

Научная статья

УДК 517.977:519.7

URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180687>

## **ПРИБЛИЖЕННЫЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПУЧКАМИ ТРАЕКТОРИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИСТЕМ С НЕПОЛНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ**

**Андрей Владимирович Пантелеев<sup>1✉</sup>, Мария Магдалина Сергеевна Каранэ<sup>2</sup>**

<sup>1,2</sup>Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия

<sup>1</sup>[avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru) ✉

<sup>2</sup>[mm\\_karane@mail.ru](mailto:mm_karane@mail.ru)

***Аннотация.*** Рассмотрена задача поиска приближенного оптимального управления детерминированными системами управления с неполной обратной связью по измеряемым переменным, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями. Начальные условия заданы в виде множества начальных состояний, поэтому рассматривается проблема управления пучком траекторий, порожденным этим множеством и используемым законом управления. Для описания множества начальных состояний, а также положения этого пучка с течением времени используются гладкие финитные функции, значения которых характеризуют плотность следов траекторий внутри пучка. Сформулированы и доказаны достаточные условия  $\varepsilon$ -оптимальности, получены выражения для нахождения априорной оценки близости искомого управления к оптимальному и предложен

способ параметризации задачи удовлетворения достаточных условий на основе спектрального представления неизвестных вспомогательных функций. Приведен пошаговый алгоритм поиска приближенного оптимального управления с использованием достаточных условий и мультиагентных алгоритмов параметрической оптимизации. На основе предложенного подхода разработано программное обеспечение, с помощью которого выполнен анализ эффективности этого подхода. Решены два модельных примера, в которых получены оценки близости законов управления к оптимальному решению и приведены результаты анализа поведения соответствующих пучков траекторий.

**Ключевые слова:** оптимальное управление, пучки траекторий, достаточные условия  $\varepsilon$  – оптимальности, мультиагентные алгоритмы оптимизации

**Для цитирования:** Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Приближенный синтез оптимального управления пучками траекторий непрерывных детерминированных систем с неполной обратной связью // Труды МАИ. 2024. № 136. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=180687>

Original article

## APPROXIMATE SYNTHESIS OF OPTIMAL CONTROL OF TRAJECTORY PENCILS OF CONTINUOUS DETERMINISTIC SYSTEMS WITH INCOMPLETE FEEDBACK

Andrei V. Panteleev<sup>1✉</sup>, Maria Magdalena S. Karane<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

<sup>1</sup>[avpanteleev@inbox.ru](mailto:avpanteleev@inbox.ru)✉

<sup>2</sup>[mm\\_karane@mail.ru](mailto:mm_karane@mail.ru)

**Abstract.** The problem of finding an approximate optimal control for deterministic control systems with incomplete feedback on measured variables described by ordinary differential equations is considered. The initial conditions are given in the form of a set of initial states, so the problem of controlling a pencil of trajectories generated by this set and the control law used is considered. To describe the set of initial states, as well as the position of this pencil over time, smooth finite functions are used, the values of which characterize the density of traces of trajectories inside the pencil.

This task is relevant because it allows you to cover a wider class of applied problems. The uncertainty of setting the initial state of the system or the lack of complete information about the state of the system is often found in practice, for example, due to a malfunction of measuring devices or an error in the measurements obtained.

Sufficient conditions for  $\varepsilon$ -optimality are formulated and proven, expressions are obtained for finding an a priori estimate of the proximity of the desired control to the optimal one, and a method for parameterizing the problem of satisfying sufficient conditions based on the spectral representation of unknown basis functions is proposed. A step-by-step algorithm for searching for approximate optimal control using sufficient conditions and multi-agent optimization algorithms is presented. Based on the proposed approach, software to analyze the effectiveness of this approach has been developed. Two model examples are solved, in which estimates of the proximity of the control laws to the optimal solution are obtained and the results of an analysis of the behavior of the corresponding pencils of trajectories are presented.

**Keywords:** optimal control, trajectory pencils, sufficient  $\varepsilon$  – optimality conditions, multi-agent optimization algorithms

**For citation:** Panteleev A.V., Karane M.M.S. Approximate synthesis of optimal control of trajectory pencils of continuous deterministic systems with incomplete feedback. *Trudy MAI*, 2024, no. 136. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=180687>

## Введение

В практике решения задач управления сложными авиационно-космическими системами возникает необходимость учета неопределенности задания начальных условий движения в различных режимах полета, возникающая в силу наличия разброса параметров системы из-за погрешностей изготовления, внешних факторов, неточностей реализации управляющих воздействий на предыдущих этапах. Кроме того, требуется учитывать наличие доступной информации о параметрах движения, получаемой с измерительной системы. Как правило, не о всех координатах объекта управления имеется полная и точная информация. Как следствие, актуальной задачей является разработка методов и алгоритмов синтеза систем с неполной обратной связью по вектору состояния, учитывающих дополнительно степень неопределенности задания начальных условий.

В статье предлагается подход к нахождению оптимального управления нелинейными детерминированными динамическими системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями, в условиях неполной информации. В силу наличия неопределенности начального состояния системы

рассматривается поведение всего множества траекторий, исходящих из заданного множества возможных начальных условий, т.е. пучка (ансамбля) траекторий.

Общая теория управления пучками траекторий линейных динамических систем представлена в [1]. Для описания поведения множества траекторий динамической системы в [2] использован метод эллипсоидов. В [3–12] для описания пучков траекторий используется уравнение Лиувилля (уравнение переноса). При этом в [3,4] получены различные необходимые и достаточные условия оптимальности управления пучками траекторий непрерывных динамических систем. Предложены численные методы решения задач управления пучками заряженных частиц. В [5–8] исследованы задачи управляемости решения уравнения Лиувилля для линейных систем, оценивания состояния, аппроксимации областей асимптотической сходимости к положению равновесия. В работах [5, 9–12] уравнение Лиувилля рассматривается как частный случай более общего уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова, описывающего эволюцию плотности вероятности вектора состояния нелинейной стохастической системы, описываемой стохастическим дифференциальным уравнением. Уравнение Лиувилля получается при предположении об отсутствии случайного внешнего воздействия на динамическую систему. В [11,12] сформулированы и доказаны достаточные условия оптимальности управления нелинейными стохастическими системами, а также получены соотношения для его определения. В [13–16] получены различные необходимые и достаточные условия управления пучками траекторий непрерывно-дискретных и переключаемых систем. В [17–20] для решения задач поиска оптимального

управления пучками траекторий применялась идея параметризации закона управления и решения полученной параметрической задачи конечномерной оптимизации одним или несколькими метаэвристическими алгоритмами глобальной оптимизации [18,20]. По результатам их исследования выявлено, что эти алгоритмы способны находить рациональное решение задачи оптимизации за приемлемое время. Решение задач параметрической оптимизации является востребованным при исследовании различных прикладных проблем проектирования авиационно-космической техники [21–23]. О достаточном качестве синтезируемых законов управления можно судить по результатам математического моделирования, т.е. анализа полученных траекторий пучка и достигнутой величины функционала качества управления, что, как правило, требует значительных вычислительных затрат.

Решение задач управления пучками с помощью применения необходимых и достаточных условий оптимальности требует разработки соответствующих вычислительных процедур, главной проблемой реализации которых являются высокая размерность вектора состояния и обеспечение сходимости к оптимальному или подозрительному на оптимальность результату. При использовании прямых параметрических методов оптимизации основной задачей является выбор структуры искомого управления в некотором классе функций и числа подбираемых параметров.

В статье предлагается альтернативный подход к синтезу управления с неполной обратной связью на основе вычисления априорных оценок близости синтезируемого управления к оптимальному и их минимизации с помощью применения мультиагентных алгоритмов глобальной оптимизации, входящих в группу метаэвристических методов. Даны определения  $\varepsilon$ -оптимальности

управления пучком траекторий с неполной обратной связью по величине функционала качества для заданного множества начальных состояний, а также закона управления, порождающего управления с неполной обратной связью для различных множеств начальных состояний. Сформулированы и доказаны новые достаточные условия  $\varepsilon$ -оптимальности искомого управления, получены выражения для верхних априорных оценок близости приближенных решений к оптимальным. Предложен алгоритм синтеза  $\varepsilon$ -оптимального управления на основе задания вспомогательных функций в виде разложений по элементам базисных систем функций с неизвестными коэффициентами и применения мультиагентных алгоритмов параметрической минимизации величины априорных оценок. На основе предложенного алгоритма разработано программное обеспечение и решены два модельных примера, демонстрирующих их эффективность.

Описанный подход развивает идею нахождения верхних оценок близости искомого управления к оптимальному для детерминированных динамических систем, описанную в [24–26], а также для стохастических систем [27]. Основой для получения таких оценок и доказательства достаточных условий служит принцип расширения [24,25]. В качестве аппарата для поиска вспомогательных функций, используемых в принципе расширения, применяется спектральная форма описания систем управления. Она широко используется в различных приложениях для решения задач анализа и синтеза сложных технических систем [27–30]. В ее основе лежит идея представления функций многих переменных в виде разложений по известным системам базисных функций. Тем самым задача подбора наилучшей вспомогательной функции в принципе расширения сводится к проблеме нахождения

коэффициентов разложения, которые находятся в результате применения мультиагентных алгоритмов оптимизации.

### Постановка задачи

Поведение модели объекта управления описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), \quad (1)$$

где  $x$  – вектор состояния системы,  $x = (x^1, x^2)^T \in R^n$ ,  $x^1 = (x_1, \dots, x_m)^T$ ,  $x^2 = (x_{m+1}, \dots, x_n)^T$ ,  $0 \leq m \leq n$ ;  $u$  – вектор управления,  $u \in U \subseteq R^q$ ,  $U$  – некоторое заданное множество допустимых значений управления,  $t \in T = [t_0, t_f]$ ,  $T$  – промежуток времени функционирования системы, моменты времени  $t_0$  и  $t_f$  заданы;  $f(t, x, u) = (f_1(t, x, u), \dots, f_n(t, x, u))^T$  – непрерывно-дифференцируемая вектор-функция.

Предполагается, что о компонентах вектора  $x^1 \in R^m$  текущая информация известна, а о компонентах вектора  $x^2 \in R^{n-m}$  отсутствует. Обозначим:  $B = R^n$ ,  $B_1 = R^m$ ,  $B_2 = R^{n-m}$ ,  $Q = (t_0, t_f) \times R^n$ ,  $Q' = [t_0, t_f] \times R^n$ .

Начальные условия заданы компактным множеством  $\Omega$  положительной меры с кусочно-гладкой границей:

$$x(t_0) = x_0 \in \Omega \subset R^n, \quad (2)$$

где множество  $\Omega$  характеризует неопределенность задания начальных условий.

Предполагается, что при управлении используется информация о времени  $t$  и о части координат вектора состояния  $x$  (без ограничения общности считается, что



это первые  $m$  координат). Таким образом, о компонентах вектора  $x^1 \in R^m$  известна текущая информация, а о компонентах вектора  $x^2 \in R^{n-m}$  она отсутствует, при этом  $x = (x^1, x^2)^T \in R^n$ ,  $0 \leq m \leq n$ .

