозначим через β_k , толщина каждого слоя k изменяется от h_{k-1} до h_k . На верхних и нижних поверхностях оболочки лежат слои, обладающие пьезоэлектрическим эффектом. Исследуемая оболочка

находится под действием механических нагрузок $q_{i3} = q_{i3}^{\pm}(\xi, \theta)$, ($i = 1, 2, 3$) и электрических потенциалов $\varphi = \varphi^{\pm}(\xi, \theta)$ (рис.3.1) по внутренней ($z = -h$) и внешней ($z = +h$) поверхностях оболочки.

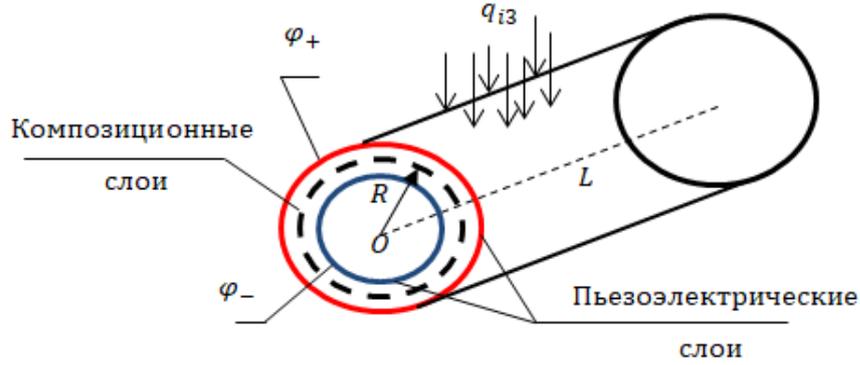


Рис.3. 1. Пьезокомпозиционная цилиндрическая оболочка

Полагаем, что на торцевых поверхностях оболочки заданы следующие граничные условия:

$$\sigma_{ij} = q_{ij}, \quad (i = \overline{1, 2}, j = \overline{1, 3}).$$

Перемещения оболочки представляются в виде полиномов по нормальной координате:

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!} + u_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!}; \\ v(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!} + v_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!}; \\ w(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z + w_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!}; \end{aligned} \quad (3.1)$$

Электрический потенциал оболочки представляется в виде аналогичных полиномов (3.1) по нормальной координате

$$\varphi(\xi, \theta, z) = \varphi_0(\xi, \theta) + \varphi_1(\xi, \theta)z + \varphi_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!}. \quad (3.2)$$

Деформации оболочки определяются как

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{\xi}, \varepsilon_{\theta}, \varepsilon_z, \gamma_{\xi\theta}, \gamma_{\xi z}, \gamma_{\theta z}\}^T, \quad (3.3)$$

где, компоненты деформаций находятся с помощью геометрических соотношений

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\xi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{R+z} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{\xi\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{\xi z} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R+z}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Подставляя разложения (3.1) в геометрические соотношения (3.4), находим деформации

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\xi} &= \frac{1}{R} \left(\varepsilon_{\xi}^0 + \chi_{\xi} z + \varepsilon_{\xi}^* \frac{z^2}{2!} + \chi_{\xi}^* \frac{z^3}{3!} \right); \\ \varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{R+z} \left(\varepsilon_{\theta}^0 + \chi_{\theta} z + \varepsilon_{\theta}^* \frac{z^2}{2!} + \chi_{\theta}^* \frac{z^3}{3!} \right); \quad \varepsilon_z = \frac{1}{R} \left(\varepsilon_z^0 + \chi_z z \right); \\ \gamma_{\xi\theta} &= \frac{1}{R} \left(\gamma_{\xi\theta}^0 + \chi_{\xi\theta} z + \gamma_{\xi\theta}^* \frac{z^2}{2!} + \chi_{\xi\theta}^* \frac{z^3}{3!} \right) + \frac{1}{R+z} \left(\lambda_{\xi\theta}^0 + \kappa_{\xi\theta} z + \lambda_{\xi\theta}^* \frac{z^2}{2!} + \kappa_{\xi\theta}^* \frac{z^3}{3!} \right); \\ \gamma_{\xi z} &= \frac{1}{R} \left(\gamma_{\xi z}^0 + \chi_{\xi z} z + \gamma_{\xi z}^* \frac{z^2}{2!} + \chi_{\xi z}^* \frac{z^3}{3!} \right); \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{R+z} \left(\gamma_{\theta z}^0 + \chi_{\theta z} z + \gamma_{\theta z}^* \frac{z^2}{2!} + \chi_{\theta z}^* \frac{z^3}{3!} \right).\end{aligned}\quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\xi}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial \xi}; \quad \chi_{\xi} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi}; \quad \varepsilon_{\xi}^* = \frac{\partial u_2}{\partial \xi}; \quad \chi_{\xi}^* = \frac{\partial u_3}{\partial \xi}; \\ \varepsilon_{\theta}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial \theta} + w_0; \quad \chi_{\theta} = \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + w_1; \quad \varepsilon_{\theta}^* = \frac{\partial v_2}{\partial \theta} + w_2; \quad \chi_{\theta}^* = \frac{\partial v_3}{\partial \theta}; \\ \gamma_{\xi\theta}^0 &= \frac{\partial v_0}{\partial \xi}; \quad \chi_{\xi\theta} = \frac{\partial v_1}{\partial \xi}; \quad \gamma_{\xi\theta}^* = \frac{\partial v_2}{\partial \xi}; \quad \chi_{\xi\theta}^* = \frac{\partial v_3}{\partial \xi}; \\ \lambda_{\xi\theta}^0 &= \frac{\partial u_0}{\partial \theta}; \quad \kappa_{\xi\theta} = \frac{\partial u_1}{\partial \theta}; \quad \lambda_{\xi\theta}^* = \frac{\partial u_2}{\partial \theta}; \quad \kappa_{\xi\theta}^* = \frac{\partial u_3}{\partial \theta}; \quad \chi_{\theta z}^* = 0;\end{aligned}$$

$$\gamma_{\xi z}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial \xi} + Ru_1; \quad \chi_{\xi z} = \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + Ru_2; \quad \gamma_{\xi z}^* = \frac{\partial w_2}{\partial \xi} + Ru_3; \quad \chi_{\xi z}^* = 0;$$

$$\gamma_{\theta z}^0 = \frac{\partial w_0}{\partial \theta} + Rv_1 - v_0; \quad \chi_{\theta z} = \frac{\partial w_1}{\partial \theta} + Rv_2; \quad \gamma_{\theta z}^* = \frac{\partial w_2}{\partial \theta} + Rv_3 + v_2.$$

3.1.1. Пьезоэлектрические слои

Уравнения электромеханического состояния поляризованных пьезоэлектрических слоев записываются в виде

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [Q]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\}, \\ \{D\} &= [e]\{\varepsilon\} + [\eta]^T \{E\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\{\sigma\} = \{\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{\xi\theta}, \sigma_{\xi z}, \sigma_{\theta z}\}^T$ - вектор напряжения слоев,

$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{\xi\theta}, \gamma_{\xi z}, \gamma_{\theta z}\}^T$ - вектор деформации слоев.

$Q = Q_{ij}$, ($i = \overline{1, 6}, j = \overline{1, 6}$) - симметричная матрица жесткости, $D = \{D_\xi, D_\theta, D_z\}$ - вектор электрической индукции, $E = \{E_\xi, E_\theta, E_z\}$ - вектор напряженности электрического

поля, $e = e_{ij}$ ($i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 6}$) - матрица пьезоэлектрических постоянных,

$\eta = \eta_{ij}$ ($i = \overline{1, 3}, j = \overline{1, 3}$) - симметричная матрица диэлектрических проницаемостей при нулевой деформации.

Уравнения Максвелла для пьезоэлектрических слоев оболочки в материальных средах, пренебрегая в них магнитными эффектами, можно привести к уравнениям электростатики. Отсюда следует, что вектор напряженности может быть выражен через потенциал φ следующим образом:

$$E_\xi^{(k)} = -\frac{\partial \varphi}{A_1 \partial \xi}, \quad E_\theta^{(k)} = -\frac{\partial \varphi}{A_2 \partial \theta}, \quad E_z^{(k)} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (3.7)$$

где $A_1 = R$, $A_2 = 1 + z/R$ - параметры Ламе цилиндрической оболочки.

3.1.2. Композиционные слои

Напряженное состояние цилиндрической оболочки при деформации k -го

слоя в локальной системе координат $O123$ (рис.3.2) определяется с помощью закон Гука [1, 2, 9]:

$$\left\{ \sigma_{123}^{(k)} \right\} = \left[C^{(k)} \right] \left\{ \varepsilon_{123}^{(k)} \right\}. \quad (3.8)$$

где $\sigma_{123}^{(k)} = \left\{ \sigma_{11}^{(k)}, \sigma_{22}^{(k)}, \sigma_{33}^{(k)}, \sigma_{12}^{(k)}, \sigma_{23}^{(k)}, \sigma_{31}^{(k)} \right\}$ - вектор напряжения k -го слоя оболочки, $\varepsilon_{123}^{(k)} = \left\{ \varepsilon_{11}^{(k)}, \varepsilon_{22}^{(k)}, \varepsilon_{33}^{(k)}, \gamma_{12}^{(k)}, \gamma_{23}^{(k)}, \gamma_{31}^{(k)} \right\}$ - вектор деформации k -го слоя, определяемый по формуле $\left\{ \varepsilon_{123}^{(k)} \right\} = \left\{ \varepsilon \right\} \left\{ \sigma_{123}^{(k)} \right\}$, $C^{(k)} = C_{ij}^{(k)}$, $(i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6})$ - симметричная матрица жесткости k -го слоя следующего вида:

$$\left[C^{(k)} \right] = \begin{bmatrix} C_{11}^{(k)} & C_{12}^{(k)} & C_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12}^{(k)} & C_{22}^{(k)} & C_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13}^{(k)} & C_{23}^{(k)} & C_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}^{(k)} \end{bmatrix},$$

коэффициенты которой определяются равенствами

$$\begin{aligned} C_{11}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)} \left(1 - \mu_{23}^{(k)} \mu_{32}^{(k)} \right)}{\mu^{(k)}}, \quad C_{12}^{(k)} = \frac{E_1^{(k)} \left(\mu_{21}^{(k)} + \mu_{31}^{(k)} \mu_{23}^{(k)} \right)}{\mu^{(k)}}, \\ C_{13}^{(k)} &= \frac{E_1^{(k)} \left(\mu_{31}^{(k)} + \mu_{21}^{(k)} \mu_{32}^{(k)} \right)}{\mu^{(k)}}, \quad C_{22}^{(k)} = \frac{E_2^{(k)} \left(1 - \mu_{13}^{(k)} \mu_{31}^{(k)} \right)}{\mu^{(k)}}, \\ C_{23}^{(k)} &= \frac{E_2^{(k)} \left(\mu_{32}^{(k)} + \mu_{12}^{(k)} \mu_{31}^{(k)} \right)}{\mu^{(k)}}, \quad C_{33}^{(k)} = \frac{E_3^{(k)} \left(1 - \mu_{12}^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \right)}{\mu^{(k)}}, \\ C_{44}^{(k)} &= G_{23}^{(k)}, \quad C_{55}^{(k)} = G_{13}^{(k)}, \quad C_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)}, \\ \mu^{(k)} &= \left(1 - \mu_{12}^{(k)} \mu_{21}^{(k)} - \mu_{23}^{(k)} \mu_{32}^{(k)} - \mu_{13}^{(k)} \mu_{31}^{(k)} - 2\mu_{13}^{(k)} \mu_{32}^{(k)} \mu_{21}^{(k)} \right), \end{aligned}$$

где $E_i^{(k)}$ - модуль Юнга, $G_{ij}^{(k)}$ - модуль сдвига, $\mu_{ij}^{(k)}$ - коэффициенты Пуассона

материала k -го слоя. Для них имеют место следующие соотношения:

$$\frac{\mu_{12}^{(k)}}{E_1^{(k)}} = \frac{\mu_{21}^{(k)}}{E_2^{(k)}}, \quad \frac{\mu_{13}^{(k)}}{E_1^{(k)}} = \frac{\mu_{31}^{(k)}}{E_3^{(k)}}, \quad \frac{\mu_{23}^{(k)}}{E_2^{(k)}} = \frac{\mu_{32}^{(k)}}{E_3^{(k)}}.$$

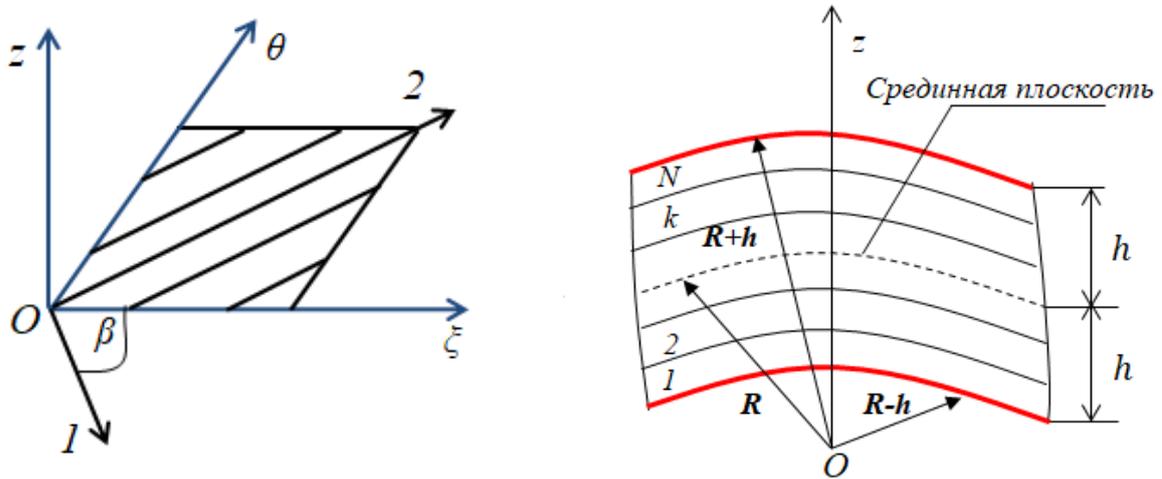


Рис.3. 2. Системы координат и слои композиционной цилиндрической оболочки

3.1.3. Основные уравнения теории композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта

Электромеханическая связь k -го слоя в общей системе координат $O\xi\theta z$ определяется следующей формулой по напряжениям:

$$\begin{aligned} \{\varepsilon^{(k)}\} &= [F^{(k)}] \{\sigma^{(k)}\} - [d^{(k)}]^T \{E^{(k)}\}, \\ \{D^{(k)}\} &= [d^{(k)}] \{\sigma^{(k)}\} + [\eta^{(k)}]^T \{E^{(k)}\}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

или по перемещениям

$$\begin{aligned} \{\sigma^{(k)}\} &= [T_2^{(k)}]^T [C^{(k)}] [T_2^{(k)}] \{\varepsilon\} - [e^{(k)}]^T \{E^{(k)}\}, \\ \{D^{(k)}\} &= [e^{(k)}] \{\varepsilon\} + [\eta^{(k)}]^T \{E^{(k)}\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь $[T_2^{(k)}]$ - матрица перехода, принимаемая в виде

$$[T_2^{(k)}] = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta^{(k)} & \sin^2 \beta^{(k)} & 0 & 0 & 0 & \sin \beta^{(k)} \cos \beta^{(k)} \\ \sin^2 \beta^{(k)} & \cos^2 \beta^{(k)} & 0 & 0 & 0 & -\sin \beta^{(k)} \cos \beta^{(k)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \beta^{(k)} & -\sin \beta^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \beta^{(k)} & \cos \beta^{(k)} & 0 \\ -\sin 2\beta^{(k)} & \sin 2\beta^{(k)} & 0 & 0 & 0 & \cos^2 \beta^{(k)} - \sin^2 \beta^{(k)} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

и $\{\sigma^{(k)}\} = \{\sigma_{\xi}^{(k)}, \sigma_{\theta}^{(k)}, \sigma_z^{(k)}, \sigma_{\xi\theta}^{(k)}, \sigma_{\xi z}^{(k)}, \sigma_{\theta z}^{(k)}\}^T$, $D^{(k)} = \{D_{\xi}^{(k)}, D_{\theta}^{(k)}, D_z^{(k)}\} = D_{123}^{(k)}$, $e^{(k)} = e_{123}^{(k)}$,

$\eta^{(k)} = \eta_{123}^{(k)}$, $E^{(k)} = \{E_{\xi}^{(k)}, E_{\theta}^{(k)}, E_z^{(k)}\} = E_{123}^{(k)}$ - электроупругостные параметры k -го слоя

оболочки в общей системе координат $O\xi\theta z$. Для композиционных слоев без учета пьезоэффекта, матрицы диэлектрических проницаемостей и пьезоэлектрических постоянных равны нулю.

Равенства (3.10) можно переписать следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{\xi}^{(k)} \\ \sigma_{\theta}^{(k)} \\ \sigma_z^{(k)} \\ \sigma_{\xi\theta}^{(k)} \\ \sigma_{\xi z}^{(k)} \\ \sigma_{\theta z}^{(k)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{13}^{(k)} & 0 & 0 & Q_{16}^{(k)} \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{23}^{(k)} & 0 & 0 & Q_{26}^{(k)} \\ Q_{31}^{(k)} & Q_{32}^{(k)} & Q_{33}^{(k)} & 0 & 0 & Q_{36}^{(k)} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^{(k)} & Q_{45}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45}^{(k)} & Q_{55}^{(k)} & 0 \\ Q_{16}^{(k)} & Q_{26}^{(k)} & Q_{36}^{(k)} & 0 & 0 & Q_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\xi\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}^{(k)} \\ 0 & 0 & e_{32}^{(k)} \\ 0 & 0 & e_{33}^{(k)} \\ 0 & e_{24}^{(k)} & 0 \\ e_{15}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \varphi}{R \partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{(R+z) \partial \theta} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{Bmatrix}; \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} D_{\xi}^{(k)} \\ D_{\theta}^{(k)} \\ D_z^{(k)} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24}^{(k)} & 0 & 0 \\ e_{31}^{(k)} & e_{32}^{(k)} & e_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\xi\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \eta_{11}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial\varphi}{R\partial\xi} \\ \frac{\partial\varphi}{(R+z)\partial\theta} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь компоненты матрицы жесткости $Q_{ij}, i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}$ имеют вид

$$Q_{11}^{(k)} = C_{11}^{(k)} \cos^4 \beta^{(k)} + C_{22}^{(k)} \sin^4 \beta^{(k)} + 2(C_{12}^{(k)} + 2C_{66}^{(k)}) \sin^2 \beta^{(k)} \cos^2 \beta^{(k)},$$

$$Q_{12}^{(k)} = (C_{11}^{(k)} + C_{22}^{(k)} - 4C_{66}^{(k)}) \sin^2 \beta^{(k)} \cos^2 \beta^{(k)} + C_{12}^{(k)} (\cos^4 \beta^{(k)} + \sin^4 \beta^{(k)}),$$

$$Q_{13}^{(k)} = C_{12}^{(k)} \cos^2 \beta^{(k)} + C_{23}^{(k)} \sin^2 \beta^{(k)},$$

$$Q_{16}^{(k)} = (C_{11}^{(k)} - C_{12}^{(k)} - 2C_{66}^{(k)}) \sin \beta^{(k)} \cos^3 \beta^{(k)} + (C_{12}^{(k)} - C_{22}^{(k)} + 2C_{66}^{(k)}) \sin^3 \beta^{(k)} \cos \beta^{(k)},$$

$$Q_{22}^{(k)} = C_{11}^{(k)} \sin^4 \beta^{(k)} + C_{22}^{(k)} \cos^4 \beta^{(k)} + 2(C_{12}^{(k)} + 2C_{66}^{(k)}) \sin^2 \beta^{(k)} \cos^2 \beta^{(k)},$$

$$Q_{23}^{(k)} = C_{12}^{(k)} \sin^2 \beta^{(k)} + C_{23}^{(k)} \cos^2 \beta^{(k)},$$

$$Q_{26}^{(k)} = (C_{11}^{(k)} - C_{12}^{(k)} - 2C_{66}^{(k)}) \sin^3 \beta^{(k)} \cos \beta^{(k)} + (C_{12}^{(k)} - C_{22}^{(k)} + 2C_{66}^{(k)}) \sin \beta^{(k)} \cos^3 \beta^{(k)},$$

$$Q_{33}^{(k)} = C_{33}^{(k)},$$

$$Q_{36}^{(k)} = (C_{12}^{(k)} - C_{23}^{(k)}) \sin \beta^{(k)} \cos \beta^{(k)},$$

$$Q_{44}^{(k)} = C_{44}^{(k)} \cos^2 \beta^{(k)} + C_{55}^{(k)} \sin^2 \beta^{(k)},$$

$$Q_{45}^{(k)} = (C_{55}^{(k)} - C_{44}^{(k)}) \sin \beta^{(k)} \cos \beta^{(k)},$$

$$Q_{55}^{(k)} = C_{44}^{(k)} \sin^2 \beta^{(k)} + C_{55}^{(k)} \cos^2 \beta^{(k)},$$

$$Q_{66}^{(k)} = [C_{11}^{(k)} + C_{22}^{(k)} - 2(C_{12}^{(k)} + C_{66}^{(k)})] \sin^2 \beta^{(k)} \cos^2 \beta^{(k)} + C_{66}^{(k)} (\cos^4 \beta^{(k)} + \sin^4 \beta^{(k)}),$$

$$Q_{ij}^{(k)} = Q_{ji}^{(k)}, i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}.$$

Для ортотропных композитных материалов $Q_{16}^{(k)} = Q_{26}^{(k)} = Q_{36}^{(k)} = Q_{45}^{(k)} = 0$, т.к. $\sin \beta^{(k)} \cos \beta^{(k)} = 0$, тогда уравнения (3.12) принимают вид

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{\xi}^{(k)} \\ \sigma_{\theta}^{(k)} \\ \sigma_z^{(k)} \\ \sigma_{\xi\theta}^{(k)} \\ \sigma_{\xi z}^{(k)} \\ \sigma_{\theta z}^{(k)} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11}^{(k)} & Q_{12}^{(k)} & Q_{13}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21}^{(k)} & Q_{22}^{(k)} & Q_{23}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31}^{(k)} & Q_{32}^{(k)} & Q_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\xi\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} - \\ &- \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31}^{(k)} \\ 0 & 0 & e_{32}^{(k)} \\ 0 & 0 & e_{33}^{(k)} \\ 0 & e_{24}^{(k)} & 0 \\ e_{15}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \varphi}{R \partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{(R+z) \partial \theta} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{Bmatrix}; \quad (3.13) \\ \begin{Bmatrix} D_{\xi}^{(k)} \\ D_{\theta}^{(k)} \\ D_z^{(k)} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24}^{(k)} & 0 & 0 \\ e_{31}^{(k)} & e_{32}^{(k)} & e_{33}^{(k)} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\xi\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \eta_{11}^{(k)} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22}^{(k)} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial \varphi}{R \partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi}{(R+z) \partial \theta} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Энергия механической деформации k -го слоя в общей системе координат $O\xi\theta z$ определяется как

$$U(M)^{(k)} = \iiint \sigma^{(k)} \varepsilon^{(k)} dV^{(k)}.$$

Энергия электрического поля k -го слоя в общей системе координат $O\xi\theta z$ представляется по формуле

$$U(E)^{(k)} = \iiint D^{(k)} E^{(k)} dV^{(k)}.$$

Полная потенциальная энергия U оболочки в общей системе координат $O\xi\theta z$, состоящая из суммы энергий механической деформации и электрического поля слоев, определяется как

$$U = U(M)^{(k)} + U(E)^{(k)} = \sum_{k=1}^n \iiint D^{(k)} E^{(k)} dV^{(k)} + \sum_{k=1}^n \iiint \sigma^{(k)} \varepsilon^{(k)} dV^{(k)}.$$

Работа механических нагрузок, действующих на k -ой слой в общей системе координат $O\xi\theta z$ определяется как

$$A(M)^{(k)} = \sum_{i=0}^3 \iint q_{i3} (u_i^{(k)} + v_i^{(k)} + w_i^{(k)}) dS + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \iint q_{ij} (u_i^{(k)} + v_i^{(k)} + w_i^{(k)}) dS.$$

При пьезоэлектрическом эффекте на поверхности появляются заряды $Q^{(k)}$ и они создают электрическую работу в общей системе координат $O\xi\theta z$

$$A(E)^{(k)} = \iint Q^{(k)} \varphi^{(k)} dS^{(k)}, \quad i = \overline{0,3}.$$

Полная работа A всех внешних нагрузок оболочки в общей системе координат $O\xi\theta z$ находится по формуле

$$A = A(M)^{(k)} + A(E)^{(k)};$$

$$A = \sum_{k=1}^n \iint Q^{(k)} \varphi^{(k)} dS^{(k)} + \sum_{k=1}^N \iint q_{i3} (u_i^{(k)} + v_i^{(k)} + w_i^{(k)}) dS^{(k)} + \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \iint q_{ij} \delta (u_i^{(k)} + v_i^{(k)} + w_i^{(k)}) dS.$$

