Вестник Московского авиационного института. 2022. Т. 29. № 1. С. 57-66.
Aerospace MAI Journal, 2022, vol. 29, no. 1, pp. 57-66.

Научная статья
УДК 629.7.01
DOI: 10.34759/vst-2022-1-57-66

ВЫБОР УСТОЙЧИВЫХ ПРОЕКТНЫХ РЕШЕНИЙ БЕСПИЛОТНОГО ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЙ ФАКТОРОВ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Владимир Митрофанович Балык[1], Игорь Денисович Бородин[2] ✉

[1,2]Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), МАИ, Москва, Россия
[2]iibbdd@yandex.ru ✉

Аннотация. В авиационной отрасли активно развиваются беспилотные летательные аппараты (БЛА). Одним из путей развития БЛА является обеспечение устойчивого движения такого аппарата. Цель настоящей работы состоит в разработке достаточно общего подхода к построению функции Ляпунова для исследования устойчивости движения БЛА в условиях действия неконтролируемых факторов. В качестве возмущений рассматриваются неконтролируемые факторы как природного, так и искусственного происхождения, а также факторы, описывающие тактическую ситуацию и противодействие цели. В основе исследования лежит метод статистического синтеза функции Ляпунова. Достоинством метода является то, что он отражает единый конструктивный подход к построению функции Ляпунова для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которыми описывается аппарат.

Ключевые слова: устойчивость к многофакторной неопределенности, неконтролируемые факторы искусственного происхождения, статистический синтез функции Ляпунова, статистический критерий устойчивости, квадратичная форма базисной функции

Для цитирования: Балык В.М., Бородин И.Д. Выбор устойчивых проектных решений беспилотного летательного аппарата в условиях действий факторов неопределенности // Вестник Московского авиационного института. 2022. Т. 29. № 1. С. 57-66. DOI: 10.34759/vst-2022-1-57-66

Original article

SELECTION OF STABLE DESIGN SOLUTIONS FOR UNMANNED AERIAL VEHICLE UNDER CONDITIONS OF UNCERTAINTY FACTORS ACTION

Vladimir M. Balyk[1], Igor D. Borodin[2] ✉

[1,2]Moscow Aviation Institute (National Research University), MAI, Moscow, Russia
[2]iibbdd@yandex.ru ✉

Abstract

Currently, the role of unmanned aerial vehicles (UAV) has risen sharply in the field of aircraft building, and the scope of their application herewith is regularly expanding. This type of aerial vehicles is not at a stop, and has been actively developing in recent years. One of the ways of the UAV development consists in enhancing its resistance to the multifactor uncertainty. Multifactor uncertainty is being understood as uncertainty, stipulated by the uncontrolled factors action. It is worth noting that uncontrollable factors incur a significant impact on the design procedures results and design as a whole. In the most general case, the set of possible states of the uncontrollable factors vector will generate an equal to itself by the size set of optimal solutions.

In retrospect, this problem was being solved for the UAVs and aircraft in general by introducing a number of assumptions and special project regulations being formed based on the experience and designer's subjective perception. The "standard atmosphere" model, rated values of the materials strength etc. may serve as an example of such approach, though, objectively, there are always certain differences from these conditions. For such difference compensation and possible degradation of the aircraft operation, an excess (safety margin) is being admittedly provided in the aircraft capabilities with respect to the design conditions, which frequently leads to the aircraft weight and cost increase. These safety margins are not scientifically substantiated and being elaborated purely empirically. In general, this approach is distinguished by subjectivity. This subjectivism may be eliminated to a certain extent, if the UAV possesses the properties of uncontrollable factors resistance.

There is a whole number of stability studying methods, however, the most convenient and widespread method is Lyapunov function method, though it is imperfect and has a number of disadvantages. The most grave disadvantage of Lyapunov theory consists in the fact that in the general case the Lyapunov function should be guessed. The direct Lyapunov's method in the stability theory is basic for the stability studying of dynamic systems. However, the Lyapunov function definition does not directly relate to structural properties of the system under study, and, thus, there are still no exhaustive regular ways to its construction according to the given equations of the aircraft motion.

This work novelty lies in the fact that the UAV stability is being studied by a new constructive method of the Lyapunov function statistical synthesis. The statistical synthesis method is being applied to restore functional dependencies from the statistical data. Actually, the original problem of the UAV stability studying is being reduced to a nonlinear programming problem with a statistical stability criterion, by which the optimal design solution is being selected. Statistical synthesis is based on the three basic elements such as statistical sampling, basis functions and statistical criteria. As the result of the conducted study, the following results were obtained:

1. A method of stability studying for a wide class of the UAV-type aircraft has been developed.
2. The stability of the UAV movement was studied according to the developed statistical criterion.

