

Учет стеснения деформации сечения при кручении слоистой балки типа торсион из композиционных материалов

А.А. Дудченко, Е.А. Башаров

Аннотация

Разработка аналитического метода учета стеснения деформации при расчете напряженно-деформированного состояния (НДС) многослойной балки – было главной целью исследования. На основе аналитических формул построенных на основе теории изгиба многослойной балки и теории кручения стержня сплошного сечения, изложенных в работах В. В. Васильева[1] и В.З. Власова [2], была разработана методика учета стеснения деформации балки из композиционного материала.

Ключевые слова

Многослойная балка, напряженно-деформированное состояние, стеснение деформации сечения, крутящий момент, статическая нагрузка.

Введение

Характерной чертой при нагружении слоистых балок произвольного сечения кручением является отклонение сечения от плоскости, т.е. деформация сечения. Если закрепить сечение, то в окрестности закрепления от деформации возникают дополнительные напряжения, которые необходимо учитывать в расчете. Схема общего нагружения слоистой балки представлена на рис.1.

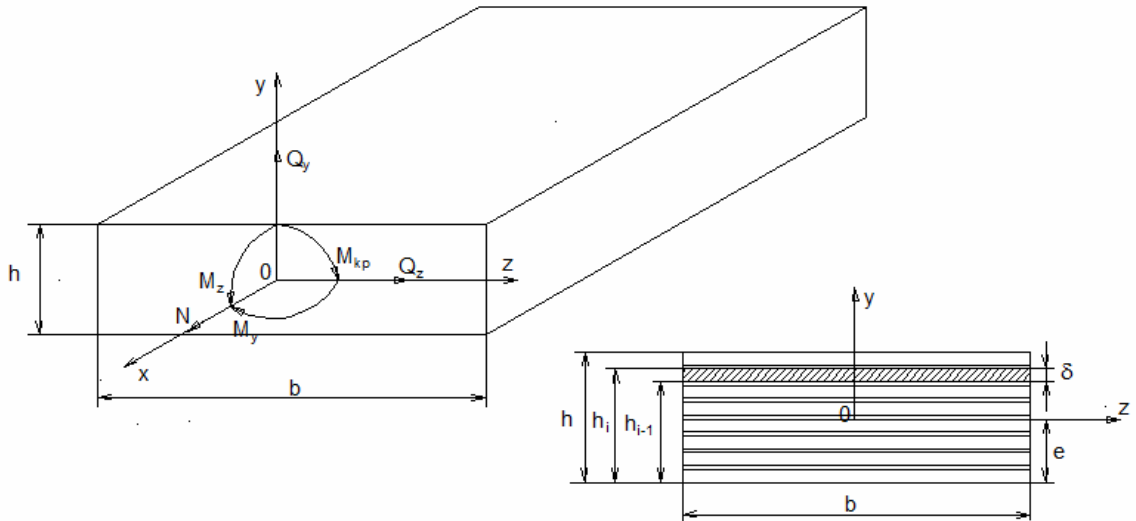


Рис.1

Конструктивно слоистая упругая балка состоит из набора пластин (пакетов) из стеклопластика на основе стеклоткани, между которыми проложена резина. Резина применена с целью увеличения изгибной жесткости торсиона при разносе несущих слоев, но без существенного повышения крутильной жесткости.

Постановка задачи

Рассмотрим стесненное кручение в районе заделки торсиона, которая препятствует свободной деформации его сечений. В результате стеснения деформации в слоях слоистой балки в зоне влияния заделки возникают дополнительные нормальные усилия N_x , которые вызывают деформацию сечения и поток касательных напряжений. На боковых стенках пластин, из-за их небольшой высоты явление деформации проявляется незначительно и можно считать, что здесь справедлив закон плоских сечений. Характер стесненной деформации поперечного сечения балки представлен на рис.2.