Для построения основных уравнений теории композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта используется вариационный принцип Лагранжа

$$\delta\Pi = \delta U - \delta A = 0, \quad (3.14)$$

или с учетом предыдущих формул

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \sum_{k=1}^N \iiint \sigma^{(k)} \delta\varepsilon^{(k)} dV^{(k)} + \sum_{k=1}^N \iiint D^{(k)} \delta E^{(k)} dV^{(k)} - \sum_{k=1}^N \iint Q^{(k)} \delta\varphi^{(k)} dS^{(k)} - \\ & - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 \iint q_{i3} \delta(u_i^{(k)} + v_i^{(k)} + w_i^{(k)}) dS - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \iint q_{ij} \delta(u_i^{(k)} + v_i^{(k)} + w_i^{(k)}) dS = 0. \end{aligned}$$

Формулу (3.14) можно переписать в развернутом виде

$$\begin{aligned} \delta\Pi = & \sum_{k=1}^n \iiint (\sigma_{\xi}^{(k)} \delta\varepsilon_{\xi}^{(k)} + \sigma_{\theta}^{(k)} \delta\varepsilon_{\theta}^{(k)} + \sigma_z^{(k)} \delta\varepsilon_z^{(k)} + \sigma_{\xi\theta}^{(k)} \delta\gamma_{\xi\theta}^{(k)} + \sigma_{\theta z}^{(k)} \delta\gamma_{\theta z}^{(k)} + \\ & + \sigma_{\xi z}^{(k)} \delta\gamma_{\xi z}^{(k)}) R^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) d\xi d\theta dz + \sum_{k=1}^n \iiint (D_{\xi}^{(k)} \delta E_{\xi}^{(k)} + D_{\theta}^{(k)} \delta E_{\theta}^{(k)} + \\ & + D_z^{(k)} \delta E_z^{(k)}) R^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) d\xi d\theta dz - \iint_{\theta z} \left(q_{11} \sum_{i=0}^3 \delta u_i + q_{12} \sum_{i=0}^3 \delta v_i + \right. \\ & \left. + q_{13} \sum_{i=0}^2 \delta w_i \right) R \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz d\theta - \iint_{\xi z} \left(q_{21} \sum_{i=0}^3 \delta u_i + q_{22} \sum_{i=0}^3 \delta v_i + \right. \\ & \left. + q_{23} \sum_{i=0}^2 \delta w_i \right) R \left(1 + \frac{z}{R}\right) d\xi dz - \iint_{\xi \theta} q_{13}^+ \sum_{i=0}^3 \delta u_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \Big|_{z=+h} d\xi d\theta + \\ & + \iint_{\xi \theta} q_{13}^- \sum_{i=0}^3 \delta u_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \Big|_{z=-h} d\xi d\theta - \iint_{\xi \theta} q_{23}^+ \sum_{i=0}^3 \delta v_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \Big|_{z=+h} d\xi d\theta + \\ & + \iint_{\xi \theta} q_{23}^- \sum_{i=0}^3 \delta v_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \Big|_{z=-h} d\xi d\theta - \iint_{\xi \theta} q_{33}^+ \sum_{i=0}^2 \delta w_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \Big|_{z=+h} d\xi d\theta + \\ & + \iint_{\xi \theta} q_{33}^- \sum_{i=0}^2 \delta w_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \Big|_{z=-h} d\xi d\theta - \iint_{\xi \theta} Q_z^+ R^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \Big|_{z=+h} \delta\varphi d\xi d\theta + \\ & + \iint_{\xi \theta} Q_z^- R^2 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \Big|_{z=-h} \delta\varphi d\xi d\theta = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Подставляя выражения (3.13) с учетом (3.4) и (3.7) в равенство (3.15),

находим

$$\begin{aligned}
\delta\Pi = & \sum_{k=1}^n \iiint_{\xi \theta z} \left(\sigma_{\xi}^{(k)} \frac{1}{R} \sum_{i=0}^3 \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi} \frac{z^i}{i!} \right) + \sigma_{\theta}^{(k)} \frac{1}{R+z} \left(\sum_{i=0}^3 \delta \left(\frac{\partial v_i}{\partial \theta} \frac{z^i}{i!} \right) + \sum_{i=0}^2 \delta w_i \frac{z^i}{i!} \right) + \right. \\
& + \sigma_z^{(k)} \sum_{i=0}^2 \delta \left(\frac{\partial w_i}{\partial z} \frac{z^i}{i!} \right) + \sigma_{\xi\theta}^{(k)} \frac{1}{R} \sum_{i=0}^3 \delta \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \frac{z^i}{i!} \right) + \sigma_{\xi\theta}^{(k)} \frac{1}{R+z} \sum_{i=0}^3 \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial \theta} \frac{z^i}{i!} \right) + \\
& + \sigma_{\theta z}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^2 \frac{1}{R+z} \delta \left(\frac{\partial w_i}{\partial \theta} \frac{z^i}{i!} \right) + \sum_{i=0}^3 \delta \left(\frac{\partial v_i}{\partial z} \frac{z^i}{i!} \right) - \sum_{i=0}^3 \frac{1}{R+z} \delta v_i \right) + \\
& + \sigma_{\xi z}^{(k)} \left(\sum_{i=0}^2 \frac{1}{R} \delta \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi} \frac{z^i}{i!} \right) + \sum_{i=0}^3 \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial z} \frac{z^i}{i!} \right) \right) \Big) R^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right) d\xi d\theta dz + \\
& + \sum_{k=1}^n \iiint_{\xi \theta z} \left(-D_{\xi}^{(k)} \sum_{i=0}^2 \delta \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \frac{z^i}{i!} \right) - D_{\theta}^{(k)} \sum_{i=0}^2 \delta \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} \frac{z^i}{i!} \right) + \right. \\
& + D_z^{(k)} \sum_{i=0}^2 \delta \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} \frac{z^i}{i!} \right) \Big) R^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right) d\xi d\theta dz - \iint_{\xi \theta} q_{13}^+ \sum_{i=0}^3 \delta u_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right) \Big|_{z=h} d\xi d\theta + \\
& + \iint_{\xi \theta} q_{13}^- \sum_{i=0}^3 \delta u_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right) \Big|_{z=-h} d\xi d\theta - \iint_{\xi \theta} q_{23}^+ \sum_{i=0}^3 \delta v_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right) \Big|_{z=+h} d\xi d\theta + \\
& + \iint_{\xi \theta} q_{23}^- \sum_{i=0}^3 \delta v_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right) \Big|_{z=-h} d\xi d\theta - \iint_{\xi \theta} q_{33}^+ \sum_{i=0}^2 \delta w_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right) \Big|_{z=+h} d\xi d\theta + \\
& + \iint_{\xi \theta} q_{33}^- \sum_{i=0}^2 \delta w_i R^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right) \Big|_{z=-h} d\xi d\theta - \iint_{\xi \theta} Q_z^+ R^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right) \Big|_{z=+h} \delta \varphi d\xi d\theta + \\
& + \iint_{\xi \theta} Q_z^- R^2 \left(1 + \frac{z}{R} \right) \Big|_{z=-h} \delta \varphi d\xi d\theta = 0.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Введем для внешних механических силовых факторов следующие обозначения:

$$\left[N_{11}^{(i)}, \overline{N_{11}^{(i)}} \right] = \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\xi}^{(k)}, q_{11} \right] \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3});$$

$$\left[N_{12}^{(i)}, \overline{N_{12}^{(i)}} \right] = \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\xi\theta}^{(k)}, q_{12} \right] \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3});$$

$$\left[N_{13}^{(i)}, \overline{N_{13}^{(i)}} \right] = \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\xi z}^{(k)}, q_{13} \right] \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3});$$

$$\left[N_{22}^{(i)}, \overline{N_{22}^{(i)}} \right] = \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\theta}^{(k)}, q_{22} \right] \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3});$$

$$\left[N_{21}^{(i)}, \overline{N_{21}^{(i)}} \right] = \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\theta\xi}^{(k)}, q_{21} \right] \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3});$$

$$\left[N_{23}^{(i)}, \overline{N_{23}^{(i)}} \right] = \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\theta z}^{(k)}, q_{23} \right] \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3});$$

$$\left[N_{32}^{(i)}, \overline{N_{32}^{(i)}} \right] = \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\theta z}^{(k)}, q_{23} \right] R \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3});$$

$$N_{33}^{(j)} = \sum_{k=1}^n \int_{-h}^h \sigma_z^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) [1 \quad z] dz, \quad (j = \overline{0,2});$$

$$p_{13}^{(i)} = q_{13}^+ \left(1 + \frac{h}{R} \right) \frac{h^i}{2^i i!} - q_{13}^- \left(1 - \frac{h}{R} \right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}, \quad i = \overline{0,3};$$

$$p_{23}^{(i)} = q_{23}^+ \left(1 + \frac{h}{R} \right) \frac{h^i}{2^i i!} - q_{23}^- \left(1 - \frac{h}{R} \right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}, \quad i = \overline{0,3};$$

$$p_{33}^{(i)} = q_{33}^+ \left(1 + \frac{h}{R} \right) \frac{h^i}{2^i i!} - q_{33}^- \left(1 - \frac{h}{R} \right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}, \quad i = \overline{0,2}.$$

Введем для внешних электрических силовых факторов следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 ND_1^{(i)} &= \sum_{k=1}^n \int_{-h}^h D_1 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,2}); \\
 ND_2^{(i)} &= \sum_{k=1}^n \int_{-h}^h D_2 \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,2}); \\
 ND_3^{(i)} &= \sum_{k=1}^n \int_{-h}^h D_3 \left(1 + \frac{z}{R}\right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,2}); \\
 Q_z &= Q_z^+ \left(1 + \frac{h}{R}\right) \frac{h^i}{2^i i!} - Q_z^- \left(1 - \frac{h}{R}\right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}, \quad i = \overline{0,2}.
 \end{aligned}$$

Тогда уравнение (3.16) принимает вид

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi &= \iint_{\xi \theta} \left(R \sum_{i=0}^3 N_{11}^{(i)} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial \xi} \right) + R \left(\sum_{i=0}^3 N_{22}^{(i)} \delta \left(\frac{\partial v_i}{\partial \theta} \right) + \sum_{i=0}^2 N_{22}^{(i)} \delta w_i \right) + \right. \\
 &+ R \sum_{i=1}^2 N_{33}^{(i-1)} \delta w_i + R \sum_{i=0}^3 N_{12}^{(i)} \delta \left(\frac{\partial v_i}{\partial \xi} \right) + R \sum_{i=0}^3 N_{21}^{(i)} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right) + \\
 &+ R \sum_{i=0}^2 N_{23}^{(i)} \delta \left(\frac{\partial w_i}{\partial \theta} \right) + R \sum_{i=0}^3 \delta(\partial v_i) + R \sum_{i=1}^3 N_{32}^{(i-1)} \delta(\partial v_i) - R \sum_{i=0}^3 N_{23}^{(i)} \delta v_i + \\
 &+ R \sum_{i=0}^2 N_{13}^{(i)} \delta \left(\frac{\partial w_i}{\partial \xi} \right) + R^2 \sum_{i=1}^3 N_{13}^{(i-1)} \delta(\partial u_i) \left. \right) d\xi d\theta - \tag{3.1} \\
 &- \iint_{\xi \theta} \left(R \sum_{i=0}^2 ND_{11}^{(i)} \delta \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right) + R \sum_{i=0}^2 ND_{22}^{(i)} \delta \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \theta} \right) + \right. \\
 &+ R \sum_{i=0}^2 ND_{33}^{(i-1)} \delta(\partial \varphi_i) \left. \right) d\xi d\theta - \int_{\theta} \overline{N_{11}^{(k)}} \sum_{i=0}^3 \delta u_i d\theta - \int_{\xi} \overline{N_{22}^{(k)}} \sum_{i=0}^3 \delta v_i d\xi - \\
 &- \int_{\theta} \overline{N_{12}^{(k)}} \sum_{i=0}^3 \delta v_i d\theta - \int_{\xi} \overline{N_{21}^{(k)}} \sum_{i=0}^3 \delta u_i d\xi - \int_{\xi} \overline{N_{23}^{(k)}} \sum_{i=0}^2 \delta w_i d\xi - \\
 &- \int_{\theta} \overline{N_{13}^{(k)}} \sum_{i=0}^2 \delta w_i d\theta + \iint_{\xi \theta} \left(p_{13} \sum_{i=0}^3 \delta u_i + p_{23} \sum_{i=0}^3 \delta v_i + p_{33} \sum_{i=0}^2 \delta w_i \right) d\xi d\theta + \\
 &+ \iint_{\xi \theta} Q_z \sum_{i=0}^2 \delta \varphi_i d\xi d\theta = 0.
 \end{aligned}$$

Интегрируя слагаемые в уравнении (3.17) по частям, находим

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = & \iint_{\xi \theta} \left(R \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial N_{11}^{(i)}}{\partial \xi} \right) \delta u_i + R \left(\sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial N_{22}^{(i)}}{\partial \theta} \right) \delta v_i + \sum_{i=0}^2 N_{22}^{(i)} \delta w_i \right) + \right. \\
& + R \sum_{i=1}^2 N_{33}^{(i-1)} \delta w_i + R \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial N_{12}^{(i)}}{\partial \xi} \right) \delta v_i + R \sum_{i=0}^3 \left(\frac{\partial N_{21}^{(i)}}{\partial \theta} \right) \delta u_i + \\
& + R \sum_{i=0}^2 \left(\frac{\partial N_{23}^{(i)}}{\partial \theta} \right) \delta w_i + R \sum_{i=1}^3 N_{32}^{(i-1)} \delta v_i - R \sum_{i=0}^3 N_{23}^{(i)} \delta v_i + \\
& \left. + R \sum_{i=0}^2 \left(\frac{\partial N_{13}^{(i)}}{\partial \xi} \right) \delta w_i + R^2 \sum_{i=0}^3 N_{13}^{(i-1)} \delta u_i \right) d\xi d\theta - \\
& - \iint_{\xi \theta} \left(R \sum_{i=0}^2 \left(\frac{\partial ND_{11}^{(i)}}{\partial \xi} \right) \delta \varphi_i + R \sum_{i=0}^2 \left(\frac{\partial ND_{22}^{(i)}}{\partial \theta} \right) \delta \varphi_i + R \sum_{i=1}^2 ND_{33}^{(i-1)} \delta \varphi_i \right) d\xi d\theta + \\
& + \iint_{\xi \theta} \left(p_{13} \sum_{i=0}^3 \delta u_i + p_{23} \sum_{i=0}^3 \delta v_i + p_{33} \sum_{i=0}^2 \delta w_i \right) d\xi d\theta + \iint_{\xi \theta} Q_z \sum_{i=0}^2 \delta \varphi_i d\xi d\theta - \\
& - \int_{\theta} \sum_{i=0}^3 \left(N_{11}^{(i)} - \overline{N_{11}^{(i)}} \right) \delta u_i d\theta - \int_{\xi} \sum_{i=0}^3 \left(N_{22}^{(i)} - \overline{N_{22}^{(i)}} \right) \delta v_i d\xi - \\
& - \int_{\theta} \sum_{i=0}^3 \left(N_{12}^{(i)} - \overline{N_{12}^{(i)}} \right) \delta v_i d\theta - \int_{\xi} \sum_{i=0}^3 \left(N_{21}^{(i)} - \overline{N_{21}^{(i)}} \right) \delta u_i d\xi - \\
& - \int_{\xi} \sum_{i=0}^2 \left(N_{23}^{(i)} - \overline{N_{23}^{(i)}} \right) \delta w_i d\xi - \int_{\theta} \sum_{i=0}^2 \left(N_{13}^{(i)} - \overline{N_{13}^{(i)}} \right) \delta w_i d\theta = 0.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

В силу независимости и произвольности вариаций искомым обобщенных перемещений, из последнего выражения получим систему уравнений равновесия

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{21}^{(0)}}{\partial \theta} - R p_{13}^{(0)} &= 0; \\
\frac{\partial N_{11}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{21}^{(i)}}{\partial \theta} - R N_{13}^{(i-1)} - R p_{13}^{(i)} &= 0, (i = \overline{1, 3});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_{12}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{22}^{(0)}}{\partial \theta} + N_{23}^{(0)} - Rp_{23}^{(0)} = 0; \\
& \frac{\partial N_{12}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{22}^{(i)}}{\partial \theta} + N_{23}^{(i)} - RN_{23}^{(i-1)} - iN_{23}^{(i)} - Rp_{23}^{(i)} = 0, (i = \overline{1, 3}); \\
& \frac{\partial N_{13}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{23}^{(0)}}{\partial \theta} - N_{22}^{(0)} + Rp_{33}^{(0)} = 0; \\
& \frac{\partial N_{13}^{(j)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{23}^{(j)}}{\partial \theta} - N_{22}^{(j)} - RN_{33}^{(j-1)} + Rp_{33}^{(j)} = 0, (j = \overline{1, 2}); \\
& \frac{\partial ND_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial ND_{22}^{(0)}}{\partial \theta} + R(Q_z^+ + Q_z^-) = 0; \\
& \frac{\partial ND_{11}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial ND_{22}^{(1)}}{\partial \theta} - RND_{33}^{(0)} + R(hQ_z^+ - hQ_z^-) = 0; \\
& \frac{\partial ND_{11}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial ND_{22}^{(1)}}{\partial \theta} - 2RND_{33}^{(1)} + R(h^2Q_z^+ + h^2Q_z^-) = 0.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Граничные условия представляются в следующем виде:

на краю $l = 0$

$$\begin{aligned}
& u_i = \overline{u}_i \vee N_{11}^{(i)} = \overline{N}_{11}^{(i)}, v_i = \overline{v}_i \vee N_{12}^{(i)} = \overline{N}_{12}^{(i)}, w_j = \overline{w}_j \vee N_{13}^{(j)} = \overline{N}_{13}^{(j)}, \\
& \varphi_0 = 0 \vee ND_{11}^{(j)} = 0, \varphi_1 = 0 \vee ND_{22}^{(j)} = 0, \varphi_2 = 0 \vee ND_{33}^{(j)} = 0, (i = \overline{0, 3}; j = \overline{0, 2});
\end{aligned} \tag{3.20}$$

на краю $l = L$

$$\begin{aligned}
& u_i = \overline{u}_i \vee N_{21}^{(i)} = \overline{N}_{21}^{(i)}, v_i = \overline{v}_i \vee N_{22}^{(i)} = \overline{N}_{22}^{(i)}, w_j = \overline{w}_j \vee N_{23}^{(j)} = \overline{N}_{23}^{(j)}, \\
& \varphi_0 = 0 \vee ND_{11}^{(j)} = 0, \varphi_1 = 0 \vee ND_{22}^{(j)} = 0, \varphi_2 = 0 \vee ND_{33}^{(j)} = 0, (i = \overline{0, 3}; j = \overline{0, 2});
\end{aligned} \tag{3.21}$$

где $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{w}_j, i = \overline{0..3}; j = \overline{0, 2}$ – перемещения, заданные на краях оболочки в соответствии с граничными условиями.

Обозначив электрические потенциалы, действующие на верхнюю и нижнюю поверхности оболочки через φ^+ и φ^- , соответственно,

$$\varphi|_{z=h} = \varphi^+, \quad \varphi|_{z=-h} = \varphi^-.$$

из равенства (3.2), получим

$$\varphi_1 = \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2h}, \quad \varphi_2 = -\frac{\varphi_0}{h^2} + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2h^2}. \quad (3.22)$$

Подставляя (3.22) в три последних уравнения системы (3.19), находим систему уравнений равновесия композиционных цилиндрических оболочек с учетом электрического эффекта

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{11}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{21}^{(0)}}{\partial \theta} - Rp_{13}^{(0)} &= 0, \\ \frac{\partial N_{11}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{21}^{(i)}}{\partial \theta} - RN_{13}^{(i-1)} - Rp_{13}^{(i)} &= 0, (i = \overline{1, 3}), \\ \frac{\partial N_{12}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{22}^{(0)}}{\partial \theta} + N_{23}^{(0)} - Rp_{23}^{(0)} &= 0, \\ \frac{\partial N_{12}^{(i)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{22}^{(i)}}{\partial \theta} + N_{23}^{(i)} - RN_{23}^{(i-1)} - iN_{23}^{(i)} - Rp_{23}^{(i)} &= 0, (i = \overline{1, 3}), \\ \frac{\partial N_{13}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{23}^{(0)}}{\partial \theta} - N_{22}^{(0)} + Rp_{33}^{(0)} &= 0, \\ \frac{\partial N_{13}^{(j)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{23}^{(j)}}{\partial \theta} - N_{22}^{(j)} - RN_{33}^{(j-1)} + Rp_{33}^{(j)} &= 0, (j = \overline{1, 2}), \\ \frac{\partial (h^2 ND_1^{(0)} - ND_1^{(2)})}{\partial \xi} + \frac{\partial (h^2 ND_2^{(0)} - ND_2^{(2)})}{\partial \theta} - 2ND_3^{(1)} &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Воспользовавшись стандартными краевыми условиями трехмерной теории электроупругости, получим соответствующие краевые условия при стандартном закреплении краев оболочки

- на жестко заземленном краю:

$$u_i = v_i = 0, \quad w_j = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad (i = \overline{0, 3}; j = \overline{0, 2}), \quad (3.24)$$

- на шарнирно закреплённом краю:

$$N_{11}^{(j)} = 0, (j = \overline{0, 3}), \quad v_i = w_j = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad (i = \overline{0, 3}; j = \overline{0, 2}), \quad (3.25)$$

- на свободном краю:

$$N_{11}^{(i)} = N_{12}^{(i)} = 0, N_{13}^{(j)} = 0, \varphi_0 = 0, (i = \overline{0,3}; j = \overline{0,2}). \quad (3.26)$$

Алгоритм определения поперечных напряжений оболочки.

Для расчета механических перемещений ($u_k, v_k, w_l, k = \overline{0..3}; l = \overline{0..2}$) и электрического потенциала φ_0 многослойной композитной цилиндрической оболочки с учетом пьезоэффекта, подставляя компоненты напряжений и электрических индукций (3.13) с учетом формул (3.1), (3.2), (3.4) и (3.7) в выражения для обобщенных усилий, а затем полученные выражения в уравнения равновесия (3.23), получим систему дифференциальных уравнений в частных производных 24-го порядка относительно 12 обобщенных перемещений и потенциалов.

В результате находим механические перемещения и электрический потенциал. Компоненты деформации оболочки определяются подстановкой найденных перемещений в соотношения (3.4). Тангенциальные напряжения получают из формул (3.13).

Поперечные напряжения k -го слоя определяются непосредственным интегрированием уравнений равновесия трехмерной теории электроупругости и представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_{\xi z}^{(k)} &= -\frac{1}{1+r_z} \int_{h_{(k-1)}}^{h_{(k)}} \left(\frac{1+r_z}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi \theta}^{(k)}}{\partial \theta} \right) dz + \frac{(1+r_z)_{z=h_{(k-1)}}}{1+r_z} q_{13}^-, \\ \sigma_{\theta z}^{(k)} &= -\frac{1}{(1+r_z)^2} \int_{h_{(k-1)}}^{h_{(k)}} \left(\frac{1+r_z}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta}^{(k)}}{\partial \theta} + \frac{(1+r_z)^2}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi \theta}^{(k)}}{\partial \xi} \right) dz + \frac{(1+r_z)^2_{z=h_{(k-1)}}}{(1+r_z)^2} q_{23}^-, \\ \sigma_z^{(k)} &= -\frac{1}{1+r_z} \int_{h_{(k-1)}}^{h_{(k)}} \left(\frac{1+r_z}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi z}^{(k)}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta z}^{(k)}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \sigma_{\xi}^{(k)} \right) dz + \frac{(1+r_z)_{z=h_{(k-1)}}}{1+r_z} q_{33}^-. \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.2. Решение сформулированной краевой задачи

Для цилиндрических оболочек, изготовленных из композиционных перекрестно армированных слоев, уравнения равновесия (3.23) можно переписать

в перемещениях и потенциалах в следующем виде:

$$\sum_{i=0}^2 \left(H_{0i,22}^k \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + H_{0i,1}^k \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \varphi_i + \sum_{i=0}^3 \left(H_{1i,11}^k \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + H_{1i,22}^k \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + H_{1i}^k \right) u_i +$$

$$+ \sum_{i=0}^3 H_{2i,12}^k \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} v_i + \sum_{i=0}^2 H_{3i,1}^k \frac{\partial}{\partial \xi} w_i + (H_{q,11}^l q_{11}^+ - H_{q,12}^l q_{11}^-) = 0,$$

$$k = \overline{1, 4};$$

$$\sum_{i=0}^2 \left(H_{0i,12}^m \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} + H_{0i,2}^m \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \varphi_i + \sum_{i=0}^3 H_{1i,12}^m \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} u_i + \sum_{i=0}^2 H_{3i,2}^m \frac{\partial}{\partial \theta} w_i +$$

$$+ \sum_{i=0}^3 \left(H_{2i,11}^m \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + H_{2i,22}^m \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + H_{2i}^m \right) v_i + (H_{q,21}^l q_{23}^+ - H_{q,22}^l q_{23}^-) = 0,$$

(3.28)

$$m = \overline{5, 8};$$

$$\sum_{i=0}^2 H_{0i,11}^l \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \varphi_i + \sum_{i=0}^3 H_{1i,1}^l \frac{\partial}{\partial \xi} u_i + \sum_{i=0}^2 \left(H_{3i,11}^l \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + H_{3i,22}^l \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + H_{3i}^l \right) w_i +$$

$$+ \sum_{i=0}^3 H_{1i,2}^l \frac{\partial}{\partial \theta} v_i + (H_{q,31}^l q_{33}^+ - H_{q,32}^l q_{33}^-) + (H_{\varphi,1}^l \varphi_0^+ - H_{\varphi,2}^l \varphi_0^-) = 0,$$

$$l = \overline{9, 11};$$

$$\sum_{i=0}^2 \left(H_{0i,11}^{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + H_{0i,22}^{12} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + H_{0i}^{12} \right) \varphi_i + \sum_{i=0}^3 H_{1i,1}^{12} \frac{\partial}{\partial \xi} u_i +$$

$$+ \sum_{i=0}^3 H_{2i,2}^{12} \frac{\partial}{\partial \theta} v_i + \sum_{i=0}^2 H_{3i}^{12} w_i + (H_{\varphi,1}^{12} \varphi_0^+ - H_{\varphi,2}^{12} \varphi_0^-) = 0,$$

где коэффициенты H – постоянные, зависящие от электромеханических характеристик материала, количества слоев N , а также углов армирования композиционных цилиндрических оболочек.