Keywords: stability to multifactorial indetermination, uncontrollable factors of artificial origin, statistical synthesis of the Lyapunov function, statistical stability criterion, quadratic form of the basis function

For citation: Balyk V.M., Borodin I.D. Selection of stable design solutions for unmanned aerial vehicle under conditions of uncertainty factors action. *Aerospace MAI Journal*, 2022, vol. 29, no. 1, pp. 57-66. DOI: 10.34759/vst-2022-1-57-66

Введение

В настоящее время в области авиастроения резко возросла роль беспилотных летательных аппаратов, при этом регулярно расширяется область их применения. Совершенствование БЛА ведется за счет повышения точности попадания, расширения номенклатуры полезной нагрузки, обеспечения всепогодности и круглосуточности применения, расширения условий применения по высотам и дальностям сброса с самолета-носителя, а также за счет повышения устойчивости к многофакторной неопределенности. Под многофакторной неопределенностью понимается неопределенность, обусловленная действием неконтролируемых факторов [1, 2].

Как правило, проектирование БЛА ведется в условиях факторов неопределенности. Неконтролируемые факторы можно разделить по источникам неопределенности на факторы естественного (состояние атмосферы) и искусственного (человеческий фактор) происхождения. Для факторов неопределенности характерно то, что описывающие их характеристики имеют не фиксированное значение, а принадлежат некоторому диапазону. Особым источником неопределенности является тактическая ситуация применения БЛА с её многообразием вовлекаемых сил и средств, возможностями его носителей. Изменчивость тактических ситуаций приводит к невозможности однозначного описания траектории БЛА.

Необходимо отметить, что неконтролируемые факторы существенно влияют на результаты проектных процедур и проектирования в целом. В самом общем случае множество возможных состояний вектора неконтролируемых факторов будет порождать равное себе по мощности множество оптимальных решений. В итоге наличие множества возможных значений неконтролируемых факторов порождает неоднозначность понимания оптимальности проектных решений.

1. Постановка задачи

Построение математических моделей БЛА и моделирование его условий физического и функционального существования является неотъемлемой частью проектирования. Эффективность проектирования во многом зависит от «вложения» процессов моделирования условий функционального и физического состояния БЛА в процесс проектирования. Одно из важных требований, предъявляемых к образцам БЛА, — динамическая устойчивость к неконтролируемым факторам. Вопросы устойчивого движения динамических систем являются определяющими при разработке новых образцов БЛА [3, 4]. Особую значимость имеют проблемы выбора устойчивых проектных решений к различным факторам неопределенности.

Система $J\left(x,\dot{x},a,t,t_0,x_0\right)$ (где $\dot{x}=f\left(x,t\right)$ – система обыкновенных дифференциальных уравнений; x – вектор фазовых координат; a – вектор проектных параметров; t – время; J – заданный критерий оптимальности) называется устойчивой, если при любых ограниченных неконтролируемых факторах ω (ω – вектор неконтролируемых факторов) критерий $J\left(x,\dot{x},a,t,t_0,x_0\right)$ не выходит из заданной окрестности x_ε [5], при этом вектор проектных параметров a будем называть устойчивым проектным решением. Такие работы, как [6—8], указывают на актуальность проблемы выбора устойчивых режимов движения, а также на потребность в разработке методов идентификации устойчивости движения БЛА.

В ретроспективе для БЛА и летательных аппаратов в целом данная проблема решалась путем введения ряда допущений и специальных проектных регламентаций, формируемых на базе опыта и субъективного представления проектанта. Примером такого подхода может служить модель «стандартная атмосфера», номинальные значения прочности материалов и т. д, но объективно всегда имеются какие-либо отличия от этих условий. Для компенсации такого отличия и возможного ухудшения работы аппарата заведомо предусматривался избыток (коэффициенты запаса) в возможностях и ресурсах аппарата по отношению к расчетным условиям, что зачастую приводит к утяжелению и росту стоимости аппарата. Данные коэффициенты запаса не имеют достаточного научного обоснования и вырабатываются чисто эмпирически. В целом такой подход отличается субъективизмом, и снять такой субъективизм в известной мере возможно, если БЛА обладает свойствами устойчивости к неконтролируемым факторам.

Существует целый ряд методов исследования устойчивости, наиболее удобным и распространенным является метод функции Ляпунова, однако этот метод имеет ряд недостатков. Самым серьезным недостатком ляпуновской теории является то, что в общем случае функцию Ляпунова надо «угадывать». Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости является и поныне основным для исследования устойчивости динамических систем. Однако определение функции Ляпунова не связано прямо со структурными свойствами исследуемой системы, и поэтому до сих пор нет исчерпывающих регулярных способов её построения по заданным уравнениям движения динамической системы. Например, в работе [9] предложены некоторые методы построения функций Ляпунова для различных типов дифференциальных уравнений, а в [10, 11] было получено обобщение известной функции Ляпунова «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности».

Немаловажным обстоятельством при проектировании БЛА является фактор «дефицита размерности управления». Данный фактор возникает, когда размерность вектора управления меньше размерности вектора состояния управляемой системы, и в некоторых случаях [12, 13] эту сложность можно преодолеть. «Дефицит в размерности управления» во многом может быть преодолен включением в контур обеспечения устойчивости БЛА выбора проектных параметров.

