Труды МАИ. Выпуск № 118 http://trudymai.ru/
УДК 629.788 DOI: 10.34759/trd-2021-118-01

К расчетам параметров пассивных гравитационных маневров межпланетных космических аппаратов

Попов И.П.

Курганский государственный университет,

ул. Советская, 63/4, Курган, 640020, Россия

e-mail: ip.popow@yandex.ru

Статья поступила 29.04.2021

Аннотация

Цель исследования – аналитическое описание участка баллистической траектории, соответствующего нормальному падению космического аппарата на поверхность безатмосферной планеты. При этом движение нормально падающего тела характеризуется возрастающим ускорением свободного падения. Задача о скорости, времени и ускорении нормального падения тела на поверхность планеты при отсутствии атмосферы сводится к решению дифференциального уравнения второго порядка, которое решается стандартным методом. Особенностью решения является формальное использование табличного интеграла на промежуточном этапе. В работе получено временное уравнение движения нормально падающего на поверхность планеты тела при отсутствии атмосферы, а также временные уравнения его скорости и ускорения. Полученные результаты могут быть полезны при расчетах пассивного гравитационного маневра при межпланетных полетах и расчетах

отвесного падения небольших небесных тел и отработанных элементов конструкций космических аппаратов.

Ключевые слова: планета, тело, уравнение движения, скорость, ускорение, масса, расстояние.

В основе гравитационных маневров при межпланетных полетах лежит режим движения под действием силы тяготения небесных тел [1].

Если перемещение тела при падении пренебрежимо мало по сравнению с расстоянием до центра тяготения, то ускорение свободного падения является практически неизменным [2, 3]. При этом задача установления параметров падения не представляет трудности. Далее этот случай не рассматривается.

Задача о скорости и времени падения тела

Падающее в вакууме тело имеет ускорение

$$a = \frac{d^2 r}{dt^2} = -G\frac{M}{r^2}, \qquad (1)$$

где G – постоянная, M – масса планеты, r – мгновенное расстояние между телом и центром планеты. Исходное расстояние равно R. Знак «–» обусловлен противоположными направлениями векторов **a** и **r**. Масса тела пренебрежимо мала по сравнению с M.

Дифференциальное уравнение (1) решается следующим образом.

$$\frac{dr}{dt}=v(r),\ \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dt},\ \frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dt}\frac{dr}{dr}=\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt}=\frac{dv}{dr}v,\ \frac{d^2r}{dt^2}=\frac{dv}{dr}v,\ \frac{dv}{dr}v=-G\frac{M}{r^2},$$

$$vdv=-GM\frac{dr}{r^2},\ \int_0^v vdv=-GM\int_R^r\frac{dr}{r^2},\ \frac{v^2}{2}=GM\left.\frac{1}{r}\right|_R^r,$$

$$\frac{v^2}{2}=GM\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R}\right), \tag{2}$$

$$v=-\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{R}}. \tag{3}$$

Знак «–» обусловлен той же причиной, что и выше.

$$\frac{dr}{dt}=-\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{r}-\frac{1}{R}},$$

$$\sqrt{\frac{r}{R-r}}dr=-\sqrt{\frac{2GM}{R}}dt. \tag{4}$$

Табличный интеграл

Для решения дифференциального уравнения (4) формально подходит табличный интеграл [4–6]

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx=-\sqrt{(a+x)(b-x)}-(a+b)\arcsin\sqrt{\frac{b-x}{a+b}}+C. \tag{5}$$

Оказалось, однако, что эта формула недостоверна, а именно, производная правой части не равна подынтегральному выражению. Действительно,

$$\frac{df}{dx}=-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}\left(-a+b-2x\right)+(a+b)\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b-x}{a+b}}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+b}{b-x}}=$$

$$=\frac{a-b+2x}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}}+\frac{(a+b)\sqrt{a+b}\sqrt{a+b}}{2\sqrt{a+x}\sqrt{b-x}}=$$

$$=\frac{a-b+2x+(a+b)^2}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}}.$$

Таким образом, этот табличный интеграл применять нельзя.