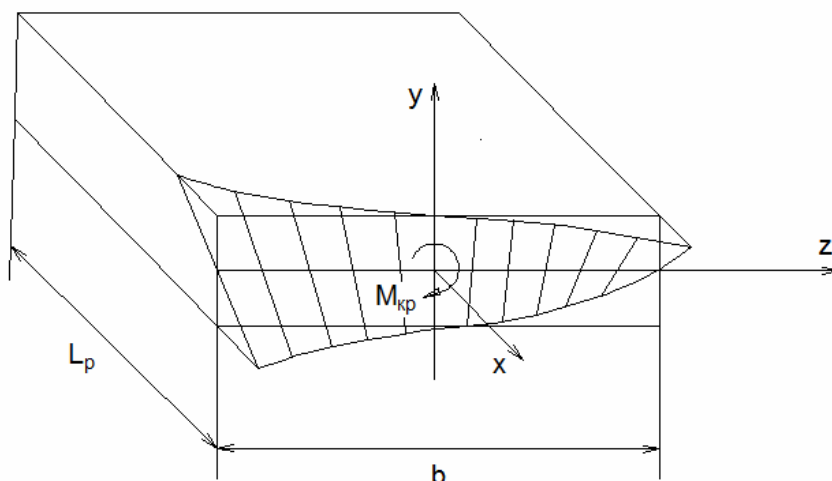


Рис.2

Основные допущения в расчетной модели:

- Недеформируемость поперечного сечения;
- Пренебрегаем эффектом Пуассона ($\mu = 0$);
- Деформация сечения линейно пропорциональна углу закручивания сечения θ_x ;
- Крутящий момент постоянный по длине балки $M_{kp} = Const$;
- Влиянием каждого касательного напряжения друг на друга в уравнениях равновесия пренебрегаем.

В расчете применен метод приведения 3-х мерной задачи к одномерной. Решение ищем в перемещениях. Перемещение любой точки слоистой упругой балки можно записать в виде:

$$u(x, y, z) = u_x(x) f(z, y) \quad (1)$$

где $u_x(x)$ – неизвестная функция распределения перемещений при деформации.

$f(z, y)$ – функция свободной деформации.

Выбор функции возможной деформации сечения вызывает некоторые трудности, т.к. от этого будут зависеть точность полученных результатов расчета. Запишем функцию свободной деформации поперечного сечения стержня при кручении в виде, изложенной в работе В.З Власова [1]:

$$f(z, y) = zy \quad (2)$$

Можно представить функцию деформации в виде, предложенном в работе В.В. Васильева [2]:

$$f(z, y) = \left(\frac{2sh(kz)}{kch\lambda} + z \right) y \quad (3)$$

где k, λ – обобщенные коэффициенты жесткости.

Запишем уравнения равновесия для балки в напряжениях:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + N = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

и уравнение крутящего момента в сечении:

$$M_{kp} = \iint (z\tau_{xy} - y\tau_{xz}) dz dy,$$

где N – внешняя объемная продольная сила; M_{kp} – внешний крутящий момент.

Запишем потенциальную энергию деформации балки в форме:

$$U = \int_0^L \iint_F \left(\frac{\sigma_x^2}{2E_x} + \frac{\tau_{xy}^2}{2G_{xy}} + \frac{\tau_{xz}^2}{2G_{xz}} \right) dF dx \quad (5)$$

где E_x, G_{xy}, G_{xz} – модули упругости и сдвига упругой балки.

Запишем потенциальную энергию деформации балки через характеристики сечения:

$$U = \int_0^L \left(\frac{E_x F}{2} (u_x'')^2 + \frac{G(I_z + I_y)}{2} (u_x')^2 - M_{kp} \theta_x \right) dx \quad (6)$$

$$F = \iint f(z, y)^2 dz dy, \quad I_z = \iint y^2 dz dy, \quad I_y = \iint z^2 dz dy$$

где

G – модуль упругости при сдвиге.

Пренебрегая эффектом Пуассона, который не учитывается в энергии нагружения балок, получаем энергетический функционал в виде:

$$U = \int_0^L \Phi(u_x'', u_x', \theta_x, x) dx \quad (7)$$

где Φ – подынтегральное выражение.