2. Математическая модель БЛА

Для апробации разработанного метода необходим прототип. В качестве прототипа рассматривается БЛА, выполненный по аэродинамической схеме «утка», не имеющий контуров стабилизации в каналах крена и управления. Основные характеристики БЛА представлены в табл. 1. В настоящей работе под термином «БЛА» следует понимать одноразовое управляемое средство поражения.

Таблица 1

Основные характеристики БЛА

Наименование	Величина
Масса, кг	300
Длина, м	2,75
Диаметр корпуса, м	0,3
Размах хвостового оперения, м	1,1
Высота сброса, м	500 ... 6000
Скорость сброса, м/с	150...300
Угол сброса, град	-20 ... 10
Дальность сброса, м	2000 ... 9000

БЛА представляет собой аппарат постоянной массы. Уравнения движения такого рода ЛА содержатся в работе [14, 15]. В качестве инерциальной принята земная система координат $O_0X_gY_gZ_g$. Уравнения движения центра масс и относительно центра масс БЛА приведены в проекции на оси скоростной системы координат *OXYZ*. Форма записи этих уравнений имеет следующий вид:

$$m\frac{dV}{dt} = -X_s - G\sin\theta;$$

$$mV\frac{d\theta}{dt} = Y_s - G\cos\theta;$$

$$-mV\cos\theta\frac{d\psi}{dt} = Z_s;$$

$$I_z\frac{d\omega_z}{dt} = M_z; \qquad (1)$$

$$I_y\frac{d\omega_y}{dt} = M_y;$$

$$\frac{dx}{dt} = V\cos\theta\cos\psi;$$

$$\frac{dH}{dt} = V\sin\theta;$$

$$\frac{dz}{dt} = -V\cos\theta\sin\psi,$$

где V – скорость БЛА; G – сила тяжести БЛА; ω_y, ω_z – проекции вектора угловой скорости БЛА на связанные оси; θ, ψ – углы наклона и поворота траектории; X_s, Y_s, Z_s – проекции полной аэродинамической силы на скоростные оси; M_y, M_z – проекции моментов всех внешних сил; m – масса БЛА; I_y, I_z – моменты инерции БЛА относительно связанных осей; x, H, z – координаты БЛА.

Силы X_s, Y_s, Z_s и моменты M_y, M_z в математической модели определяются совокупностью аэродинамических характеристик изолированного симметричного аппарата, а также факторами аэродинамической асимметрии корпуса БЛА. Аэродинамические характеристики изолированного симметричного аппарата определяются на основе геометрических особенностей БЛА и являются функциями от проектных параметров. Учёт аэродинамической асимметрии в модели осуществляется введением соответствующих приращений $\Delta c_x, \Delta c_y, \Delta c_z, \Delta m_y, \Delta m_z$ к коэффициентам симметричного изолированного БЛА. При статистическом моделировании эти приращения задаются как случайные величины, соответствующие допустимым значениям конструктивных параметров.

Аэродинамические силы X_s, Y_s, Z_s и моменты M_y, M_z определяются по формулам:

$$X_s = -(c_x + \Delta c_x)qS;$$

$$Y_s = (c_y + \Delta c_y)qS;$$

$$Z_s = (c_z + \Delta c_z)qS;$$

$$M_y = (m_y + \Delta m_y)qSL;$$

$$M_z = (m_z + \Delta m_z)qSL,$$

где S – площадь миделева сечения; L – длина БЛА; $q = 0{,}5\rho V^2$ – скоростной напор; V – воздушная скорость БЛА; ρ — плотность воздуха. Плотность воздуха зависит от высоты и определяется в соответствии с ГОСТ 4401-81.

В рассматриваемом БЛА используется флюгерная система наведения. В процессе полёта аппарата флюгер, как статически устойчивый аэродинамический объект, устанавливается по направлению набегающего воздушного потока. В результате расположенный на флюгере координатор ориентируется в пространстве по вектору воздушной скорости БЛА. Точность ориентации зависит от аэродинамических особенностей флюгера и точности его изготовления. Таким образом, БЛА имеет возможность определять угловое рассогласование между направлением вектора воздушной скорости и направлением на подсвеченную цель. Такая текущая информация на борту БЛА позволяет организовать наведение по методу погони [1, 16]. При идеальном выполнении этого метода система должна устранять угловое рассогласование между вектором земной скорости БЛА и направлением на цель и таким образом вектор скорости БЛА должен быть непрерывно направлен на цель. При наведении этим методом касательная к траектории совпадает с линией визирования цели и угол упреждения цели η всё время равен нулю. Кинематические уравнения метода погони имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= V_{\text{ц}} \cos\varphi - V; \\ r\frac{d\varphi}{dt} &= -V_{\text{ц}} \sin\varphi, \end{aligned} \tag{2}$$

где r — расстояние между БЛА и целью; $V_{\text{ц}}$ — скорость цели; φ — угол между линией визирования и осью O_0X_g земной системы координат.