Таким образом, управление, применяемое в каждый момент времени  $t \in T$ , имеет вид управления с неполной обратной связью  $u(t) = u(t, x^1(t))$ . Число  $m$ ,  $0 \leq m \leq n$ , определяется условиями информированности. При  $m = n$  имеется информация о всех компонентах вектора состояния, т.е. система будет системой с полной обратной связью, а при  $m = 0$  – системой, разомкнутой по состоянию. В последнем случае рассматривается так называемое программное управление  $u(t)$ .

Множество допустимых управлений  $U_m$  образуют такие функции  $u(t, x^1)$ , что  $\forall t \in T$  управление  $u(t) = u(t, x^1(t)) \in U$  кусочно-непрерывно, а функция  $f(t, x, u(t, x^1))$  такова, что решение уравнения (1) с начальным условием (2) существует и единственно.

Каждому допустимому управлению  $u(t, x^1) \in U_m$  и множеству  $\Omega$  поставим в соответствие пучок (ансамбль) траекторий уравнения (1) [1]:

$$X(t, u(t, x^1)) = \bigcup \{x(t, u(t, x^1(t)), x(t_0)) \mid x(t_0) \in \Omega\}, t \in T, \quad (3)$$

т.е. объединение решений уравнения (1) по всем возможным начальным состояниям (2). Пучок траекторий порождается множеством  $\Omega$  и управлением  $u(t, x^1) \in U_m$ .

Для описания начальных условий предлагается использовать гладкие финитные функции  $p_0(x) \in C^1(B)$ , удовлетворяющие условиям  $p_0(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$ ,  $p_0(x) = 0 \quad \forall x \notin \Omega$ . Описанный класс функций обозначим  $P$ .

Функция  $p_0(x)$  отражает наличие априорной информации о распределении начальных состояний на множестве  $\Omega$ .

В качестве характеристики текущего положения пучка траекторий можно использовать функцию  $p(t,x) \in C^{1,1}$ , удовлетворяющую уравнению Лиувилля (уравнению переноса) [3,4,11,12]

$$\frac{\partial p(t,x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t,x,\mathbf{u}(t,x^1)) p(t,x)] = A^{u(\cdot)}[p(t,x)], \quad \forall (t,x) \in Q \quad (4)$$

с начальным условием

$$p(t_0,x) = p_0(x) \quad \forall x \in B, \quad (5)$$

где  $A^{u(\cdot)}[\cdot]$  – дифференциальный оператор. В каждый момент времени  $t$  носитель функции  $p(t,x)$  будет описывать положение сечения  $\Omega_{t,u}$  пучка в пространстве, а величина функции – плотность следов траекторий, т.е.  $p(t,x) = 0 \quad \forall x \notin \Omega_{t,u}$ .

Обозначим через  $\mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))$  множество пар  $d_m = (p(t,x), \mathbf{u}(t,x^1))$ , где функции  $p(t,x) \in C^{1,1}(Q)$ ,  $\mathbf{u}(t,x^1) \in \mathbf{U}_m$  и удовлетворяют уравнению (4) с начальным условием (5).

Определим на множестве  $\mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))$  функционал качества управления

$$J(d_m) = \int_{t_0}^{t_f} \int_B f^0(t, p(t,x), \mathbf{u}(t,x^1)) dx dt + F(p(t_f, x)), \quad (6)$$

где  $f^0(t, p, u): T \times R_+ \times U \rightarrow R$ ,  $F(p(x)): P \rightarrow R$  – заданные непрерывные функция и функционал,  $R_+ = [0, \infty)$ ,  $p(x) = p(t, x)$  при фиксированном  $t$ .

Далее рассматриваются две задачи. В первой задаче функция  $p_0(x)$  считается заданной. Во второй – решение ищется сразу для всех допустимых функций  $p_0(x) \in P$ .

**Задача 1.** Требуется найти такой элемент  $d_m^* = (p^*(t, x), u^*(t, x^1)) \in \mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))$ , что

$$J(d_m^*) = \min_{d_m \in \mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))} J(d_m). \quad (7)$$

Одновременно рассмотрим более общую задачу нахождения законов управления вида  $u^*(t, x^1; p(x)): T \times B_1 \times P \rightarrow U$ , являющихся функциями от  $t, x^1$  и функционалами от функции  $p(x)$ . Предполагается, что каждый из них (при фиксированном  $m$ ) для заданной функции  $p_0(x)$  порождает управление  $u^*(t, x^1) \in U_m$ , т.е. если имеется решение  $p^*(t, x)$  уравнения (4) совместно с  $u = u^*(t, x^1; p(x))$  для произвольной функции  $p_0(x) \in P$ , то  $u^*(t, x^1; p^*(t, x)) = u^*(t, x^1)$ .

**Задача 2.** Требуется найти такой закон управления  $u^*(t, x^1; p(x))$ , что

$$J(p^*(t, x), u^*(t, x^1; p^*(t, x))) = \min_{d_m \in \mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))} J(d_m) \quad \forall p_0(x) \in P. \quad (8)$$

Таким образом, проведена редукция исходной задачи управления пучком траекторий к задаче управления решением уравнения с частными производными (4). Здесь роль новой модели объекта управления играет уравнение (4), а состояние описывается функцией  $p(t, x)$ .

### **З а м е ч а н и я.**

1. Задача 2 охватывает проблему поиска  $(n + 1)$ -го закона управления, каждый из которых порождает оптимальные управления в соответствующем классе функций,

определяемом числом  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ), т.е. числом используемых в управлении компонент вектора состояния.

2. Предполагается, что минимум в (7), (8) и оптимальные законы управления вида  $\mathbf{u}^*(t, x^1; p(x))$  существуют. При невыполнении этого предположения постановка задачи может быть сформулирована в терминах минимизирующих последовательностей [24,25].

3. При менее жестких ограничениях на правые части уравнения (1) решение уравнения (4) следует понимать в обобщенном смысле.

4. С целью уменьшения громоздкости обозначений множество  $D_m(t_0, p_0(x))$  будем обозначать  $D_m$ .

### Частный случай

Рассмотрим частный случай функционала (6), когда

$$f^0(t, p(t, x), \mathbf{u}(t, x^1)) = f^0(t, x, \mathbf{u}(t, x^1))p(t, x), \quad F(p(t_f, x)) = \int_B F(x)p(t_f, x)dx, \quad (9)$$

где  $f^0(t, x, u), F(x)$  – заданные непрерывно-дифференцируемые функции.

В этом случае можно определить множество допустимых процессов  $D(t_0, x_0)$  как множество пар  $d = (x(\cdot), u(\cdot))$ , включающих траекторию  $x(\cdot)$  и кусочно-непрерывное допустимое управление  $u(\cdot)$ , где  $\forall t \in T \quad u(t) \in U$ , удовлетворяющих уравнению состояния (1) и начальному условию (2).

На множестве  $D(t_0, x_0)$  определим функционал качества управления отдельной траекторией

$$I(x_0, d) = \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t), u(t)) dt + F(x(t_f)), \quad (10)$$

где  $f^0(t, x, u)$ ,  $F(x)$  – заданные непрерывные функции.

Качество управления пучком траекторий предлагается оценивать величиной функционала

$$J[\mathbf{u}(t, x^1)] = \int_{\Omega} I(x_0, d) p_0(x) dx_0. \quad (11)$$

Можно показать, что в этом случае функционал (11) можно записать в форме

$$J(d_m) = \int_{t_0}^{t_f} \int_B f^0(t, x, \mathbf{u}(t, x^1)) p(t, x) dx dt + \int_B F(x) p(t_f, x) dx. \quad (12)$$

Действительно, пусть  $q(t, x) = x(t_0)$  – полная совокупность первых интегралов уравнения (4) при фиксированном управлении  $\mathbf{u}(t, x^1)$  и функции  $q_i(t, x)$  непрерывно дифференцируемы по всем аргументам почти при всех  $t \in T$ . Тогда можно определить функцию  $x = x(t, t_0, x(t_0))$ ,  $x(t_0, t_0, x(t_0)) = x(t_0) = x_0$ , являющуюся общим решением уравнения (1). Преобразуем функционал (11) с учетом (10):

$$\begin{aligned} J[\mathbf{u}(t, x^1)] &= \int_{\Omega} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t, t_0, x_0), u(t)) dt + F(x(t_f, t_0, x_0)) \right\} p_0(x_0) dx_0 = \\ &= \int_{\Omega} \left\{ \int_{t_0}^{t_f} f^0(t, x(t, t_0, x_0), u(t)) dt \right\} p_0(x_0) dx_0 + \int_{\Omega} F(x(t_f, t_0, x_0)) p_0(x_0) dx_0. \end{aligned}$$

Поменяем порядок интегрирования в первом слагаемом и сделаем замену переменных в интеграле по  $x_0$ :

$$J[\mathbf{u}(t, x^1)] = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega_{t,u}} f^0(t, x(t, t_0, q(t, x)), \mathbf{u}(t, x^1(t))) p_0(q(t, x)) \left| \det \frac{\partial x_0}{\partial x} \right| dx dt + \\ + \int_{\Omega_{t_f, u}} F(x(t_f, t_0, q(t_f, x))) p_0(q(t_f, x)) \left| \det \frac{\partial x_0}{\partial x} \right| dx.$$

По формуле Лиувилля [3,4] имеем

$$\det \frac{\partial x_0}{\partial x} = \exp \left\{ - \int_{t_0}^{t_f} \text{tr} \frac{\partial f(\tau, x(\tau), \mathbf{u}(\tau, x^1(\tau)))}{\partial x} d\tau \right\}.$$

Функция  $p(t, x) = p_0(q(t, x)) \exp \left\{ - \int_{t_0}^{t_f} \text{tr} \frac{\partial f(\tau, x(\tau), \mathbf{u}(\tau, x^1(\tau)))}{\partial x} d\tau \right\}$  удовлетворяет

уравнению (4), что можно проверить непосредственно прямой подстановкой. Тогда окончательно получаем

$$J[\mathbf{u}(t, x^1)] = \int_{t_0}^{t_f} \int_{\Omega_{t,u}} f^0(t, x, \mathbf{u}(t, x^1)) p(t, x) dx dt + \int_{\Omega_{t_f, u}} F(x) p(t_f, x) dx = \\ = \int_{t_0}^{t_f} \int_B f^0(t, x, \mathbf{u}(t, x^1)) p(t, x) dx dt + \int_B F(x) p(t_f, x) dx.$$

В последнем равенстве учтено, что функция  $p(t, x)$  имеет компактный носитель  $\Omega_{t,u}$ .

Рассмотрим проблемы поиска приближенного решения задач 1 и 2.

**Задача 3.** Требуется найти такой элемент  $d_m^\varepsilon = (p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) \in \mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))$ ,

что

$$|J(d_m^\varepsilon) - J(d_m^*)| \leq \varepsilon, \quad (13)$$

где  $\varepsilon$  – число,  $d_m^* = (p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1)) \in \mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))$ ,  $J(d_m^*) = \min_{d_m \in \mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))} J(d_m)$ .

Управление  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$  называется  $\varepsilon$ -оптимальным.