Корректировка табличного интеграла

Теорема. Справедлива формула

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx=(a+b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}-\sqrt{(b-x)(a+x)}+C. \tag{6}$$

Доказательство 1.

$$\frac{a+x}{b-x}=t^2,\; a+x=t^2b-t^2x,\; x(1+t^2)=t^2b-a,\; x=\frac{t^2b-a}{1+t^2},$$

$$dx=\frac{2tbdt}{1+t^2}-\frac{t^2b-a}{\left(1+t^2\right)^2}2tdt,$$

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}dx=\int t\left[\frac{2tb}{1+t^2}-\frac{t^2b-a}{\left(1+t^2\right)^2}2t\right]dt=$$

$$=\int\frac{2t^2b}{1+t^2}dt-\int\frac{t^2b-a}{\left(1+t^2\right)^2}2t^2dt=$$

$$=2b\int\frac{1+t^2-1}{1+t^2}dt-2b\int\frac{t^4-t^2\,a/b+2t^2-2t^2+1-1}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

$$=2b\int dt-2b\int\frac{1}{1+t^2}dt-2b\int dt+2b\int\frac{t^2\,a/b+2t^2+1}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

$$=-2b\int\frac{1}{1+t^2}dt+2b\left(a/b+2\right)\int\frac{t^2+1/\left(a/b+2\right)+1-1}{\left(1+t^2\right)^2}dt=$$

$$=-2b\operatorname{arctg}t+2b\left(a/b+2\right)\int\frac{dt}{1+t^2}-2b\left(a/b+2\right)\frac{a+b}{a+2b}\int\frac{dt}{\left(1+t^2\right)^2}=$$

$$=-2b\operatorname{arctg}t+2b\left(a/b+2\right)\operatorname{arctg}t-2b\frac{a+2b}{b}\frac{a+b}{a+2b}\frac{1}{2}\left(\frac{t}{1+t^2}+\operatorname{arctg}t\right)+C=$$

$$=-2b\operatorname{arctg}t+2b\left(a/b+2\right)\operatorname{arctg}t-\frac{(a+b)t}{1+t^2}-(a+b)\operatorname{arctg}t+C=$$

$$=(a+b)\left(\operatorname{arctg}t-\frac{t}{1+t^2}\right)+C=$$

$$=(a+b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}-(a+b)\frac{\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}}{1+\frac{a+x}{b-x}}+C=$$

$$=(a+b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}-(a+b)\frac{b-x}{a+b}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}+C=$$

$$=(a+b)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}-\sqrt{(b-x)(a+x)}+C\,.$$

Теорема доказана.

Доказательство 2.

$$\frac{df}{dx}=(a+b)\frac{1}{1+\frac{a+x}{b-x}}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b-x}{a+x}}\left[\frac{1}{b-x}+(a+x)\frac{-1}{(b-x)^2}(-1)\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{(a+x)(b-x)}}\left(b-a-2x\right)=$$

$$=\frac{(a+b)(b-x)}{2(a+b)}\sqrt{\frac{b-x}{a+x}}\frac{b-x+a+x}{(b-x)^2}-\frac{b-a-2x}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b-x}{a+x}}\frac{a+b}{b-x}-\frac{b-a-2x}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}}=$$

$$=\frac{a+b}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}}-\frac{b-a-2x}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}}=$$

$$=\frac{2a+2x}{2\sqrt{(a+x)(b-x)}}=$$

$$=\sqrt{\frac{a+x}{b-x}}\,.$$

Теорема доказана.

Продолжение решения исходной задачи

Интегрирование дифференциального уравнения (4) в соответствии с (6) дает

$$\int_R^r\sqrt{\frac{r}{R-r}}dr=-\sqrt{\frac{2GM}{R}}\int_0^t dt\,,$$

$$\left[R\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r}{R-r}}-\sqrt{r(R-r)}\right]\Bigg|_R^r=-\sqrt{\frac{2GM}{R}}\int_0^t dt\,,$$

$$R\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r}{R-r}}-R\frac{\pi}{2}-\sqrt{r(R-r)}=-\sqrt{\frac{2GM}{R}}t\,,$$

$$R\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{r}{R-r}}\right)+\sqrt{r(R-r)}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}t\,. \qquad (7)$$

Это решение дифференциальных уравнений (4) и (1) является уравнением движения нормально падающего тела.