Динамические свойства БЛА как объекта управления характеризуются возмущенным движением, возникающим при действии факторов возмущения. Обычно это свойство называют устойчивостью аппарата. Это понятие связано с тремя случаями изменения приращений $\Delta V, \Delta\theta, \Delta\psi, \Delta\omega_x, \Delta\omega_y, \ldots$ (Набор приращений может меняться в зависимости от упрощений, допущенных в модельной задаче, в собственном движении). В первом случае при неограниченном возрастании времени приращения всех параметров движения стремятся к нулю – «затухают» и БЛА будет устойчивым. Во втором случае приращения не затухают, но и не возрастают — в этом случае аппарат нейтрально устойчив. Наконец, если приращения с течением времени возрастают — аппарат неустойчивый. В настоящей работе устойчивость БЛА изучается методом статистического синтеза функции Ляпунова.

3. Метод статистического синтеза функции Ляпунова

Рассматривается динамическая система, описываемая векторным уравнением:

$$\dot{x} = f(x,t), \tag{3}$$

где x, f — вещественные векторы; $x \in \mathbb{R}^n$; f определена в $R \times \mathbb{R}^n$; t – время. Предполагается, что f — достаточно гладкая вектор-функция, чтобы гарантировать существование, единственность и непрерывную зависимость решений задачи Коши от начальных условий.

На правую часть системы (3) накладываются следующие условия [17, 18]:

1. Функция $f(x,t)$ принадлежит классу C_R^n – n раз дифференцируемых по x и по t функций на области $R = Q \times I$, где $I = [t_0, \infty)$. Область

$$Q = \left\{x : \|x\| < H,\ H \in R^+\right\}.$$

Здесь и далее, по определению,

$$\|x\| = \max\left\{|x_1|, \ldots, |x_n|\right\},\ |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

– соответственно чебышевская и евклидова нормы вектора x.

2. Функция $f(x,t)$ имеет ограниченные частные производные по x и по t на области R.

3. Функция $f(x,t)$ и её производная $\dot{f}(x,t)$ по t тождественно равны нулю на I только при $x = 0$.

Если условия 1, 2, 3 имеют место, то условия Липшица заведомо выполнены и, следовательно, существует единственная траектория системы (3), проходящая в момент времени t_0 через точку x_0. Любое частное решение $\tilde{x}(t) = \text{const}$ называется равновесным состоянием системы (3).

Имеет место следующая теорема [19]. Пусть существует дифференцируемая скалярная функция $\upsilon(x,t)$ переменных состояний системы (3) и времени t, обладающая при условиях $t > t_0$ и $|x_s| \le H$, $s = 1, \ldots, n$ следующими свойствами:

$$\begin{aligned} &\upsilon(x,t) > 0; \\ &\dot{\upsilon}(x,t) = \frac{d\upsilon(x,t)}{dt} = \left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x}\right)^T \frac{dx}{dt} \le 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Тогда состояние равновесия системы (3) является устойчивым (по начальным данным). Заметим, что метод Ляпунова предоставляет достаточный критерий устойчивости.

Задача состоит в определении функции $\upsilon(x,t)$ при любых начальных возмущениях при удовлетворении условий (4). Представим функцию $\upsilon(x,t)$ в виде квадратичной формы:

$$\upsilon(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)x_i x_j, \qquad (5)$$

где $b_{ij}(t),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$ – коэффициенты, подлежащие выбору из условия удовлетворения неравенствам (4), и эти коэффициенты зависят от времени. Функция (5) есть нелинейная функция, устойчивость которой рассматривается при постоянно действующих возмущениях [17].

Статистика для формирования функции Ляпунова набирается по результатам интегрирования системы (3). В табл. 2 в i-й строке указаны моменты времени t_i, $i=\overline{1,N}$, фазовые координаты $(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)_i$, значение функции Ляпунова $\upsilon_i(x,t)$, значение производной $\dot{\upsilon}_i(x,t)$. Моменты времени заданы с шагом интегрирования Δt.

Заметим, что так как здесь проверяются знаки функции Ляпунова и её производной для частных решений системы (3), то возможность применения статистического синтеза для других решений следует из того, что здесь рассматривается методология применения статистического синтеза, которая есть систематическая процедура, определяющая порядок применения операций, приведенных в табл. 2.