**Задача 4.** Требуется найти такой закон управления  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1; p(x))$ , что

$$|J(d_m^\varepsilon) - J(d_m^*)| \leq \varepsilon \quad \forall p_0(x) \in P, \quad (14)$$

где  $\varepsilon$  – число,  $d_m^\varepsilon = (p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1) = \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1; p^\varepsilon(t, x))) \in \mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))$ ,

$d_m^* = (p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1) = \mathbf{u}^*(t, x^1; p^*(t, x))) \in \mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))$ . Функция  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1; p(x))$  называется  $\varepsilon$ –оптимальным законом управления на множестве  $P$ .

### Достаточные условия $\varepsilon$ –оптимальности

В данном разделе изложены достаточные условия  $\varepsilon$ –оптимальности управления в задачах (7) и (8), при формулировке которых используется понятие вариационной производной. Приведем краткие сведения о вариационных производных [12].

Пусть дана функция  $S(t, p(\cdot)): T \times C^1(B) \rightarrow R$ , которая является функцией аргумента  $t$  и функционалом от функции  $p(\cdot)$ . Рассмотрим ее значение на функции  $p(\cdot) + \delta p(\cdot)$ , где вариация  $\delta p(\cdot)$  равна нулю всюду, кроме некоторой окрестности  $\Delta(x)$  точки  $x$  множества  $B \subset R^n$ .

Вариационной производной функционала  $S(t, p(\cdot))$  по функции  $p(\cdot)$  в точке  $x$  называется предел:

$$\frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)} = \lim_{\substack{\int_{\Delta(x)} \delta p(\xi) d\xi \rightarrow 0 \\ \text{mes } \Delta(x) \rightarrow 0}} \frac{S(t, p(\cdot) + \delta p(\cdot)) - S(t, p(\cdot))}{\int_{\Delta(x)} \delta p(\xi) d\xi},$$

если он существует, не зависит от вида  $\delta p(\cdot)$ , от закона, по которому  $\int_{\Delta(x)} \delta p(\xi) d\xi$  стремится к нулю, и способа стягивания к нулю  $\text{mes } \Delta(x)$ . Вариационная производная является функционалом от  $p(\cdot)$  и функцией от  $t, x$ .

В частности, если  $S(t, p(\cdot)) = \int_B a(t, \xi) p(\xi) d\xi$  – линейный функционал, где  $a(t, \xi)$

– известная функция, то

$$\frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)} = a(t, x). \quad (15)$$

Рассмотрим сначала задачу 1 нахождения оптимальной пары для заданной функции  $p_0(x)$ , записанную в форме (7).

Введем в рассмотрение множество  $\Pi$  функций  $S(t, p(\cdot)): T' \times C^1(B) \rightarrow R$ , непрерывных на  $T' \times C^1(B)$ , непрерывно дифференцируемых по  $t$  и имеющих непрерывную вариационную (функциональную) производную по аргументу  $p(x)$ , причем  $\frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)} \in C^{1,1}(Q)$  и непрерывна на  $Q'$ , а также конструкции

$$R(t, p(x), u) = \frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \int_B \left\{ A_*^u \left[ \frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)} \right] p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx, \quad (16)$$

$$G(t_f, p(x)) = S(t_f, p(x)) + F(p(x)), \quad (17)$$

где  $A_*^u [\varphi(t, x)] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) \quad \forall \varphi(t, x) \in C^{1,1}(Q)$  и  $A_*^{u^{(\cdot)}} [\varphi(t, x)] = A_*^u [\varphi(t, x)]$

при  $u = u(t, x^1)$ .

Заметим, что для каждого управления  $u(t, x^1)$  из множества допустимых и соответствующего решения  $p(t, x)$  уравнения (4)  $\forall \varphi(t, x) \in C^{1,1}(Q)$  выполняется соотношение

$$\int_B A^{u^{(\cdot)}} [p(t, x)] \varphi(t, x) dx = \int_B A_*^{u^{(\cdot)}} [\varphi(t, x)] p(t, x) dx, \quad (18)$$

связывающее прямой  $A^{u^{(\cdot)}} [\cdot]$  и сопряженный  $A_*^{u^{(\cdot)}} [\cdot]$  дифференциальные операторы.



Предположим, что при фиксированном  $m$  ( $0 \leq m \leq n$ ) функции  $R(t, p(x), u)$ ,  $G(t_f, p(x))$  в (16), (17) достигают экстремальных значений:

$$r_m(t) = \max_{p(x) \in P} \left\{ \frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \int_{B_1} \left[ \max_{u \in U} \int_{B_2} \left\{ A_*^u \left[ \frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)} \right] p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx^2 \right] dx^1 \right\}, \quad (19)$$

$$g = \min_{p(x) \in P} G(t_f, p(x)), \quad (20)$$

где функция  $r_m(t)$  – кусочно-непрерывна на  $T$ .

Пусть имеется пара  $d_m^* = (p^*(t, x), u^*(t, x^1)) \in D_m$ .

**Теорема 1** (достаточные условия оптимальности в задаче 1) [11,12]. *Если существует такая функция  $S(t, p(\cdot)) \in \Pi$ , что пара  $d_m^* \in D_m$  удовлетворяет следующим условиям:*

- 1)  $R(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1)) = r_m(t)$  почти всюду на  $T$ ;
- 2)  $G(t_f, p^*(t_f, x)) = g$ ,

то справедливо условие (7).

Функцию  $r_m(t)$  и величину  $g$  можно без ограничения общности положить равными нулю. При этом можно вычислить минимальное значение функционала (6) по формуле

$$\min_{d_m \in D_m} J(d_m) = -S(t_0, p_0(x)). \quad (21)$$

Рассмотрим решение задачи 2 нахождения оптимальных законов управления вида  $u^*(t, x^1; p(x))$ . Пусть в условиях (19), (20) отсутствуют операции максимизации и минимизации по  $p(x)$  соответственно, а также имеется такая функция

$S(t, p(\cdot)) \in \Pi$ , при которой правые части в (19), (20) при этих предположениях не зависят от  $p(x) \in P$ .

Тогда

$$1) R(t, p(x), \mathbf{u}^*(t, x^1; p(x))) = r_m(t) \quad \forall (t, p(x)) \in T \times P;$$

$$2) G(t_f, p(x)) = g \quad \forall p(x) \in P,$$

где  $\mathbf{u}^*(t, x^1; p(x))$  – результат максимизации по управлению в (19).

Как следует из теоремы 1, можно положить  $r_m(t) \equiv 0$ ,  $g = 0$ , тогда из 1) и 2) следуют уравнение и краевое условие:

$$\frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} + \int_{B_1} \left[ \max_{u \in U} \int_{B_2} \left\{ A_*^u \left[ \frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)} \right] p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx^2 \right] dx^1 = 0 \quad (22)$$

$$\forall (t, p(x)) \in T \times P,$$

$$S(t_f, p(x)) = -F(p(x)) \quad \forall p(x) \in P. \quad (23)$$

**Теорема 2** (достаточные условия оптимальности в задаче 2) [11,12]. *Если существуют функция  $S(t, p(\cdot)) \in \Pi$  и управление  $\mathbf{u}^*(t, x^1; p(x))$ , удовлетворяющие (22), (23), то выполняется условие (8):*

$$J(p_0(x), p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1; p^*(t, x))) = \min_{d_m \in \mathbf{D}_m} J(p_0(x), d_m) \quad \forall p_0(x) \in P.$$

Соотношения (22), (23) определяют первый способ нахождения оптимального управления в задаче 1. При доказательстве последующих утверждений используются конструкции, используемые в теоремах 1 и 2, а также логика использования принципа расширения [24,25].

Рассмотрим решение задачи 3.

Пусть имеется пара  $d_m^\varepsilon = (p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) \in \mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))$ .

**Теорема 3** (достаточные условия  $\varepsilon$ -оптимальности в задаче (13)). *Если существуют такая функция  $S(t, p(\cdot)) \in \Pi$ , число  $\varepsilon_2$ , непрерывная на  $T$  функция  $\varepsilon_1(t)$ , что:*

$$1. \left| r_m(t) - R(t, p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) \right| \leq \varepsilon_1(t) \quad \forall t \in T;$$

$$2. \left| G(t_f, p^\varepsilon(t_f, x)) - g \right| \leq \varepsilon_2,$$

то управление  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$  является  $\varepsilon$ -оптимальным при  $\varepsilon = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t) dt + \varepsilon_2$ .

Доказательство. С учетом (16), (17) условия 1 и 2 имеют вид

$$\left| r_m(t) - \frac{\partial S(t, p^\varepsilon(t, x))}{\partial t} + \int_B \left\{ A_*^{\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)} \left[ \frac{\delta S(t, p^\varepsilon(t, x))}{\delta p(x)} \right] p^\varepsilon(t, x) - f^0(t, p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) \right\} dx \right| \leq \varepsilon_1(t) \quad \forall t \in T, \quad (24)$$

$$\left| S(t_f, p^\varepsilon(t_f, x)) + F(p^\varepsilon(t_f, x)) - g \right| \leq \varepsilon_2.$$

Применим принцип расширения [24,25]. Определим множество  $V$  пар  $d_m = (p(t, x), \mathbf{u}(t, x^1))$ , где выполняются условия: элементы пар по сравнению с входящими в  $\mathbf{D}_m$  необязательно связаны уравнением (4):  $p(t_0, x) = p_0(x) \in P$ ; допускаются разрывы первого рода функций  $p(t, x)$ ,  $\mathbf{u}(t, x^1)$  по  $t \quad \forall x \in B$ . Таким образом, множество  $\mathbf{D}_m \subset V$  и расширение построено.

Доопределение функционала  $J$  на множестве  $V$  производится с помощью задания функции  $S(t, p(\cdot)) \in \Pi$ . На множестве  $V$  определим функционал

$$L(d_m) = G(t_f, p(t_f, x)) - \int_{t_0}^{t_f} R(t, p(t, x), \mathbf{u}(t, x^1)) dt - S(t_0, p_0(x)). \quad (25)$$

Рассмотрим функционал (25) на множестве  $D_m \subset V$ , где между функциями  $p(t, x)$ ,  $\mathbf{u}(t, x^1)$  существует дифференциальная связь (4).