Согласно принципу Лагранжа и вариационного исчисления получаем с учетом работы внешних сил дифференциальное уравнение:

$$(E_x F)u_x'' - G(I_z + I_y)u_x + G(I_z - I_y)\theta_x' + N = 0 \quad (8)$$

Дополнительные нормальные усилия в зоне стеснения депланации вызывают дополнительный поток касательных напряжений, который выражается в виде дополнительных усилий N_{xs} . Эти усилия находим из уравнения равновесия:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial z} = 0 \quad (9)$$

Используя уравнения равновесия и уравнение моментов (4) по приведенной выше методике получаем 2-е дифференциальное уравнение совместности деформаций:

$$-G(I_z - I_y)u_x' + G(I_z + I_y)\theta_x'' + M_{kp} = 0 \quad (10)$$

Таким образом, получили разрешающую систему:

$$\begin{cases} (E_x F)u_x'' - G(I_z + I_y)u_x + G(I_z - I_y)\theta_x' + N = 0 \\ -G(I_z - I_y)u_x' + G(I_z + I_y)\theta_x'' + M_{kp} = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Систему (11) можно свести к 1-му уравнению путем выбора разрешающей функции $U = U(x)$ так, чтобы удовлетворялось второе уравнение системы.

Тогда пусть:

$$\begin{cases} u_x = -G(I_z - I_y)U' \\ \theta_x = E_x F U'' - G(I_z + I_y)U \end{cases} \quad (12)$$

После подстановки (12) в (11) получаем разрешающее уравнение в виде:

$$E_x F U^{IV} - G \left(\frac{4I_z I_y}{I_z + I_y} \right) U'' = - \frac{M_{kp}}{G(I_z + I_y)}$$

или

$$AU^{IV} - BU'' = -C,$$

$$\text{где } A = E_x F, \quad B = G \left(\frac{4I_z I_y}{I_z + I_y} \right), \quad C = \frac{M_{kp}}{G(I_z + I_y)}.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$U(x) = \frac{A}{B} e^{-mx} C_1 + \frac{A}{B} e^{mx} C_2 + x C_3 + C_4 + \bar{U},$$

где $\bar{U} = \frac{1}{2} \frac{C}{B} x^2$ - частное решение дифференциального уравнения, $m = \sqrt{\frac{B}{A}}$,

$(B < A)$, C_1, C_2, C_3, C_4 - константы решения.

Константы интегрирования определяются из следующих граничных условий:

при $x = 0$: $U(0) = U'(L) = 0$, при $x = L$: используем естественные граничные условия:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0.$$

Если в решении пренебречь влиянием касательных напряжений и зависимостью напряжения σ_x от координаты по y , то разрешающее дифференциальное уравнение будет второго порядка вида:

$$U'' + m^2 U = C, \quad m^2 = \frac{B}{A} \quad \text{где: } B < A$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$U = C_1 e^{-m(L-x)} + C_2 e^{-m(L-x)} + \bar{U}$$

где \bar{U} - частное решение, C_1, C_2 - константы решения, которые определяются из граничных условий:

$$U(0) = U'(L) = 0$$

Отсюда получаем: $\bar{U} = \frac{C}{m^2}$, $C_1 = -\frac{C}{m^2(1-e^{-mx})}$, $C_2 = C_1 e^{-mL}$

Тогда разрешающую функцию можно записать в виде:

$$U = \frac{C}{m^2} \left[1 - \frac{e^{-m(L-x)}}{1-e^{-mx}} - \frac{e^{-mL} e^{-m(L-x)}}{1-e^{-mx}} \right]$$

Далее с учетом (12) определяются функции $u_x(x)$ и $\theta_x(x)$.

Теперь можно определить значения нормальных и касательных напряжений в слоях слоистой балки по ее длине:

$$\sigma_x = E_x \frac{\partial u}{\partial x} = E_x u'_x(x) f(z, y),$$

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G u'_x(x) \frac{\partial f(z, y)}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = G \gamma_{xy} = G u'_x(x) \frac{\partial f(z, y)}{\partial y}$$

Далее определяются значения нормальных и касательных усилий в слоях по длине балки:

$$N_x = B_{11} \varepsilon_x = B_{11} u'_x f(z, y),$$

$$N_{xs} = B_{33} \gamma_{xs} = B_{33} u'_x(x) \sqrt{\left(\frac{\partial f(z, y)}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(z, y)}{\partial y}\right)^2},$$

где $\gamma_{xs} = \sqrt{\gamma_{xz}^2 + \gamma_{xy}^2}$, B_{ij} - приведенные жесткости материала;

Суммарные усилия в слоях слоистой балки по ее длине:

$$N_x^\Sigma = N_{xB} + N_x, \quad N_{xs}^\Sigma = N_{xsB} + N_{xs},$$

где N_{xB}, N_{xsB} - нормальные и касательные усилия по балочной теории,

N_x, N_{xs} - дополнительные усилия от стеснения деформации.