Из выражения (2) следует

$$r=\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}.$$

Подстановка этого выражения в (7) дает

$$R\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\dfrac{2GMR}{2GM+Rv^2}}{R-\dfrac{2GMR}{2GM+Rv^2}}}\right)+\sqrt{\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}\left(R-\frac{2GMR}{2GM+Rv^2}\right)}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}t,$$

$$R\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{2GMR}{2GMR+R^2v^2-2GMR}}\right)+\sqrt{\frac{2GMR\left(2GMR+R^2v^2-2GMR\right)}{\left(2GM+Rv^2\right)^2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{2GM}{R}}t,$$

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{2GMR}}{Rv}+\frac{v\sqrt{2GMR}}{2GM+Rv^2}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}\frac{t}{R}.$$

Это временная функция скорости.

Для получения временной функции ускорения следует (1) подставить в (7).

$$R\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{\left(GMa^{-1}\right)^{1/2}}{R-\left(GMa^{-1}\right)^{1/2}}}\right)+\sqrt{\left(GMa^{-1}\right)^{1/2}(R-\left(GMa^{-1}\right)^{1/2})}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}t.$$

В соответствии с (7) период падения тела на поверхность планеты равен

$$R\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{R_M}{R-R_M}}\right)+\sqrt{R_M(R-R_M)}=\sqrt{\frac{2GM}{R}}T, \tag{8}$$

где R_M – радиус планеты.

В соответствии с (3) скорость тела у поверхности планеты равна

$$V = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{1}{R_M} - \frac{1}{R}}\,. \tag{9}$$

Пример

R = 7·10^6 м, Параметры планеты не отличаются от земных. R_M = 6,371·10^6 м, M = 5,9726·10^{24} кг, G = 6,6743·10^{-11} м^3/(кг·с^2).

В соответствии с (8)

$$7\cdot 10^6\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{6,371\cdot 10^6}{(7-6,371)\cdot 10^6}}\right) + \sqrt{6,371\cdot 10^6(7-6,371)\cdot 10^6} =$$

$$= \sqrt{\frac{2\cdot 6,6743\cdot 10^{-11}\cdot 5,9726\cdot 10^{24}}{7\cdot 10^6}}T\,.$$

Период падения тела на поверхность планеты равен T = 387,275 с = 6,455 мин.

В соответствии с (9) скорость тела у поверхности планеты равна

$$V = -\sqrt{2\cdot 6,6743\cdot 10^{-11}\cdot 5,9726\cdot 10^{24}}\sqrt{\frac{1}{6,371\cdot 10^6} - \frac{1}{7\cdot 10^6}} = 3353,297 \text{ м/с}.$$

Заключение

Трудно представить, что никто и никогда не искал формулы времени, скорости и ускорения при нормальном свободном падении тела [7]. Однако если при этом использовался табличный интеграл (5), то конечно, те формулы неверны. Поводом усомниться в интеграле (5) послужило то, что в ряде конкретных случаев значения аргумента у арксинуса превышали единицу.

Корректировка этого интеграла (формула (6)) особенно актуальна с учетом его очевидного прикладного характера.

Полученные результаты могут быть полезны при расчетах пассивного гравитационного маневра при межпланетных полетах [8–14] и расчетах отвесного падения небольших небесных тел [16] и отработанных элементов конструкций космических аппаратов [17–23].

Библиографический список

1. Скоробогатых И.В. О плоских движениях деформируемого спутника в центральном гравитационном поле относительно центра масс // Труды МАИ. 2016. № 89. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=72509

2. Ананьев А.В., Рыбалко А.Г., Гончаренко В.И., Клевцов Р.П. Оперативная оценка ошибок попадания в цель свободнопадающих неуправляемых контейнеров беспилотных летательных аппаратов малого класса // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=107869

3. Константинов С.Г. Численное моделирование свободного падения твёрдого шара в воду // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=96562

4. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. - М.: Наука, 1977. - 872 с.