Подставляя (16), (17) в (25) с учетом (18), (4),(5) имеем

$$\begin{aligned} L(d_m) &= S(t_f, p(t_f, x)) + F(p(t_f, x)) - \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial S(t, p(t, x))}{\partial t} + \int_B \left[ \frac{\delta S(t, p(t, x))}{\delta p(x)} \times A^{u^{(\cdot)}}[p(t, x)] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - f^0(t, p(t, x), \mathbf{u}(t, x^1)) \right] dx \right\} dt - S(t_0, p_0(x)) = \\ &= S(t_f, p(t_f, x)) + F(p(t_f, x)) - \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{\partial S(t, p(t, x))}{\partial t} + \int_B \left[ \frac{\delta S(t, p(t, x))}{\delta p(x)} \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} - f^0(t, p(t, x), \mathbf{u}(t, x^1)) \right] dx \right\} dt - S(t_0, p_0(x)). \end{aligned}$$

Используя формулу вычисления полной производной функции  $S(t, p(t, x))$  по аргументу  $t$ :

$$\frac{dS(t, p(t, x))}{dt} = \frac{\partial S(t, p(t, x))}{\partial t} + \int_B \frac{\delta S(t, p(t, x))}{\delta p(x)} \frac{\partial p(t, x)}{\partial t} dx$$

и интегрируя по времени с учетом равенства  $p(t_0, x) = p_0(x)$ , получаем

$$\begin{aligned} L(d_m) &= S(t_f, p(t_f, x)) + F(p(t_f, x)) - \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{dS(t, p(t, x))}{dt} - \right. \\ &\quad \left. - \int_B f^0(t, p(t, x), \mathbf{u}(t, x^1)) dx \right\} dt - S(t_0, p_0(x)) = S(t_f, p(t_f, x)) + F(p(t_f, x)) - \\ &\quad - S(t_f, p(t_f, x)) + S(t_0, p_0(x)) + \int_{t_0}^{t_f} \int_B f^0(t, p(t, x), \mathbf{u}(t, x^1)) dx dt - S(t_0, p_0(x)) \equiv J(d_m). \end{aligned}$$

Таким образом, на множестве  $\mathbf{D}_m$  функционалы  $L$  и  $J$  совпадают.

Поведение функционала  $L$  на множестве  $V \setminus \mathbf{D}_m$  полностью определяется видом функции  $S(t, p(\cdot)) \in \Pi$ , т.е. задача удачного доопределения функционала  $J$  зависит от ее выбора.

Пусть имеется функция  $S(t, p(\cdot)) \in \Pi$ . Рассмотрим задачу поиска минимума функционала (25) на множестве  $V$ . Третье слагаемое при имеющихся функциях  $p_0(x)$  и  $S(t, p(\cdot)) \in \Pi$  может быть вычислено. Экстремум первых двух слагаемых с учетом свойств функций, образующих пары  $d_m \in V$ , может определяться по отдельности. Минимум первого слагаемого определяется выражением (20). С учетом свойств пар  $d_m \in V$  имеем

$$\max_{d_m \in V} \int_{t_0}^{t_f} R(t, p(t, x), \mathbf{u}(t, x^1)) dt \leq \int_{t_0}^{t_f} r_m(t) dt.$$

Отсюда и из (19), (20) находим

$$\min_{d_m \in V} L(d_m) \geq g - \int_{t_0}^{t_f} r_m(t) dt - S(t_0, p_0(x)). \quad (26)$$

Если имеется пара  $d_m^* = (p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1)) \in \mathbf{D}_m$ , удовлетворяющая условиям 1,2 теоремы 1, то с учетом (19), (20), (25), (26)  $L(d_m^*) \leq L(d_m) \quad \forall d_m \in V$ . Так как

$d_m^* \in \mathbf{D}_m \subset V$ , то  $L(d_m^*) \leq L(d_m) \quad \forall d_m \in \mathbf{D}_m$ . Как доказано выше,

$L(d_m) \equiv J(d_m) \quad \forall d_m \in \mathbf{D}_m$  при имеющейся функции  $S(t, p(\cdot)) \in \Pi$ . Поэтому

$J(d_m^*) \leq J(d_m) \quad \forall d_m \in \mathbf{D}_m$ , что соответствует определению экстремума функционала

(6). При этом  $L(d_m^*) = \min_{d_m \in \mathbf{D}_m} J(d_m) = J(d_m^*)$ .

Пусть имеется пара  $d_m^\varepsilon = (p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) \in \mathbf{D}_m$ . С учетом (26) и того, что на множестве  $\mathbf{D}_m$  справедливо  $L(d_m) \equiv J(d_m) \quad \forall d_m \in \mathbf{D}_m$ , найдем разность

$$J(d_m^\varepsilon) - J(d_m^*) = L(d_m^\varepsilon) - L(d_m^*) = G(t_f, p^\varepsilon(t_f, x)) - G(t_f, p^*(t_f, x)) + \\ + \int_{t_0}^{t_f} [R(t, p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1)) - R(t, p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1))] dt.$$

Тогда с учетом условий 1 и 2 теоремы 1 получаем

$$\begin{aligned} |J(d_m^\varepsilon) - J(d_m^*)| &= \left| G(t_f, p^\varepsilon(t_f, x)) - G(t_f, p^*(t_f, x)) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{t_0}^{t_f} [R(t, p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1)) - R(t, p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1))] dt \right| \leq \\ &\leq \left| G(t_f, p^\varepsilon(t_f, x)) - G(t_f, p^*(t_f, x)) \right| + \left| \int_{t_0}^{t_f} [R(t, p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1)) - R(t, p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1))] dt \right| \leq \\ &\leq \left| G(t_f, p^\varepsilon(t_f, x)) - g \right| + \int_{t_0}^{t_f} |r_m(t) - R(t, p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1))| dt \leq \varepsilon_2 + \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t) dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

Поэтому управление  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$  является  $\varepsilon$ -оптимальным, что и требовалось доказать.

Рассмотрим решение задачи 4.

**Теорема 4** (достаточные условия  $\varepsilon$ -оптимальности в задаче (14)). *Если существуют такая функция  $S(t, p(\cdot)) \in \Pi$ , число  $\varepsilon_2$ , непрерывная на  $T$  функция  $\varepsilon_1(t)$ , что:*

1.

$$\left| r_m(t) - \frac{\partial S(t, p(x))}{\partial t} - \int_{B_1} \left[ \max_{u \in U} \int_{B_2} \left\{ A_*^u \left[ \frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)} \right] p(x) - f^0(t, p(x), u) \right\} dx^2 \right] dx^1 \right| \leq \varepsilon_1(t)$$

$$\forall (t, p(x)) \in T \times P;$$

$$2. |G(t_f, p(x)) - g| \leq \varepsilon_2, \quad \forall p(x) \in P,$$

то функция  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1; p(x))$ , обеспечивающая максимум в условии 1, является

$\varepsilon$ -оптимальным законом управления на множестве  $P$  при  $\varepsilon = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t) dt + \varepsilon_2$ .

Доказательство. Пусть удовлетворяются условия теоремы 4 и имеется произвольная начальная функция  $p(t_0, x) = p_0(x) \in P$ . Решив уравнение (4) с данной начальной функцией  $p(t_0, x)$  и законом управления  $\mathbf{u}^*(t, x^1; p(x))$ , удовлетворяющим (22), можно найти пару  $d_m^* = (p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1) = \mathbf{u}^*(t, x^1; p^*(t, x))) \in \mathbf{D}_m$ . Так как (22) является частным случаем условия (19), а (23) – условия (20), т.е. условия выполняются для любых  $p(x) \in P$ , то они будут выполняться и для  $p^*(t, x)$ :

$$1) R(t, p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1) = \mathbf{u}^*(t, x^1; p^*(t, x))) = r_m(t), \text{ почти всюду на } T;$$

$$2) G(t_f, p^*(t_f, x)) = g.$$

Для той же начальной функции  $p(t_0, x) = p_0(x) \in P$  и закона управления  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1; p(x))$ , удовлетворяющего условию 1 теоремы 4, решая уравнение (4) с начальным условием (5), можно найти пару  $d_m^\varepsilon = (p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1) = \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1; p^\varepsilon(t, x))) \in \mathbf{D}_m(t_0, p_0(x))$ . Поскольку условия 1 и 2 теоремы 4 выполняются для любых  $p(x) \in P$ , то они выполняются и для  $p^\varepsilon(t, x)$ :

$$1. |r_m(t) - R(t, p^\varepsilon(t, x), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1))| \leq \varepsilon_1(t) \quad \forall t \in T;$$

$$2. |G(t_f, p^\varepsilon(t_f, x)) - g| \leq \varepsilon_2,$$

т.е. справедливы условия теоремы 3. Поэтому управление  $u^\varepsilon(t, x^1) = u^\varepsilon(t, x^1; p^\varepsilon(t, x))$ , порождаемое законом управления  $u^\varepsilon(t, x^1; p(x))$ , является  $\varepsilon$ -оптимальным на множестве  $P$ , что и требовалось доказать.

### Соотношения для нахождения оптимального управления

Задача поиска оптимальных законов управления вида  $u^*(t, x^1; p(x))$  весьма привлекательна, поскольку позволяет найти решение задачи 1 сразу для всего множества начальных функций  $p_0(x) \in P$ , однако она связана с необходимостью решения уравнений в вариационных производных (22) с условием (23), что вызывает большие трудности. Поэтому более актуальным является непосредственное определение оптимального управления в задаче 1 для фиксированной функции  $p_0(x)$ .

Функцию  $S(t, p(\cdot))$  будем искать в виде

$$S(t, p(\cdot)) = \int_B \varphi(t, x) p(x) dx + W(t), \quad (27)$$

где неизвестная функция  $\varphi(t, x) \in C^{1,1}(Q)$  и непрерывна на  $Q'$ , а  $W(t)$  – непрерывно дифференцируемая неизвестная функция.

Подставляя (27) в (16), (17), применяя правило (15) вычисления вариационных производных, имеем  $\frac{\delta S(t, p(\cdot))}{\delta p(x)} = \varphi(t, x)$  и, следовательно,

$$R(t, p(x), u) = \int_B \left\{ \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) \right] p(x) - \right.$$



$$-f^0(t, p(x), u) \left. \right\} dx + \frac{dW(t)}{dt} = H(t, p(x), u) + \frac{dW(t)}{dt} + \int_B \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} p(x) dx, \quad (28)$$

$$G(t_f, p(x)) = \int_B \varphi(t_f, x) p(x) dx + W(t_f) + F(p(x)).$$

Из условия 1 теоремы 1 и из (19) следует, что структура оптимального управления  $\mathbf{u}^*(t, x^1)$  определяется соотношением

$$\mathbf{u}^*(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} \int_{B_2} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) \right] p^*(t, x) - f^0(t, p^*(t, x), u) \right\} dx^2. \quad (29)$$

Здесь считается, что операция максимизации по управлению для любых  $t, x^1$  однозначно разрешима.

Предполагая, что функции  $R(t, p(x), u)$ ,  $G(t_f, p(x))$  в (16), (17) имеют непрерывную вариационную производную по  $p(x)$ , и, используя необходимое условие экстремума в (19), (20), а также условия теоремы 1, получаем

$$\frac{\delta R(t, p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1))}{\delta p(x)} = 0 \quad \forall (t, x) \in Q, \quad \frac{\delta G(t_f, p^*(t_f, x))}{\delta p(x)} = 0 \quad \forall x \in B$$

или

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = - \frac{\delta H(t, p^*(t, x), \mathbf{u}^*(t, x^1))}{\delta p(x)} \quad \forall (t, x) \in Q, \quad (30)$$

$$\varphi(t_f, x) = - \frac{\delta F(p^*(t_f, x))}{\delta p(x)} \quad \forall x \in B. \quad (31)$$

Здесь  $p^*(t, x)$  – решение уравнения (4) с начальным условием (5):

$$\frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x, \mathbf{u}^*(t, x^1)) p^*(t, x)] \quad \forall (t, x) \in Q,$$

$$p^*(t_0, x) = p_0(x) \quad \forall x \in B$$

и управлением  $\mathbf{u}^*(t, x^1)$ , удовлетворяющим (29).