Пример расчета слоистой балки из КМ по приведенной методике

В качестве примера расчета, для подтверждения корректности предлагаемого подхода к определению напряженно-деформированного состояния, рассмотрим слоистую балку, нагруженную изгибающим и крутящим моментами и поперечной силой, по конструкции аналогичная торсиону балочного типа, который используется на несущем винте (НВ) вертолета «АНСАТ» конструкции Казанского вертолетного завода [3].

Была рассчитана консольная слоистая балка прямоугольного сечения, состоящая из набора слоев стеклоткани Т-39 ТУ6-11-380-76 со связующим 5-211-БН ТУ1-218-17-84 и угольной ленты ЛУ-7 для увеличения прочности при кручении торсиона. Между слоями проложены слои резины марки Р-181 с целью увеличения изгибной жесткости при разносе несущих слоев. Характеристики одного слоя стеклоткани Т-39 приняты: модуль вдоль направления волокон $E_1 = 62000$ МПа, поперек направления - $E_2 = 6300$ МПа, модуль сдвига $G_{12} = 2500$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_{12} = 0,15$,

пределы прочности материала вдоль направления волокон, поперек направления и при сдвиге соответственно равны: $\sigma_{b1} = 1800$ МПа, $\sigma_{b2} = 48$ МПа, $\tau_{12} = 52$ МПа.

Характеристики одного слоя углеленты ЛУ-7 приняты: модуль вдоль направления волокон $E_1 = 207000$ МПа, поперек направления - $E_2 = 9300$ МПа, модуль сдвига $G_{12} = 5200$ МПа, коэффициент Пуассона $\mu_{12} = 0,36$, пределы прочности материала вдоль направления волокон, поперек направления и при сдвиге соответственно равны: $\sigma_{b1} = 3000$ МПа, $\sigma_{b2} = 106$ МПа, $\tau_{12} = 78$ МПа.

Используя методику оптимального проектирования, изложенной в работе А. А. Дудченко [4], были получены геометрические параметры слоистой балки под эксплуатационные нагрузки для торсиона втулки несущего винта вертолета средней грузоподъемности: $P_{\max} = 400000$ Н, $M_{z_{\max}} = 1500$ Нм, $M_{y_{\max}} = 3400$ Нм, $Q_{z_{\max}} = -2650$ Н, $Q_{y_{\max}} = 1500$ Н, $M_{kp} = 210$ Нм.

Геометрические размеры слоистой балки прямоугольного сечения равны: длина – $L=0,96$ м, ширина – $b= 0,160$ м, высота – $h=0,055$ м. Толщина типового пакета (пластины) – 3,64 мм, толщина слоя резины – 1,5 мм.

Жесткостные характеристики слоистой балки:

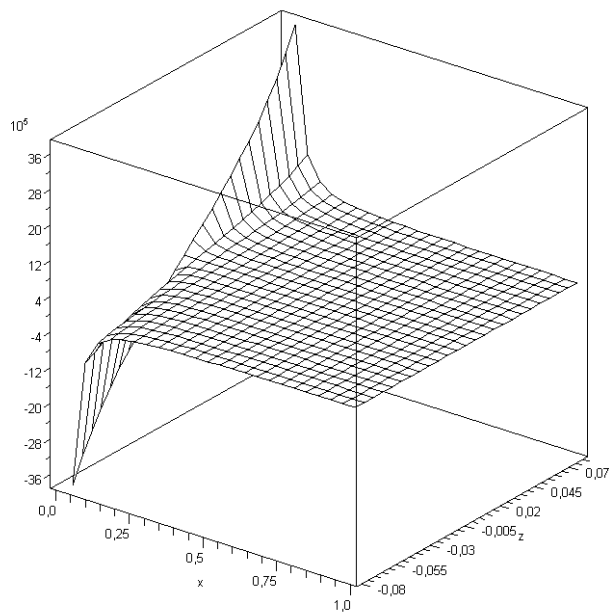
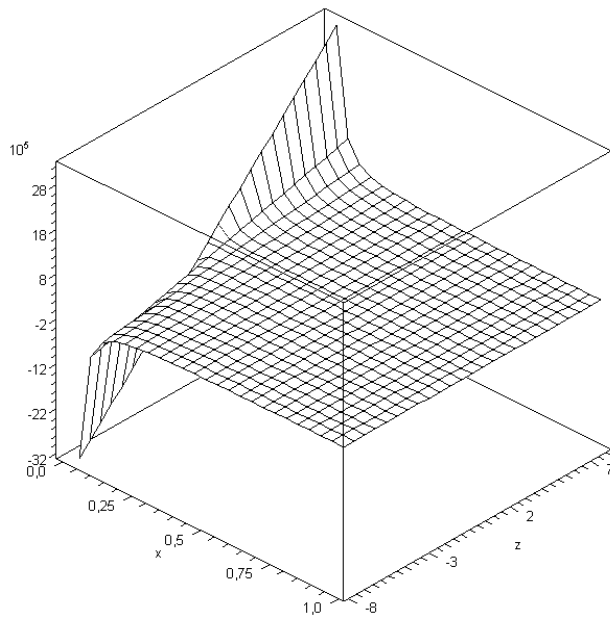
$$E_x = 33241 \text{ МПа}; G = 4356 \text{ МПа}; F = 12,066 * 10^{-6} \text{ м}^4;$$

$$k = 36,37; \lambda = 2,9096; I_z = 2,169 * 10^{-6} \text{ м}^4; I_y = 18,621 * 10^{-6} \text{ м}^4.$$

Далее был произведен аналитический расчет НДС упругой слоистой балки типа торсион по приведенной выше методике. Решение проводилось с использованием программы MAPLE -12 для двух случаев выбора функции свободной деформации балки (2) и (3).

Результаты расчета

Были определены значения нормальных и касательных усилий в слоях в зоне стеснения деформации сечения при кручении слоистой балки. Результаты расчета усилий в слоях N_x и N_{xs} по длине слоистой балки представлены на Рис.3 и Рис.4 соответственно.



а

б

Рис.3 Зависимость распределения N_x по длине слоистой балки
а) по В. Власову, б) по В. Васильеву