5. Бермант А.Ф., Араманович И.Г. Краткий курс математического анализа для втузов. - М.: Наука, 1971. - 736 с.

6. Ачеркан Н.С. Справочник машиностроителя. - М.: МАШГИЗ, 1963. - 592 с.

7. Тимофеев П.М. Сравнение методов возвращения первой ступени многоразовой ракеты // Труды МАИ. 2020. № 113. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=118079. DOI: 10.34759/trd-2020-113-06

8. Михайлин Д.А., Аллилуева Н.В., Руденко Э.М. Сравнительный анализ эффективности генетических алгоритмов маршрутизации полета с учетом их различной вычислительной трудоемкости и многокритериальности решаемых задач // Труды МАИ. 2018. № 98. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=90386

9. Глушков А.В., Улыбышев С.Ю. Применение режима тактовой работы к двигательной установке для высокоточного орбитального маневрирования и переориентации космического аппарата // Труды МАИ. 2018. № 101. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=96960

10. Глущенко А.А., Хохлов В.П. Метод обнаружения маневра космического аппарата на основе текущих траекторных измерений // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=111402. DOI: 10.34759/trd-2019-109-17

11. Виноградов А.В., Борукаева А.О., Бердиков П.Г. Математическая модель движения баллистического летательного аппарата и алгоритмов расчета номинальных и возмущенных параметров движения баллистического летательного аппарата // Труды МАИ. 2019. № 109. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=111430. DOI: 10.34759/trd-2019-109-25

12. Урюпин И.В. Синтез оптимальных кусочно-гладких аппроксимаций траекторий движения летательных аппаратов // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=93440

13. Вовасов В.Е., Бетанов В.В., Турлыков П.Ю. Комплексирование навигационного приемника и акселерометров для оценки координат и ориентации высокодинамичных объектов // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=85834

14. Буслаев С.П., Воронцов В.А., Графодатский О.А. Проблемы моделирования посадок венерианских космических аппаратов для различных грунтов-аналогов // Труды МАИ. 2017. № 96. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=85909

15. Попов И.П. Расчетные системы отсчета при относительном движении космических объектов // Инженерная физика. 2019. № 3. С. 40 - 43.

16. Баранов Н.А., Таипова Д.Р. Устройство для измерения параметров космических частиц и оценки их влияния на материалы спутникостроения // Труды МАИ. 2019. № 105. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=104270

17. Баркова М.Е. Переработка техногенного космического мусора в топливо на низких орбитах // Труды МАИ. 2020. № 110. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=112927. DOI: 10.34759/trd-2020-110-17

18. Рязанов В.В. Управление движением космического аппарата при бесконтактном уводе космического мусора // Труды МАИ. 2019. № 107. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=107837

19. Баркова М.Е. Космический аппарат для утилизации космического мусора в околоземном пространстве // Труды МАИ. 2018. № 103. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=100712

20. Пикалов Р.С., Юдинцев В.В. Обзор и выбор средств увода крупногабаритного космического мусора // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=93299

21. Асланов В.С., Сизов Д.А. Динамика захвата космического мусора гарпуном // Труды МАИ. 2018. № 100. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=93301

22. Асланов В.С., Пикалов Р.С. Безударное сближение космического мусора с буксиром при использовании тросовой системы // Труды МАИ. 2017. № 92. URL: http://trudymai.ru/published.php?ID=76750

23. Попов И.П. Электромагнитный маховик для ориентирования орбитальных объектов // Оборонный комплекс — научно-техническому прогрессу России. 2019. № 2. С. 15 - 17.

On parameters calculation of passive gravity-assisted maneuvers of interplanetary spacecraft

Popov I.P.