Таблица 2

Статистика функции Ляпунова и её производной

t_i	$(x_1,x_2,\dots,x_n)_i$	$\upsilon_i(x,t)$	$\dot{\upsilon}_i(x,t)$
t_1	$(x_1,x_2,\dots,x_n)_1$	$\upsilon_1(x,t)$	$\dot{\upsilon}_1(x,t)$
t_2	$(x_1,x_2,\dots,x_n)_2$	$\upsilon_2(x,t)$	$\dot{\upsilon}_2(x,t)$
...	...	...	...
t_N	$(x_1,x_2,\dots,x_n)_N$	$\upsilon_N(x,t)$	$\dot{\upsilon}_N(x,t)$

Для каждой строки табл. 2 запишем необходимые условия устойчивости системы (4):

$$\upsilon_i(x,t)>0,\ \dot{\upsilon}_i(x,t)\le 0,\ i=\overline{1,N}.$$

Эти условия также можно записать в виде:

$$\operatorname{sign}\left(\upsilon_i(x,t)\right)=1,\ \operatorname{sign}\left(\frac{d\upsilon_i(x,t)}{dt}\right)=-1,$$

т.е. критерий локальной устойчивости в i-й точке в случае устойчивости должен равняться нулю, в противном случае примем его равным 1:

$$J_{cm_i}=\begin{cases}0, & \text{если } \upsilon_i(x,t)>0,\ \dot{\upsilon}_i(x,t)\le 0;\\ 1, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Распространим это требование на весь объём выборки N и получим:

$$J_{cm}=\sum_{i=1}^{N}J_{cm_i}.$$

Таким образом, статистический критерий устойчивости имеет вид:

$$J_{cm}^{opt}=\min_{b_{ij},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}}\left[\sum_{i=1}^{N}J_{cm_i}\right]. \qquad (6)$$

Данный критерий необходимо минимизировать за счет выбора параметров $b_{ij}(t),\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}$. Для подтверждения устойчивости необходимо, чтобы условие (4) выполнялось, т.е. критерий (6) не просто минимизировался, а обращался в ноль.

Метод статистического синтеза зависимостей применяется для восстановления функциональных зависимостей по статистическим данным [5, 19, 20]. Статистическая выборка состоит из входных, промежуточных и выходных столбцов. Общий вид такой выборки представлен в табл. 3.

Здесь два входных столбца: вектор проектных параметров $(d_1,\ d_2,\dots,\ d_l)$ и вектор неконтролируемых факторов $(\omega_1,\omega_2,\dots,\omega_m)$, один промежуточный столбец, состоящий из характеристических функций χ, и один выходной столбец, состоящий из критериальных оценок $J(d,\omega)$. Характеристическая функция χ описывает те свойства, которые необходимо отразить в восстанавливаемой зависимости.

Статистический синтез основывается на трех базовых элементах: статистической выборке, базисных функциях, статистических критериях. В качестве базисной функции в рассматриваемом методе принята квадратичная форма (5) с коэффициентами, зависящими от времени t. В качестве статистического критерия принимается критерий (6).

Выборка, реализующая статистический синтез функции Ляпунова, представлена в табл. 4, где $b=b(t)$ – вектор коэффициентов квадратичной формы (5); $d=(d_1,\ d_2,\dots,\ d_l)$ – вектор проектных параметров; t_k – конечное время интегрирования уравнений движения.

В табл. 3 есть столбец характеристической функции χ, предназначенный для расчета различных ограничений и условий. Такими условиями в табл. 4 являются условия положительнос-

Таблица 3

Общий вид статистической выборки

№ п/п	$(d_1, d_2, \ldots, d_l)$	$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)$	χ	$J(d, \omega)$
1	$(d_1, d_2, \ldots, d_l)_1$	$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)_{1,1}$ $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)_{2,1}$ … $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)_{S,1}$	$\chi_{1,1}$ $\chi_{2,1}$ … $\chi_{S,1}$	$J_1(d, \omega)$
2	$(d_1, d_2, \ldots, d_l)_2$	$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)_{1,2}$ $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)_{2,2}$ … $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)_{S,2}$	$\chi_{1,2}$ $\chi_{2,2}$ … $\chi_{S,2}$	$J_2(d, \omega)$
…	…	…	…	…
N	$(d_1, d_2, \ldots, d_l)_N$	$(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)_{1,N}$ $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)_{2,N}$ … $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m)_{S,N}$	$\chi_{1,N}$ $\chi_{2,N}$ … $\chi_{S,N}$	$J_N(d, \omega)$

Таблица 4

Статистический синтез функции Ляпунова

№	(b,d)	t	ω	$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	$\upsilon(x,t)$	$\dot{\upsilon}(x,t)$	$J_{cm}(b,d)$
1	$(b,d)_1$	t_1 t_2 … t_k	ω_1	$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{1,1}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{2,1}$ … $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{k,1}$	$\upsilon(x,t)_{1,1}$ $\upsilon(x,t)_{2,1}$ … $\upsilon(x,t)_{k,1}$	$\dot{\upsilon}(x,t)_{1,1}$ $\dot{\upsilon}(x,t)_{2,1}$ … $\dot{\upsilon}(x,t)_{k,1}$	$J_{cm}(b,d)_1$
2	$(b,d)_2$	t_1 t_2 … t_k	ω_2	$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{1,2}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{2,2}$ … $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{k,2}$	$\upsilon(x,t)_{1,2}$ $\upsilon(x,t)_{2,2}$ … $\upsilon(x,t)_{k,2}$	$\dot{\upsilon}(x,t)_{1,2}$ $\dot{\upsilon}(x,t)_{2,2}$ … $\dot{\upsilon}(x,t)_{k,2}$	$J_{cm}(b,d)_2$
…	…	…	…	…	…	…	…
N	$(b,d)_N$	t_1 t_2 … t_k	ω_N	$(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{1,N}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{2,N}$ … $(x_1, x_2, \ldots, x_n)_{k,N}$	$\upsilon(x,t)_{1,N}$ $\upsilon(x,t)_{2,N}$ … $\upsilon(x,t)_{k,N}$	$\dot{\upsilon}(x,t)_{1,N}$ $\dot{\upsilon}(x,t)_{2,N}$ … $\dot{\upsilon}(x,t)_{k,N}$	$J_{cm}(b,d)_N$

ти функции Ляпунова и отрицательности производной от функции Ляпунова по времени.