Таким образом, чтобы найти решение задачи 1, требуется решить краевую задачу для системы уравнений с частными производными (4), (30) с краевыми условиями (5), (31) и условием (29). С учетом равенства  $r_m(t) \equiv 0$ ,  $g = 0$  из (19), (20), (28) и из условий 1, 2 теоремы 1 следует уравнение для определения функции  $W(t)$ , решаемое на найденной экстремали  $(p^*(t, x), u^*(t, x^1))$ :

$$\frac{dW(t)}{dt} = -H(t, p^*(t, x), u^*(t, x^1)) - \int_B \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} p^*(t, x) dx, \quad (32)$$

$$W(t_f) = - \int_B \varphi(t_f, x) p^*(t_f, x) dx - F(p^*(t_f, x)).$$

В результате можно подсчитать минимум функционала (6) по формуле (21):

$$\min_{d_m \in D_m} J(d_m) = - \int_B \varphi(t_0, x) p_0(x) dx - W(t_0). \quad (33)$$

**З а м е ч а н и е.** Следует отметить, что соотношения (30), (31) получены с помощью необходимых условий экстремума. Поэтому если найдено решение системы (4), (5), (29), (28), (29), то это еще не означает, что получено решение задачи 1. Однако конструкция (27) не задает до конца функции  $S(t, p(x))$ , существование которой требуется условиями теоремы 1, определяя лишь ее первую вариационную производную по  $p(x)$  и оставляя возможность для ее доопределения. Одним из путей решения этой проблемы может быть задание конструкций, доопределяющих функцию  $S(t, p(x))$  в окрестности экстремали  $p^*(t, x)$ , аналогичных используемым в [24,25].

## Частный случай

Рассмотрим частный случай, когда функционал (6) имеет вид (12). Тогда соотношения (28) принимают следующую форму:

$$\begin{aligned}
 R(t, p(x), u) = \int_B \left\{ \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - \right. \right. \\
 \left. \left. - f^0(t, x, u) \right] p(x) \right\} dx + \frac{dW(t)}{dt} = H(t, p(x), u) + \frac{dW(t)}{dt} + \int_B \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} p(x) dx, \\
 G(t_f, p(x)) = \int_B \left[ \varphi(t_f, x) + F(x) \right] p(x) dx + W(t_f).
 \end{aligned} \tag{34}$$

Так как, согласно правилу (15):

$$\begin{aligned}
 \frac{\delta H(t, p(x), u)}{\delta p(x)} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u), \\
 \frac{\delta F(p(x))}{\delta p(x)} &= \frac{\delta \left[ \int_B F(x) p(x) dx \right]}{\delta p(x)} = F(x),
 \end{aligned}$$

соотношения (30), (31) упрощаются:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, \mathbf{u}^*(t, x^1)) + f^0(t, x, \mathbf{u}^*(t, x^1)) = \\
 &= -A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t, x)] + f^0(t, x, \mathbf{u}^*(t, x^1)) \quad \forall (t, x) \in Q, \\
 \varphi(t_f, x) &= -F(x) \quad \forall x \in B.
 \end{aligned}$$

Учитывая аналогию функции  $p(t, x)$  с плотностью вероятности, так как уравнение Лиувилля (4) является частным случаем уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова [5, 9–12], описывающего эволюцию плотности вероятности, получаем

$$p(t, x^1) = \int_{B_2} p(t, x) dx^2; \quad p(t, x^2 | x^1) = \frac{p(t, x)}{\int_{B_2} p(t, x) dx^2}, \quad (35)$$

где  $p(t, x^1)$  – аналог маргинальной плотности вероятности,  $p(t, x^2 | x^1)$  – аналог условной плотности вероятности, из (29) имеем

$$\mathbf{u}^*(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} \int_{B_2} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p^*(t, x^2 | x^1) dx^2 \right\}. \quad (36)$$

Таким образом, искомое оптимальное управление  $\mathbf{u}^*(t, x^1)$ , минимизирующее величину функционала (12), можно найти в результате решения системы уравнений

$$\frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = A^{u(\cdot)}[p^*(t, x)], \quad p^*(t_0, x) = p_0(x), \quad (37)$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = -A_*^{u(\cdot)}[\varphi(t, x)] + f^0(t, x, \mathbf{u}^*(t, x^1)), \quad \varphi(t_f, x) = -F(x),$$

совместно с (35), (36) .

При этом функция  $W(t) \equiv 0$ , а минимум функционала (12) можно подсчитать по формуле, следующей из (33):

$$\min_{d_m \in D_m} J(d_m) = - \int_B \varphi(t_0, x) p_0(x) dx. \quad (38)$$

### Предельные случаи информированности о векторе состояния

Перепишем систему уравнений (35)–(37) более подробно:

$$\frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x, \mathbf{u}^*(t, x^1)) p^*(t, x)] = A^{u(\cdot)}[p^*(t, x)] \quad \forall (t, x) \in T \times R^n,$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, \mathbf{u}^*(t, x^1)) + f^0(t, x, \mathbf{u}^*(t, x^1)) \quad \forall (t, x) \in T \times R^n,$$

$$p^*(t_0, x) = p_0(x) \in P \quad \varphi(t_f, x) = -F(x) \quad \forall x \in R^n, \quad (39)$$

$$u^*(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} \int_{R^{n-m}} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p^*(t, x^2 | x^1) dx^2,$$

$$p^*(t, x^2 | x^1) = \frac{p^*(t, x)}{\int_{R^{n-m}} p^*(t, x) dx^2}.$$

**З а м е ч а н и е.** Решение уравнения Лиувилля (4) определяется решением системы уравнений для характеристик [3,4]:

$$\frac{dx_i}{f_i(t, x, u)} = \frac{dp}{-p \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(t, x, u)}{\partial x_i}} = dt; \quad x(t_0) = x_0 \in \Omega, \quad p(t_0) = p_0(x_0). \quad (40)$$

Уравнение (4) является частным случаем уравнения Фоккера–Планка–Колмогорова при отсутствии случайных воздействий в модели объекта управления, поэтому функция  $p(t, x)$  трактуется как плотность вероятности. Начальные условия для системы (1) могут лежать произвольно в множестве  $\Omega$ . При использовании данного подхода они полагаются случайными и распределенными согласно закону  $p_0(x)$ , что отражено в (5). Величина функции  $p(x)$  при фиксированном  $t$  характеризует плотность следов траекторий пучка, а носитель функции  $p(t, x)$ , т.е. множество тех  $x$ , где  $p(t, x) \neq 0$ , совпадает с множеством  $\Omega_{t,u}$  – образом множества  $\Omega$  в момент  $t$  в силу системы (1) и заданного управления.

Рассмотрим предельные случаи информированности о векторе состояния.

1.  $m = 0$  (информация о векторе отсутствует). Соотношения (39) для общего случая принимают форму системы

$$\frac{\partial p^*(t, x)}{\partial t} = A^{u^*} [p^*(t, x)], \quad p^*(t_0, x) = p_0(x), \quad (41)$$

$$\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} = -A_*^{u^*} [\varphi(t, x)] + f^0(t, x, u^*(t)), \quad \varphi(t_f, x) = -F(x),$$

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in U} \int_{R^n} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p^*(t, x) dx,$$

которую требуется решить для определения оптимального в среднем программного управления. Синтезированное оптимальное управление  $u^*(t)$  применяется для всех начальных условий из множества  $\Omega$ , а система управления при этом разомкнута по состоянию.

2.  $m = n$  (имеется полная информация о векторе состояния). Соотношения (39) для общего случая преобразуются в уравнение Беллмана [24,25] для определения оптимального управления  $u^*(t, x)$  с полной обратной связью:

$$\max_{u \in U} \left\{ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right\} = 0 \quad \forall (t, x) \in T \times R^n,$$

$$\varphi(t_f, x) = -F(x) \quad \forall x \in R^n, \quad (42)$$

$$u^*(t, x) = \arg \max_{u \in U} \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right].$$

В отличие от оптимального в среднем программного управления, управление с полной обратной связью  $u^*(t, x)$  в общем случае для каждого начального условия из множества  $\Omega$  порождает соответствующее оптимальное программное управление  $u(t) = u^*(t, x(t))$ , минимизирующее значение функционала (10).

## Оценка близости приближенного управления к оптимальному

**Следствие из теоремы 3.** (достаточные условия  $\varepsilon$  – оптимальности в задаче минимизации функционала (12)). Если существуют такая функция

$S(t, p(\cdot)) = \int_B \varphi(t, x) p(x) dx \in \Pi$ , число  $\varepsilon_2$ , непрерывная на  $T$  функция  $\varepsilon_1(t)$ , что:

$$1. \left| r_m(t) - \int_B \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) - f^0(t, x, \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) \right] p^\varepsilon(t, x) dx \right| \leq \varepsilon_1(t),$$

$$2. \left| \int_B [\varphi(t_f, x) + F(x)] p^\varepsilon(t_f, x) dx - g \right| \leq \varepsilon_2.$$

то управление  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$  является  $\varepsilon$ -оптимальным при  $\varepsilon = \int_{t_0}^{t_f} \varepsilon_1(t) dt + \varepsilon_2$ .

Отсюда следует, что решение задачи связано с удачным выбором вспомогательной функции  $\varphi(t, x)$ . Предлагается использовать разложения по элементам базисных систем, которые широко применяются в спектральной теории систем управления [28–30]. Неизвестные коэффициенты разложения будем искать с помощью мультиагентных методов параметрической оптимизации, хорошо зарекомендовавших себя при решении различных задач оптимального управления [20].

### Алгоритм приближенного нахождения $\varepsilon$ – оптимального управления

**Шаг 1. Задание параметров.** Выбрать мультиагентный алгоритм оптимизации и задать его параметры. Задать количество координат  $m$ , информация о которых используется в управлении, масштабы усечения  $L_0, L_1, \dots, L_n$  по координатам, ограничения  $c_{\min}$  и  $c_{\max}$  на значения коэффициентов в разложении функции  $\varphi(t, x)$ .

Указать нижнюю и верхнюю границы  $\underline{x}_i, \bar{x}_i; i = 1, \dots, n$  по каждой координате, а также

множество начальных состояний  $\Omega = [\alpha_1, \beta_1] \times \dots \times [\alpha_n, \beta_n]$ . Задать на множестве  $\Omega$

финитную функцию  $p_0(x) = \prod_{i=1}^n p_{0i}(x_i) \in C^1$ , где

$$p_{0i}(x_i) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\mu}(x_i - \alpha_i)^2, & \alpha_i \leq x_i \leq \frac{\beta_i + 3\alpha_i}{4}, \\ \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{\mu} \left( x_i - \frac{\beta_i + \alpha_i}{2} \right)^2, & \frac{\beta_i + 3\alpha_i}{4} \leq x_i \leq \frac{3\beta_i + \alpha_i}{4}, \\ \frac{\lambda}{\mu}(x_i - \beta_i)^2, & \frac{3\beta_i + \alpha_i}{4} \leq x_i \leq \beta_i. \end{cases} \quad (43)$$

**Шаг 2.** Задать функцию

$$\varphi(t, x) = \sum_{i=0}^{L_0-1} c_{0i} q_i(t) \sum_{j=0}^{L_1-1} c_{1j} h_{1j}(x_1) \cdots \sum_{k=0}^{L_n-1} c_{nk} h_{nk}(x_n), \quad (44)$$

где  $\{q_i(t)\}, \{h_{1j}(x_1)\}, \dots, \{h_{nk}(x_n)\}$  – базисные системы по времени и координатам вектора состояния,  $c_{0i}, c_{1j}, \dots, c_{nk}$  – неизвестные коэффициенты. Найти частные

производные  $\frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i}, i = 1, \dots, n$ .