Для удовлетворения граничных условий механические перемещения, электрические потенциалы и внешние электромеханические нагрузки, действующие на оболочку, представляется в виде тригонометрических рядов по окружной координате θ следующего вида:

$$\begin{aligned}
q_{13}^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{13,m}^{1\pm}(\xi) \cos(m\theta) + Q_{13,m}^{2\pm}(\xi) \sin(m\theta)) + Q_{13,0}^{\pm}(\xi), \\
q_{23}^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{23,m}^{1\pm}(\xi) \cos(m\theta) + Q_{23,m}^{2\pm}(\xi) \sin(m\theta)) + Q_{23,0}^{\pm}(\xi), \\
q_{33}^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} (Q_{33,m}^{1\pm}(\xi) \cos(m\theta) + Q_{33,m}^{2\pm}(\xi) \sin(m\theta)) + Q_{33,0}^{\pm}(\xi), \\
\varphi_0^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} (\Phi_{0,m}^{1\pm}(\xi) \cos(m\theta) + \Phi_{23,m}^{\pm}(\xi) \sin(m\theta)) + \Phi_0^{\pm}(\xi), \\
u_i(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} (U_{i,m}^1(\xi) \cos(m\theta) + U_{i,m}^2(\xi) \sin(m\theta)) + U_{i0}(\xi), i = \overline{0,3}, \\
v_i(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} (V_{i,m}^1(\xi) \cos(m\theta) + V_{i,m}^2(\xi) \sin(m\theta)) + V_{i0}(\xi), i = \overline{0,3}, \\
w_i(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} (W_{i,m}^1(\xi) \cos(m\theta) + W_{i,m}^2(\xi) \sin(m\theta)) + W_{i0}(\xi), i = \overline{0,2}, \\
\varphi_0(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} (\varphi_{0m}^1(\xi) \cos(m\theta) + \varphi_{0m}^2(\xi) \sin(m\theta)) + \varphi_0(\xi).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Подставляя (3.29) в (3.28), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для решения сформулированной краевой задачи применяется операционный метод, основанный на преобразовании Лапласа, аналогично пунктам 2.2 и 2.3 для изотропной цилиндрической оболочки.

На рисунке 3.3 представлена схема алгоритма решения краевой задачи цилиндрических композиционных оболочек с учетом пьезоэффекта

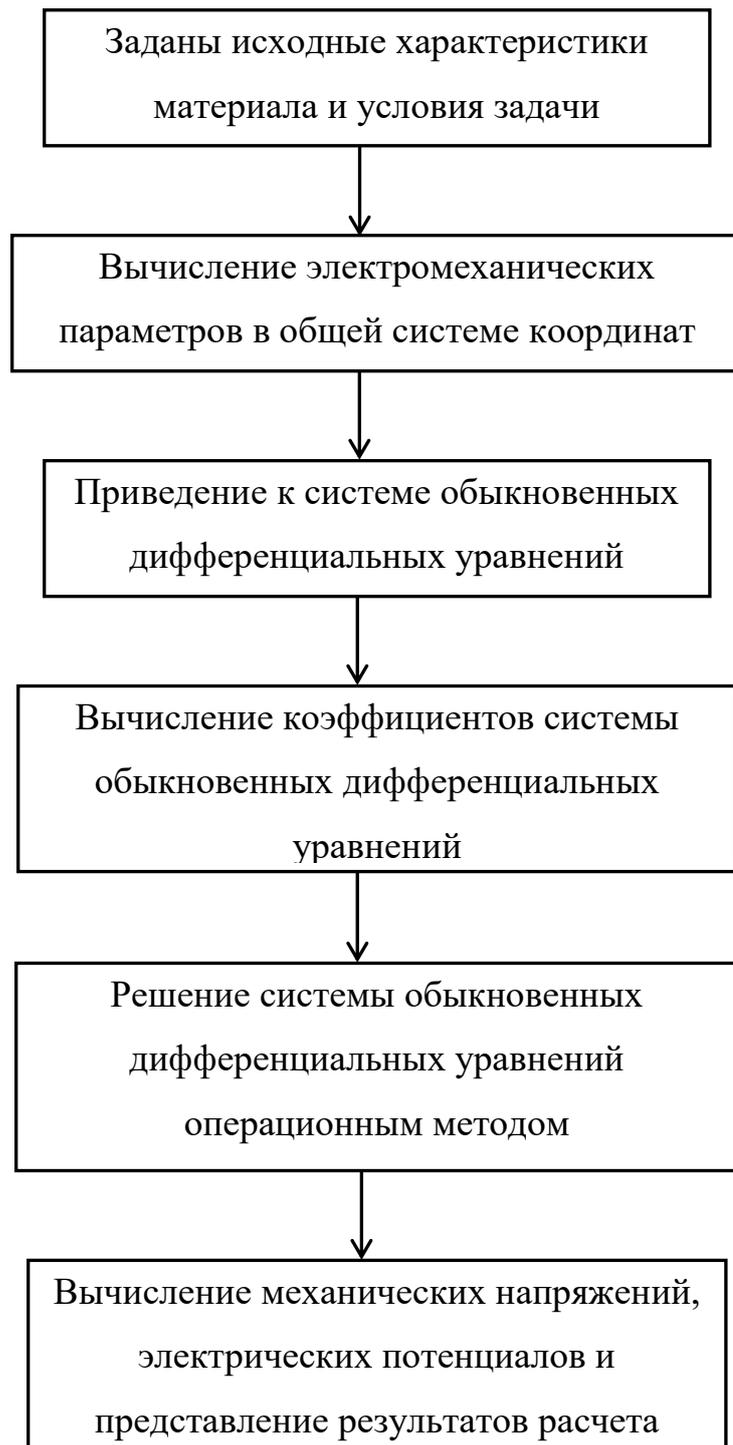


Рис 3.3. Схема алгоритма решения краевой задачи

3.3. Анализ результатов параметрических исследований

3.3.1. НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек без учета пьезоэлектрического эффекта

Используем математическую модель (3.23) и краевые условия (3.24-3.26) для исследования НДС композитных цилиндрических оболочек, изготовленных из материалов, необладающих пьезоэффектом.

Рассматривается замкнутая многослойная композитная цилиндрическая оболочка с шарнирным опиранием на обоих торцах. Оболочка находится под действием синусоидальной нагрузки $q = Q_0 \sin\left(\frac{m\pi\xi}{L}\right) \cos(n\theta)$ на внутренней поверхности, где L – длина оболочки. Механические свойства каждого слоя заданы следующим образом:

$$E_1 / E_2 = 25, E_3 = E_2, G_{12} = G_{13} = 0.5E_2, G_{23} = 0.2E_2,$$

$$\mu_{12} = \mu_{31} = \mu_{23} = 0.25.$$

Далее используются следующие обозначения:

$$\bar{w} = \frac{w}{Q_0}; \quad \bar{\sigma}_z = \frac{\sigma_z}{Q_0}; \quad (\bar{\sigma}_\xi, \bar{\sigma}_\theta) = \frac{10}{Q_0 S^2} (\sigma_\xi, \sigma_\theta).$$

В таблицах 3.1 и 3.2 показаны результаты расчетов безразмерного максимального прогиба \bar{w} в центре оболочек в случае $m=1, n=4, L/R=4$ при разных относительных толщинах S в трех вариантах:

- Оболочка состоит из 1 слоя с углом армирования $[90^\circ]$.
- Оболочка состоит из 2 слоев с углами армирования $[90^\circ/0]$.
- Оболочка состоит из 3 слоев с углами армирования $[90^\circ/0/90^\circ]$.

Проведено сравнение с результатами других авторов, опубликованными в международных журналах Scopus и Web of Science на основе трехмерных и других уточненных теорий цилиндрических оболочек.

Таблица 3. 1. Сравнение прогибов \bar{w} при $[90^\circ]$ и $[90^\circ/0]$

S	[90°]		[90°/0]	
	В данной работе	V&B[138]	В данной работе	V&B[138]
2	7.812	7.503	13.906	14.034
4	2.7756	2.7830	5.9909	6.1000
10	0.9172	0.9189	2.991	3.3300
50	0.5384	0.5385	2.186	2.2420
100	0.5169	0.5170	1.400	1.3670
500	0.3056	0.3030	0.1011	0.1005

Таблица 3. 2. Сравнение прогибов \bar{w} при $[90^\circ/0/90^\circ]$

S	500	100	50	10	4
V&B[138]	0.1027	0.4715	0.5495	1.2230	4.0090
S. B [141]	0.1027	0.4715	0.5495	1.2230	4.0090
В данной работе	0.1101	0.4731	0.5399	1.188	3.9106

В таблице 3.3 дано сравнение максимальных нормальных поперечных напряжений $\bar{\sigma}_z$, полученных в данной работе и в работах других исследователей при разных относительных толщинах S.

Таблица 3.3. Сравнение максимальных поперечных нормальных напряжений $\bar{\sigma}_z$ при $[90^\circ]$ и $[90^\circ/0/90^\circ]$.

S	$[90^\circ]$		$[90^\circ/0/90^\circ]$		
	В данной работе	V&B[138]	В данной работе	V&B[138]	S. B [141]
4	-0.73	-0.69	-0.68	-0.62	-0.62
10	-1.40	-1.37	-1.29	-1.27	-1.27
50	-5.39	-5.38	-4.88	-4.85	-4.85
80	-	-	-6.68	-6.65	-6.65
100	-10.14	-10.13	-8.31	-8.30	-8.30
500	-29.25	-29.24	-9.12	-9.12	-9.12

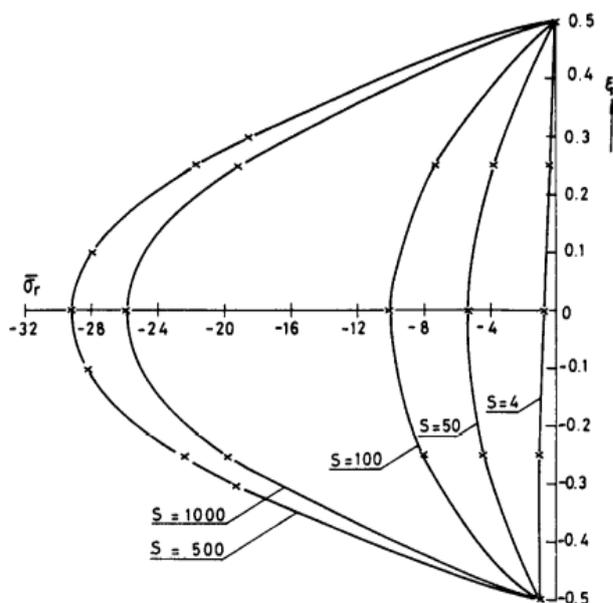


Рис.3.3а

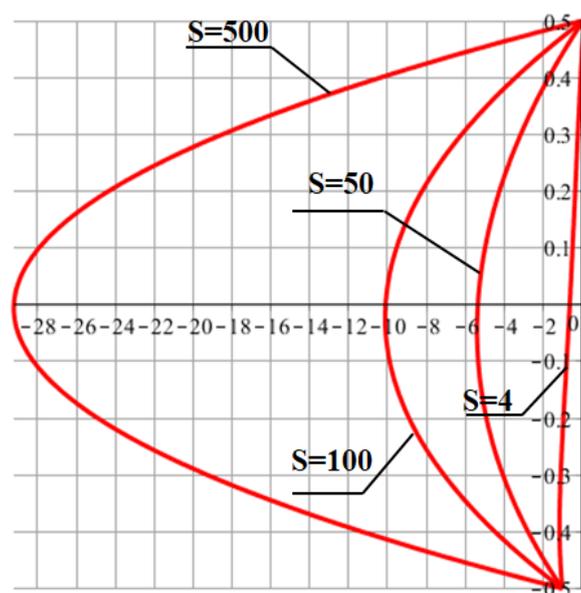


Рис.3.3б

Рис.3.3. Графики поперечных нормальных напряжений при разных относительных толщинах, полученных в V&B[138] и в данной работе при $[90^\circ]$

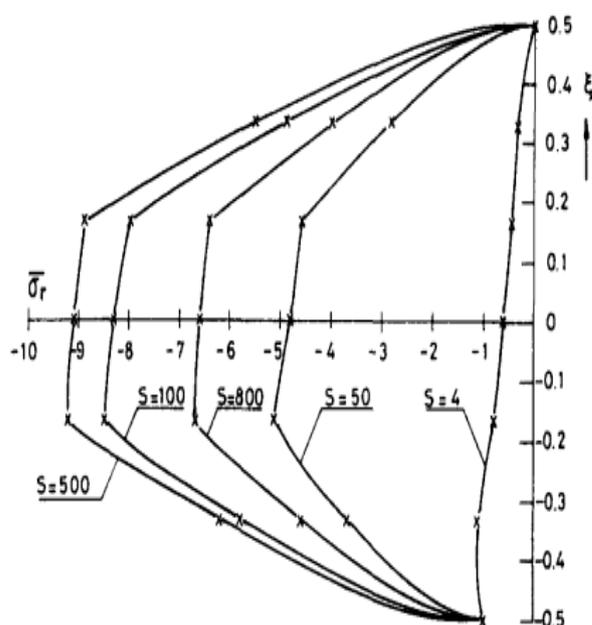


Рис.3.4а

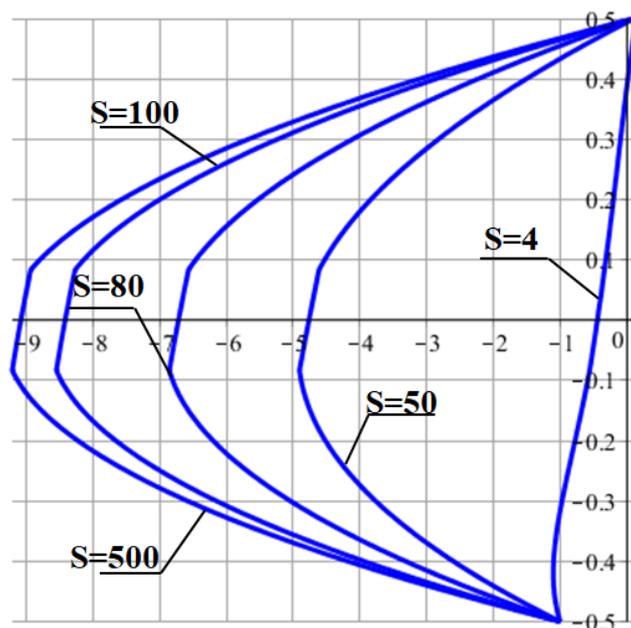


Рис.3.4б

Рис.3.4 Графики поперечных нормальных напряжений при разных относительных толщинах в V&B[138] и в данной работе при $[90^\circ/0/90^\circ]$

На рисунках 3.4 и 3.5 показано сравнение графиков распределения нормальных поперечных напряжений оболочки по толщине при углах армирования $[90^\circ]$ и $[90^\circ/0/90^\circ]$ в центре оболочек.

Анализ данных таблиц 3.1–3.4 и рисунки 3.3–3.4 показывают, что результаты, полученные в данной работе, практически совпадают с результатами Vardan and Bhaskar [138] и Salvatore Brischetto [141]. Наибольшее расхождение составляет примерно 5,8% при $S=4$. Чем больше значения S , тем меньше разница в результатах сравнения с другими авторами.

3.3.2. НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта

Рассматривается замкнутая круговая композитная трехслойная $[90^\circ/0/90^\circ]$ цилиндрическая оболочка из пьезоэлектрического материала, жестко заземленная на двух краях.

В качестве первого примера рассмотрим оболочку, находящуюся под действием распределенной механической нагрузки на верхней поверхности. Графики нормальных и касательных напряжений по толщине в краевой зоне показаны на рис. 3.5.

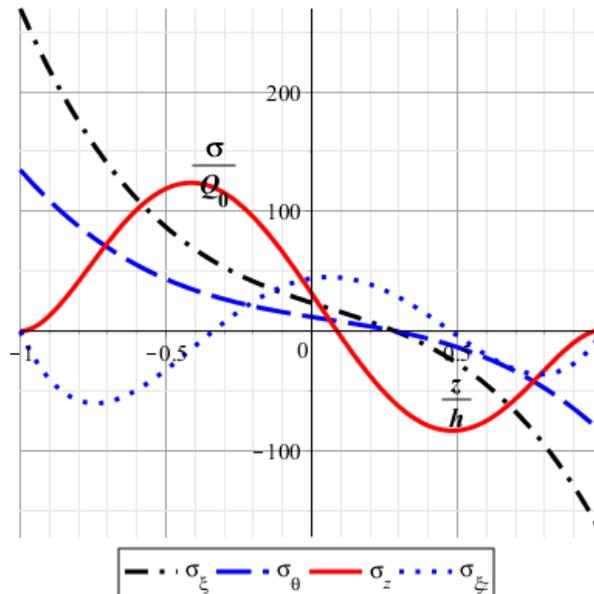


Рис.3. 5 Графики основных напряжений по толщине оболочки

На рисунках 3.6 – 3.9 представлены графики основных нормальных и поперечных напряжений в краевой зоне и в зоне, удаленной на $5h$ от края в центре срединной поверхности оболочки. Здесь введены следующие обозначения:

- $K=2$: Результаты соответствуют разложению перемещений оболочки по нормальной координате на одну степень выше по отношению к классической теории типа Кирхгофа-Лява.

- $K=3$: Результаты соответствуют аппроксимации перемещений оболочки по нормальной координате на две степени выше по отношению к классической теории типа Кирхгофа-Лява.

Кроме того, на этих рисунках для сравнения результатов, полученных в данной работе, приведены графики напряжений, рассчитанные по Mindlin [126].

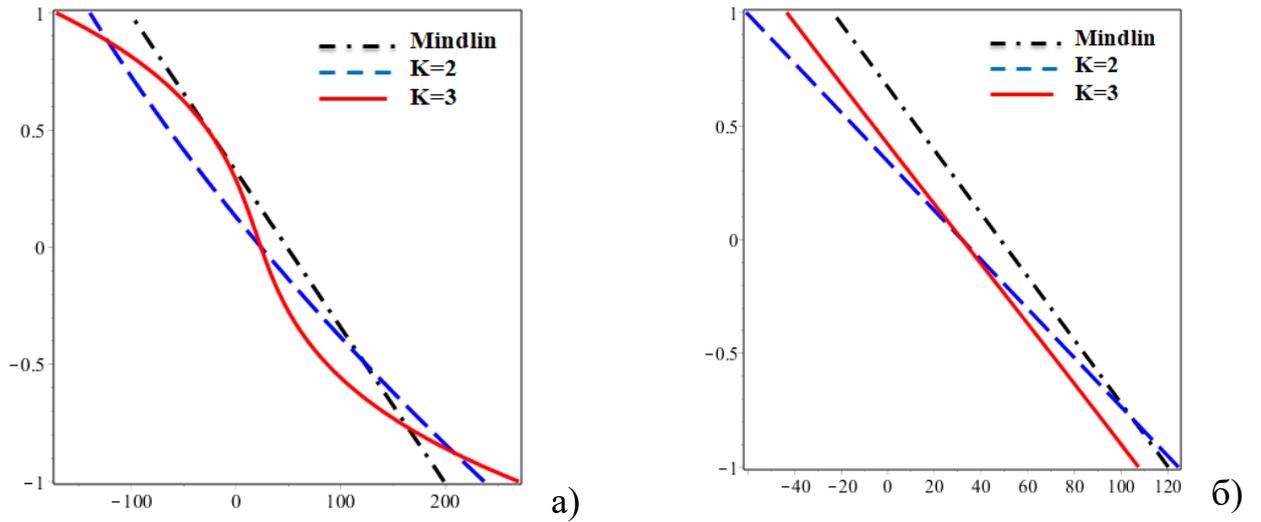


Рис.3. 6. Графики σ_{ξ} на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

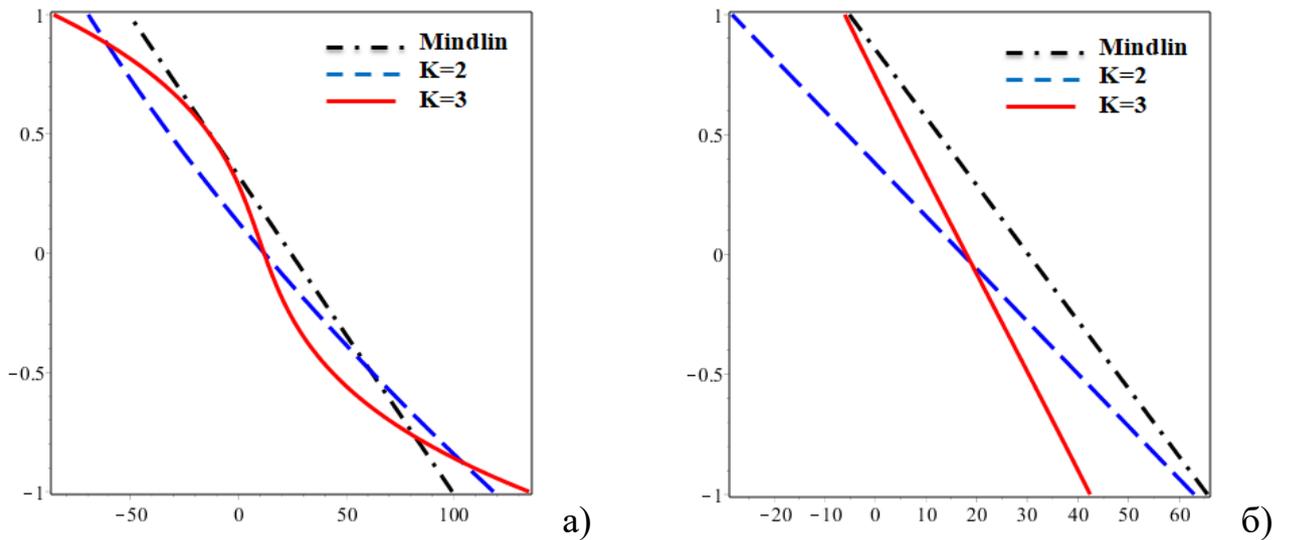


Рис.3. 7. Графики σ_{θ} на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

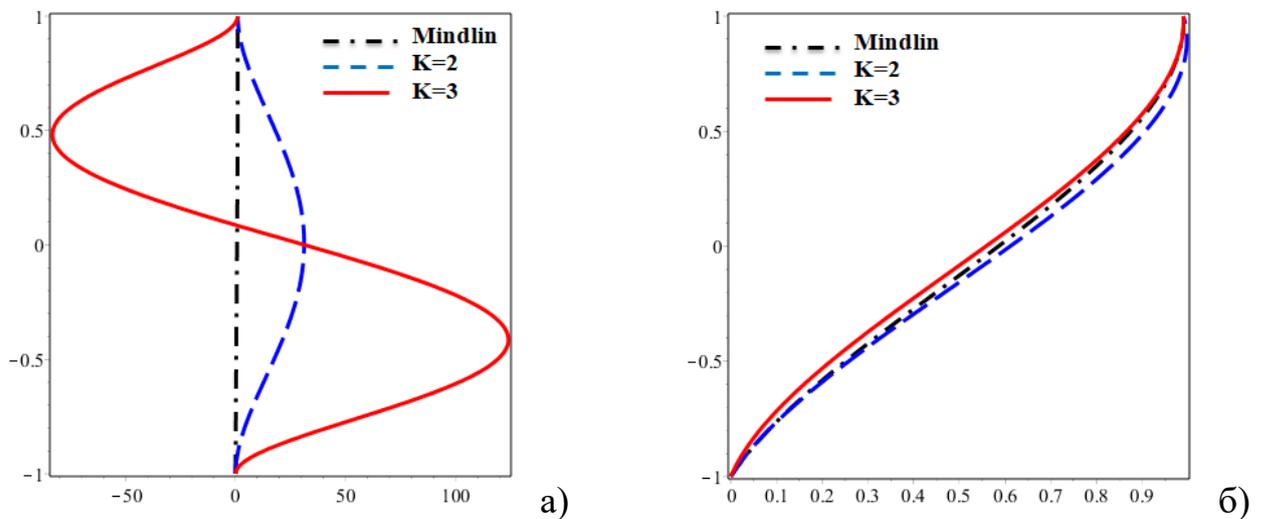


Рис.3. 8. Графики σ_z на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

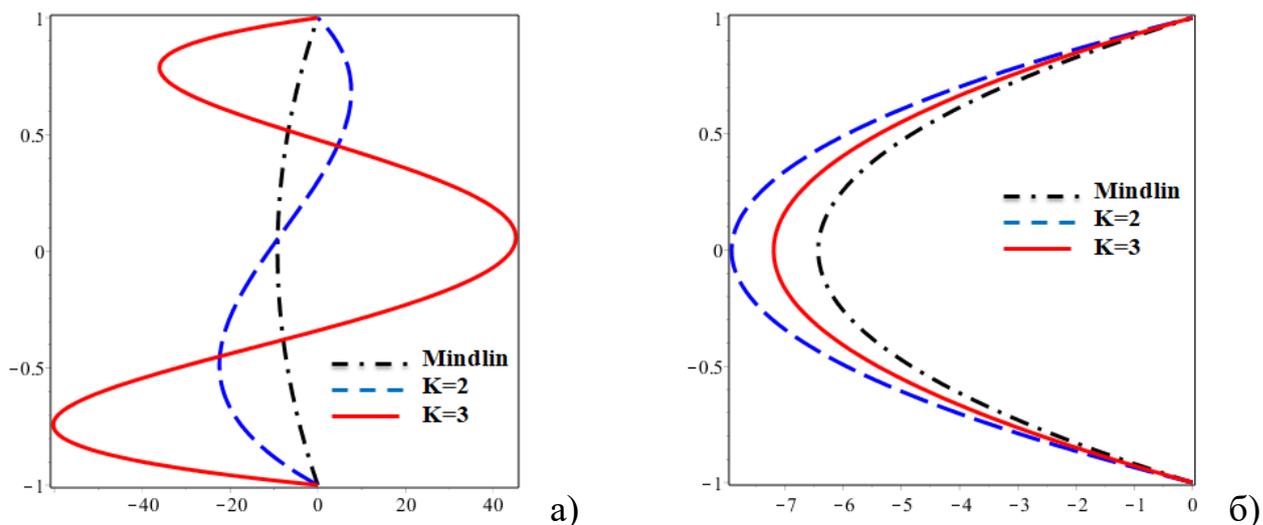


Рис.3. 9. Графики σ_{zz} на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

Из рисунков следует, что в краевой зоне максимальные поперечные нормальные σ_z и касательные σ_{zz} напряжения, пренебрежимо малые в классической теории оболочек, составляют 44% (σ_z) и 21% (σ_{zz}) от максимальных нормальных напряжений σ_ζ (рис.3.5 и рис.3.6(а) - рис.3.9(а)). При незначительном удалении от краев оболочки, поперечные нормальные и касательные напряжения при сравнении с работой [126] почти совпадают (рис.3.6(б)-рис.3.9(б)).