Статистическая выборка из табл. 4 построена в соответствии с процессом минимизации критерия (6). Каждая строка табл. 4 соответствует i-му поисковому шагу, на котором задается матрица коэффициентов квадратичной формы и варьируемые проектные параметры, по которым вычисляется критерий оптимальности (6). Таким образом, глобальный минимум критерия (6) равен нулю.

4. Модельная задача

Выполним апробацию разработанного метода на примере БЛА, с характеристиками, представленными в табл. 1. Уравнения движения представлены в (1). Модельная задача решена по статистическому критерию устойчивости (6), по которому выбираются коэффициенты функции Ляпунова. Заметим, что условия (4) должны выполняться во всех точках интегрирования.

В рассматриваемой задаче вектор неконтролируемых факторов имеет следующий вид:

$$\omega = \left(x_{ц}, z_{ц}, V_{xц}, V_{zц}\right), \tag{7}$$

где $x_{ц}$, $z_{ц}$ – начальные координаты цели; $V_{xц}$, $V_{zц}$ – проекции скорости цели в начальный момент времени. Считается, что неконтролируемые факторы $x_{ц}$, $z_{ц}$ подчиняются нормальному закону распределения, а $V_{xц}$, $V_{zц}$– подчиняются закону распределения Рэлея. Пусть неконтролируемые факторы лежат в заданном диапазоне:

$$-300\,\text{м} \le x_{ц} \le 300\,\text{м};\ \ -300\,\text{м} \le z_{ц} \le 300\,\text{м};$$

$$0 \le V_{xц} \le 10\,\text{м/с};\ \ 0 \le V_{zц} \le 10\,\text{м/с}.$$

Функция Ляпунова принимается в виде квадратичной формы (5), где

$$n = 5,\ x_1 = V,\ x_2 = \theta,\ x_3 = \psi,\ x_4 = \omega_z,\ x_5 = \omega_y.$$

Таким образом, функция Ляпунова примет окончательный вид:

$$\begin{aligned}\upsilon(x,t) &= b_{11}V^2 + b_{12}V\theta + b_{13}V\psi + b_{14}V\omega_z + b_{15}V\omega_y + \\ &+ b_{21}\theta V + b_{22}\theta^2 + b_{23}\theta\psi + b_{24}\theta\omega_z + b_{25}\theta\omega_y + \\ &+ b_{31}\psi V + b_{32}\psi\theta + b_{33}\psi^2 + b_{34}\psi\omega_z + b_{35}\psi\omega_y + \\ &+ b_{41}\omega_z V + b_{42}\omega_z\theta + b_{43}\omega_z\psi + b_{44}\omega_z^2 + b_{45}\omega_z\omega_y + \\ &+ b_{51}\omega_y V + b_{52}\omega_y\theta + b_{53}\omega_y\psi + b_{54}\omega_y\omega_z + b_{55}\omega_y^2.\end{aligned}$$

Производная функции Ляпунова $\dot{\upsilon}(x,t)$ имеет вид:

$$\begin{aligned}\dot{\upsilon}(x,t) &= \frac{\partial\upsilon}{\partial V}\cdot\frac{dV}{dt} + \frac{\partial\upsilon}{\partial\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\upsilon}{\partial\psi}\cdot\frac{d\psi}{dt} + \\ &+ \frac{\partial\upsilon}{\partial\omega_z}\cdot\frac{d\omega_z}{dt} + \frac{\partial\upsilon}{\partial\omega_y}\cdot\frac{d\omega_y}{dt}.\end{aligned}$$

Вектор варьируемых параметров задается следующим образом:

$$b = \left(b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{14}, b_{15}, b_{21}, b_{22}, b_{23}, \ldots, b_{51}, b_{52}, b_{53}, b_{54}, b_{55}\right).$$

Размерность задачи равна 25. Параметрические ограничения заданы в виде:

$$-100 \le b_{ij} \le 100,\ i = \overline{1,5},\ j = \overline{1,5}.$$

В результате минимизации критерия (6) определяется вектор варьируемых параметров b, при котором число фазовых точек по траектории, в которых не выполняются условия (4), будет равным нулю.

Значения функции Ляпунова и её производной в начальной точке оптимизации приведены в табл. 5, а оптимальное решение — в табл. 6.