Kurgan State University,

63/4, Sovetskaya str., Kurgan, 640020, Russia

e-mail: ip.popow@yandex.ru

Abstract

The purpose of the study consists in analytical description of the ballistic trajectory section corresponding to the normal fall of the spacecraft on the surface of an atmosphere-free planet. The motion of a normally falling body herewith is being characterized by an increasing acceleration of gravity. The problem of the speed, time and acceleration of the normal fall of a body on the planet's surface in the absence of an atmosphere is being reduced to solving a second-order differential equation, which is solved by the standard method. The solution specificity is the formal use of the table integral at an intermediate stage. It turned out, however, that his formula is inauthentic, namely, the derivative of the right-hand side is not equal to the integrand. From this, It necessary follows that possible existing solutions to this problem based on employing the above said table integral are incorrect. The article presents correction of this table integral, which is an incidental result of the study. Temporal equation of a normal body falling on the planet surface in the absence of the atmosphere, as well as temporal equations of its speed and acceleration were obtained in this work. Expressions for the distance, speed and acceleration were obtained as implicit functions of time. The article presents a numerical example with

regard to a planet with parameters of the Earth, according to which the period of normal fall of a body on the planet's surface from the altitude of 629 km is 387.275 s = 6.455 minutes, while the body's velocity at the planet's surface is 3353.297 m/s. The results obtained may be handy for calculating the normal incidence of small celestial bodies and spent spacecraft structural elements.

Keywords: planet, body, equation of motion, speed, acceleration, mass, distance.

References

1. Skorobogatykh I.V. *Trudy MAI*, 2016, no. 89. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=72509

2. Anan'ev A.V., Rybalko A.G., Goncharenko V.I., Klevtsov R.P. *Trudy MAI*, 2019, no. 107. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=107869

3. Konstantinov S.G. *Trudy MAI*, 2018, no. 101. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=96562

4. Vygodskii M.Ya. *Spravochnik po vysshei matematike* (Higher Mathematics Handbook), Moscow, Nauka, 1977, 872 p.

5. Bermant A.F., Aramanovich I.G. *Kratkii kurs matematicheskogo analiza dlya vtuzov* (A short course in mathematical analysis for technical colleges), Moscow, Nauka, 1971, 736 p.

6. Acherkan N.S. *Spravochnik mashinostroitelya* (Machine builder reference book), Moscow, MashGiz, 1963, 592 p.

7. Timofeev P.M. *Trudy MAI*, 2020, no. 113. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=118079. DOI: 10.34759/trd-2020-113-06

8. Mikhailin D.A., Allilueva N.V., Rudenko E.M. *Trudy MAI*, 2018, no. 98. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=90386

9. Glushkov A.V., Ulybyshev S.Yu. *Trudy MAI*, 2018, no. 101. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=96960

10. Glushchenko A.A., Khokhlov V.P. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111402. DOI: 10.34759/trd-2019-109-17

11. Vinogradov A.V., Borukaeva A.O., Berdikov P.G. *Trudy MAI*, 2019, no. 109. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=111430. DOI: 10.34759/trd-2019-109-25

12. Uryupin I.V. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93440

13. Vovasov V.E., Betanov V.V., Turlykov P.Yu. *Trudy MAI*, 2017, no. 96. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=85834

14. Buslaev S.P., Vorontsov V.A., Grafodatskii O.A. *Trudy MAI*, 2017, no. 96. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=85909

15. Popov I.P. *Inzhenernaya fizika*, 2019, no. 3, pp. 40 - 43.

16. Baranov N.A., Taipova D.R. *Trudy MAI*, 2019, no. 105. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=104270

17. Barkova M.E. *Trudy MAI*, 2020, no. 110. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=112927. DOI: 10.34759/trd-2020-110-17

18. Ryazanov V.V. *Trudy MAI*, 2019, no. 107. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=107837

19. Barkova M.E. *Trudy MAI*, 2018, no. 103. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=100712

20. Pikalov R.S., Yudintsev V.V. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93299

21. Aslanov V.S., Sizov D.A. *Trudy MAI*, 2018, no. 100. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=93301

22. Aslanov V.S., Pikalov R.S. *Trudy MAI*, 2017, no. 92. URL: http://trudymai.ru/eng/published.php?ID=76750

23. Popov I.P. *Oboronnyi kompleks — nauchno-tekhnicheskomu progressu Rossii*, 2019, no. 2, pp. 15 - 17.