В качестве второго примера рассмотрим оболочку, находящуюся под действием равномерного электрического потенциала на верхней поверхности.

По аналогии с предыдущим, результаты расчета нормальных и касательных напряжений показаны на рисунках 3.10-3.13.

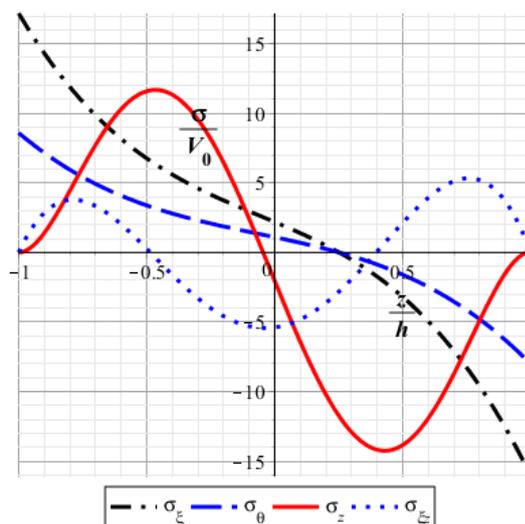


Рис.3. 10. Графики основных напряжений по толщине оболочки

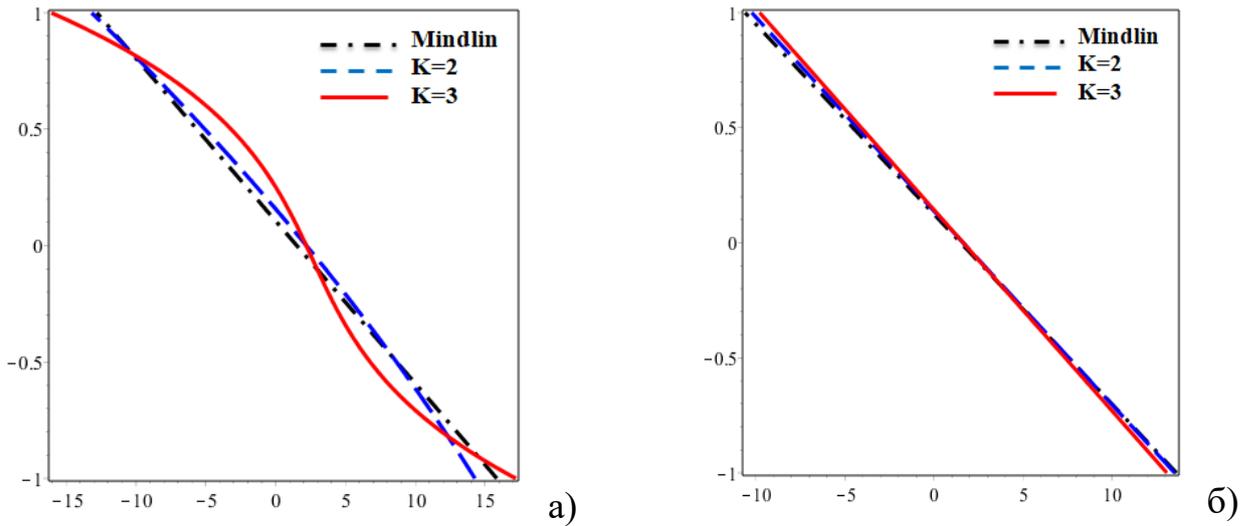


Рис.3. 11. Графики σ_{ζ} на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

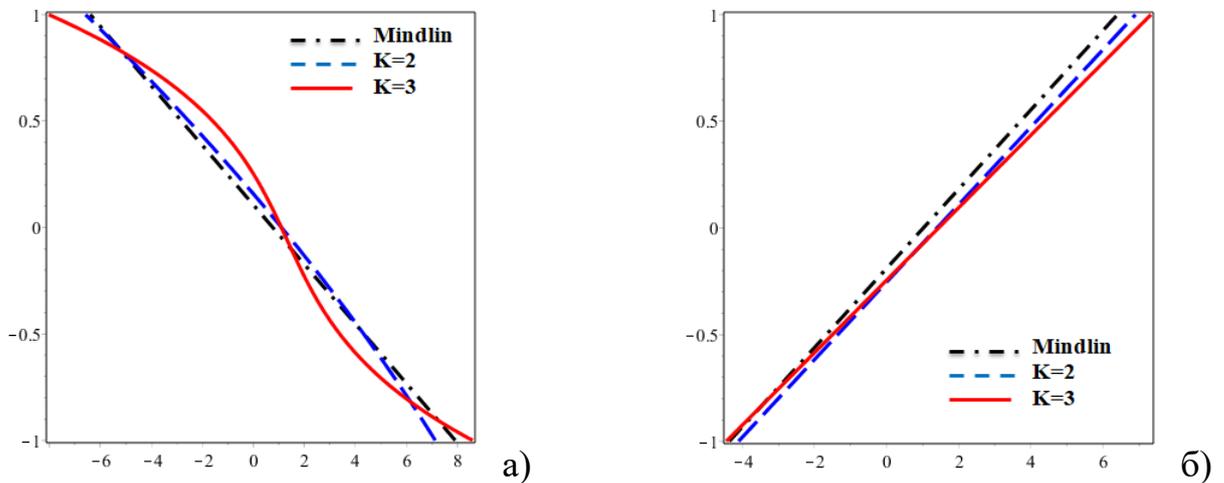


Рис.3. 12. Графики σ_{θ} на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

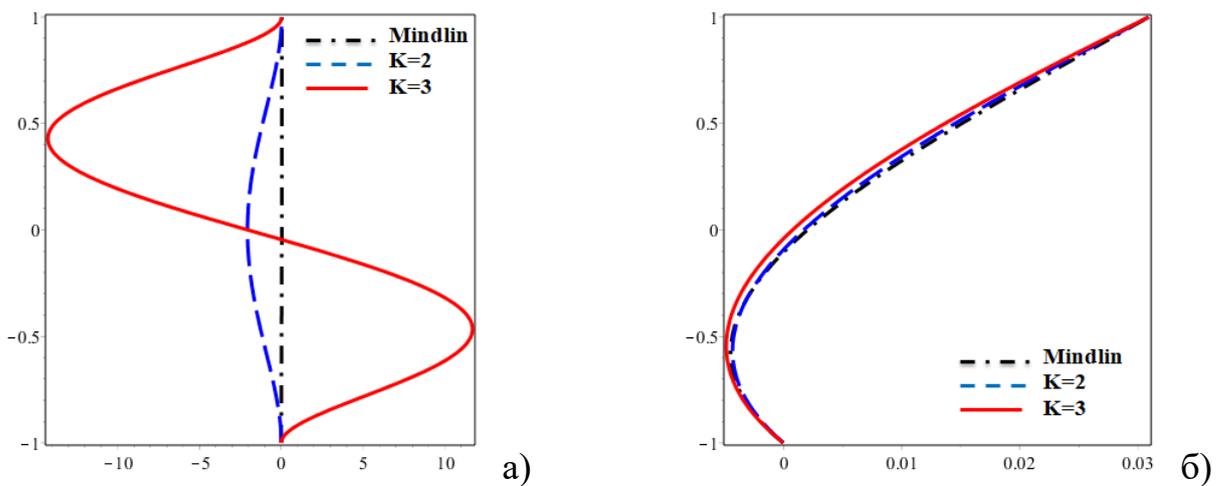


Рис.3. 13. Графики σ_z на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

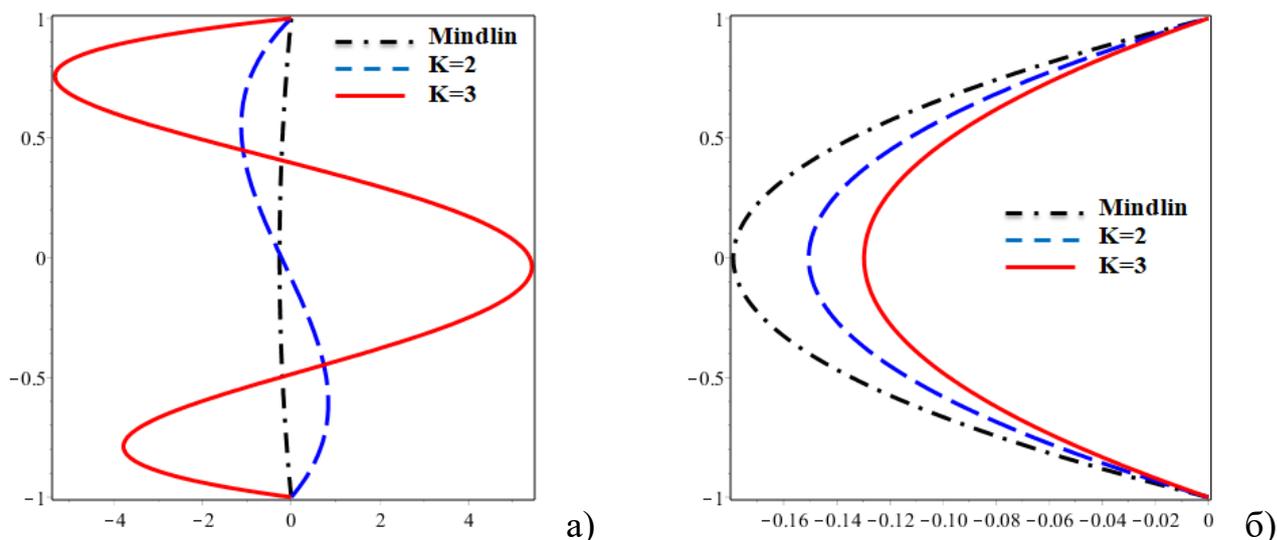


Рис.3. 14. Графики σ_{zz} на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

Анализируя графики на рис. 3.10 – 3.14 можно установить, что при действии электрического потенциала в композитной оболочке появляются напряжения. С учетом пьезоэффекта вблизи жестко заземленных краев (рис.3.10), поперечное нормальное напряжение σ_z составляет 70% от максимальных нормальных напряжений σ_ξ (для $\sigma_{\xi z}$ составляет 34% от σ_ξ). Расчеты напряженного состояния в зонах, удаленных от краев оболочки (Рис 3.11-3.14), показали, что поперечные нормальные напряжения, как и следовало ожидать, малы по сравнению с остальными напряжениями, что позволяет ими пренебречь и подтверждает достоверность полученных результатов.

3.3.3. НДС многослойных композиционных цилиндрических оболочек с пьезоэлектрическими слоями

Рассмотрим замкнутую композитную трехслойную $[90^\circ/0/90^\circ]$ цилиндрическую оболочку, изготовленную из материала Graphite-Ероху (AS/3501) (без пьезоэффекта). Положив по одному слою, материал которого обладает пьезоэлектрическим эффектом, на внешнюю и внутреннюю поверхности этой оболочки, получим композитную цилиндрическую оболочку, состоящую из пяти слоев $[0/90^\circ/0/90^\circ/0]$, радиус, толщина, длина и относительная толщина которой равны R , $2h$, L и S соответственно.

Таблица 3. 4. Механические коэффициенты Graphite-Эроху (AS/3501)

Константы (ГПа)	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{22}	C_{23}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}
AS/3501	12.0	2.5	2.5	9.6	-0.33	9.6	4.5	5.4	5.4

Исследуем НДС оболочки с жестко зацементированными краями для двух случаев:

- первый случай: оболочка находится под действием механической нагрузки на внешней поверхности.

- второй случай: оболочка находится под действием электрического потенциала на внешней поверхности.

Результаты вычисления основных напряжений в первом случае представлены на рисунках 3.15-3.19.

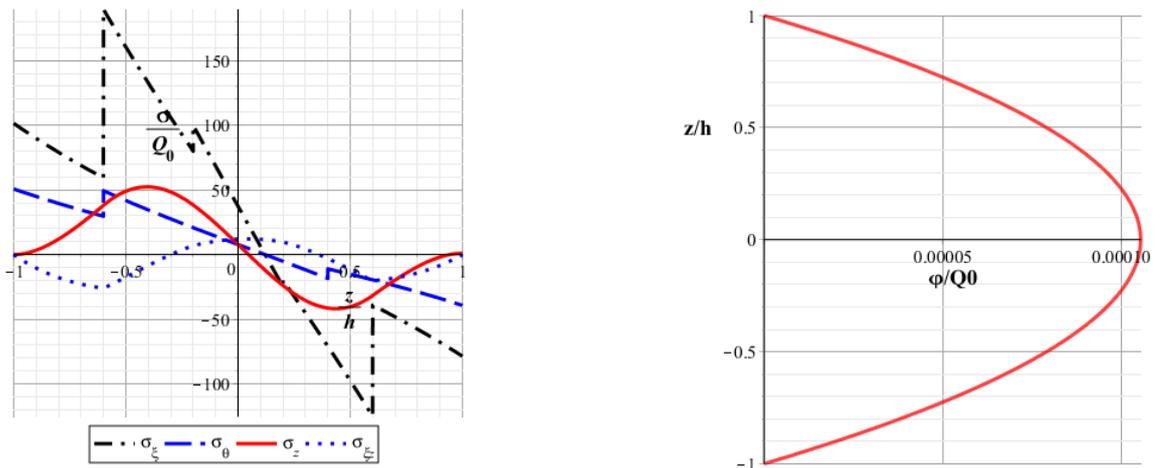


Рис.3. 15 Графики основных напряжений (а) и электрического потенциала (б) по толщине в срединной поверхности оболочки

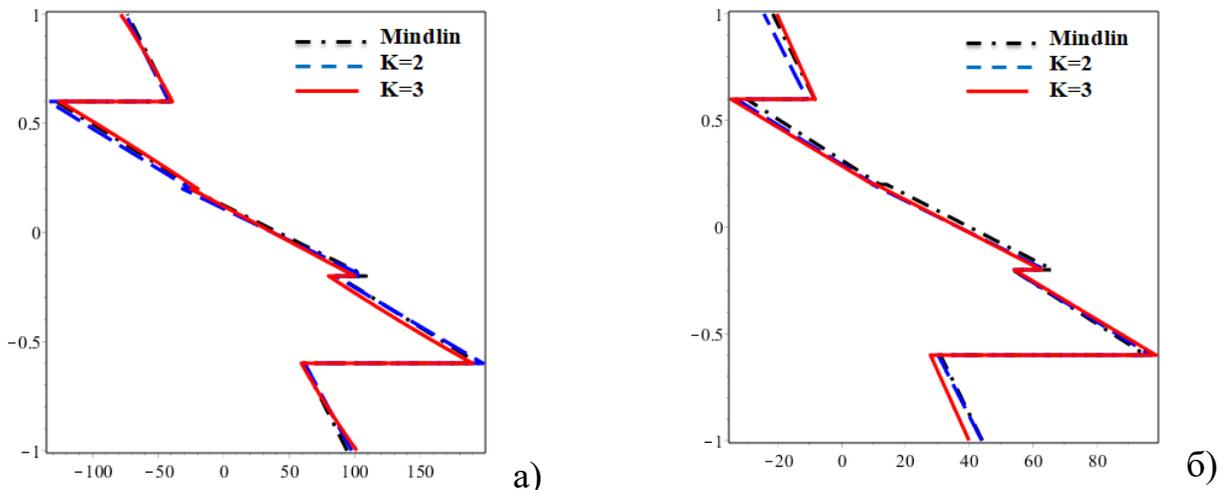


Рис.3. 16. Графики σ_{ξ} на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

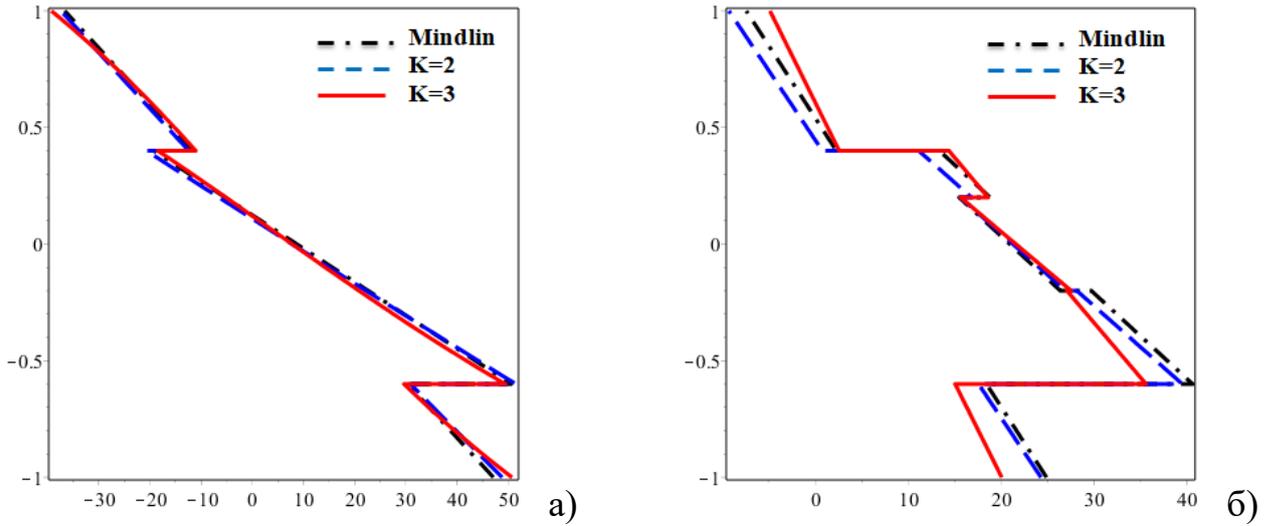


Рис.3. 17. Графики σ_θ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

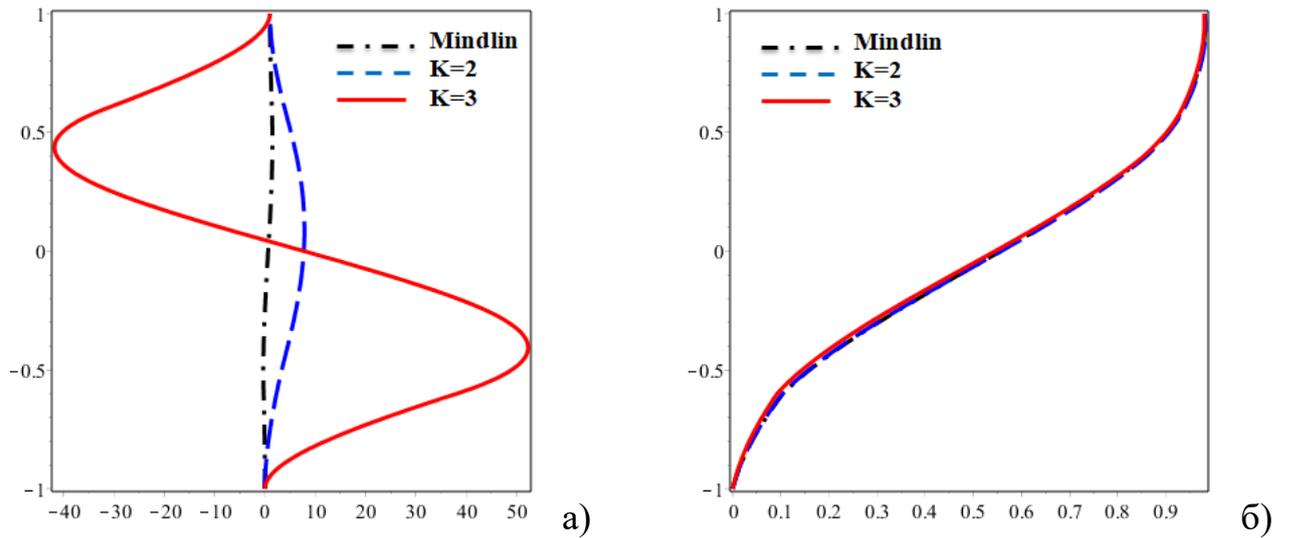


Рис.3. 18. Графики σ_z на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

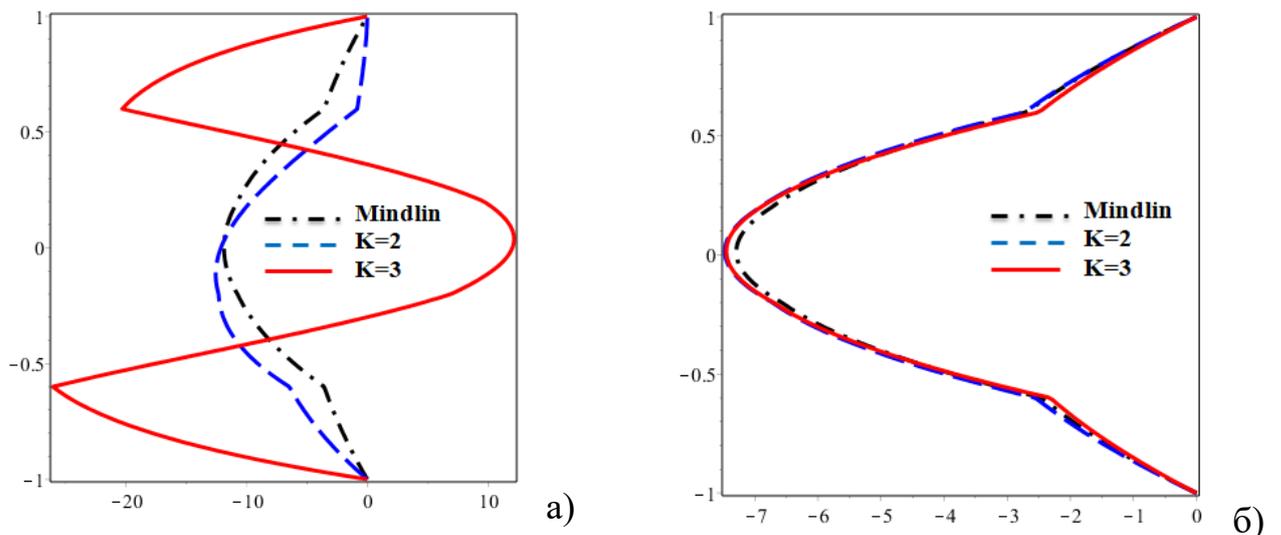


Рис.3. 19. Графики σ_{zz} на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

Из этих графиков можно заключить, что изменение основных нормальных напряжений σ_ξ и σ_θ (рис 3.16, 3.17) во всех точках оболочки при вычислении по расчетным схемам данной работы ($K=3$) и Mindlin [126] практически совпадают. Однако, имеется наличие напряжений типа “погранслои” в краевой зоне (рис 3.15а, 3.18, 3.19). Максимальные поперечные напряжения σ_z и $\sigma_{\xi z}$ на краях составляют примерно 25% и 12% от максимальных значений основных напряжений σ_ξ . При удалении от краевых зон на расстояние порядка толщины, напряжения типа “погранслои” затухают и почти равны нулю (рис 3.18б).