Как видно из табл. 5, начальное решение не годится на роль функции Ляпунова.

В результате решения задачи (6) количество точек, в которых не выполнялись условия (4), было сведено к минимуму. Было получено опти-

Таблица 5

Начальное решение

№ п/п	t, с	υ	$\dot{\upsilon}$
1	0,05	0,18E-5>0	-2,04E+7<0
2	0,5	-1,01E-2<0	-2,02E+13<0
3	1	-0,19<0	2,90E+13>0
4	1,5	-0,14<0	4,37E+12>0
5	2	-0,16<0	9,87E+12>0
6	2,5	-0,89<0	1,63E+13>0
7	3	-6,26E-3<0	-9,60E+12<0
8	3,5	-0,28<0	-1,64E+13<0
...	...	...	...
35	17	-29,52<0	2,75E+13>0
36	17,5	-30,15<0	2,16E+13>0
37	18	-34,03<0	2,93E+13>0

Таблица 6

Оптимальное решение

№ п/п	t, с	υ	$\dot{\upsilon}$
1	0,05	98,81>0	-6,12E+2<0
2	0,5	65,54>0	-9,07E+8<0
3	1	41,70>0	-2,75E+9<0
4	1,5	15,12>0	-7,84E+7<0
5	2	3,67>0	-4,08E+10<0
6	2,5	16,17E-2>0	-2,97E+9<0
7	3	37,52E-3>0	-3,41E+8<0
8	3,5	56,01E-4>0	-7,91E+8<0
...	...	...	...
35	17	45,42E-5>0	-2,83E+6<0
36	17,5	37,96E-5>0	-2,59E+5<0
37	18	30,27E-5>0	-5,57E+3<0

мальное значение критерия: $J_{cm}^{opt} = 0$. Задача решалась при фиксированных проектных параметрах, варьировались только коэффициенты b_{ij}. Рассмотренная модельная задача показала, что для выбранных исходных данных, описывающих конструктивные характеристики БЛА и статистические свойства неконтролируемых факторов, предлагаемый метод синтеза функции Ляпунова позволил в конечном итоге подтвердить устойчивость рассматриваемого аппарата.

Выводы

1. Разработан конструктивный метод исследования устойчивости для широкого класса летательных аппаратов типа БЛА.

2. Исследована устойчивость движения БЛА по разработанному статистическому критерию.

Список источников

1. *Гребеников А.Г., Мялица А.К., Парфенюк В.В.* и др. Общие виды и характеристики беспилотных летательных аппаратов: Справочное пособие. — Харьков: Харьковский авиационный институт, 2008. — 377 с.
2. *Биард Р.У., МакЛэйн Т.У.* Малые беспилотные летательные аппараты: теория и практика / Пер. с англ. А.И. Демьяникова; Под ред. Г.В. Анцева. — М.: Техносфера, 2015. — 311 с.
3. *Маленков А.А.* Выбор проектных решений при проектировании системы беспилотных летательных аппаратов в условиях многоцелевой неопределенности // Вестник Московского авиационного института. 2018. Т. 25. № 2. С. 7-15.
4. *Балык В.М., Кулакова Р.Д., Хесин Л.Б.* Модификация проектных решений при статистическом синтезе обликовых характеристик беспилотного летательного аппарата // Вестник Московского авиационного института. 2011. Т. 18. № 2. С. 31-40.
5. *Балык В.М.* Статистический синтез проектных решений при разработке сложных систем. — М.: Изд-во МАИ, 2011. – 278 с.
6. *Балык В.М., Калуцкий Н.С.* Статистический синтез устойчивых проектных решений при проектировании летательного аппарата в условиях многофакторной неопределенности // Вестник Московского авиационного института. 2008. Т. 15. № 1. С. 29-36.
7. *Freeman J.A., Roy C.J.* Global optimization under uncertainty and uncertainty quantification applied to tractor-trailer base flaps // Journal of Verification, Validation and Uncertainty Quantification. 2016. Vol. 1. No. 2, 16 p. DOI: 10.1115/1.4033289
8. *Попов В.А., Федутиков Д.В.* Развитие направления беспилотных летательных аппаратов за рубежом. — М.: ГосНИИАС, 2014. — 11 с.
9. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова. — М.: Наука, 1970. — 240 с.
10. *Лозгачев Г.И.* Об одном способе построения функций Ляпунова // Автоматика и телемеханика. 1996. № 10. С. 18-23. URL: http://www.mathnet.ru/links/bc432f94e55040c840700be94d77ecc0/at2800.pdf
11. *Пропой А.И.* О проблеме устойчивости движения // Автоматика и телемеханика. 2000. №4. С. 51-60.
12. *Румянцев В.В.* Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // Прикладная математика и механика. 1995. Т.59. № 6. С. 916-921.
13. *Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A.* Topics in Mathematical System Theory. — McGraw-Hill Book Company. New York, 1967. — 358 p.
14. *Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов: Учеб. пособие. — М.: Машиностроение, 1973. — 616 с.
15. *Лысенко Л.Н.* (ред.). Баллистика: Учебник. — Пенза: Изд-во ПАИИ, 2005. — 510 с.
16. *Кринецкий Е.И.* Системы самонаведения. — М.: Машиностроение, 1970. — 236 с.
17. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Пер. с англ. В.Н. Рубановского и др.; Под ред. В. В. Румянцева. — М.: Мир, 1980. — 300 с.
18. *Барбашин Е.А.* Введение в теорию устойчивости. — Изд. 2-е. – М.: URSS. Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, cop. 2012. — 223 с.
19. *Миронов В.В., Северцев Н.А.* Методы анализа устойчивости систем и управляемости движением. — М.: Изд-во РУДН, 2002. – 164 с.
20. *Ивахненко А.Г.* Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем. — Киев: Наукова думка, 1982. — 296 с.