**Шаг 3.** Найти функцию  $p^\varepsilon(t, x)$ , решив уравнение

$$\frac{\partial p^\varepsilon(t, x)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} [f_i(t, x, \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) p^\varepsilon(t, x)], \quad p^\varepsilon(t_0, x) = p_0(x)$$

методом характеристик (40). Для этого генерировать на множестве  $\Omega$  начальных состояний  $N$  точек  $x^j(t_0) = x_0^j, j = 1, \dots, N$  с помощью распределения  $p_0(x)$ . Для них получить  $N$  траекторий  $x^j(t)$  и соответствующих им функций  $p^j(t)$ , интегрируя на отрезке  $[t_0, t_f]$  систему

$$\dot{x}^j(t) = f(t, x^j(t), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^j(t))), \quad x^j(t_0) = x_0^j \in \Omega, \quad j = 1, \dots, N, \quad (45)$$



$$\dot{p}^j(t) = -p^j(t) \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i(t, x^j(t), \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^{1j}(t)))}{\partial x_i}, \quad p^j(t_0) = p_0(x_0^j).$$

В качестве начального приближения функции  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$  можно взять ее разложение по системам базисных функций, полученное при непосредственной минимизации функционала (12).

**Шаг 3.** Найти структуру оптимального управления  $\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)$  из условия (36):

$$\mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1) = \arg \max_{u \in U} \int_{B_2} \left\{ \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p^\varepsilon(t, x^2 | x^1) dx^2 \right\}.$$

**Шаг 4.** Поиск неизвестных коэффициентов разложения  $c_{0i}, c_{1j}, \dots, c_{nk}$

производить мультиагентными алгоритмами оптимизации, решая задачу

$$\varepsilon \rightarrow \min_{c_{0i}, c_{1j}, \dots, c_{nk}}.$$

Для вычисления априорной оценки близости приближенного решения к оптимальному использовать формулу

$$\begin{aligned} \varepsilon = \int_{t_0}^{t_f} \left| r_m(t) - \int_B \left[ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) - \right. \right. & (46) \\ \left. \left. - f^0(t, x, \mathbf{u}^\varepsilon(t, x^1)) \right] p^\varepsilon(t, x) dx \right| dt + \left| \int_B \left[ \varphi(t_f, x) + F(x) \right] p^\varepsilon(t_f, x) dx - g \right| dx, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} r_m(t) = \max_{p(x) \in P} \int_{B_1} \max_{u \in U} \int_{B_2} \left\{ \left[ \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi(t, x)}{\partial x_i} f_i(t, x, u) - f^0(t, x, u) \right] p(x) \right\} dx^2 dx^1, \\ g = \min_{p(x) \in P} \int_B \left[ \varphi(t_f, x) + F(x) \right] p(x) dx. \end{aligned}$$

С целью приближенного нахождения максимума по  $p(x)$  в  $r_m(t)$  и минимума в  $g$  можно заменить поиск по функции  $p(x)$  на поиск экстремумов по ее моментам [29,30].

Величины интегралов по множеству  $B$  можно находить методом Монте-Карло, а множество  $B = B_1 \times B_2$  аппроксимировать оценками множеств достижимости, т.е.  $\bar{B} = [\underline{x}_1, \bar{x}_1] \times \dots \times [\underline{x}_n, \bar{x}_n]$ . При этом фактически находятся математические ожидания выражений, заключенных в квадратные скобки.

### Анализ полученных результатов и выводы

**Пример 1.** Постановка задачи [20] приведена в табл. 1. Требуется найти оптимальное в среднем программное управление  $u(t)$  пучком траекторий ( $m = 0$ ).

Таблица 1. Постановка задачи

Система дифференциальных уравнений	$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \sin x_1(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) \cos x_2(t) u(t) \end{cases}$
Временной интервал	$t \in [0, 1]$
Ограничения на управление	$-1 \leq u \leq 1$
Функционал (10)	$I(u) = x_2(1)$

Преобразуем исходную постановку задачи для нахождения численного решения с помощью разработанного алгоритма в случае, когда  $m = 0$ .

1. Уравнение Лиувилля будем решать методом характеристик (40):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^k(t) &= x_2^k(t) + \sin x_1^k(t) + u(t), & x_1^k(0) &= x_{10}^k, \\ \dot{x}_2^k(t) &= x_1^k(t) \cos x_2^k(t) u(t), & x_2^k(0) &= x_{20}^k, & k &= 1, \dots, N, \\ \dot{p}^k(t) &= -p^k(t) [\cos x_1^k(t) - x_1^k(t) \sin x_2^k(t) u(t)], & p^k(0) &= p_0(x_0^k). \end{aligned}$$

2. Структура оптимального программного управления имеет вид

$$u^*(t) = \arg \max_{u \in [-1,1]} \int_{R^2} \left[ \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_1} (x_2 + \sin x_1 + u) + \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_2} (x_1 \cos x_2 u) \right] p^*(t,x) dx .$$

Отсюда структура управления приближенно определяется по формуле

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \text{sign} \int_{R^2} \left[ \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x_2} x_1 \cos x_2 \right] p^*(t,x) dx \cong \\ &\cong \text{sign} \sum_{k=1}^N \left\{ \left[ \frac{\partial \varphi(t,x^k)}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi(t,x^k)}{\partial x_2} x_1^k \cos x_2^k \right] p^k(t) \right\} \text{mes} \Omega_k(t), \end{aligned}$$

где  $\text{mes} \Omega_k(t)$  – мера образа множества  $\Omega_k$  в момент времени  $t$ , индекс  $k$  показывает, что соответствующая переменная получается в результате решения системы при фиксированном  $k$ , т.е. для некоторой элементарной области  $\Omega_k$

( $\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$ ). В качестве  $\Omega_k$  выберем параллелепипед, образованный прямым произведением отрезков по каждой координате вектора состояния, полученных путем деления множества начальных значений каждой из координат на заданное число  $N_1$  и  $N_2$  соответственно, при этом  $N = N_1 N_2$ .

По формуле Лиувилля [3,4] находится мера образа множества  $\Omega_k$  в момент времени  $t$ :

$$\text{mes} \Omega_k(t) = \text{mes} \Omega_k \exp \int_0^t \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial f_i(\tau, x(\tau, x_0^k, u(\tau)), u(\tau))}{\partial x_i} d\tau ,$$

или

$$\text{mes} \Omega_k(t) = \text{mes} \Omega_k \exp \int_0^t [\cos x_1^k(\tau) - x_1^k(\tau) \sin x_2^k(\tau) u(\tau)] d\tau = \text{mes} \Omega_k \exp q_k(t),$$

$$\text{mes} \Omega_k = \Delta x_1 \Delta x_2,$$

где вычисление интеграла можно реализовать с помощью решения вспомогательного дифференциального уравнения

$$\dot{q}_k(t) = \cos x_1^k(t) - x_1^k(t) \sin x_2^k(t) u(t), \quad q_k(0) = 0,$$

которое следует добавить к системе уравнений метода характеристик.

Данная задача была решена с помощью разработанного программного обеспечения. Множество начальных состояний  $\Omega = [-0,05; 0,05] \times [-0,05; 0,05]$ ,  $N_1 = N_2 = 5$ . Параметры финитной функции (43):  $\lambda = 800$ ,  $\mu = 0,05$ ,  $\alpha = -0,05$ ,  $\beta = 0,05$ . График составляющей  $p_{0i}(x_i), i=1,2$  финитной функции  $p_0(x)$  для области  $\Omega$  изображен на рис. 1.

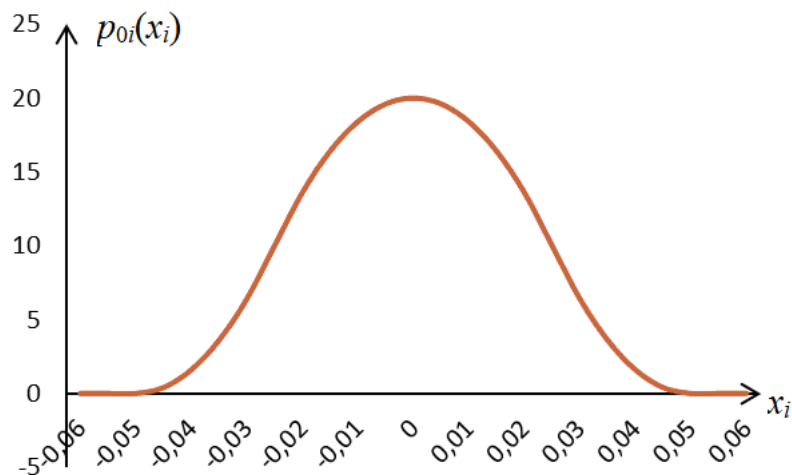


Рис. 1. График финитной функции  $p_{0i}(x_i), i=1,2$ . Пример 1.

В качестве мультиагентного метода был выбран гибридный мультиагентный метод интерполяционного поиска [20] с параметрами  $NP = 20$ ,  $I_{\max} = 15$ ,  $M_1 = 5$ ,  $M_2 = 2$ ,  $PRT = 10$ ,  $nstep = 10$ ,  $b_2 = 2$ . Ограничения на коэффициенты в (44):  $c_{\min} = -1$ ,  $c_{\max} = 1$ .

С указанными параметрами получены следующие численные результаты. Найдены наилучшие масштабы усечения  $L_0 = 2, L_1 = 2, L_2 = 2$ , значения коэффициентов в разложении (44):  $-0,18; 1; 0,24; -0,11; -0,15; 0,17$ , величина

априорной оценки близости полученного управления к оптимальному:  $\varepsilon = 2,08885$ .

В результате моделирования получены отрезки значений координат в конце времени функционирования системы  $x_1(1) \in [-0,0065; 0,5193]$ ,  $x_2(1) \in [-0,095; -0,2167]$ .

Найденные наилучшие пучок траекторий и управление изображены на рис. 2, а на рис. 3 приведен график изменения величины оценки с ростом числа итераций.