Далее, рассмотрим НДС оболочки во втором случае при действии электрического потенциала. Графики напряжений приведены на рис.3.20-3.24. По аналогии с предыдущим максимальные поперечные напряжения σ_z и $\sigma_{\xi z}$ на краях, пренебрежимо малые в классической теории, составляют примерно 73,5% и 20,8% (рис 3.20, 3.23 и 3.24) от максимальных величин основных напряжений σ_ξ .

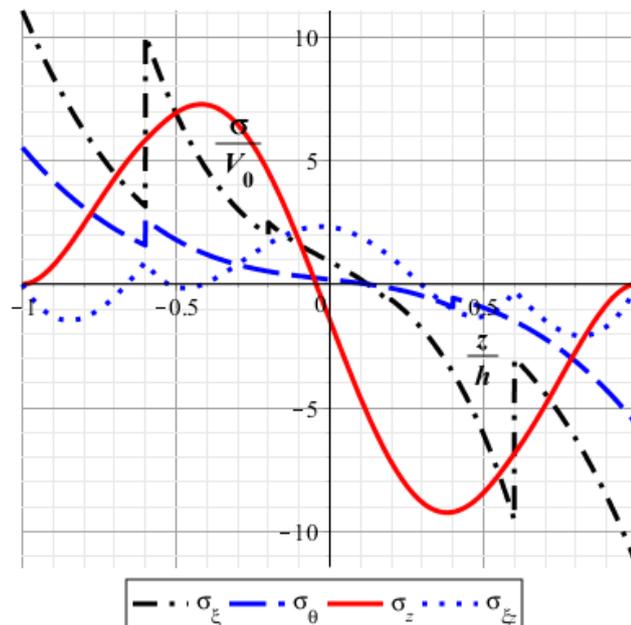


Рис.3. 20. Графики основных напряжений по толщине оболочки

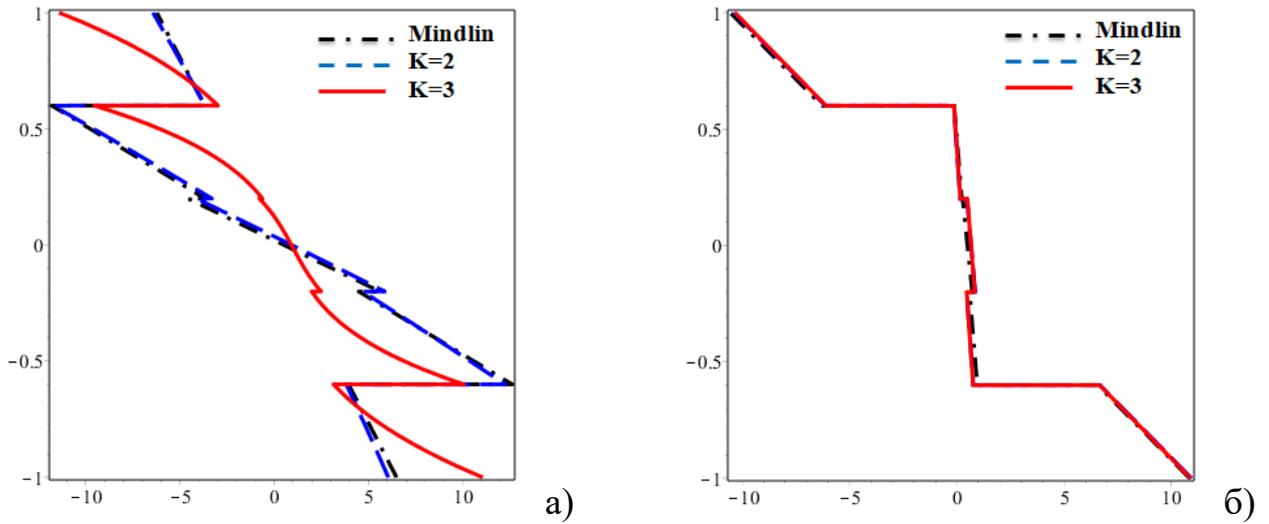


Рис.3. 21. Графики σ_z на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

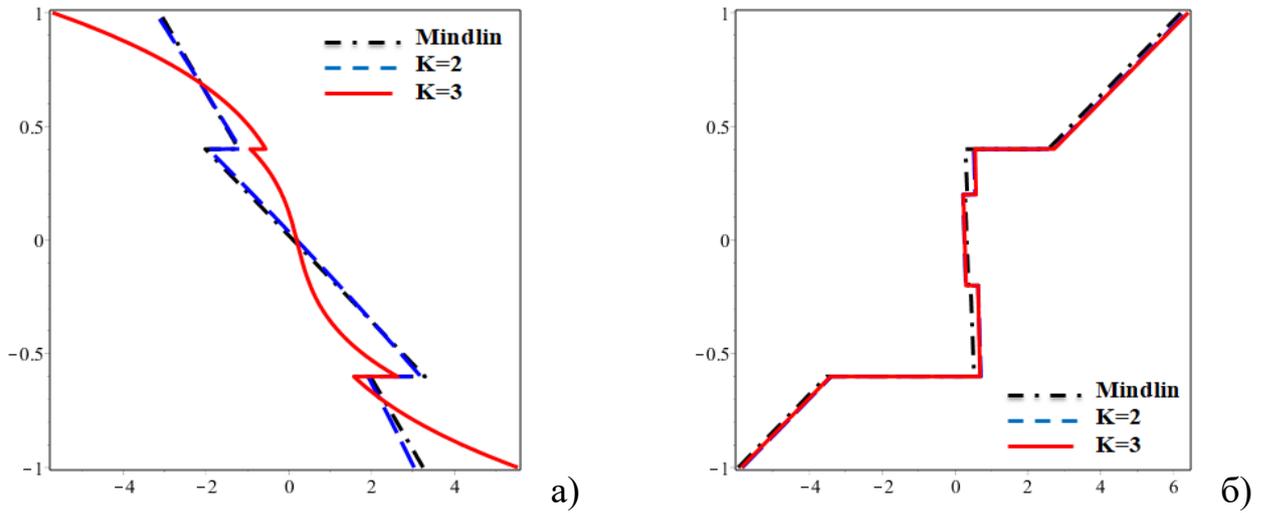


Рис.3. 22. Графики σ_θ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

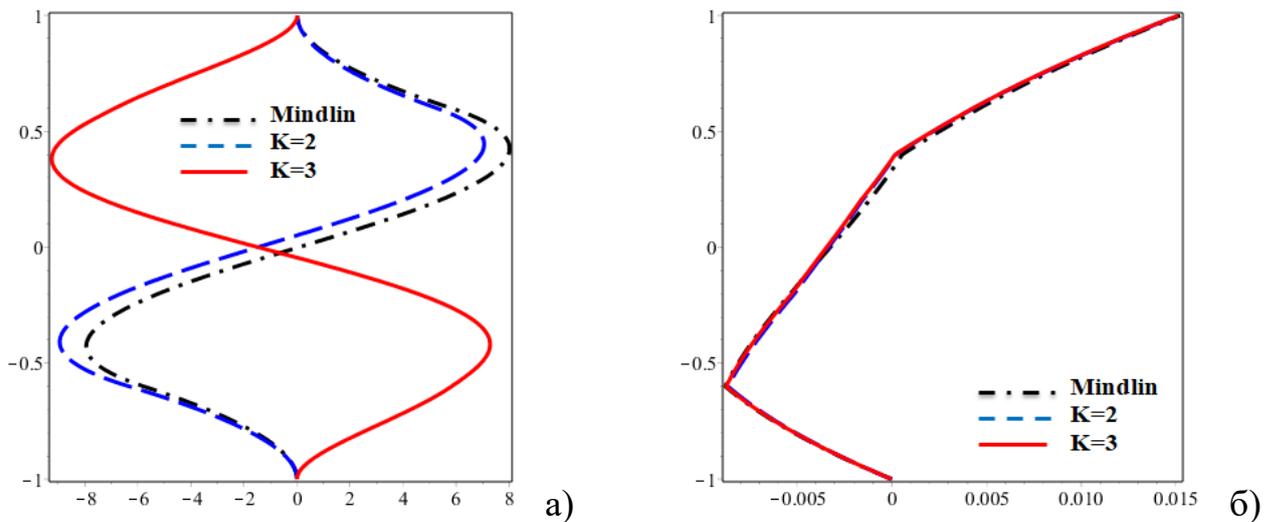


Рис.3. 23. Графики σ_z на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

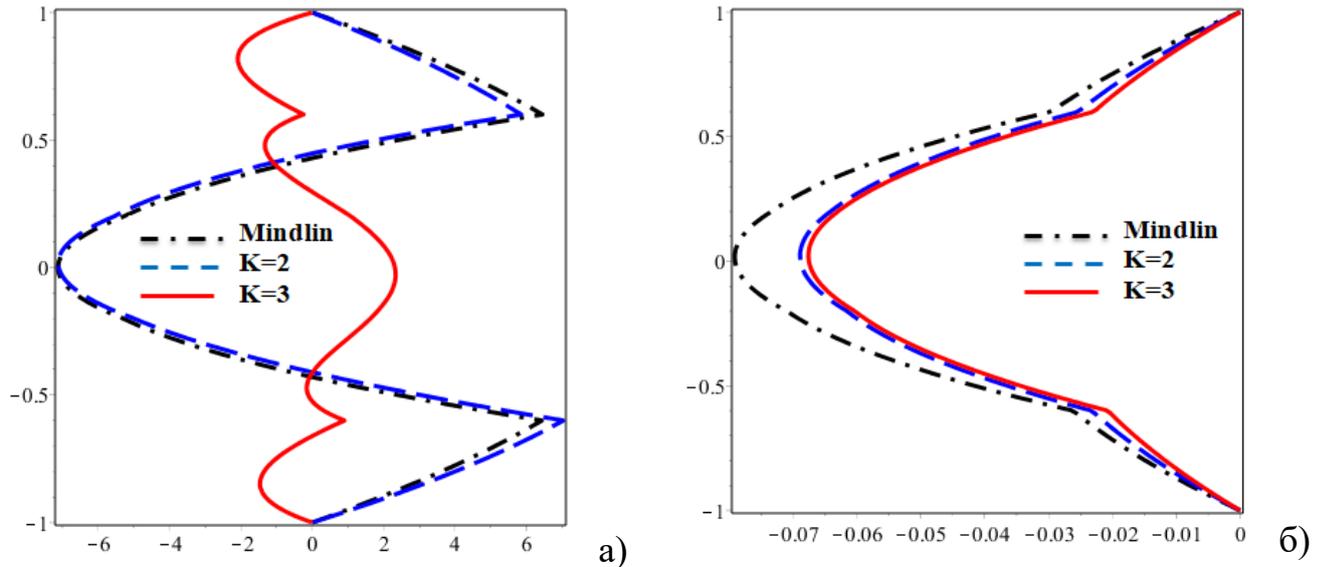


Рис.3. 24. Графики σ_{zz} на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки

Анализируя результаты вычисления НДС композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэффекта для различных типов нагрузок (механических и электрических) с разными краевыми условиями (шарнирное опирание, жесткое защемление) и углами армирования для других видов материалов (без учета и с учетом пьезоэффекта), можно установить следующее:

- Уточненную модель, предлагаемую в данной работе, можно использовать как общую расчетную для определения **НДС композиционных оболочек**, изготовленных из материалов, обладающих пьезоэлектрическим эффектом или без учета пьезоэффекта.

- Поперечные нормальные и касательные напряжения принимают существенное значение на жестко закрепленных краях оболочек.

- Предлагаемая математическая модель позволяет определить непрерывное распределение напряжений по толщине оболочки, что очень важно для композитных материалов с целью повышения достоверности расчетов НДС.

- При различных случаях нагружения, основные напряжения σ_ξ и σ_θ данной работы практически совпадают с результатами, рассчитанными по модели $K=2$ и по Mindlin [126], а поперечные напряжения σ_z и $\sigma_{\xi z}$ совпадают только при удалении от краев. В краевых зонах, указанные поперечные напряжения

значительно отличаются по величине и играют важную роль при оценке прочности конструкций.

3.4. Выводы к третьей главе

1. На основании закона электростатики Максвелла и представления механических перемещений полиномами по нормальной координате на две степени выше по отношению к классической теории оболочек с последующим применением вариационного принципа Лагранжа, в данной работе построены математические модели уточненной теории электроупругости многослойных композитных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта и соответствующие граничные условия.

2. Разработан алгоритм определения ЭМС оболочки. Краевая задача электроупругости приведена к решению СЛАУ путем разложения компонент механических перемещений, электрических потенциалов и внешних нагрузок в двойные тригонометрические ряды. Сформулированная краевая задача решается с помощью программы для ЭВМ.

3. Приведены результаты сравнения НДС цилиндрических оболочек, полученных в данной работе, с точными решениями, основанными на трехмерной теории упругости и другими известными уточненными теориями, опубликованными в международных журналах Scopus и Web of Science. Установлено, что численные результаты расчета максимальных прогибов и распределения поперечных нормальных напряжений оболочки по толщине, полученные в данной работе, практически совпадают с результатами других уточненных теорий, что подтверждает достоверность полученных результатов. Предлагаемая математическая модель уточненной теории электроупругости оказывается более точной, особенно при определении поперечных нормальных и касательных напряжений.

4. Представлены примеры расчета НДС многослойных композитных

цилиндрических оболочек при действии механических нагрузок и электрических потенциалов на их поверхностях. Установлено, что вблизи жестко заземленного края оболочки имеют место значительные дополнительные напряжения типа “погранслои”, особенно в части поперечных нормальных напряжений, которые необходимо учитывать для повышения достоверности расчетов на прочность и долговечность конструкций, содержащих непрерывные соединения.

ГЛАВА IV. НДС МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИЦИОННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ ТЕРМОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО НАГРУЖЕНИЯ

Исследование НДС композиционных тонкостенных элементов типа пластин и оболочек произвольных геометрических форм рассматривается в разных работах. НДС оболочки зависит от различных внешних факторов. Кроме механических нагрузок, оболочки могут находиться под действием теплового процесса. Для некоторых классов материалов, обладающих свойством поляризации, пьезоэффекта, на НДС оболочки существенно влияет воздействие электрического поля.

В данной главе представлена уточненная математическая модель для повышения достоверности методов расчета НДС композиционных цилиндрических оболочек не только при действии механических нагрузок, но и за счет учета внешних электрических напряженностей и температурных воздействий. Совместная задача термоэлектроупругости об определении НДС оболочек построена на основе вариационного принципа Лагранжа. Полученная система дифференциальных уравнений в частных производных приводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям разложением нагрузок и искомых перемещений в тригонометрические ряды Фурье.

4.1. Уточненная математическая модель теории композитных цилиндрических оболочек с учетом термоэлектрического воздействия

Композиционная цилиндрическая оболочка рассматривается как трехмерное твердое тело, отнесенное к триортогональной криволинейной системе координат ξ, θ, z , находящееся под действием механических нагрузок $q_{i3} = q_{i3}^{\pm}(\xi, \theta)$, $(i = 1, 2, 3)$, электрических потенциалов $\varphi = \varphi^{\pm}(\xi, \theta)$ и температурного воздействия $T = T^{\pm}(\xi, \theta)$ по внутренней ($z = -h$) и внешней

($z = +h$) поверхностях оболочки (рис.4.1). Оболочка длиной L , толщиной $2h$, радиусом R и относительной толщиной $S = R/2h$, состоит из N слоев. Угол армирования каждого слоя k обозначим через β_k , толщину каждого слоя k , изменяющуюся от h_{k-1} до h_k .

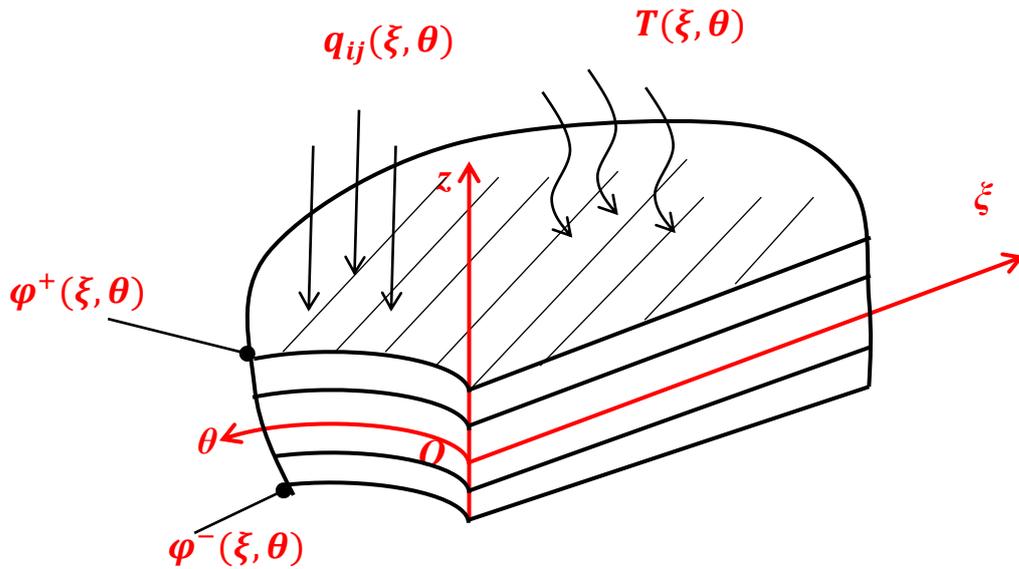


Рис.4. 1. Композиционная цилиндрическая оболочка при совместном действии термоэлектромеханических нагрузок

Полагаем, что разность температур $\Delta T(\xi, \theta, z)$ и напряжения по границам оболочки и на торцевых поверхностях оболочки заданы следующими граничными условиями:

$$\sigma_{ij} = q_{ij}, \quad (i = \overline{1,2}, j = \overline{1,3}).$$

С учетом нагрева и электрического воздействия уравнения напряженного состояния оболочки при деформации можно записать в виде

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [C]\{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} - [\lambda]\Delta T, \\ \{D\} &= [e]\{\varepsilon\} + [\eta]^T \{E\} + [P]\Delta T, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где $\{\sigma\} = \{\sigma_\xi, \sigma_\theta, \sigma_z, \sigma_{\xi\theta}, \sigma_{\xi z}, \sigma_{\theta z}\}^T$ - вектор напряжения оболочки,
 $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_\xi, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{\xi\theta}, \gamma_{\xi z}, \gamma_{\theta z}\}^T$ - вектор деформации оболочки,

$C = C_{ij}$, ($i = \overline{1,6}, j = \overline{1,6}$) - симметричная матрица жесткости, $D = \{D_\xi, D_\theta, D_z\}$ - вектор электрической индукции, $E = \{E_\xi, E_\theta, E_z\}$ - вектор напряженности электрического поля, $e = e_{ij}$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,6}$) - матрица пьезоэлектрических постоянных, $\eta = \eta_{ij}$ ($i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$) - симметричная матрица диэлектрических проницаемостей при нулевой деформации, $P = \{P_{11}, P_{22}, P_{33}\}$ - вектор пирозлектрического коэффициента, $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6\}^T$ - вектор теплового расширения материала, определяемый как $\lambda = [C]\{\alpha\}$, $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, 0, 0, 0\}^T$ - коэффициент теплового расширения и уравнение (4.1)

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \\ \lambda_6 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.2)$$

Из соотношения (4.2) находим

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= C_{11}\alpha_1 + C_{12}\alpha_2 + C_{13}\alpha_3, \\ \lambda_2 &= C_{21}\alpha_1 + C_{22}\alpha_2 + C_{23}\alpha_3, \\ \lambda_3 &= C_{31}\alpha_1 + C_{32}\alpha_2 + C_{33}\alpha_3, \\ \lambda_4 &= \lambda_5 = \lambda_6 = 0. \end{aligned}$$

Механические перемещения оболочки представляются в виде полиномов по нормальной координате на две степени выше по отношению к классической теории типа Кирхгофа-Лява, а именно:

$$\begin{aligned} u(\xi, \theta, z) &= u_0(\xi, \theta) + u_1(\xi, \theta)z + u_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!} + u_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!}; \\ v(\xi, \theta, z) &= v_0(\xi, \theta) + v_1(\xi, \theta)z + v_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!} + v_3(\xi, \theta)\frac{z^3}{3!}; \\ w(\xi, \theta, z) &= w_0(\xi, \theta) + w_1(\xi, \theta)z + w_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Электрический потенциал оболочки представляется в виде:

$$\varphi(\xi, \theta, z) = \varphi_0(\xi, \theta) + \varphi_1(\xi, \theta)z + \varphi_2(\xi, \theta)\frac{z^2}{2!}. \quad (4.4)$$

Деформации цилиндрической оболочки определяются с помощью геометрических соотношений

$$\begin{aligned} \varepsilon_\xi &= \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{1}{R+z} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{\xi\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{\xi z} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R+z}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Вектор напряженности зависит от электрического потенциала φ следующим образом:

$$E_\xi = -\frac{\partial \varphi}{R \partial \xi}, \quad E_\theta = -\frac{\partial \varphi}{(z+R) \partial \theta}, \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (4.6)$$

Уравнения (4.1) могут быть переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} \sigma_\xi \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{\xi\theta} \\ \sigma_{\xi z} \\ \sigma_{\theta z} \end{array} \right\} &= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\xi\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{array} \right\} - \\ & - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial \varphi}{R \partial \xi} \\ -\frac{\partial \varphi}{(R+z) \partial \theta} \\ -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{array} \right\} - \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T, \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} D_\xi \\ D_\theta \\ D_z \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\xi\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial\varphi}{R\partial\xi} \\ -\frac{\partial\varphi}{(R+z)\partial\theta} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{22} \\ P_{33} \end{bmatrix} \Delta T. \end{aligned}$$

Обозначая электрический потенциал, действующий на верхнюю и нижнюю поверхности оболочки через φ^+ и φ^- соответственно, имеем

$$\varphi|_{z=h} = \varphi^+, \quad \varphi|_{z=-h} = \varphi^-. \quad (4.8)$$

Поставив (4.8) в (4.4), получим

$$\varphi_1 = \frac{\varphi^+ - \varphi^-}{2h}, \quad \varphi_2 = -\frac{\varphi_0}{h^2} + \frac{\varphi^+ + \varphi^-}{2h^2}. \quad (4.9)$$

Для ортотропных материалов $C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0$, тогда уравнения (4.7) принимают вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_\xi \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \\ \sigma_{\xi\theta} \\ \sigma_{\xi z} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\xi\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} -$$

$$\begin{aligned}
& - \begin{bmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{32} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{24} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial\varphi}{R\partial\xi} \\ \frac{\partial\varphi}{(R+z)\partial\theta} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{array} \right\} - \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Delta T, \\
& \left\{ \begin{array}{l} D_\xi \\ D_\theta \\ D_z \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_\xi \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{\xi\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\theta z} \end{array} \right\} + \\
& + \begin{bmatrix} \eta_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{33} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial\varphi}{R\partial\xi} \\ \frac{\partial\varphi}{(R+z)\partial\theta} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} P_{11} \\ P_{22} \\ P_{33} \end{bmatrix} \Delta T.
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Определение параметров композиционной оболочки в локальной и общей системах координат рассмотрено в главе 3.