References

1. Grebenikov A.G., Myalitsa A.K., Parfenyuk V.V. et al. *Obshchie vidy i kharakteristiki bespilotnykh letatel'nykh apparatov* (General views and characteristics of unmanned aerial vehicles), Kharkiv, Khar'kovskii aviatsionnyi institut, 2008, 377 p.
2. Beard R.W., McLain T.W. *Small unmanned aircraft: theory and practice*. Princeton University Press, 2012, 320 p.
3. Malenkov A.A. Design solutions selection while developing a system of unmanned flying vehicles in conditions of multi-target uncertainty. *Aerospace MAI Journal,* 2018, vol. 25, no. 2, pp. 7-15.
4. Balyk V.M., Kulakova R.D., Khesin L.B. Modification of the design decisions in the statistical synthesis of the external characteristics of the aircraft. *Aerospace MAI Journal,* 2011, vol. 18, no. 2, pp. 31-40.
5. Balyk V.M. *Statisticheskii sintez proektnykh reshenii pri razrabotke slozhnykh system* (Statistical synthesis of design solutions in complex systems development), Moscow, MAI, 2011, 278 p.
6. Balyk V.M., Kalutsky N.S. A statistical synthesis of stable design choices for flying vehicle design processes in conditions of multiple-factor uncertainty. *Aerospace MAI Journal,* 2008, vol. 15, no. 1, pp. 29-36.
7. Freeman J.A., Roy C.J. Global optimization under uncertainty and uncertainty quantification applied to tractor-trailer base flaps. *Journal of Verification, Validation and Uncertainty Quantification*, 2016, vol. 1, no. 2, 16 p. DOI: 10.1115/1.4033289
8. Popov V.A., Fedutikov D.V. *Razvitie napravleniya bespilotnykh letatel'nykh apparatov za rubezhom* (Development of the unmanned aerial vehicles trend abroad), Moscow, GosNIIAS, 2014, 11 p.
9. Barbashin E.A. *Funktsii Lyapunova* (Lyapunov functions), Moscow, Nauka, 1970, 240 p.
10. Lozgachev G.I. *Avtomatika i telemekhanika*, 1996, no. 10, pp. 18-23. URL: http://www.mathnet.ru/links/bc432f94e55040c840700be94d77ecc0/at2800.pdf
11. Propoi A.I. *Avtomatika i telemekhanika,* 2000, no. 4, pp. 51-60.
12. Rumyantsev V.V. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1995, vol. 59, no. 6, pp. 916-921.
13. Kalman R.E., Falb P.L., Arbib M.A. *Topics in Mathematical System Theory*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1967, 358 p.
14. Lebedev A.A., Chernobrovkin L.S. *Dinamika poleta bespilotnykh letatel'nykh apparatov* (Flight dynamics of unmanned aerial vehicles), Moscow, Mashinostroenie, 1973, 616 p.
15. Lysenko L.N. (ed) *Ballistika* (Ballistics), Penza, PAII, 2005, 510 p.
16. Krinetskii E.I. *Sistemy samonavedeniya* (Homing systems), Moscow, Mashinostroenie, 1970, 236 p.
17. Rouche N., Habets P., Laloy M. *Stability Theory by Liapunov's Direct Metod*. Springer, 1977, 408 p.
18. Barbashin E.A. *Vvedenie v teoriyu ustoichivosti* (Introduction to the theory of stability). 2nd ed. Moscow, URSS. Knizhnyi dom "LIBROKOM", 2012, 223 p.
19. Mironov V.V., Severtsev N.A. *Metody analiza ustoichivosti sistem i upravlyaemosti dvizheniem* (Methods of stability analysis of systems and movement controllability), Moscow, RUDN, 2002, 164 p.
20. Ivakhnenko A.G. *Induktivnyi metod samoorganizatsii modelei slozhnykh sistem* (Inductive method of complex systems models self-organization), Kiev, Naukova dumka, 1982, 296 p.

Статья поступила в редакцию 20.07.2021; одобрена после рецензирования 02.12.2021; принята к публикации 06.12.2021.

The article was submitted on 20.07.2021; approved after reviewing on 02.12.2021; accepted for publication on 06.12.2021.