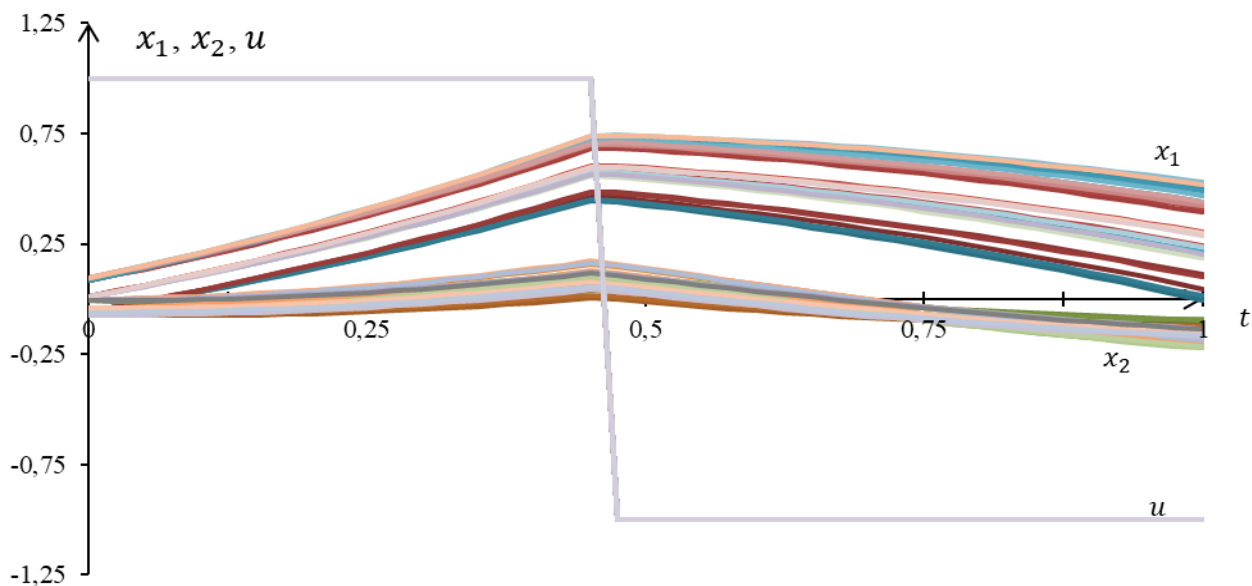


Рис. 2. Графики пучка траекторий и управления. Пример 1.

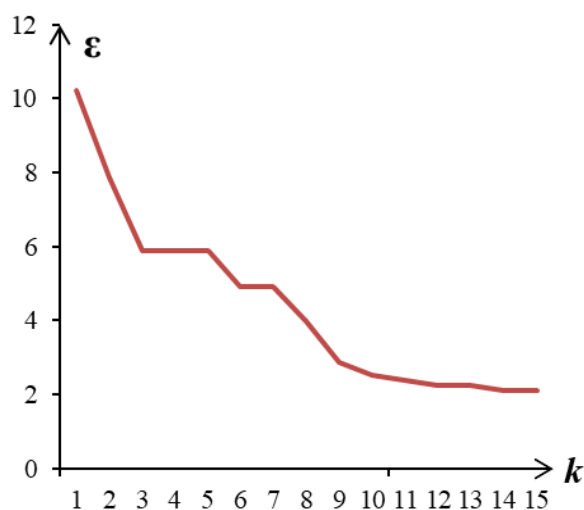


Рис. 3. График изменения величины оценки  $\varepsilon$  с ростом числа итераций. Пример 1.

**Пример 2.** Постановка задачи [20] приведена в табл. 2. Требуется найти оптимальное в среднем программное управление  $u(t)$  пучком траекторий ( $m = 0$ ).

Таблица 2. Постановка задачи

Система дифференциальных уравнений	$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{\cos x_1(t) + 2} + 3 \sin x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t) \end{cases}$
Временной интервал	$t \in [0; 1,6]$
Ограничения на управление	$-2 \leq u \leq 1$
Функционал (10)	$I(x_0, d) = -x_1(1,6) + \frac{1}{2}x_2(1,6)$

Аналогично предыдущему примеру требуется преобразовать исходную постановку задачи для нахождения численного решения с помощью разработанного алгоритма в случае, когда  $m = 0$ . Множество начальных состояний  $\Omega = [0,95; 1,05] \times [-0,05; 0,05]$ ,  $N_1 = N_2 = 5$ . Параметры финитной функции (43):  $\lambda = 800$ ,  $\mu = 0,05$ ,  $\alpha = 0,95$ ,  $\beta = 1,05$ . Графики составляющих  $p_{0i}(x_i), i = 1, 2$  финитной функции  $p_0(x)$  для области  $\Omega$  изображены на рис. 4 и рис.1 соответственно.

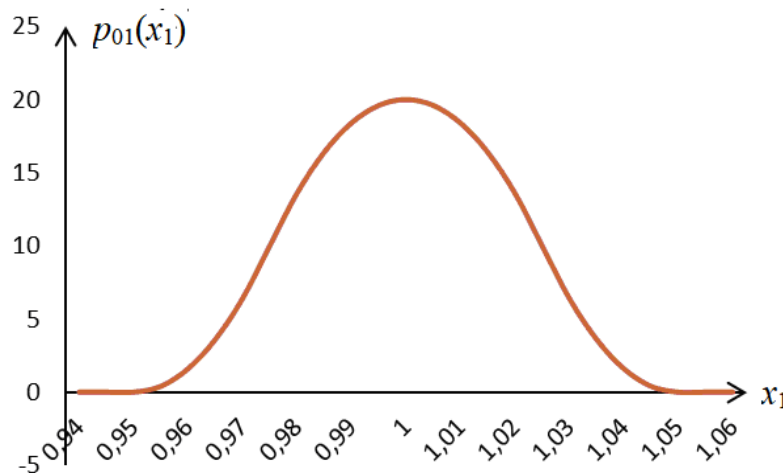


Рис. 4. График финитной функции  $p_{01}(x_1)$ . Пример 2.

В качестве мультиагентного метода был выбран гибридный мультиагентный метод интерполяционного поиска [20] с параметрами  $NP = 5$ ,  $I_{\max} = 20$ ,  $M_1 = 5$ ,  $M_2 = 2$ ,  $PRT = 0,9$ ,  $nstep = 5$ ,  $b_2 = 2$ . Ограничения на коэффициенты в (44):  $c_{\min} = -1$ ,  $c_{\max} = 3$ .

Найдены наилучшие масштабы усечения  $L_0 = 2, L_1 = 2, L_2 = 2$ , значения коэффициентов в разложении (44):  $0,53; -0,02; 2,13; 1,94; 0,03; -0,03$ , и величина априорной оценки близости полученного управления к оптимальному:  $\varepsilon = 2,24714$ . В результате моделирования получены отрезки значений координат в конце промежутка времени функционирования системы:  $x_1(1) \in [3,3289; 3,3946], x_2(1) \in [12,1602; 13,0195]$ . Найденные наилучшие пучок траекторий и управление изображены на рис. 5, а на рис. 6 приведен график изменения величины оценки с ростом числа итераций.

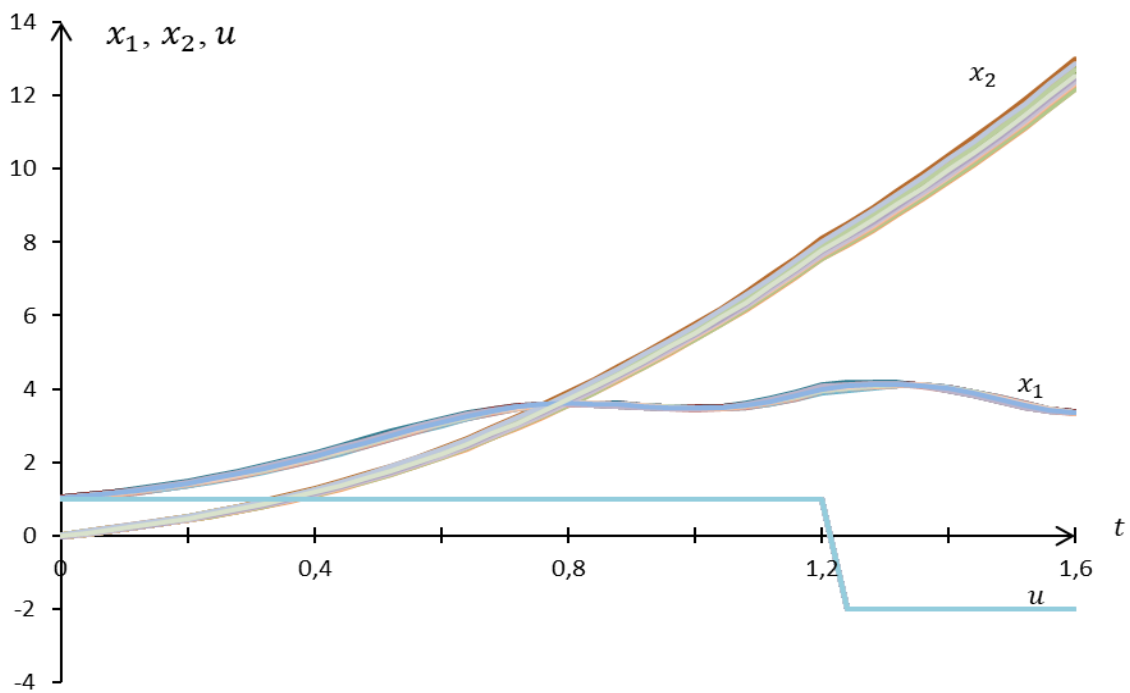


Рис. 5. Графики пучка траекторий и управления. Пример 2

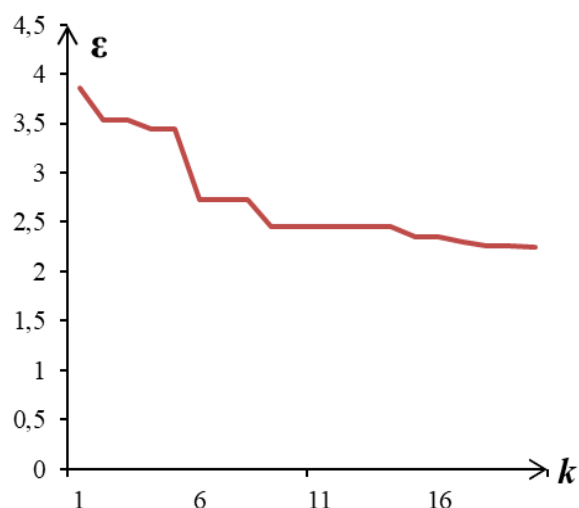


Рис. 6. График изменения величины оценки  $\varepsilon$  с ростом числа итераций. Пример 2

Исходя из полученных численных результатов, можно сделать вывод о том, что используемый подход поиска приближенного оптимального управления является эффективным. Графики пучков траекторий и найденного управления показывают результаты близкие к оптимальным, полученным в [19]. На каждой итерации вычислялась верхняя оценка близости к оптимальному решению, которая со временем убывает, как видно из графиков на рис. 3 и 6. Кроме того, посчитано затраченное время процессора на выполнение программы. Для решения примера 1 потребовалось 57 сек., для примера 2 – 1 мин. 14 сек. Использовался процессор 11th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1165G7 с частотой 2.80GHz.

### Заключение

В работе доказаны теоремы о верхних оценках близости приближенного управления пучками траекторий нелинейных детерминированных систем по неполному вектору состояния к оптимальному по величине функционала качества. Они позволяют обосновать численные процедуры, использующие идеи



минимизации оценок, полученных из доказанных достаточных условий  $\varepsilon$ -оптимальности.