Дифференциальные уравнения равновесия и естественные граничные условия находим на основании применения вариационного принципа Лагранжа к уточненному выражению полной энергии композиционной оболочки

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= \delta U - \delta A = \sum_{k=1}^N \iiint \sigma^{(k)} \delta\varepsilon^{(k)} dV^{(k)} + \\
& + \sum_{k=1}^N \iiint D^{(k)} \delta E^{(k)} dV^{(k)} - \sum_{k=1}^N \iint Q^{(k)} \delta\varphi^{(k)} dS^{(k)} - \\
& - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^3 \iint q_{i3} \delta(u_i^{(k)} + v_i^{(k)} + w_i^{(k)}) dS - \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \iint q_{ij} \delta(u_i^{(k)} + v_i^{(k)} + w_i^{(k)}) dS = 0.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Из равенства (4.11) с учетом соотношений (4.3)-(4.6), (4.9) и (4.10) получим систему главных уравнений уточненной теории композиционных цилиндрических оболочек при термоэлектрическом воздействии

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial N_{\xi\xi}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^{(0)}}{\partial \theta} - Rp_{13}^{(0)} = 0, \\
& \frac{\partial N_{\xi\xi}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^{(1)}}{\partial \theta} - RN_{\xi z}^{(0)} - Rp_{13}^{(1)} = 0, \\
& \frac{\partial N_{\xi\xi}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^{(2)}}{\partial \theta} - RN_{\xi z}^{(1)} - Rp_{13}^{(2)} = 0, \\
& \frac{\partial N_{\xi\xi}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^{(3)}}{\partial \theta} - RN_{\xi z}^{(2)} - Rp_{13}^{(3)} = 0, \\
& \frac{\partial N_{\xi\theta}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\theta}^{(0)}}{\partial \theta} + N_{23}^{(0)} - Rp_{23}^{(0)} = 0, \\
& \frac{\partial N_{\xi\theta}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\theta}^{(1)}}{\partial \theta} + N_{\theta z}^{(1)} - RN_{\theta z}^{(0)} - N_{\theta z}^{(1)} - Rp_{23}^{(1)} = 0, \\
& \frac{\partial N_{\xi\theta}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\theta}^{(2)}}{\partial \theta} + N_{\theta z}^{(2)} - RN_{\theta z}^{(1)} - 2N_{\theta z}^{(2)} - Rp_{23}^{(2)} = 0, \\
& \frac{\partial N_{\xi\theta}^{(3)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\theta}^{(3)}}{\partial \theta} + N_{\theta z}^{(3)} - RN_{\theta z}^{(2)} - 3N_{\theta z}^{(3)} - Rp_{23}^{(3)} = 0, \\
& \frac{\partial N_{\xi z}^{(0)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta z}^{(0)}}{\partial \theta} - N_{\theta\theta}^{(0)} + Rp_{33}^{(0)} + \frac{R\lambda_{22}}{S} \Delta T = 0, \\
& \frac{\partial N_{\xi\theta}^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta z}^{(1)}}{\partial \theta} - N_{\theta\theta}^{(1)} - RN_{zz}^{(0)} + Rp_{33}^{(1)} + \frac{R^2\lambda_{33}}{S} \Delta T = 0, \\
& \frac{\partial N_{\xi\theta}^{(2)}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta z}^{(2)}}{\partial \theta} - N_{\theta\theta}^{(2)} - RN_{zz}^{(1)} + Rp_{33}^{(2)} + \frac{R^3(\lambda_{22} + 2\lambda_{33})}{S^2} \Delta T = 0, \\
& \frac{\partial(h^2 ND_{\xi\xi}^{(0)} - ND_{\xi\xi}^{(2)})}{\partial \xi} + \frac{\partial(h^2 ND_{\theta\theta}^{(0)} - ND_{\theta\theta}^{(2)})}{\partial \theta} - 2ND_{zz}^{(1)} + \frac{R^3 P_{33}}{6S^3} \Delta T = 0,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

где для внешних механических и электрических силовых факторов введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\left[N_{\xi\xi}^{(i)}, \overline{N_{\xi\xi}^{(i)}} \right] &= \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\xi}^{(k)}, q_{11} \right] \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3}), \\
\left[N_{\xi\theta}^{(i)}, \overline{N_{\xi\theta}^{(i)}} \right] &= \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\xi\theta}^{(k)}, q_{12} \right] \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3}), \\
\left[N_{\xi z}^{(i)}, \overline{N_{\xi z}^{(i)}} \right] &= \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\xi z}^{(k)}, q_{13} \right] \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3}), \\
\left[N_{\theta\theta}^{(i)}, \overline{N_{\theta\theta}^{(i)}} \right] &= \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\theta}^{(k)}, q_{22} \right] \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3}), \\
\left[N_{\theta\xi}^{(i)}, \overline{N_{\theta\xi}^{(i)}} \right] &= \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\theta\xi}^{(k)}, q_{21} \right] \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3}), \\
\left[N_{\theta z}^{(i)}, \overline{N_{\theta z}^{(i)}} \right] &= \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{\theta z}^{(k)}, q_{23} \right] \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3}), \\
\left[N_{z\theta}^{(i)}, \overline{N_{z\theta}^{(i)}} \right] &= \sum_{k=1}^n \int_{-h_{(k-1)}}^{h_k} \left[\sigma_{z\theta}^{(k)}, q_{32} \right] R \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!} \right] dz, \quad (i = \overline{0,3}), \tag{4.13}
\end{aligned}$$

$$N_{zz}^{(j)} = \sum_{k=1}^n \int_{-h}^h \sigma_z^{(k)} \left(1 + \frac{z}{R} \right) [1 \quad z] dz, \quad (j = \overline{0,2}),$$

$$p_{13}^{(i)} = q_{13}^+ \left(1 + \frac{h}{R} \right) \frac{h^i}{2^i i!} - q_{13}^- \left(1 - \frac{h}{R} \right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}, \quad i = \overline{0,2},$$

$$p_{23}^{(i)} = q_{23}^+ \left(1 + \frac{h}{R} \right) \frac{h^i}{2^i i!} - q_{23}^- \left(1 - \frac{h}{R} \right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}, \quad i = \overline{0,2},$$

$$p_{33}^{(i)} = q_{33}^+ \left(1 + \frac{h}{R} \right) \frac{h^i}{2^i i!} - q_{33}^- \left(1 - \frac{h}{R} \right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}, \quad i = \overline{0,2}.$$

$$ND_{\xi\xi}^{(i)} = \sum_{k=1}^n \int_{-h}^h D_{\xi} \left(1 + \frac{z}{R}\right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!}\right] dz, \quad (i = \overline{0,2});$$

$$ND_{\theta\theta}^{(i)} = \sum_{k=1}^n \int_{-h}^h D_{\theta} \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!}\right] dz, \quad (i = \overline{0,2});$$

$$ND_{zz}^{(i)} = \sum_{k=1}^n \int_{-h}^h D_z \left(1 + \frac{z}{R}\right) \left[1 \quad z \quad \frac{z^2}{2!} \quad \frac{z^3}{3!}\right] dz, \quad (i = \overline{0,2});$$

$$Q_z^{(i)} = Q_z^+ \left(1 + \frac{h}{R}\right) \frac{h^i}{2^i i!} - Q_z^- \left(1 - \frac{h}{R}\right) \frac{(-h)^i}{2^i i!}, \quad i = \overline{0,2}.$$

Граничные условия представляются в следующем виде:

на краях $l = 0$

$$u_i = \overline{u}_i \vee N_{\xi\xi}^{(i)} = \overline{N_{\xi\xi}^{(i)}}, v_i = \overline{v}_i \vee N_{\xi\theta}^{(i)} = \overline{N_{\xi\theta}^{(i)}}, w_j = \overline{w}_j \vee N_{\xi z}^{(j)} = \overline{N_{\xi z}^{(j)}}, \quad (4.14)$$

$$\varphi_0 = 0 \vee ND_{\xi\xi}^{(j)} = 0, \quad \varphi_1 = 0 \vee ND_{\theta\theta}^{(j)} = 0, \quad \varphi_2 = 0 \vee ND_{zz}^{(j)} = 0, \quad (i = \overline{0,3}; j = \overline{0,2});$$

на краях $l = L$

$$u_i = \overline{u}_i \vee N_{\theta\xi}^{(i)} = \overline{N_{\theta\xi}^{(i)}}, v_i = \overline{v}_i \vee N_{\theta\theta}^{(i)} = \overline{N_{\theta\theta}^{(i)}}, w_j = \overline{w}_j \vee N_{\theta z}^{(j)} = \overline{N_{\theta z}^{(j)}}, \quad (4.15)$$

$$\varphi_0 = 0 \vee ND_{\xi\xi}^{(j)} = 0, \quad \varphi_1 = 0 \vee ND_{\theta\theta}^{(j)} = 0, \quad \varphi_2 = 0 \vee ND_{zz}^{(j)} = 0, \quad (i = \overline{0,3}; j = \overline{0,2});$$

где $\overline{u}_i, \overline{v}_i, \overline{w}_j, i = \overline{0..3}; j = \overline{0,2}$ – перемещения, заданные на краях оболочки в соответствии с граничными условиями.

Сформулируем граничные условия задачи на краях оболочки, воспользовавшись стандартными условиями трехмерной теории электроупругости, имеем

- на жестко защемленном краю:

$$u_i = v_i = 0, \quad w_j = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad (i = \overline{0,3}; j = \overline{0,2}),$$

- на шарнирно закрепленном краю:

$$N_{\xi\xi}^{(j)} = 0, \quad (j = \overline{0,3}), v_i = w_j = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad (i = \overline{0,3}; j = \overline{0,2}),$$

- на свободном краю:

$$N_{\xi\xi}^{(i)} = N_{\xi\theta}^{(i)} = 0, \quad N_{\xi z}^{(j)} = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad (i = \overline{0,3}; j = \overline{0,2}).$$

Из уравнений (4.12) с учетом выражений (4.1)-(4.6) находим систему дифференциальных уравнений в частных производных 24-го порядка относительно 12-ти обобщенных перемещений u_i, v_i, w_j, φ_0 , ($i = 0 \dots 3; j = 0 \dots 2$). Подстановкой найденных перемещений в формулы (4.5) находятся деформации цилиндрических оболочек. С помощью соотношений (4.1) с учетом (4.6) получим выражения для тангенциальных напряжений оболочки. Поперечные напряжения определяются интегрированием трехмерных уравнений равновесия, т.е. из выражений

$$\begin{aligned}\sigma_{\xi z} &= -\frac{1}{1+rz} \int_{-h}^z \left(\frac{1+rz}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi\theta}}{\partial \theta} \right) dz + \frac{(1+rz)_{z=-h}}{1+rz} q_{13}^-, \\ \sigma_{\theta z} &= -\frac{1}{(1+rz)^2} \int_{-h}^z \left(\frac{1+rz}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{(1+rz)^2}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi\theta}}{\partial \xi} \right) dz + \frac{(1+rz)_{z=-h}^2}{(1+rz)^2} q_{23}^-, \\ \sigma_z &= -\frac{1}{1+rz} \int_{-h}^z \left(\frac{1+rz}{R} \frac{\partial \sigma_{\xi z}}{\partial \xi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{1}{R} \sigma_{\xi} \right) dz + \frac{(1+rz)_{z=-h}}{1+rz} q_{33}^-.\end{aligned}\quad (4.16)$$

4.2. Решение краевой термоэлектромеханической задачи

Рассматривается замкнутая круговая цилиндрическая оболочка из композиционного материала, края которой жестко заземлены. Для приведения краевой задачи (4.13) – (4.15) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений используются разложения перемещений и электрических потенциалов в тригонометрические ряды по окружной координате θ следующего вида:

$$\begin{aligned}q_{13}^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_{13}^{\pm m}(\xi) \cos(m\theta) + Q_{13}^{0\pm}(\xi), \\ q_{23}^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_{23}^{\pm m}(\xi) \cos(m\theta) + Q_{23}^{0\pm}(\xi), \\ q_{33}^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} Q_{33}^{\pm m}(\xi) \cos(m\theta) + Q_{33}^{0\pm}(\xi), \\ \varphi^{\pm}(\xi, \theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m^{\pm}(\xi) \cos(m\theta) + \Phi_0^{\pm}(\xi),\end{aligned}\quad (4.17)$$

$$\Delta T(\xi, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} T_m(\xi) \cos(m\theta) + T_0(\xi),$$

$$u_i(\xi, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} u_{im}(\xi) \cos(m\theta) + u_{i0}(\xi), \quad i = \overline{0, 3},$$

$$v_i(\xi, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} v_{im}(\xi) \sin(m\theta) + v_{i0}(\xi), \quad i = \overline{0, 3},$$

$$w_j(\xi, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} w_{jm}(\xi) \cos m\theta + w_{j0}(\xi), \quad j = \overline{0, 2},$$

$$\varphi_0(\xi, \theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_{0m}(\xi) \cos(m\theta) + \varphi_{00}(\xi).$$

После подстановки разложений (4.17) в уравнения (4.12) с учетом (4.13), (4.9), (4.10) и (4.3) – (4.6), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^3 \left(K_{1d2\xi}^{u_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} - m^2 K_{1d2\theta}^{u_i} u_i \right) + \sum_{j=0}^3 m K_{1d2\xi\theta}^{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^2 K_{1d1\xi}^{w_j} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} + K_{1d1\xi}^{\varphi_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} = \left(k_1^{q_{13}^+} q_{13}^+ + k_1^{q_{13}^-} q_{13}^- \right), \\ & \sum_{i=0}^3 \left(K_{2d2\xi}^{u_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} - m^2 K_{2d2\theta}^{u_i} u_i + K_2^{u_i} u_i \right) + \sum_{j=0}^3 m K_{2d2\xi\theta}^{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^2 K_{2d1\xi}^{w_j} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} + \\ & + K_{2d1\xi}^{\varphi_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \left(k_2^{q_{13}^+} q_{13}^+ + k_2^{q_{13}^-} q_{13}^- \right) = 0, \\ & \sum_{i=0}^3 \left(K_{3d2\xi}^{u_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} - m^2 K_{3d2\theta}^{u_i} u_i + K_3^{u_i} u_i \right) + \sum_{j=0}^3 m K_{3d2\xi\theta}^{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^2 K_{3d1\xi}^{w_j} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} + \\ & + K_{3d1\xi}^{\varphi_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \left(k_3^{q_{13}^+} q_{13}^+ + k_3^{q_{13}^-} q_{13}^- \right) = 0, \\ & \sum_{i=0}^3 \left(K_{4d2\xi}^{u_i} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \xi^2} - m^2 K_{4d2\theta}^{u_i} u_i + K_4^{u_i} u_i \right) + \sum_{j=0}^3 m K_{4d2\xi\theta}^{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^2 K_{4d1\xi}^{w_j} \frac{\partial w_j}{\partial \xi} + \\ & + K_{4d1\xi}^{\varphi_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \left(k_4^{q_{13}^+} q_{13}^+ + k_4^{q_{13}^-} q_{13}^- \right) = 0, \\ & - \sum_{j=0}^3 m K_{5d2\xi}^{v_j} \frac{\partial v_j}{\partial \xi} + \sum_{i=0}^3 \left(K_{5d2\xi}^{v_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi^2} + \left(m^2 K_{5d2\theta}^{v_i} + K_5^{v_i} \right) v_i \right) - \sum_{j=0}^2 m K_{5d1\theta}^{w_j} w_j = \left(k_5^{q_{23}^+} q_{23}^+ + k_5^{q_{23}^-} q_{23}^- \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\sum_{j=0}^3 mK_{6d2\xi\theta}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{i=0}^3 \left(K_{6d2\xi}^{v_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi^2} + m^2 K_{6d2\theta}^{v_i} v_i + K_6^{v_i} v_i \right) - \sum_{j=0}^2 mK_{6d1\theta}^{w_j} w_j - \\
& -mK_{6d1\theta}^{\varphi_o} \varphi_o + \left(k_6^{q_{23}^+} q_{23}^+ + k_6^{q_{23}^-} q_{23}^- \right) = 0, \\
& -\sum_{j=0}^3 mK_{7d2\xi\theta}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{i=0}^3 \left(K_{7d2\xi}^{v_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi^2} + \left(m^2 K_{7d2\theta}^{v_i} + K_7^{v_i} \right) v_i \right) - \sum_{j=0}^2 mK_{7d1\theta}^{w_j} w_j = \left(k_7^{q_{23}^+} q_{23}^+ + k_7^{q_{23}^-} q_{23}^- \right), \\
& -\sum_{j=0}^3 mK_{8d2\xi\theta}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{i=0}^3 \left(K_{8d2\xi}^{v_i} \frac{\partial^2 v_i}{\partial \xi^2} + \left(m^2 K_{8d2\theta}^{v_i} + K_8^{v_i} \right) v_i \right) - \sum_{j=0}^2 mK_{8d1\theta}^{w_j} w_j - mK_{8d1\theta}^{\varphi_o} \varphi_o + \\
& + \left(k_8^{q_{23}^+} q_{23}^+ + k_8^{q_{23}^-} q_{23}^- \right) = 0, \\
& \sum_{i=0}^3 K_{9d1\xi}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^3 mK_{9d1\theta}^{v_j} v_j + \sum_{j=0}^2 \left(K_{9d2\xi}^{w_j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \xi^2} - m^2 K_{9d2\theta}^{w_j} w_j \right) + \left(K_{9d1\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial \xi^2} + K_9^{\varphi_o} \varphi_o \right) + \\
& + \left(k_9^{q_{33}^+} q_{33}^+ + k_9^{q_{33}^-} q_{33}^- \right) + \left(k_9^{\varphi_o^+} \varphi_o^+ + k_9^{\varphi_o^-} \varphi_o^- \right) + K_9^T \Delta T = 0, \\
& \sum_{i=0}^3 K_{10d1\xi}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^3 mK_{10d1\theta}^{v_j} v_j + \sum_{j=0}^2 \left(K_{10d2\xi}^{w_j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \xi^2} - m^2 K_{10d2\theta}^{w_j} w_j \right) + \left(K_{10d1\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial \xi^2} + K_{10}^{\varphi_o} \varphi_o \right) + \\
& + \left(k_{10}^{q_{33}^+} q_{33}^+ + k_{10}^{q_{33}^-} q_{33}^- \right) + \left(k_{10}^{\varphi_o^+} \varphi_o^+ + k_{10}^{\varphi_o^-} \varphi_o^- \right) + K_{10}^T \Delta T = 0, \\
& \sum_{i=0}^3 K_{11d1\xi}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^3 mK_{11d1\theta}^{v_j} v_j + \sum_{j=0}^2 \left(K_{11d2\xi}^{w_j} \frac{\partial^2 w_j}{\partial \xi^2} - m^2 K_{11d2\theta}^{w_j} w_j \right) + \left(K_{11d1\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial \xi^2} + K_{11}^{\varphi_o} \varphi_o \right) + \\
& + \left(k_{11}^{q_{33}^+} q_{33}^+ + k_{11}^{q_{33}^-} q_{33}^- \right) + \left(k_{11}^{\varphi_o^+} \varphi_o^+ + k_{11}^{\varphi_o^-} \varphi_o^- \right) + K_{11}^T \Delta T = 0, \\
& \sum_{i=0}^3 K_{12d1\xi}^{u_i} \frac{\partial u_i}{\partial \xi} + \sum_{j=0}^3 mK_{12d1\theta}^{v_j} v_j + \sum_{j=0}^2 K_{12}^{w_j} w_j + \left(K_{12d2\xi}^{\varphi_o} \frac{\partial^2 \varphi_o}{\partial \xi^2} + \left(K_{11}^{\varphi_o} - m^2 K_{12d2\theta}^{\varphi_o} \right) \varphi_o \right) + \\
& + \left(k_{12}^{\varphi_o^+} \varphi_o^+ + k_{12}^{\varphi_o^-} \varphi_o^- \right) + K_{12}^T \Delta T = 0.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Здесь коэффициенты K с верхними и нижними индексами обозначают величины, зависящие от геометрических параметров, упругих, пьезоэлектрических постоянных изотропного материала оболочки, характера изменения температуры, количества слоев композиционной оболочки и углов армирования каждого слоя.

Для решения системы уравнений (4.18) воспользуемся операционным

методом, основанным на преобразовании Лапласа. Конкретное решение проводится по аналогии со второй главой диссертации. Переходя от оригиналов к изображениям, получим систему линейных алгебраических уравнений, матрица двенадцатого порядка которой решается с помощью программы для ЭВМ.

4.3. Параметрические исследования НДС цилиндрической оболочки с учетом термоэлектрического воздействия

4.3.1. НДС цилиндрической композиционной оболочки при термоэлектрическом воздействии

Рассматривается многослойная $[0/90^\circ/0/90^\circ/0]$ цилиндрическая оболочка из композитного материала, жестко зашпеленная на двух краях. Три слоя в центре оболочки изготовлены из материала AS/3501 и два слоя на внешней и внутренней поверхностях из материала PVDF. Композитная оболочка находится под действием термоэлектрической нагрузки $\varphi^+(\xi, \theta) = \varphi_o(\xi)\cos(m\theta)$ и $\Delta T(\xi, \theta) = T_o(\xi)\cos(m\theta)$.

На рисунках 4.2 – 4.3 представлены графики основных нормальных и поперечных напряжений в краевой зоне в центре срединной поверхности оболочки при действии различных температур.

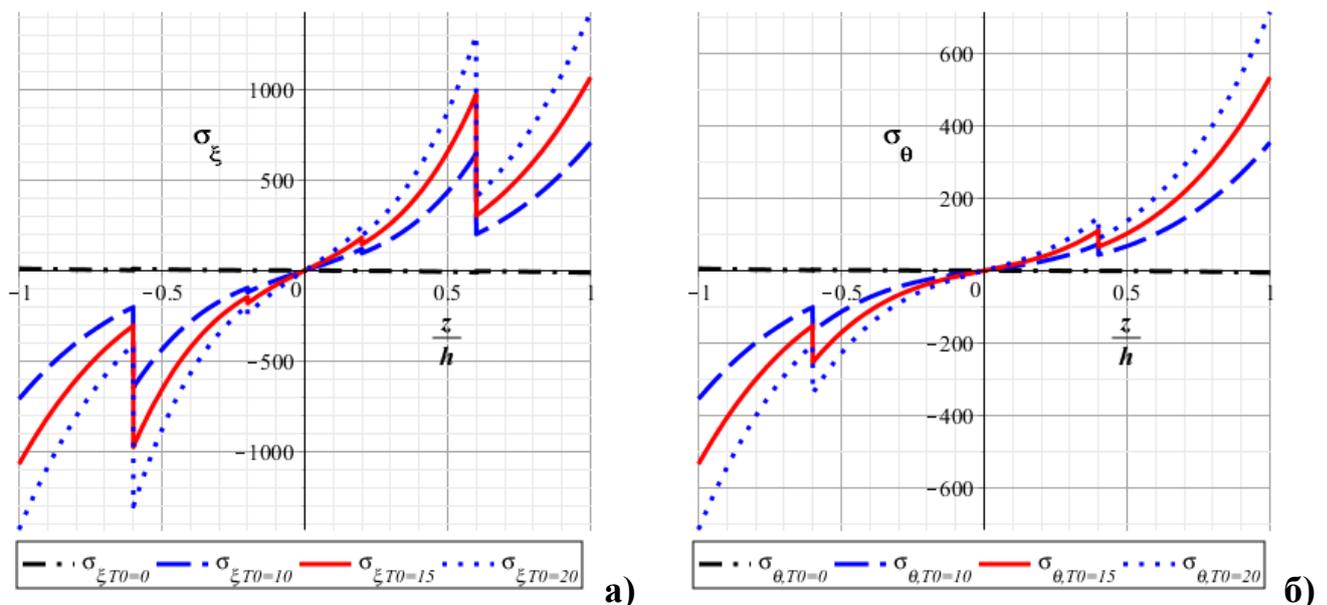


Рис.4. 2. Графики напряжений σ_z (а) и σ_θ (б) по толщине в краевой зоне при действии различных температур

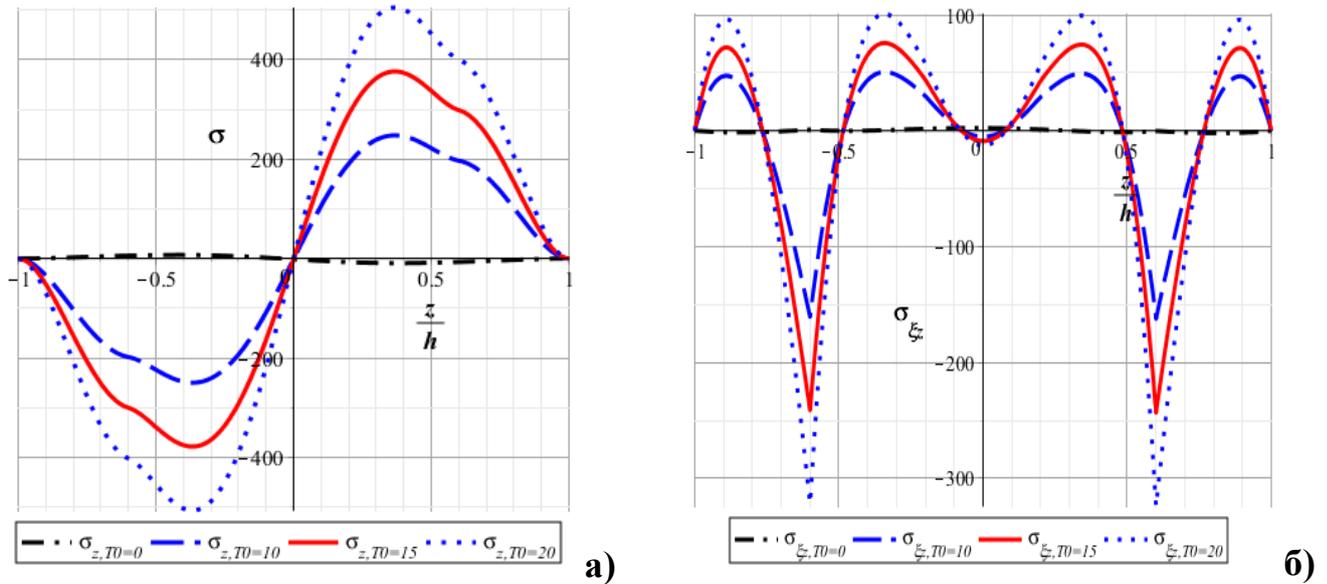


Рис.4. 3. Графики напряжений σ_z (а) и $\sigma_{\xi z}$ (б) по толщине в краевой зоне при действии различных температур

Таблица 4. 1. Максимальные напряжения на краю оболочки при действии различных температур ($L=4R$, $S=100$)

	$T_0=0$	$T_0=10$	$T_0=15$	$T_0=20$	$T_0=30$
σ_{ξ}	11.421	710.478	1071.428	1432.378	2154.278
σ_{θ}	5.710	355.239	535.715	716.190	1077.140
$\sigma_{\xi z}$	2.435	161.322	245.236	336.458	525.368
σ_z	9.122	220.365	391.235	453.628	735.536

Из рисунков 4.2-4.3 и таблицы 4.1 следует, что при $T_0=0$ (без учета температурного воздействия) напряжения на краях практически равны нулю, если композитная оболочка находится под действием различных температур, то основные напряжения значительны, в том числе и поперечные напряжения, которыми пренебрегают в классической теории термоэлектроупругости, составляют 20-23% (для $\sigma_{\xi z}$) и 30-36% (для σ_z) от максимальных напряжений σ_{ξ} .