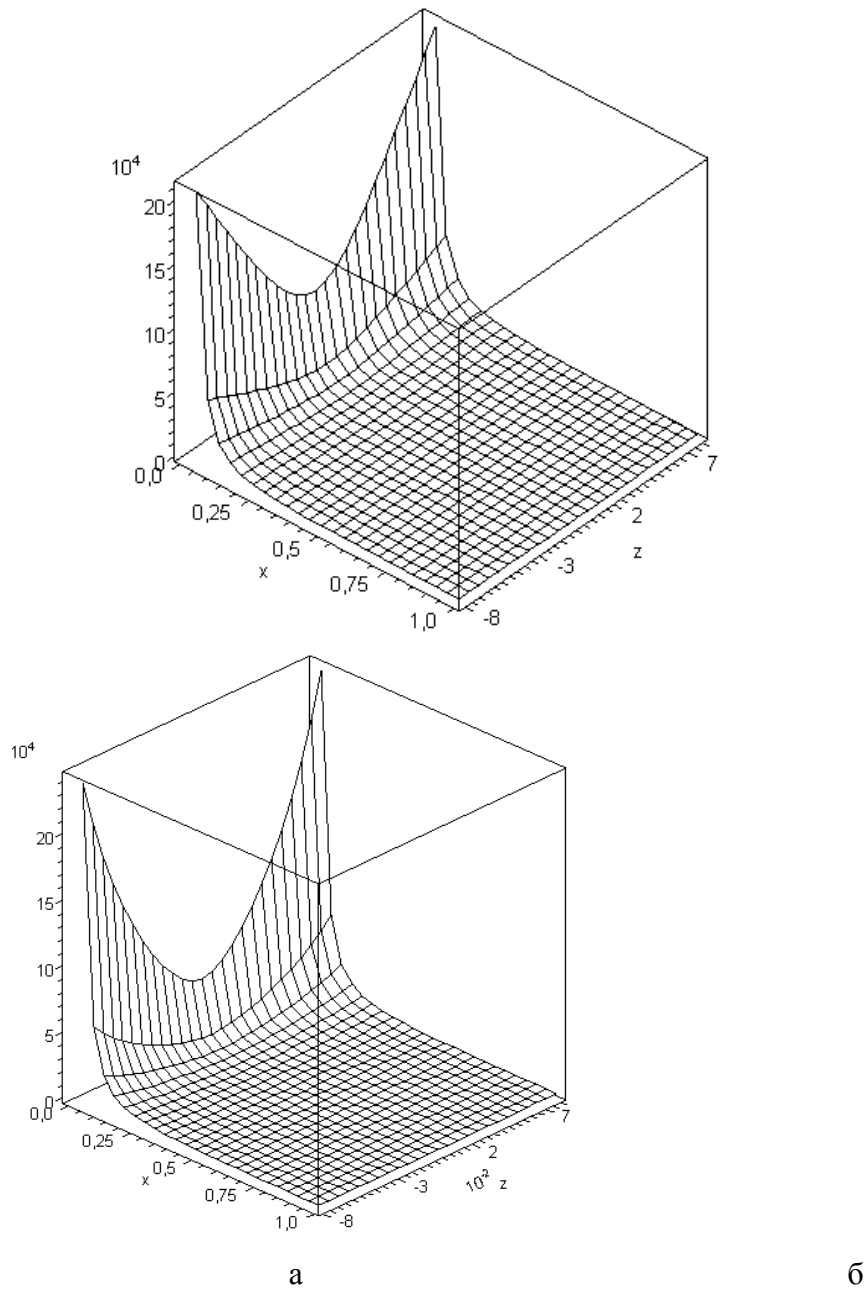


Рис.4 Зависимость распределения N_{xs} по длине слоистой балки
а) по В. Власову, б) по В. Васильеву

Выводы

Стеснение деформации сечения в районе закрепления балки приводит к существенно неравномерному распределению деформаций и вызывает концентрации напряжений в угловых точках сечения, которые необходимо учитывать при расчете упругого слоистого торсиона. Следует учитывать и тот факт, что этот эффект быстро затухает при

удалении от угловой точки и на расстоянии равном половине ширины сечения балки практически исчезает.

Библиографический список

- 1) Власов В.З. Изб. труды, Т.2 Тонкостенные стержни.- М: Изд. АН СССР.1963.
- 2) Васильев В.В. Механика конструкций из КМ.-М: Машиностроение.1988.
- 3) Расчетно-экспериментальное исследование прочности упругих элементов бесшарнирных винтов вертолетов.-Ч.1, Ч.2 / Голованов А.И., Митряйкин В.И., Михайлов С.А., Конюхов А.В., Фетисов Л.В ,Шувалов В.А. Изв.вузов. Авиационная техника. Изд-во КГТУ. 4/ 2001. С.7-11, 1/ 2002 .С.9-10.
- 4) Дудченко А.А. Оптимальное проектирование элементов авиационных
- 5) конструкций из композиционных материалов.- М: МАИ. 2002.

Сведения об авторах

Дудченко Александр Александрович, профессор кафедры 603 «Строительная механика и прочность» Московского авиационного института (государственного технического университета), д.т.н. Основные научные интересы – в области строительной механики композиционных материалов и конструкций из них. Автор более 90 научных работ. Телефон 8-916-423-2046; e-mail: a_dudchenko@mail.ru.

Башаров Евгений Анатольевич, аспирант кафедры 603 «Строительная механика и прочность» Московского авиационного института (государственного технического университета). Основные научные интересы – в области статики и динамики силовых конструкций из композиционных материалов. Автор двух научных работ. Телефон 8-906-736-4310; e-mail: bashevg@gmail.com.