Сформирован пошаговый алгоритм синтеза приближенного  $\varepsilon$ -оптимального управления с использованием мультиагентных алгоритмов оптимизации. На основе алгоритма разработано программное обеспечение, с помощью которого решены модельные примеры и продемонстрирована эффективность предложенного подхода.

### **Список источников**

1. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности. – М.: Наука, 1977. – 392 с.
2. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. – М.: Наука, 1988. – 320 с.
3. Овсянников Д.А. Моделирование и оптимизация динамики пучков заряженных частиц. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1990. – 312 с.
4. Овсянников Д.А. Математические методы управления пучками. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1980. – 228 с.
5. Brockett R.W. Optimal Control of the Liouville Equation // AMS/ IPStudies in Advanced Mathematics. 2007, vol. 39, pp. 23–35.
6. Henrion D., Korda M. Convex Computation of the Region of Attraction of Polynomial Control Systems // European Control Conference (ECC), 2013, pp. 676–681.

7. Halder A., Bhattacharya R. Dispersion Analysis in Hypersonic Flight During Planetary Entry Using Stochastic Liouville Equation // Journal Guidance, Control, and Dynamics. 2011, vol. 34, no. 2, pp. 459–474. DOI: [10.2514/1.51196](https://doi.org/10.2514/1.51196)
8. Dutta P., Bhattachariya R. Hypersonic state estimation using Frobenius-Perron operator // Journal Guidance, Control, and Dynamics. 2011, vol. 34, no. 2, pp. 325–344. DOI: [10.2514/1.52184](https://doi.org/10.2514/1.52184)
9. Kubo R. Stochastic Liouville Equations // Journal of Mathematical Physics. 1963, vol.4, no. 2, pp. 174–184. DOI: [10.1063/1.1703941](https://doi.org/10.1063/1.1703941)
10. Risken H. The Fokker–Planck Equation: Methods of Solution and Applications. NY: Springer, 1996, 472 p.
11. Пантелеев А.В., Семенов В.В. Синтез оптимальных систем управления при неполной информации. – М.: Изд-во МАИ, 1992. – 192 с.
12. Пантелеев А.В. Вариационное исчисление в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 2006. – 272 с.
13. Бортакoвский А.С. Оптимальное и субоптимальное управления пучками траекторий детерминированных систем автоматного типа // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2016. № 1. С. 5–26.
14. Бортакoвский А.С. Теорема разделения для оптимального в среднем управления гибридными системами переменной размерности // Автоматика и телемеханика. 2020. № 11. С. 46–71.
15. Бортакoвский А.С., Урюпин И.В. Оптимизация маршрутов непрерывно-дискретного движения управляемых объектов при наличии препятствий // Труды

МАИ. 2020. № 113. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=118185>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-17](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-17)

16. Немыченков Г.И. Управление пучками траекторий стационарных систем автоматного типа при наличии дискретных неточных измерений // Труды МАИ. 2019. № 104. URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=102203>

17. Пантелеев А.В., Письменная В.А. Применение меметического алгоритма в задаче оптимального управления пучками траекторий нелинейных детерминированных систем с неполной обратной связью // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2018. № 1. С. 27–38.

18. Пантелеев А.В. Метаэвристические алгоритмы оптимизации законов управления динамическими системами. - М.: Факториал, 2020. – 564 с.

19. Каранэ М.М.С., Пантелеев А.В. Мультиагентные алгоритмы оптимизации пучков траекторий детерминированных систем с неполной мгновенной обратной связью // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2022. № 5. С. 50–75.

20. Пантелеев А.В., Каранэ М.М.С. Мультиагентные и биоинспирированные методы оптимизации технических систем. – М.: Изд-во Доброе слово и Ко, 2024. – 336 с.

21. Гончарова В.И. Параметрический синтез нелинейной системы автоматического управления с распределенными параметрами // Труды МАИ. 2024. № 134. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=178476>

22. Пантелеев А.В., Беляков И.А. Применение биоинспирированных методов оптимизации в задаче оптимального программного управления солнечным парусом

// Труды МАИ. 2022. № 122. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=164301>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-24](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-24)

23. Зайцева Н.И., Погарская Т.А. Разработка программного комплекса для анализа и оптимизации сборочного процесса в авиастроении // Труды МАИ. 2022. № 124. URL: <https://trudymai.ru/published.php?ID=167106>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-23](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-23)

24. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. –М.: Наука, 1973. – 448 с.

25. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

26. Хрусталева М.М. Необходимые и достаточные условия в форме уравнения Беллмана // Доклады АН СССР. 1978. Т. 242. № 5. С. 1023–1026.

27. Пантелеев А.В., Рыбаков К.А. Анализ нелинейных стохастических систем управления в классе обобщенных характеристических функций // Автоматика и телемеханика. 2011. № 2. С. 183–194.

28. Рыбаков К.А. Спектральный метод моделирования непрерывных стохастических систем. - М.: Изд-во МАИ, 2021. - 216 с.

29. Рыбаков К.А. Приближенное решение задачи оптимальной фильтрации по МАП-критерию с применением частичных сумм ряда Эджворта // Вестник Уфимского государственного авиационного технического университета. 2020. Т. 24, № 1 (87). С. 93–102.

30. Chugai K., Kosachev I., Rybakov K. Approximate MMSE and MAP estimation using continuous-time particle filter // AIP Conference Proceedings, 2019, vol. 2181. DOI: [10.1063/1.5135661](https://doi.org/10.1063/1.5135661)

## References

1. Kurzhan'skii A.B. *Upravlenie i nablyudenie v usloviyakh neopredelennosti* (Control and supervision under conditions of uncertainty), Moscow, Nauka, 1977, 392 p.
2. Chernous'ko F.L. *Otsenivanie fazovogo sostoyaniya dinamicheskikh sistem. Metod ellipsoidov* (Estimation of the phase state of dynamical systems. The ellipsoid method), Moscow, Nauka, 1988, 320 p.
3. Ovsyannikov D.A. *Modelirovanie i optimizatsiya dinamiki puchkov zaryazhennykh chastits* (Modeling and optimization of dynamics of charged particle beams), Saint-Petersburg, Izd-vo LGU, 1990, 312 p.
4. Ovsyannikov D.A. *Matematicheskie metody upravleniya puchkami* (Mathematical methods of beam control), Leningrad, Izd-vo LGU, 1980, 228 p.
5. Brockett R.W. Optimal Control of the Liouville Equation, *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics*, 2007, vol. 39, pp. 23–35.
6. Henrion D., Korda M. Convex Computation of the Region of Attraction of Polynomial Control Systems, *European Control Conference (ECC)*, 2013, pp. 676–681.
7. Halder A., Bhattacharya R. Dispersion Analysis in Hypersonic Flight During Planetary Entry Using Stochastic Liouville Equation, *Journal Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, vol. 34, no. 2, pp. 459–474. DOI: [10.2514/1.51196](https://doi.org/10.2514/1.51196)
8. Dutta P., Bhattachariya R. Hypersonic state estimation using Frobenius-Perron operator, *Journal Guidance, Control, and Dynamics*, 2011, vol. 34, no. 2, pp. 325–344. DOI: [10.2514/1.52184](https://doi.org/10.2514/1.52184)

9. Kubo R. Stochastic Liouville Equations, *Journal of Mathematical Physics*, 1963, vol.4, no. 2, pp. 174–184. DOI: [10.1063/1.1703941](https://doi.org/10.1063/1.1703941)
10. Risken H. *The Fokker–Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. NY: Springer, 1996, 472 p.
11. Panteleev A.V., Semenov V.V. *Sintez optimal'nykh sistem upravleniya pri nepolnoi informatsii* (Synthesis of optimal control systems with incomplete information), Moscow, Izd-vo MAI, 1992, 192 p.
12. Panteleev A.V. *Variatsionnoe ischislenie v primerakh i zadachakh* (Calculus of variations in examples and problems), Moscow, Vysshaya shkola, 2006, 272 p.
13. Bortakovskii A.S. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2016, no. 1, pp. 5–26.
14. Bortakovskii A.S. *Avtomatika i telemekhanika*, 2020, no. 11, pp. 46–71.
15. Bortakovskii A.S., Uryupin I.V. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118185>. DOI: [10.34759/trd-2020-113-17](https://doi.org/10.34759/trd-2020-113-17)
16. Nemychenkov G.I. *Trudy MAI*, 2019, no. 104. URL: <http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=102203>
17. Panteleev A.V., Pis'mennaya V.A. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2018, no. 1, pp. 27–38.
18. Panteleev A.V. *Metaevristicheskie algoritmy optimizatsii zakonov upravleniya dinamicheskimi sistemami* (Metaheuristic algorithms for optimizing the laws of control of dynamic systems), Moscow, Faktorial, 2020, 564 p.
19. Karane M.M.S., Panteleev A.V. *Izvestiya Rossiiskoi akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya*, 2022, no. 5, pp. 50–75.

20. Panteleev A.V., Karane M.M.S. *Mul'tiagentnye i bioinspirirovannye metody optimizatsii tekhnicheskikh sistem* (Multi-agent and bioinspired methods of optimization of technical systems), Moscow, Dobroe slovo i Ko, 2024, 336 p.
21. Goncharova V.I. *Trudy MAI*, 2024, no. 134. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=178476>
22. Panteleev A.V., Belyakov I.A. *Trudy MAI*, 2022, no. 122. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=164301>. DOI: [10.34759/trd-2022-122-24](https://doi.org/10.34759/trd-2022-122-24)
23. Zaitseva N.I., Pogarskaya T.A. *Trudy MAI*, 2022, no. 124. URL: <https://trudymai.ru/eng/published.php?ID=167106>. DOI: [10.34759/trd-2022-124-23](https://doi.org/10.34759/trd-2022-124-23)
24. Krotov V.F., Gurman V.I. *Metody i zadachi optimal'nogo upravleniya* (Methods and problems of optimal control), Moscow, Nauka, 1973, 448 p.
25. Gurman V.I. *Printsip rasshireniya v zadachakh upravleniya* (The principle of expansion in control tasks), Moscow, Nauka, 1985, 288 p.
26. Khrustalev M.M. *Doklady AN SSSR*, 1978, vol. 242, no. 5, pp. 1023–1026.
27. Panteleev A.V., Rybakov K.A. *Avtomatika i telemekhanika*, 2011, no. 2, pp. 183–194.
28. Rybakov K.A. *Spektral'nyi metod modelirovaniya nepreryvnykh stokhasticheskikh sistem* (Spectral method of modeling continuous stochastic systems), Moscow, Izd-vo MAI, 2021, 216 p.
29. Rybakov K.A. *Vestnik Ufimskogo gosudarstvennogo aviatsionnogo tekhnicheskogo universiteta*, 2020, vol. 24, no. 1 (87), pp. 93–102.
30. Chugai K., Kosachev I., Rybakov K. Approximate MMSE and MAP estimation using continuous-time particle filter, *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2181. DOI: [10.1063/1.5135661](https://doi.org/10.1063/1.5135661)

Статья поступила в редакцию 08.05.2024

Одобрена после рецензирования 15.05.2024

Принята к публикации 27.06.2024

The article was submitted on 08.05.2024; approved after reviewing on 15.05.2024;  
accepted for publication on 27.06.2024