4.3.2. НДС композиционной цилиндрической оболочки при термомеханическом нагружении

Рассматривается композиционная трехслойная $[90^\circ/0/90^\circ]$ цилиндрическая оболочка, жестко защемленная на двух краях и находящаяся под действием термомеханической нагрузки $q_{33}^+(\xi, \theta) = Q_o(\xi)\cos(m\theta)$ и $\Delta T(\xi, \theta) = T_o(\xi)\cos(m\theta)$.

Результаты вычисления основных напряжений при действии различных температур представлены на рисунках 4.4-4.5 и сравнение напряжений в краевой зоне, удаленной на $5h$ от края, при определении по математической модели данной работы и теории [126] показаны на рисунках 4.6-4.9 и таблицах 4.2-4.3.

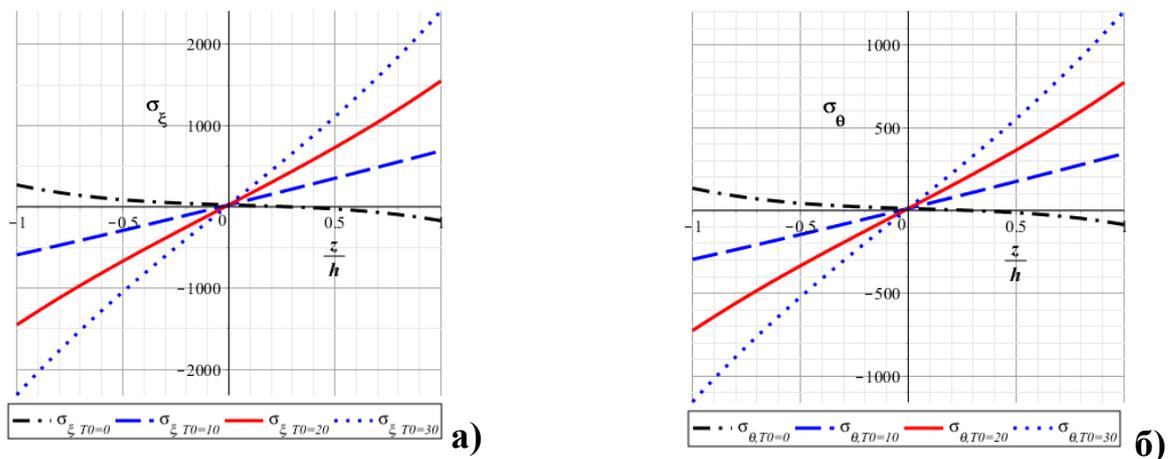


Рис.4. 4. Графики напряжений σ_z (а) и σ_θ (б) по толщине в краевой зоне при действии различных температур

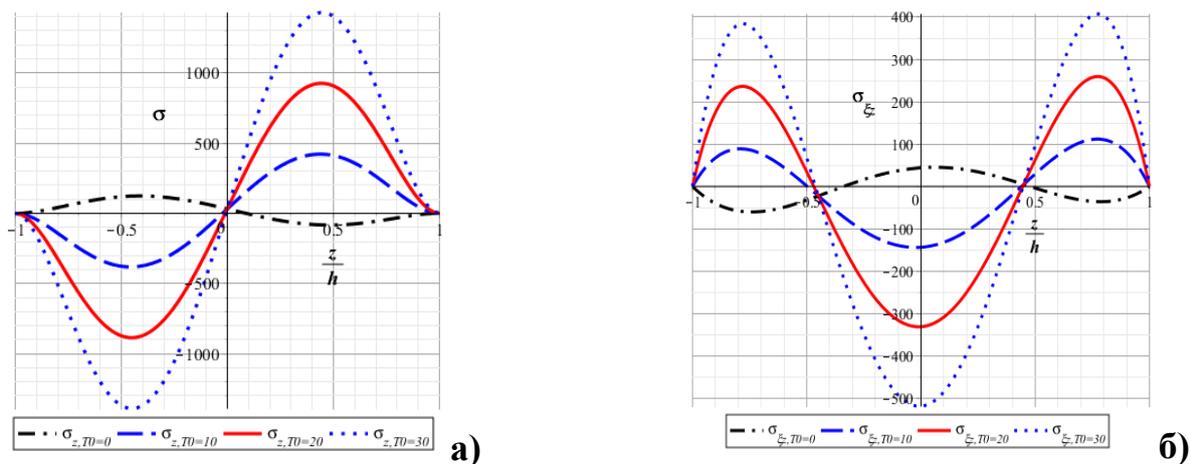
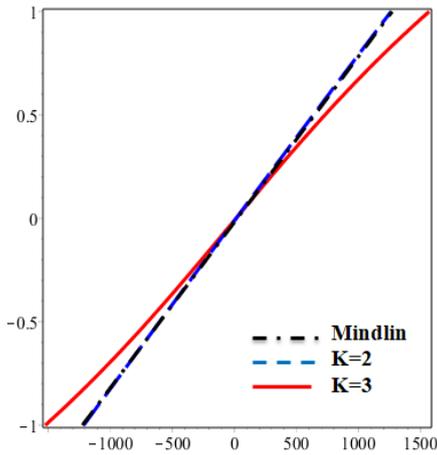
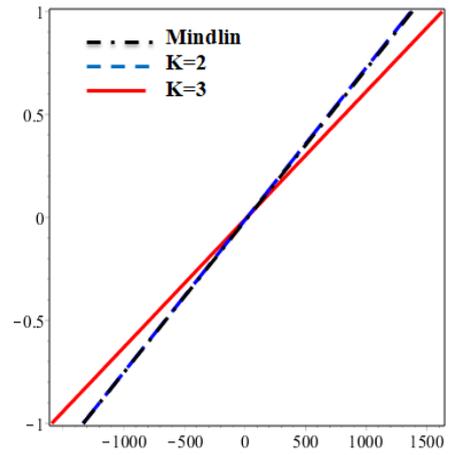


Рис.4. 5. Графики напряжений σ_z (а) и $\sigma_{z\zeta}$ (б) по толщине в краевой зоне при действии различных температур

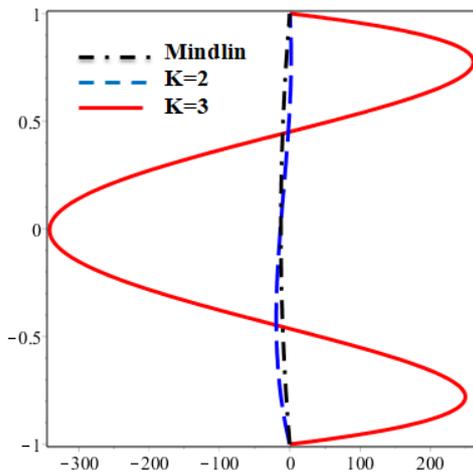


а)

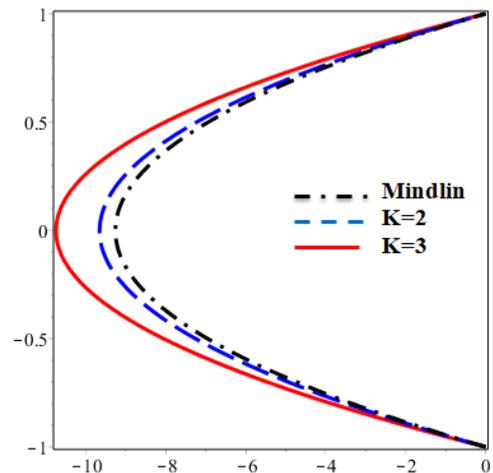


б)

Рис.4. 6. Графики напряжений σ_{ζ} по толщине на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности при $T_0=10^\circ\text{C}$

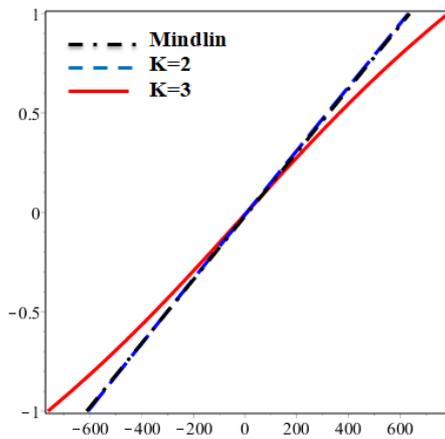


а)

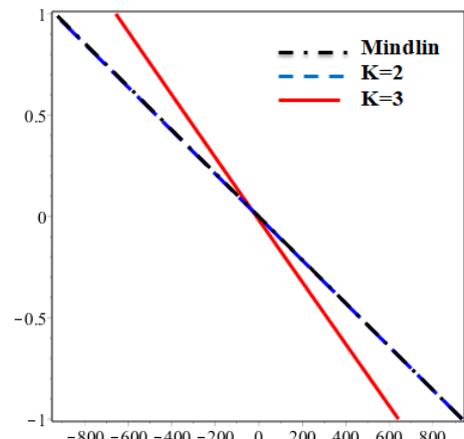


б)

Рис.4. 7. Графики напряжений $\sigma_{\zeta\zeta}$ по толщине на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности при $T_0=10^\circ\text{C}$



а)



б)

Рис.4. 8. Графики напряжений σ_{θ} по толщине на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности при $T_0=10^\circ\text{C}$

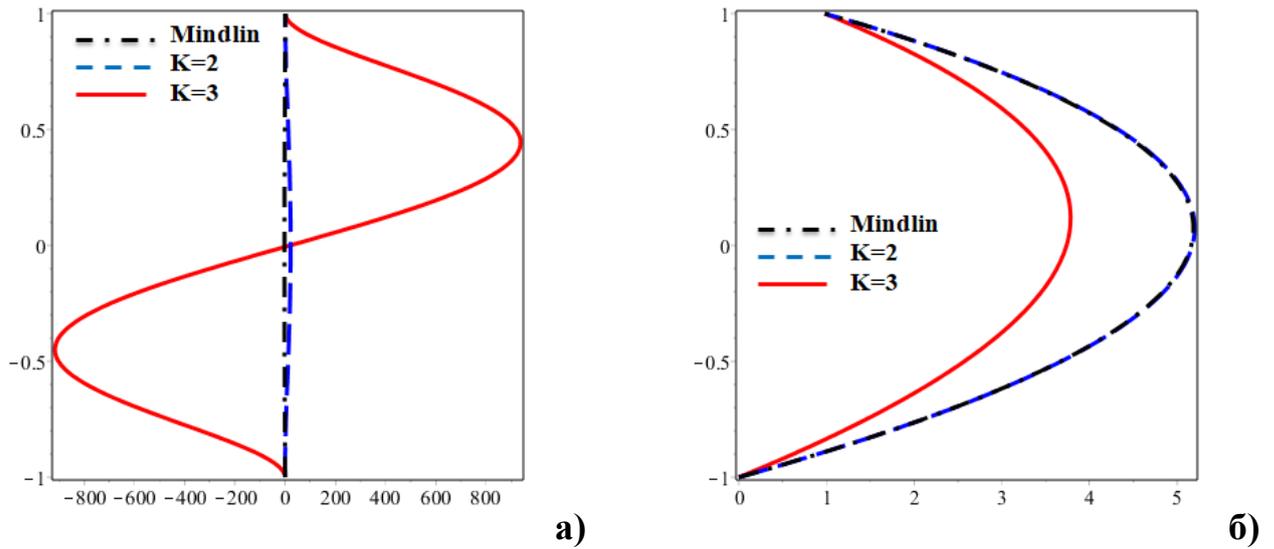


Рис.4. 9. Графики напряжений σ_z по толщине на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности при $T_0=10^\circ\text{C}$

Таблица 4. 2. Напряжения трехслойной оболочки $[90^\circ/0/90^\circ]$ ($L=4R$, $S=100$) при термомеханическом нагружении

	$T_0=0^\circ\text{C}$			$T_0=10^\circ\text{C}$		
	Mindlin [126]	K=2	K=3	Mindlin [126]	K=2	K=3
$\sigma_\xi\text{max}$	198.31	236.55	269.51	579.61	545.46	689.04
$\sigma_\theta\text{max}$	99.15	118.28	134.75	289.80	275.23	345.56
$\sigma_{\xi z}\text{max}$	10.56	25.36	62.12	12.32	26.88	152.68
$\sigma_z\text{max}$	0	43.57	120.36	0	45.26	409.36
$\sigma_\xi(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	48.09	31.52	31.85	415.75	412.67	466.42
$\sigma_\theta(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	99.25	98.99	99.25	120.09	120.09	52.75
$\sigma_{\xi z}(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	0	0	0	0	0	0
$\sigma_z(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	0.75	0.75	0.75	1.56	1.56	1.31

Таблица 4. 3. Напряжения трехслойной оболочки $[90^\circ/0/90^\circ]$ ($L=4R$, $S=100$) при термоэлектрическом воздействии

	T0=0°C			T0=10°C		
	Mindlin [126]	K=2	K=3	Mindlin [126]	K=2	K=3
$\sigma_\xi \max$	15.83	14.26	17.19	668.15	670.64	844.45
$\sigma_\theta \max$	7.91	7.13	8.59	334.08	345.33	425.22
$\sigma_{\xi z} \max$	1.12	1.12	5.58	1.35	1.35	196.67
$\sigma_z \max$	2.07	2.08	14.36	2.55	2.56	499.35
$\sigma_\xi(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	3.71	3.57	3.57	363.94	364.58	430.99
$\sigma_\theta(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	6.19	6.20	6.20	213.14	213.13	145.80
$\sigma_{\xi z}(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	0	0	0	0	0	0
$\sigma_z(\xi=\frac{L}{2}, \theta=0)$	0.01	0.01	0.01	0.83	0.83	0.58

Анализируя результаты вычисления НДС композиционных цилиндрических оболочек с учетом совместных термоэлектромеханических нагрузок можно установить следующее:

- основные нормальные напряжения σ_ξ и σ_θ при действии различных температур в любых точках оболочки практически совпадают при расчетах по

математической модели данной работы ($K=3$) и по работе [126].

- существование напряжений типа “погранслои” σ_z и $\sigma_{\xi z}$ в краевой зоне. При удалении от краевых зон на расстояние порядка толщины, напряжения типа “погранслои” затухают и практически равны нулю.

4.4. Выводы к четвертой главе

1. На основании вариационного принципа Лагранжа и разложения компонентов перемещений и электрических потенциалов в полиномы по толщине на два порядка выше по отношению к классической теории построена уточненная математическая модель и сформулирована краевая задача для композиционных цилиндрических оболочек в условиях совместного термоэлектромеханического нагружения.

2. Разработан алгоритм определения НДС композиционных цилиндрических оболочек, при котором удовлетворяются уравнения равновесия теории электроупругости с учетом температурного воздействия во всех внутренних точках оболочки и выполняются граничные условия на её краях.

3. Проведено сравнение результатов расчета НДС композиционных цилиндрических оболочек при использовании уточненной математической модели данной работы для нескольких вариантов температуры.

4. Показано влияние эффекта связанности термоэлектромеханических полей на процессы деформирования и преобразования энергии композиционных цилиндрических оболочек.

5. Установлено, что при расчете НДС композиционных цилиндрических оболочек при термоэлектромеханическом нагружении по уточненной теории имеют место дополнительные быстро затухающие краевые напряженные состояния типа «погранслои».

6. Учет влияния температуры с учетом пьезоэлектрического эффекта на НДС композиционных цилиндрических оболочек по уточненной теории

позволяет получить существенно более точные величины напряжений. Этот результат имеет важное значение, так как дает возможность более достоверно определить НДС и его влияние на прочность и трещиностойкость в зонах искажения напряженного состояния элементов конструкций летательных аппаратов, а также других объектов машиностроения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты диссертационной работы заключаются в следующем:

1. Для произвольных оболочек построены математические модели уточненной теории электроупругости, основанной на трехмерных уравнениях теории упругости и уравнениях электростатики Максвелла с применением аппроксимации компонентов НДС полиномами по нормальной к срединной поверхности координате на две степени выше относительно классической теории типа Кирхгофа-Лява .

2. Применяя вариационный принцип Лагранжа к уточненному выражению полной энергии оболочек, построены в частных производных системы уравнений равновесия в механических перемещениях, электрических потенциалах и сформулированы соответствующие граничные условия для цилиндрических оболочек, изготовленных из изотропных и многослойных композиционных материалов с учетом пьезоэлектрического эффекта.

3. Сформулированная краевая задача электроупругости изотропных и многослойных композиционных цилиндрических оболочек решается на основе сведения трехмерных уравнений к двумерным. Механические перемещения, электрические потенциалы и внешние электромеханические нагрузки, действующие на оболочку, аппроксимируются тригонометрическими рядами по окружной координате.

4. Разработан алгоритм решения краевой задачи электроупругости в программном пакете ЭВМ. Приведены результаты расчетов и параметрический анализ НДС композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта и температурного воздействия . Показано, что вблизи зон искажения НДС компоненты напряженного состояния, полученные по предлагаемой математической модели, существенно отличаются от аналогов, соответствующих классической теории, не только в части поперечных нормальных и касательных напряжений, но и в части нормальных

тангенциальных напряжений, соответствующих классической теории. На основе решения краевой задачи показано наличие напряженного состояния краевой плоской деформации типа «погранслои».

5. Проведено сравнение полученных в данной работе результатов с данными классической и другими вариантами уточненной теории, опубликованными в международных журналах Scopus и WoS, подтвердившее достоверность предлагаемой математической модели НДС. Уточненная модель, предлагаемая в данной работе, можно использовать как общую расчетную для определения НДС **композиционных оболочек, изготовленных** из материалов, обладающих пьезоэлектрическим эффектом или без учета пьезоэффекта

6. Предлагаемые математические модели НДС композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта и температурного воздействия позволяют определить непрерывное распределение напряжений по толщине оболочки, что очень важно для расчета и оценки прочности и долговечности элементов конструкций из композиционных материалов. Установлено, что предлагаемые математические модели уточненной теории позволяют получить существенно более точные величины напряжений композиционных цилиндрических оболочек при термоэлектромеханическом нагружении.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

НДС -	напряженно-деформированное состояние
ЭМС -	электромеханическое состояние
СЛАУ -	система линейных алгебраических уравнений
ЛА -	летательный аппарат
КА -	космический аппарат
МКЭ -	метод конечных элементов
FSDT -	first order shear deformation theory (теория сдвиговых деформаций первого порядка)
HSDT -	high order shear deformation theory (теория сдвиговых деформаций высшего порядка)

СПИСОК ТАБЛИЦ

Таблица 2. 1. Электромеханические коэффициенты PZT-4.....	61
Таблица 2. 2. Механические коэффициенты PVDF	64
Таблица 2. 3. Пьезоэлектрические константы PVDF	65
Таблица 2.4. Максимальные напряжения оболочки, находящейся под действием механических нагрузок при различных значениях толщины.....	67
Таблица 2.5. Максимальные напряжения оболочки, находящейся под действием электрических потенциалов при различных значениях толщины	68
Таблица 3. 1. Сравнение прогибов \bar{w} при $[90^\circ]$ и $[90^\circ/0]$	92
Таблица 3. 2. Сравнение прогибов \bar{w} при $[90^\circ/0/90^\circ]$	92
Таблица 3.3. Сравнение максимальных поперечных нормальных напряжений $\bar{\sigma}_z$ при $[90^\circ]$ и $[90^\circ/0/90^\circ]$	93
Таблица 3. 4. Механические коэффициенты Graphite-Ероху (AS/3501).....	100
Таблица 4. 1. Максимальные напряжения на краю оболочки при действии различных температур (L=4R, S=100)	120
Таблица 4. 2. Напряжения трехслойной оболочки $[90^\circ/0/90^\circ]$ (L=4R, S=100) при термомеханическом нагружении.....	123
Таблица 4. 3. Напряжения трехслойной оболочки $[90^\circ/0/90^\circ]$ (L=4R, S=100) при термоэлектрическом воздействии	124

СПИСОК РИСУНКОВ

Рис.1. 1. Пьезоэлементы на крыльях самолетов	16
Рис.1. 2. Криволинейная система координат произвольной оболочки	24
Рис.2. 1. Цилиндрическая оболочка с сенсором и актюатором	43
Рис.2. 2. Графики перемещений (а) и напряжений (б) оболочки по длине в срединной поверхности	62
Рис.2. 3 Графики напряжений и электрического потенциала оболочки по толщине в краевой зоне	62
Рис.2. 4 Графики перемещений (а) и напряжений (б) оболочки по длине в срединной поверхности	63
Рис.2. 5 Графики напряжений (а) и электрического потенциала (б) оболочки по толщине в краевой зоне	63
Рис.2. 6 Графики основных напряжений по длине (а) в срединной поверхности и по толщине (б) в краевой зоне оболочки	65
Рис.2. 7. Сравнение основных напряжений σ_ξ (а) и σ_θ (б) по длине оболочки в срединной поверхности по классической и уточненной теориям	65
Рис.2. 8 Графики основных напряжений по длине (а) в срединной поверхности и по толщине (б) в краевой зоне оболочки	66
Рис.2. 9. Сравнение основных напряжений σ_ξ (а) и σ_θ (б) по длине оболочки в срединной поверхности по классической и уточненной теориям	66
Рис.3. 1. Пьезокомпозиционная цилиндрическая оболочка	71
Рис.3. 2. Системы координат и слои композиционной цилиндрической оболочки	75
Рис.3.3. Графики поперечных нормальных напряжений при разных относительных толщинах, полученных в V&B[138] и в данной работе при $[90^\circ]$.	93
Рис.3.4 Графики поперечных нормальных напряжений при разных относительных толщинах в V&B[138] и в данной работе при $[90^\circ/0/90^\circ]$	94
Рис.3. 5 Графики основных напряжений по толщине оболочки	95
Рис.3. 6. Графики σ_ξ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в	

срединной поверхности оболочки.....	96
Рис.3. 7. Графики σ_θ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	96
Рис.3. 8. Графики σ_z на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	96
Рис.3. 9. Графики $\sigma_{\xi z}$ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	97
Рис.3. 10. Графики основных напряжений по толщине оболочки	97
Рис.3. 11. Графики σ_ξ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	98
Рис.3. 12. Графики σ_θ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	98
Рис.3. 13. Графики σ_z на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	98
Рис.3. 14. Графики $\sigma_{\xi z}$ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	99
Рис.3. 15. Графики основных напряжений (а) и электрического потенциала (б) по толщине в срединной поверхности оболочки	100
Рис.3. 16. Графики σ_ξ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	100
Рис.3. 17. Графики σ_θ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	101
Рис.3. 18. Графики σ_z на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	101
Рис.3. 19. Графики $\sigma_{\xi z}$ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	101
Рис.3. 20. Графики основных напряжений по толщине оболочки	102
Рис.3. 21. Графики σ_ξ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	103

Рис.3. 22. Графики σ_θ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	103
Рис.3. 23. Графики σ_z на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	103
Рис.3. 24. Графики $\sigma_{\xi z}$ на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности оболочки.....	104
Рис.4. 1. Композиционная цилиндрическая оболочка при совместном действии термоэлектромеханических нагрузок.....	108
Рис.4. 2. Графики напряжений σ_ξ (а) и σ_θ (б) по толщине в краевой зоне при действии различных температур	119
Рис.4. 3. Графики напряжений σ_z (а) и $\sigma_{\xi z}$ (б) по толщине в краевой зоне при действии различных температур	120
Рис.4. 4. Графики напряжений σ_ξ (а) и σ_θ (б) по толщине в краевой зоне при действии различных температур	121
Рис.4. 5. Графики напряжений σ_z (а) и $\sigma_{\xi z}$ (б) по толщине в краевой зоне при действии различных температур	121
Рис.4. 6. Графики напряжений σ_ξ по толщине на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности при $T_0=10^\circ\text{C}$	122
Рис.4. 7. Графики напряжений $\sigma_{\xi z}$ по толщине на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности при $T_0=10^\circ\text{C}$	122
Рис.4. 8. Графики напряжений σ_θ по толщине на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности при $T_0=10^\circ\text{C}$	122
Рис.4. 9. Графики напряжений σ_z по толщине на краю (а) и при удалении на $5h$ от края (б) в срединной поверхности при $T_0=10^\circ\text{C}$	123

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных оболочек. М.: Физматгиз, 1961. 384с.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин. М.: Наука, 1967. 266с.
3. Агаловян Л.А. Асимптотическая теория анизотропных пластин и оболочек. М.: Наука, 1997. 414 с.
4. Агаловян Л.А., Гулгазарян Л.Г. Асимптотические решения неклассических краевых задач о собственных колебаниях ортотропных оболочек. ПММ. 2006. Т. 70. Вып. 1. С. 111-125.
5. Базаренко Н.А., Ворович И.И. Асимптотическое поведение решения задачи теории упругости для полого цилиндра конечной длины при малой толщине. ПММ. 1965. 29. № 6. С. 1035–1052.
6. Баничук Н.Б., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
7. Бакулин В.Н. Методы оптимального проектирования и расчёта композиционных конструкций М.: Физматлит, 2008. - 256 с.
8. Баженов В.М., Улитко А.Ф. Исследование динамического поведения пьезокерамического слоя при мгновенном электрическом нагружении. Прикладная механика. 1975. Т. 2. № 1. С. 22-27.
9. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций. М.: Машиностроение, 1980. 375 с.
10. Болотин В.В. Динамический краевой эффект при упругих колебаниях пластинок. Инж. сб. /АН СССР. 1961. Т.31. С. 3-14.
11. Белоконь А.В, Ватульян А.О, Наседкин А.В, Скалиух А.С, Кирютенко А.Ю. Развитие численных и асимптотических методов решения связанных задач термоэлектроупругости. Ростов-на-Дону, 1998.
12. Ванин Г.А. Микромеханика композиционных материалов. Киев: «Наук. думка», 1985.- 304 с.

13. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 269 с.
14. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме построения неклассической теории пластин. Изв. АН. МТТ. 1990. № 2. С. 158-167.
15. Васильев В.В., Лурье С.А. К проблеме уточнения теории пологих оболочек. Изв. АН. МТТ. 1990. № 6. С. 139-146.
16. Ватульян А. О., Кубликов В. Л. О граничных интегральных уравнениях в электроупругости. ПММ. 1989. Т. 53. Вып. 6. С. 1037-1041.
17. Ватульян А. О., Ковалева В. В. Вариационный принцип термоэлектроупругости и его применение в задаче о колебаниях тонкостенного элемента. Прикладная механика и техническая физика. 2002. N 1. Т. 43. С. 1964201.
18. Ватульян А. О., Кубликов В. Л. Метод граничных элементов в электроупругости. Механика деформируемого твердого тела. Межвузовский сборник научных трудов. Ростов-на-Дону: Изд. центр ДГТУ. 1988. С. 17-21.
19. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Исследование нестационарных радиальных колебаний электромагнитоупругой толстостенной сферы с помощью численного обращения преобразования Лапласа. Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. Вып. 9. – 2014, № 1. - С. 51 - 64.
20. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в толстостенной электромагнитоупругой сфере. Экологический вестник научных центров ЧЭС. 2011. № 4. С. 16 – 21.
21. Векуа И.Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982. 288 с.
22. Власов Б.Ф. Об уравнениях теории изгиба пластинок. Изв. АН СССР.ОТН. 1957. № 12. С. 57-60.
23. Власов В.З. Тонкостенные пространственные системы. М.: Госстройиздат.

1958. 502с

24. Власов В.З. Общая теория оболочек. М.: Гостехиздат, 1949. 475с.
25. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
26. Вольмир А.С. Обзор исследований по теории гибких пластинок и оболочек за период с 1941 по 1957 г. Расчеты пространственных конструкций. М.: Госстройиздат, 1958. Вып. 4. С. 451-475.
27. Ворович И.И. Общие проблемы теории пластин и оболочек. Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластинок. Баку. 1966. Обзорные докл. М.: Наука, 1966. С. 896-903.
28. Вековищева И.А. Пространственная задача теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта.-Изв.АН АрмССР. Механика, 1970, т.23, № 4, с.33-43.
29. Вековищева И.А. Общие уравнения теории упругости анизотропного тела с учетом электрического эффекта.- Изв. вузов. Физика, 1970, № 10, с.87-92.
30. Вековищева И.А. Полиномиальные решения плоской задачи теории электроупругости.- Прикл.мех., 1973, т.9, № I, с.80-84.
31. Вековищева И.А. Плоская задача теории электроупругости для пьезоэлектрической пластинки.- Прикл.мех., 1975, т.II, № 2, с.85-89.
32. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ. 1962. Т. 26. Вып. 4. С. 668-686..
33. Гольденвейзер А.Л. О приближенных методах расчета тонких упругих оболочек и пластин. Изв. АН. МТТ. 1997. № 3. С. 134-149.
34. Гольденвейзер А.Л. Построение приближенной теории оболочек при помощи асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 4. С. 593-608.
35. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976. 512с.

36. Гольденвейзер А.Л., Лурье А.И. О математической теории равновесия упругих оболочек. ПММ. 1947. Т. 11. Вып. 5. С. 565-592.
37. Гришанина Т.В., Шклярчук Ф.Н. Динамика управляемых конструкций. – М.: Изд-во МАИ, 2007.- 326 с.
38. Гришанина Т.В. Флаттер стреловидного крыла. –М.: Изд-во МАИ, 1993.- 20с
39. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т.5. Электроупругость. – Киев: Наукова думка, 1989. – 280 с.
40. Гнездилов В.А, А.А Дудченко, С.А Лурье, Вик.В Фирсанов. Основы термоупругости композиционных материалов. Москва, 2015. 144стр. ISBN 978-5-93454-194-2. Изд.Беловодье.
41. Димитриенко Ю.И., Юрин Ю.В. Асимптотическая теория типа Тимошенко для тонких многослойных пластин. Математическое моделирование и численные методы. 2018. № 1 (17). С. 16-40.
42. Димитриенко Ю.И., Губарева Е.А. Асимптотическая теория тонких двухслойных упругих пластин с проскальзыванием слоев. Математическое моделирование и численные методы. 2019. № 1 (21). С. 3-26.
43. Димитриенко Ю.И., А.Н. Морозов, А.П. Соколов, Е.С. Ничеговский. Моделирование эффективных пьезоэлектроупругих композиционных материалов. Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. “Естественные науки”. 2010, №3.
44. Дудченко А.А., Лурье С.А., Образцов И.Ф. Анизотропные многослойные пластины и оболочки. Итоги науки и техники. Сер. Механика деформируемого твердого тела. М.: ВИНТИ. 1983. Т.15. С. 3-68.
45. Евдокимова О.В., Белянкова Т.И., Калинин В.В. Уравнения динамики преднапряженной пьезоактивной среды при наличии внешнего электростатического поля. Вестн. ЮНЦ РАН. 2007. Т. 3. № 4. С. 19-25.
46. Елпатьевский А.Н., Васильев В.В. Прочность цилиндрических оболочек из

- армированных материалов. М.: Машиностроение, 1972. 168 с.
47. Калинин В.В., Белянкова Т.И. Уравнения динамики предварительно напряженной магнитоэластичной среды. Изв. РАН. МТТ. 2016. № 5. С. 101- 110.
48. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Динамические контактные задачи для предварительно напряженных эластичных сред – М.: ФИЗМАТЛИТ., 2006. – 273 с.
49. Калинин В.В., Белянкова Т.И., Леви М.О., Агаян К.Л. Некоторые особенности динамики слабонеоднородного магнитоэластичного полупространства // Вестн. ЮНЦ РАН. 2013. Т. 9. № 4. С. 13-17.
50. Кильчевский Н.А. Анализ различных методов приведения трехмерных задач теории упругости к двумерным и исследование постановки краевых задач теории оболочек. Тр. 2-й Всесоюз. конф. по теории пластин и оболочек. Киев: Изд-во АН УССР, 1962. С. 58-69.
51. Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А. Теория тонких конических оболочек и ее приложение в машиностроении. Киев: Изд-во АН УССР, 1963. 287 с.
52. Коваленко А.Д., Григоренко Я.М., Ильин Л.А., Полищук Т.И. Расчет конических оболочек при антисимметричных нагрузках. Киев: Изд-во АН УССР, 1966. 495с.
53. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев 1965. Наукова думка. 204стр.
54. Коваленко А.Д. Основы в термоупругости. Киев 1970. Наукова думка. 309стр.
55. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Обобщенное плоское напряженное состояние тонких пьезоэлектрических пластин.-Прикл.мех., 1977, т.13, № 10, с.75-79.
56. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Электроупругое равновесие тонкого анизотропного слоя с учетом пьезоэлектрических эффектов.- Прикл.мат.и

- мех., 1978, т.42, № 4, с.731-736.
57. Космодамианский А.С., Ложкин В.Н. Асимптотический анализ электроупругого состояния тонкого пьезоэлектрического слоя.-Прикл.мех., 1978, т.14, № 5, с.3-8.
58. Ложкин В.Н. Асимптотический анализ электроупругого равновесия тонкого пьезоэлектрического полуслоя.-Тепловые напряж. в элементах конструкций. Респ.межвед. сб.- Киев: Наукова думка, 1980, № 20, с.42-45.
59. Ложкин В.Н. Электроупругое равновесие тонкого кристаллического полуслоя с электродированными плоскими гранями.-Теор.и прикл.мех. Респ.межвед,сб.- Киев: Наукова думка, 1981, № 12, с.42-47.
60. Лехницкий С.Г. Анизотропные пластинки. М.: Физматгиз, 1957. 463 с.
61. Лехницкий С.Г. Изгиб неоднородных анизотропных тонких плит симметричного строения. ПММ. 1941. Т. 5. Вып. 1. С. 71-91.
62. Лурье А.И. Статика тонкостенных упругих оболочек. М.: Гостехиздат, 1947. 252 с.
63. Лурье А.И. Теория упругости. М.: Наука, 1970. 940 с.
64. Матвеев В.П., Клигман Е.П., Юрлов М.А, Юрлова Н.А. Моделирование и оптимизация динамических характеристик smart-структур с пьезоматериалами. Физическая мезомеханика 15 1 (2012) С.75-85.
65. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань: Таткнигоиздат, 1957. 431 с.
66. Партон В.З, Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел.- М.: Наука,1998. - 470 с.
67. Партон В.З, Перлин П.И. Методы математической теории упругости. .- М.: Наука,1981. - 688 с.
68. Нерубайло Б.В., Ольшанский В.П. Асимптотический метод расчета конической оболочки на действие локальной нагрузки. Изв. РАН. МТТ. 2007. № 3. С. 115-124.
69. Нерубайло Б.В., Смирнов Л.Г. К решению задач упругости конических

- оболочек. Прикладная механика и техническая физика. 2005. Т. 46. № 5. С. 150-165.
70. Новожилов В.В. Краткий очерк развития теории оболочек в СССР. Исследования по теории пластин и оболочек. Изд-во Казанского ун-та. 1970. Вып. VI-VII. С. 3-23.
71. Новожилов В.В. Теория тонких оболочек. Л.: Судпромгиз, 1962. 432 с.
72. Новожилов В.В., Финкельштейн Р. О погрешности гипотез Кирхгофа в теории оболочек. ПММ. 1943. Т. 7. Вып. 5. С. 331-340.
73. Новожилов В.В., Черных К.Ф., Михайловский Е.И. Линейная теория тонких оболочек. Л.: Политехника, 1991. 656 с.
74. Тарлаковский Д.В, Нгуен Тхань Тунг. Антиплоское нестационарное движение электромагнитоупругого полупространства с учетом пьезоэлектрических эффектов. Труды МАИ 2019 №105. <http://trudymai.ru/published.php?ID=104002>.
75. Тарлаковский Д.В, Фам Дык Тхонг. Нестационарные продольные колебания электромагнитоупругого стержня. Экологический вестник научных центров Черноморского экономического сотрудничества. 2020. Т. 17. № 2. С. 57-65. <https://doi.org/10.31429/vestnik-17-2-57-65>.
76. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
77. Улитко А.Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. Киев.: Наукова думка, 1979 – 262с.
78. Уфлянд Я.С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. ПММ. 1948. Т. 12. Вып. 3. С. 287-300.
79. Фирсанов Вал.В. Напряженное состояние «пограничный слой» - краевое кручение цилиндрической оболочки. Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2017. № 6. С. 144 – 153.
80. Фирсанов Вал.В. Об уточнении классической теории прямоугольных пластинок из композиционных материалов. Механика композиционных

- материалов и конструкций. Изд. ИПРИМ РАН. 2002. Т.8. №1. С.28-64.
81. Фирсанов Вал.В., Во А.Х. Исследование продольно подкрепленных цилиндрических оболочек под действием локальной нагрузки по уточненной теории. Труды МАИ. 2018. № 102. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=98866>.
82. Фирсанов Вал.В., Зоан К.Х. Напряженно-деформированное состояние симметричных прямоугольных пластин переменной толщины при температурном воздействии. Тепловые процессы в технике. 2019. Т.11. № 8. С.365-373.
83. Фирсанов Вал.В., Чан Н.Д. Энергетически согласованный подход к исследованию упругих оболочек // Вестник МАИ. 2011. Т. 18. № 1. С. 194-207.
84. Фирсанов Вал.В., Фам В.Т. Напряженное состояние в краевой зоне конической оболочки по уточненной теории. Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 1. С. 64 – 71 (Val.V. Firsanov, V.T. Pham. The Stress State in the Boundary Region of a Conical Shell according to a Refined Theory // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2021. Vol. 50. No.1. pp. 51-57).
85. Фирсанов Вал.В., Нгуен Л.Х., Чан Нгок Доан. Исследование электроупругостного состояния цилиндрических оболочек из пьезоматериалов на основе уточненной теории. Труды МАИ, 2019, № 109. (URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=111376>).
86. Фирсанов Вал.В., Нгуен Л.Х. Напряжено-деформированное состояние произвольных оболочек с учетом термоэлектрического воздействия на основе уточненной теории. Тепловые процессы в технике, 2020.Т.12. №3 С.110-117, DOI: 10.34759/tpt-2020-12-3-110-117.
87. Фирсанов Вал.В., Нгуен Л.Х. Напряженное состояние цилиндрических оболочек под действием произвольных нагрузок с учетом пьезоэффекта. Проблемы прочности и пластичности, Т.82, № 4(2020).С.483-492. DOI:

<https://doi.org/10.32326/1814-9146-2020-82-4-483-492>.

88. Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х. Напряженное состояние композиционных цилиндрических оболочек на основе уточненной теории с учетом пьезоэлектрического эффекта. Проблемы машиностроения и надежности машин, № 4, 2021 С.37-44. DOI: 10.31857/S0235711921040039// The Stress State of Composite Cylindrical Shells Based on Refined Theory with Allowance for the Piezoelectric Effect. Journal of Machinery Manufacture and Reliability, 2021, Vol. 50, No. 4, pp. 312–318. DOI: 10.3103/S1052618821040038.
89. Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х. Напряженно-деформированное состояние цилиндрических оболочек из пьезоматериалов на основе уточненной теории. Международная конференция “Авиация и космонавтика”, МАИ, 2019г. Сборник тезисов докладов. 2019. С. 236.
90. Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х. Электромеханическое состояние цилиндрических оболочек на основе уточненной теории. XLVI Международная молодежная научная конференция “Гагаринские Чтения”, МАИ, 2020г. Сборник тезисов докладов. 2020. С. 914-915.
91. Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х. Напряженно-деформированное состояние цилиндрических оболочек на основе уточненной теории с учетом электрического и температурного воздействия. Материалы международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” имени А.Г. Горшкова, Сборник тезисов докладов. 2020. Том 1 часть 2. С. 218-219.
92. Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х. Расчет многослойных композитных цилиндрических оболочек при температурном нагружении на основе уточненной теории. Материалы международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” имени А.Г. Горшкова, Сборник тезисов докладов. 2021. Том 1. С. 222-223.
93. Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х. Напряженное состояние композиционных

- оболочек с пьезоэлектрическими слоями на основе уточненной теории. Международная конференция “Авиация и космонавтика”, МАИ, 2020г. Сборник тезисов докладов. 2020. С. 691-692.
94. Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х. Электромеханическое состояние композиционных оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта. Международная конференция “Композитные материалы и конструкции”, МАИ, 2020г. Сборник тезисов докладов 2020г. С. 778-779.
95. Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х. Напряженное состояние “погранслоя” композиционных цилиндрических оболочек в задачах электроупругости. XLVII Международная молодежная научная конференция “Гагаринские Чтения”, МАИ, 2021г. Сборник тезисов докладов. С. 842-843.
96. Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х. Напряженно-деформированное состояние многослойных композитных цилиндрических оболочек при температурном нагружении на основе уточненной теории. Материалы международного симпозиума “Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред” имени А.Г. Горшкова, Сборник тезисов докладов. 2021. Том 1. С. 223-225.
97. Фирсанов Вал.В, Нгуен Л.Х. Погранслой и его влияние на прочность композиционных цилиндрических оболочек с учетом пьезоэлектрического эффекта. Материалы XXII международной конференции по вычислительной механике и современным прикладным программным системам ВМСППС2021, Алушта, Крым. Сборник тезисов докладов. С.255-256.
98. Фирсанов Вал.В., Фам В.Т. Напряженно-деформированное состояние конической оболочки переменной толщины на основе трёхмерных уравнений теории упругости. Проблемы прочности и пластичности. 2020. Т. 82. № 2. С. 189-200.
99. Шереметьев М.П., Пелех Б.Л. К построению уточненной теории пластин. Инж. ж. 1964. Т. 4. № 3. С. 504-509

100. Шклярчук Ф.Н, Качемасова Е.И, Тютюнников Н.П. Уравнения для расчета деформаций и колебаний тонкостенных цилиндрических конструкций из композиционных материалов с термоупругими пьезоэлектрическими слоями. Механика композиционных материалов и конструкций. - Изд. ИПРИМ РАН, апрель-июнь 1996г., Т.2, № 2. - С.49-63.
101. A. Alibeigloo. Thermoelastic solution for static deformations of functionally graded cylindrical shell bonded to thin piezoelectric layers. *Composite Structures* 93 (2011) 961-972.
102. Alan Baker and Stuart Dutton. *Composite materials for Aircraft structures* (American Institute of Aeronautics and Astronautics) Donald Kelly 2004 p603.
103. A. Benjeddou. Advances in piezoelectric finite element modeling of adaptive structural elements. *Computers and Structures* 2000 76(1-3) [https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(99\)00151-0](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(99)00151-0).
104. Arshid E and Khorshidvand A. Free vibration analysis of saturated porous FG circular plates integrated with piezoelectric actuators via differential quadrature method. *Thin-Walled Struct* 125 (2018) <https://doi.org/10.1016/j.tws.2018.01.007>.
105. Aghalovyan L.A. and Aghalovyan M.L. Asymptotic solution of the electroelasticity problem for thickness-polarized piezoceramic shells. *J.Appl. Math. Mech.* 79(3) <https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2015.09.009>.
106. Carrera. *Plates and Shells for Smart Structures. Classical and Advanced Theories for Modeling and Analysis* (John Wiley & Sons) 2011 p316.
107. C.-P.Wu, Y.-C. Hung. Asymptotic theory of laminated circular conical shells. *International Journal of Engineering Science* 37 (1999) 977-1005.
108. Claire Ossadzow-David, Maurice Touratier. A multilayered piezoelectric shell theory. *Composites Science and Technology* 64 (2004) 2121-2137.
109. Doan T.N., Van Thom D., Thanh N.T., Van Chuong P., Tho N.C., Ta N.T., Nguyen H.N. Analysis of stress concentration phenomenon of cylinder laminated shells using higher-order shear deformation Quasi-3D theory.

- Composite Structures. 2020. Vol. 232. 111526. Doi: 10.1016/j.compstruct.2019.111526.
110. Diego Amadeu F. Torres and Paulo de Tarso R. Mendonça develops a formulation for laminated plates HSDT-layer wise analytical solution for rectangular piezoelectric laminated plates. *Composite Structures* 92(8) <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2010.02.007>.
111. Firsanov V.V. Study of stress-deformed state of rectangular plates based on nonclassical theory. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*, 2016, vol. 5, no. 6, pp. 515-522.
112. Firsanov V.V. The Stressed State of the “Boundary Layer” Type in Cylindrical Shells Investigated according to a Nonclassical Theory. *Journal of Machinery Manufacture and Reliability*. 2018. Vol. 47. №. 3. Pp. 241-248.
113. Firsanov V.V., Doan T.N. Investigation of the statics and free vibrations of cylindrical shells on the basis of a nonclassical theory. *Composites: Mechanics, Computations, Applications: An International Journal*, 2015. Vol. 6. Issue 2. Pp. 135-166.
114. Firsanov Val.V., Pham Vinh Thien. Research of the Stress-Strain State of Conical Shell Under the Action of Local Load Based on the Non-Classical Theory. *Journal of Mechanical Engineering Research and Developments*, 2020, Vol. 43, No. 4, pp. 24-32.
115. Firsanov Val.V, Nguyen L.H. Stress state analysis of laminated shells with piezoelectric layers based on the refined theory. *Journal of Physics: Conference Series*, Volume 1925/012022, DOI: doi:10.1088/1742-6596/1925/1/012022.
116. Firsanov Val.V, Nguyen L.H. Stress concentration state of piezoelectricity in cylindrical shell based on the non-classical theory. *Structural integrity and life*. Vol.21, No.1, 2021, pp. 53–58.
117. Frithiof I. Niordson. An asymptotic theory for spherical shells. *International Journal of Solids and Structures* 38 (2001) 8375-8388.
118. Green A.E. On the linear theory of thin elastic shells // *Proc. R. Soc.* 1962.

- V.A. 266, №1325. P. 143-160.
119. G.M. Kulikov, S.V. Plotnikova. 3D exact thermoelastic analysis of laminated composite shells via sampling surfaces method. *Composite Structures* 115 (2014) 120-130.
 120. H.S Tzou. *Piezoelectric Shells, Distributed Sensing and Control of Continua* (Springer Science+Business Media, B.V) 1993 p.493.
 121. K. O. Friedrichs and R. F. Dressler. A boundary-layer theory for elastic plates. *Communications on pure and applied mathematics* 1961 14(1) <https://doi.org/10.1002/cpa.3160140102>.
 122. Kant T, Swaminathan K. Analytical solutions for the static analysis of laminated composite and sandwich plates based on a higher order refined theory. *Compos. Struct.* 56(4) [https://doi.org/10.1016/S0263-8223\(02\)00017-X](https://doi.org/10.1016/S0263-8223(02)00017-X).
 123. K.C Le. An asymptotically exact theory of functionally graded piezoelectric shells. *International Journal of Engineering Science* 112 (2017) pp42-62.
 124. Khanh Chau Le, Jeong-Hun Yi. An asymptotically exact theory of smart sandwich shells. *International Journal of Engineering Science* 106 (2016) pp.179-198.
 125. Lin Liao, Wenbin Yu. An electromechanical Reissner–Mindlin model for laminated piezoelectric plates. *Composite Structures* 88 (2009) 394-402.
 126. Mindlin RD. *An introduction to the mathematical theory of vibrations of elastic plates* (World Scientific Publishing), 2006, p212.
 127. Mitchell J.A. and Reddy J N. A study of embedded piezoelectric layers in composite cylinders *J. Appl. Mech. Trans. ASME* 62(1) 1995 <https://doi.org/10.1115/1.2895898>.
 128. Murilo Sartorato, Ricardo de Medeiros, Volnei Tita. A finite element formulation for smart piezoelectric composite shells: Mathematical formulation, computational analysis and experimental evaluation. *Composite Structures* 127 (2015) 185-198.

129. Timoshenko S.P, Voinovsky-Krieger S. Theory of plates and shells (McGrawHill), 1959. p591.
130. Rani Elhajjar and Valeria La Saponara, Anastasia Muliana. Smart Composites. Mechanics and Design (CRC Press) 2013, p430.
131. Reddy J.N. A simple higher-order theory for laminated composite plates ASME J. Appl. Mech. 1984 51(4) 3167719 <https://doi.org/10.1115/1.3167719>.
132. Reddy J., Liu C. A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells. Int J Eng Sci. 1985. Vol. 23. pp. 319-330.
133. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis (2nd ed.). New York: CRC Press, 2004. 831 pp.
134. Reddy J.N. On laminated composite plates with integrated sensors and actuators. Engineering Structures 21 (1999) 568–593.
135. Reiss Edward.L. A theory for the small rotationally symmetric deformations of cylindrical shells. Communications. Pure and Appl. Math. V. XIII. 1960. P. 973.
136. Reissner E. The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates. ASME Journal of Applied Mechanics.1945. Vol. 12. № 2. P. 68–77.
137. Rajeev Kumar and B.K. Mishra. Static and dynamic analysis of smart cylindrical shell. Journal of Finite Elements in Analysis and Design, 2008, 45(1) <https://doi.org/10.1016/j.finel.2008.07.005>.
138. Varadan T.K., Bhaskar K. Bending of laminated orthotropic cylindrical shells - An elasticity approach. Compos. Struct., 1991, vol. 17 (2), pp. 141-156.
139. Vasiliev V.V. and Lurie S.A. On Refined Theories of Beams, Plates and Shells. Journal of Composite Materials. 1992 26(4) <https://doi.org/10.1177/002199839202600405>.
140. Santosh Kapuria and S. Sengupta. Three-dimensional solution for simply-supported piezoelectric cylindrical shell for axisymmetric load. Computer methods in applied mechanics and engineering 140(1-2) [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01075-4](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01075-4).

141. Salvatore Brischetto. Exact three-dimensional static analysis of single- and multi-layered plates and shells. *Composites Part B* (2017), DOI: 10.1016/j.compositesb.2017.03.010.
142. Wenbin Yu, Dewey H. Hodges , Vitali V. Volovoi. Asymptotic generalization of Reissner–Mindlin theory: accurate three-dimensional recovery for composite shells. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191 (2002) 5087–5109.